Annales de la faculté des sciences de Toulouse

Jean Combes

Sur certains systèmes infinis d'équations linéaires (II et III)

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série, tome 23 (1959), p. 85-113
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1959_4_23__85_0>

Sur certains systèmes infinis d'équations linéaires (II et III)

par Jean COMBES

Le présent travail constitue la fin d'un mémoire dont la partie (I) a paru dans le tome XXI de la même revue. La partie (II), qui aurait dû paraître dans le tome XXII, est consacrée à diverses applications des théorèmes généraux qui ont fait l'objet du début du mémoire. La partie (III), sous le titre de « Compléments », contient des exemples ou contre-exemples illustrant certaines propriétés des matrices infinies qui ont été signalées dans la partie (I).

Les renvois au texte de l'article précédent ou de celui-ci seront notés de la façon suivante : (I, 5) signifie partie (I), paragraphe 5 ; on adjoindra éventuellement le numéro de la page. Quant à la bibliographie, les renvois seront donnés entre crochets : les numéros [1] à [6] concernent les références bibliographiques figurant à la fin de la partie (I), les numéros [7] et suivants celles qui figurent à la fin du présent article.

Enfin, lorsque nous considèrerons des matrices triangulaires régulières (I, 2), nous supposerons toujours que les éléments de la diagonale principale sont tous égaux à 1.

II. — APPLICATIONS.

Cette deuxième partie contient la démonstration de divers résultats, certains bien classiques, d'autres, à notre connaissance, nouveaux (1), mais qu'il a paru intéressant de grouper parce qu'ils peuvent être rattachés tous à une même origine : les théorèmes généraux d'unicité et d'existence démontrés aux paragraphes 5 et 6 de la première partie. D'autres applications des mêmes idées se trouvent dans l'article déjà cité de P. DAVIS [4].

Nous conservons les notations déjà employées : les éléments des matrices considérées appartiennent au corps des nombres complexes ; la matrice infinie $A = (a_{ij})$, où les indices i des lignes et j des colonnes prennent les valeurs 1, 2, ... est dite triangulaire régulière si $a_{ij} = 0$ pour $j < i$ et $a_{ii} = 1$ pour tout i. Elle admet alors une matrice inverse à gauche unique $B = (b_{ij})$, qui est aussi triangulaire régulière. X et Y sont deux vecteurs (de l'espace des suites de nombres complexes) représentés par les matrices à une colonne (x_i) et (y_i). M étant une matrice quelconque, M′ désigne la matrice obtenue en remplaçant les éléments de M par leur module.

1. Voir § 5, 6, 7.

II. 1. — Étude d'un cas particulier.

Nous supposons que, pour tout i, $a_{i,i+n} = c_n$ $(n \geqslant 0\ ;\ c_0 = 1)$. Il peut n'y avoir qu'un nombre fini de $c_n \neq 0$; nous laissons de côté le cas sans intérêt où, pour tout $n > 0$, $c_n = 0$.

Les lignes successives de la matrice A se déduisent de la première par translation parallèle à la diagonale principale, les éléments situés au-dessous de cette diagonale étant nuls bien entendu. On voit aisément que la matrice B a alors la même propriété (I, 3, p. 257), et que, si l'on pose $b_{i,i+n} = d_n$, les relations qui donnent les d_n en fonction des c_n expriment que, *formellement,*

$$(c_0 + c_1 t + \dots + c_n t^n + \dots) \times (d_0 + d_1 t + \dots + d_n t^n + \dots) \equiv 1.$$

Cela permet une évaluation facile de l'ordre de grandeur des d_n dans le cas où la série $\Sigma\, c_n t^n$ converge et a pour somme 0 en un point t_0 de module r, et ne s'annule pas dans le disque $|t| < r$ (r est $\neq 0$, puisque $c_0 = 1$, et le rayon de convergence de la série est au moins égal à r). La série $\Sigma\, d_n t^n$ admet alors r comme rayon de convergence, ce qui entraîne : $\limsup |d_n|^{1/n} = r$.

Appliquons ce résultat au système homogène $\mathrm{A\,X} = 0$. On sait (I, 5, p. 259) que, pour une solution autre que la solution banale $\mathrm{X} = 0$, B′A′X′ n'existe pas. Or la matrice B′A′, comme les matrices A′ et B′, a des lignes qui se déduisent de la première par translation parallèle à la diagonale principale, et les éléments de la première ligne ne sont autres que les coefficients successifs du développement en série du produit $(\Sigma\, |c_n|\, t^n) \times (\Sigma\, |d_n|\, t^n)$, série dont le rayon de convergence est r (d'une part, en effet, il est $\geqslant r$; d'autre part le coefficient de t^n dans la série produit est $\geqslant |d_n|$). On retrouve ainsi un résultat donné par VON KOCH dès 1912 (voir, par exemple, [7]) :

si, pour tout i, $\mathrm{a}_{i,i+n} = \mathrm{c}_n$ $(\mathrm{n} \geqslant 0\ ;\ \mathrm{c}_0 = 1)$ *et si la série* $\Sigma\, \mathrm{c}_n \mathrm{t}^n$ *admet* t_0 *pour racine de plus petit module, une solution autre que la solution banale du système triangulaire homogène* $\mathrm{A\,X} = 0$ *vérifie nécessairement :*

$$\limsup |x_n|^{1/n} \geqslant |t_0| \tag{1}$$

Remarquons qu'on a l'égalité pour la solution : $x_n = \mathrm{K}\, t_0^{\,n}$.

Sans faire intervenir les racines de $\Sigma\, c_n t^n$ (il peut ne pas y en avoir), on peut énoncer un résultat analogue, bien qu'en général moins précis, *sous la seule hypothèse que* $\Sigma\, \mathrm{c}_n \mathrm{t}^n$ *ait un rayon de convergence non nul.* Ce résultat est d'ailleurs susceptible d'une justification directe tout à fait élémentaire. C'est le suivant : *si le nombre positif* ρ *vérifie :*

$$|c_1|\, \rho + \dots + |c_n|\, \rho^n + \dots \leqslant 1,$$

une solution non banale du système $\mathrm{A\,X} = 0$ *envisagé ci-dessus vérifie nécessairement :*

$$\limsup |x_n|^{1/n} \geqslant \rho \tag{2}$$

En effet, remplaçons c_n par $-|c_n|$ pour $n > 0$, ce qui remplace la matrice A par $2\,\mathrm{I} - \mathrm{A}'$ (I, 5, p. 260). Les lignes de l'inverse à gauche de $(2\,\mathrm{I} - \mathrm{A}')$ sont formées des coefficients successifs de la série

$$(1 - |c_1|\, t - |c_2|\, t^2 \ldots)^{-1},$$

dont le rayon de convergence est $\geqslant \rho$: si l'on écrit cette série $\Sigma\, \delta_n\, t^n$, les δ_n sont tous $\geqslant 0$, $\delta_0 = 1$ [2], et on sait que, pour une solution non banale, l'une au moins des séries $\Sigma\, \delta_n\, |x_{n+p}|$ diverge ($p = 1,2 \ldots$). D'où l'inégalité (2).

Comme nombre ρ, on prendra, *s'il existe,* l'unique nombre positif tel que : $|c_1|\, \rho + \ldots + |c_n| \rho^n + \ldots = 1$. Ce sera notamment le cas s'il n'y a qu'un nombre fini de $c_n \neq 0$, ou, plus généralement, si le rayon de convergence R de $\Sigma\, c_n\, t^n$ est infini ; lorsque R est fini, si $\sum\limits_1^{\infty} |c_n|\, \mathrm{R}^n$ est infini ou fini $\geqslant 1$, ρ défini comme ci-dessus par la relation d'égalité existe, tandis que si $\sum\limits_1^{\infty} |c_n|\, \mathrm{R}^n < 1$, on prendra $\rho = \mathrm{R}$.

Comme il a été dit, *l'inégalité* (2) *peut se démontrer directement de façon très élémentaire.* Supposons en effet qu'existe une solution non banale pour laquelle $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}}\, |x_n|^{1/n} = \lambda < \rho$. Soit μ un nombre tel que $\lambda < \mu < \rho$. Puisque $|x_n|/\mu^n \to 0$ si $n \to \infty$ et qu'il y a nécessairement une infinité de $x_n \neq 0$, il existe une suite partielle d'indices n' pour lesquels le terme $|x_{n'}|/\mu^{n'}$ est non nul et supérieur ou égal à tous les suivants : pour $n > n'$, $|x_n| \leqslant |x_{n'}|\, \mu^{n-n'}$. Dès lors, pour l'un quelconque des n', l'égalité $c_0\, x_{n'} + c_1\, x_{n'+1} + \ldots = 0$ est impossible, puisqu'on en déduirait :

$$1 \leqslant |c_1|\, \mu + |c_2|\, \mu^2 + \ldots .$$

Remarquons enfin que l'inégalité (2) et sa démonstration élémentaire sont encore valables *pour un système triangulaire régulier quelconque,* dans lequel on suppose que, pour tout i, $|a_{i,i+n}| \leqslant |c_n|$, la série $\Sigma\, c_n\, t^n$ ayant un rayon de convergence non nul. Certains des théorèmes d'unicité que nous allons maintenant établir pourraient n'être exposés qu'à partir de cette modeste origine ; par contre, d'autres problèmes, notamment l'amélioration de l'évaluation de constantes qui s'introduiront, la résolution d'équations avec seconds membres $\mathrm{A\,X} = \mathrm{Y}$, ... exigeront un appel effectif aux résultats de la partie (I).

II. 2. — Étude algébrique des zéros des séries entières.

Soit $f(z) = a_0 + \ldots + a_n z^n + \ldots$ une série entière, non identique à 0, de rayon de convergence R ($0 < \mathrm{R} \leqslant +\infty$). On démontre élémentairement que $f(z)$ est développable en série au voisinage de chaque point du disque de convergence, d'où résulte que les zéros, simples ou multiples, de $f(z)$

---

2. δ_n n'est autre que β_{n+1} (voir (I, 4)).

sont isolés et ne peuvent s'accumuler à l'intérieur du disque de convergence.

Inversement, soit $z_0, z_1, \dots z_p \dots$ une suite infinie de nombres complexes de module $< R$ $(0 < R \leqslant +\infty)$, telle que la suite $|z_p|$ soit non-décroissante et que $|z_p| \to R$ lorsque $p \to \infty$. *Nous nous proposons d'étudier les séries entières qui admettent parmi leurs zéros les* z_p, avec un ordre de multiplicité égal pour chacun d'eux au nombre de fois où il est répété dans la suite donnée. Nous supposons, ce qui ne nuit pas à la généralité, que z_0 *est* $\neq 0$. Nous avons laissé de côté le cas facile où l'on ne donnerait qu'un nombre fini de zéros.

Le problème posé se ramène à la résolution du système linéaire homogène (Σ) formé par les équations : $f(z_p) = 0$, pour un terme z_p qui ne figure qu'une fois dans la suite, et $f(z_p) = f'(z_p) = \dots = f^{(m-1)}(z_p) = 0$ pour un terme répété m fois $(z_p = z_{p+1} = \dots = z_{p+m-1})$. Les inconnues sont les a_n. Toute solution de ce système autre que la solution banale fournit une série entière qui a exactement R comme rayon de convergence et répond à la question.

Le système obtenu (Σ) n'est pas triangulaire, mais peut être remplacé par un système équivalent (S) qui soit triangulaire régulier (cf. (I, 7), remarque finale).

Considérons d'abord le cas où les z_p *sont tous distincts.* Pour tout $n > 0$, il est possible de remplacer la $(n+1)^{ième}$ équation de (Σ) par une combinaison linéaire $\nu_0 f(z_0) + \dots + \nu_n f(z_n) = 0$ dans laquelle a_0, a_1, $\dots$ a_{n-1} ne figurent pas et a_n figure avec le coefficient 1. Les ν sont fournis par le système cramérien

$$\left\{\begin{array}{l} \nu_0 + \dots + \nu_n = 0 \\ \nu_0 z_0 + \dots + \nu_n z_n = 0 \\ \quad \dots\dots \\ \nu_0 z_0^n + \dots + \nu_n z_n^n = 1 \end{array}\right.$$

Le déterminant de ce système est le déterminant de la matrice *tronquée* $A^{(n+1)}$ (I, 7, p. 264). Il est clair que ν_n est $\neq 0$, et que le système (S) obtenu est équivalent à (Σ). Revenant pour le système (S) aux notations de la partie (I), on notera les inconnues $a_0 = x_1$, $a_1 = x_2$, $\dots$, et les coefficients a_{ij} $(i, j = 1, 2 \dots)$.

On a : $a_{1,\,p+1} = z_0^p$, et, pour $p \geqslant n$,

$$a_{n+1,\,p+1} = \nu_0 z_0^p + \dots + \nu_n z_n^p.$$

D'après les relations qui fournissent les ν, $a_{n+1,\,p+1}$ est le quotient de deux déterminants : en dénominateur figure le déterminant de

$$\text{Vandermonde} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_0 & z_1 & & z_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_0^n & z_1^n & & z_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i<j\leqslant n} (z_j - z_i)$$

en numérateur le même déterminant où, dans la dernière ligne, l'exposant n a été remplacé par p. Il en résulte que $a_{n+1,\,p+1}$ est un *polynôme homogène de degré* p-n par rapport aux variables $z_0, \ldots z_n$, dont tous les coefficients sont *positifs :* il suffit pour le voir d'appliquer au numérateur la même méthode de calcul qu'au déterminant de Vandermonde. On commence par retrancher la première colonne aux n suivantes, et l'on met en évidence le produit $(z_1 - z_0) \ldots (z_n - z_0)$; il reste en facteur un déterminant d'ordre n sur lequel on recommence la même opération, etc...

Nous avons supposé jusqu'ici les z_p tous distincts. Mais *la réduction de* (Σ) *à la forme triangulaire régulière* (S) *est encore possible dans le cas général :* en effet les déterminants de toutes les matrices tronquées $A^{(n)}$ (I, 7, p. 264) sont $\neq 0$: le déterminant de $A^{(n)}$ apparaît en effet lorsqu'on cherche à déterminer un polynôme de degré donné n, admettant 1 pour coefficient de z^n et $z_0, z_1, \ldots z_{n-1}$ pour zéros. Et on voit facilement par passage à la limite que les expressions des coefficients $a_{n+1,\,p+1}$ sous forme de polynômes restent valables dans le cas général : on évite toute difficulté dans le passage à la limite en remplaçant la série $f(z)$ par un polynôme (de degré arbitrairement élevé).

En particulier, si $z_0 = z_1 = \ldots = z_n$, les calculs se trouvent tout effectués pour les $(n+1)$ premières équations ; la $(n+1)^{ième}$ équation de (S) est $\frac{1}{n!} f^{(n)}(z_n) = 0$ et $a_{n+1,\,p+1} = C^n_p \, z_n^{p-n}$. Revenons au cas d'une suite (z_p) *quelconque.* $a_{n+1,\,p+1}$, polynôme homogène en $z_0, \ldots z_n$ et dont tous les coefficients sont positifs, a son module majoré lorsqu'on remplace toutes les variables par z_n, puisque la suite $|z_p|$ est non-décroissante. On a donc toujours : $|a_{n+1,\,p+1}| \leqslant C^n_p \, |z_n|^{p-n}$.

Quant aux éléments b_{ij} de la matrice B inverse à gauche de la matrice A du système (S), il nous suffira de calculer ceux de la première ligne. On sait (I, 4) que $b_{1,p+1}$ est la valeur de l'inconnue $a_0 = x_1$ lorsque $a_p = 1$, que $a_n = 0$ pour $n > p$, et que les p premières équations sont vérifiées. C'est donc le terme constant du polynôme de degré p, dont le terme en z^p a pour coefficient 1, et qui s'annule pour $z_0, z_1 \ldots z_{p-1}$.

D'où : $b_{1,\,p+1} = (-1)^p z_0 \, z_1 \ldots z_{p-1}$, pour $p > 0$.

Dès lors, *pour une solution non banale du système* (Σ) *ou* (S), les résultats établis dans la partie (I) donnent immédiatement une forme, *moins précise mais obtenue sans calcul intégral,* d'un résultat classique : *la série* $\Sigma\, 2^n |a_n \, z_0 \, z_1 \ldots z_{n-1}|$ *diverge* [3].

En effet, si, pour cette solution, $x_1 = a_0$ n'est pas nul, nécessairement la quantité notée ξ_{1p} en (I, 5, p. 260) ne tend pas vers 0, et par suite la première série (5) $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \left(\sum_{k=0}^{n} |b_{1,k+1} \, a_{k+1,\,n+1}| \right)$ diverge. (Voir aussi (III, 3)).

3. Ceci, qui n'est intéressant que lorsque $R = \infty$, explicite le corollaire 7, 3 de [4].

Or la parenthèse est majorée par :

(3) $\quad |z_0|^n + \ldots + |z_0 z_1 \ldots z_{k-1}| C^k_n |z_k|^{n-k} + \ \ldots + |z_0 z_1 \ldots z_{n-1}|$

qui est $\leqslant 2^n |z_0 z_1 \ldots z_{n-1}|$, d'après la valeur de la somme des coefficients du binôme. Si a_0 est nul, on se ramène au cas précédent en mettant en facteur dans la solution non banale $f(z)$ une puissance convenable de z. Rappelons que z_0 a été supposé $\neq 0$.

On peut évidemment, avec des hypothèses supplémentaires sur les z_p, améliorer le résultat obtenu : par exemple, *si, pour tout* p, $|z_p/z_{p+1}| \leqslant \lambda < 1$, *on trouve que* $\Sigma K^n |a_n z_0 z_1 \ldots z_{n-1}|$ *diverge pour tout* $K > 1$. Il suffit pour le voir de préciser la majoration faite ci-dessus pour le quotient de l'expression (3) par $|z_0 z_1 \ldots z_{n-1}|$: le terme contenant C^k_n est majoré par $C^k_n \lambda^{\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}}$ donc par $C^k_n\ \varepsilon^{n-k}$, si n-k-1 dépasse $2q$, l'entier q ayant été choisi tel que $\lambda^q < \varepsilon$; les termes pour lesquels il en est ainsi ont une somme inférieure à $(1+\varepsilon)^n$, et les autres, en nombre fini, aussi, dès que n est assez grand. ε désigne un nombre positif arbitraire.

Mais, en fait, le résultat que nous venons d'indiquer, — divergence de $\Sigma K^n |a_n z_0 \ldots z_{n-1}|$ *pour tout* $K > 1$ —, *est général et ne nécessite aucunement l'hypothèse supplémentaire.* On l'établit facilement par une autre méthode, moins élémentaire puisqu'elle utilise quelques propriétés, d'ailleurs classiques, des fonctions analytiques.

La propriété est d'abord évidente si R est fini, puisque $|z_n| \to R$. Lorsque R est infini, c'est une conséquence de *l'inégalité de Jensen.*

Soit un effet $f(z) = \Sigma a_n z^n$ une fonction entière admettant une infinité de zéros. On peut supposer, comme on l'a vu plus haut, que a_0 n'est pas nul, et le prendre alors égal à 1. Soit (z_p) une suite infinie formée avec des zéros de f (on ne les prend pas nécessairement tous), rangés par ordre de module non décroissant. On sait que, avec les notations classiques,

$$r^n/|z_0 z_1 \ldots z_{n-1}| < M(r)$$

(voir, par exemple, VALIRON, [8], p. 430). Dès lors, si la série $\Sigma K^n |a_n z_0 \ldots z_{n-1}|$ convergeait pour une valeur $K > 1$, sa somme majorerait $M(Kr)/M(r)$ quel que soit r, ce qui, d'après le théorème de LIOUVILLE, est impossible pour une fonction entière non réduite à un polynôme.

Remarquons que même la forme moins précise obtenue élémentairement (avec $K = 2$) permet de montrer qu'une fonction entière non identique à 0 et admettant une infinité de zéros donnés ne peut avoir une croissance *trop faible.* Avec les notations ci-dessus, et en posant $|z_n| = r_n$, on voit que, *pour une infinité d'indices* n, on a l'inégalité :

$$|a_n| > \frac{1}{n^2\, 2^n\, r_1 \ldots r_n}$$

(Nous partons ici de z_1 au lieu de z_0, ce qui est sans importance). D'où des inégalités pour l'ordre et le type de f. Par exemple l'ordre ρ est donné par $\frac{1}{\rho} = \liminf \left(-\frac{\log |a_n|}{n \log n}\right)$. Or, *pour une infinité d'indices* n,

$$-\frac{\log |a_n|}{n \log n} < \frac{2}{n} + \frac{\log 2}{\log n} + \frac{\log (r_1 r_2 \ldots r_n)}{n \log n}$$

$$\text{D'où : } \frac{1}{\rho} \leqslant \limsup. \frac{\log (r_1 \ldots r_n)}{n \log n} \leqslant \limsup. \frac{\log r_n}{\log n}.$$

On sait que Borel a donné un résultat plus précis : $\frac{1}{\rho}$ est en fait inférieur ou égal à la limite *inférieure* de $\frac{\log r_n}{\log n}$ (dont on démontre aisément qu'elle est la même que celle de $\frac{\log (r_1 \ldots r_n)}{n \log n}$) : nous ne retrouvons le résultat de Borel que dans le cas où $\frac{\log r_n}{\log n}$ $\left(\text{ou du moins } \frac{\log (r_1 \ldots r_n)}{n \log n}\right)$ a une limite.

Remarque. — Nous venons, dans ce qui précède, d'établir des propriétés des séries entières non identiques à 0 qui s'annulent en au moins tous les points de la suite infinie (z_p). Nous n'avons pas montré qu'il existe de telles fonctions.

Rappelons que, dans la suite (z_p), chaque terme peut être répété un nombre fini de fois. Si on suppose que la suite des modules des zéros (simples ou multiples) différents est *strictement croissante*, la condition (8) mise en évidence en (I, 7) est vérifiée, et par suite le système (Σ) qui donne les coefficients a_n admet une infinité de solutions linéairement indépendantes : cela résulte du théorème de Pólya (voir (I, 7, p. 264)). Il en serait de même si, au lieu de seconds membres tous nuls, on prenait des seconds membres arbitraires. Remarquons que, lorsque $R = \infty$, on peut toujours supposer que la suite des modules des z_p distincts est strictement croissante : il suffit de changer d'origine.

II. 3. — Dérivées successives des fonctions analytiques : problèmes du type d'Abel-Gontcharoff. — Généralités.

Comme il a été dit dans l'introduction (I, 1) (voir aussi [2] et [3]), on est directement conduit à un système triangulaire régulier lorsqu'on cherche à résoudre des problèmes d'interpolation du type d'Abel-Gontcharoff [9], c'est-à-dire lorsqu'on cherche à déterminer une fonction analytique connaissant une valeur de chacune de ses dérivées successives. C'est de ce problème et de questions connexes que nous nous occuperons dans ce paragraphe et les trois suivants, en employant une méthode directe; les séries d'interpolation n'apparaîtront qu'après coup (voir (II, 5)).

Soit une suite quelconque de points z_n du plan complexe $(n = 0, 1, 2\ldots)$. Soit $R = \sup |z_n|$. *Supposons d'abord, pour simplifier, que, pour tout* n, $|z_n| < R$. Nous nous proposons de déterminer une fonction $f(z)$, holomorphe au moins pour $|z| < R$ (donc entière si $R = \infty$), et satisfaisant aux conditions $f^{(n)}(z_n) = b_n$ $(n = 0, 1, 2\ldots)$. Les b_n sont des nombres donnés. Naturellement $f^{(0)} = f$.

Si on pose $f(z) = \sum_0^\infty a_n \frac{z^n}{n!}$, on voit que, pour que f soit solution, il faut et suffit que les a_n vérifiant le système

$$(s) \qquad \sum_{p=0}^{\infty} a_{n+p} \frac{z^p_n}{p!} = b_n \qquad (n = 0, 1, 2\ldots)$$

Le problème posé est ramené à la résolution du système triangulaire régulier (s).

Si l'on admet, dans le cas où R est fini (et non nul) que *certains* z_n *aient pour module* R, la résolution du système (s) correspond à un problème légèrement modifié : on cherche des fonctions $f(z)$ holomorphes au moins pour $|z| < R$, mais, lorsque leur rayon d'holomorphie est précisément R, on suppose que, si $|z_n| = R$, la série de Taylor de $f^{(n)}(z)$ converge encore en z_n et y a pour somme b_n : b_n est donc la limite de $f^{(n)}(z)$ lorsque $z \to z_n$ en vérifiant les hypothèses du théorème d'ABEL [4].

Revenons, pour le système (s), *aux notations de la partie* (I) *:* on pose $a_n = x_{n+1}$, $b_n = y_{n+1}$; X et Y sont les vecteurs de coordonnées x_i et y_i; quant aux éléments a_{ij} de la matrice A de (s), ils sont donnés par $a_{n+1,\, p+1} = z_n^{\,p-n} / (p - n)!$ pour $p \geqslant n$.

On a vu en (I, 3) comment on calcule les éléments b_{ij} de la matrice B inverse à gauche de A. Chaque ligne de B est fournie par un système récurrent. Par exemple, pour la première : $b_{11} = 1$, $z_0 + b_{12} = 0$, $\ldots$,

$$\frac{z^p_0}{p!} + b_{12} \frac{z_1^{\,p-1}}{(p-1)!} + \ldots + b_{1p}\, z_{p-1} + b_{1,\, p+1} = 0\,, \quad \ldots$$

$b_{1,\, p+1}$ est un polynôme en $z_0, z_1, \ldots z_{p-1}$. En (I, 4) a été donnée une expression des b_{ij} sous forme de déterminants, ainsi qu'une interprétation simple : $b_{n+1,\, p+1}$ $(p \geqslant n)$ est la valeur de l'inconnue $a_n = x_{n+1}$ lorsqu'on réduit le système (s) aux $(p + 1)$ premières équations et $(p + 1)$ premières inconnues, et qu'on prend des seconds membres tous nuls sauf $y_{p+1} = 1$. Le système ainsi réduit détermine le polynôme $P(z)$ de degré p, qui vérifie $P(z_0) = P'(z_1) = \ldots = P^{(p-1)}(z_{p-1}) = 0$, $P^{(p)}(z) = 1$, c'est-à-dire le polynôme de GONTCHAROFF [9] relatif à $z_0, z_1 \ldots z_{p-1}$: $b_{n+1,\, p+1}$ est le coefficient de $\frac{z^n}{n!}$, $b_{1,\, p+1}$ le terme constant dans ce polynôme.

Notons enfin que les quantités β_j introduites en (I, 4) et qui majorent respectivement les $|b_{1j}|$ sont définies par le système récurrent :

$$(4) \qquad \beta_1 = 1,\ \beta_2 = r_0,\ \ldots,\quad \beta_{p+1} = \frac{r_0^{\,p}}{p!} + \beta_2 \frac{r_1^{\,p-1}}{(p-1)!} + \ldots + \beta_p\, r_{p-1},\ \ldots$$

4. Bien entendu, si $|z_n| = R$ a lieu pour une infinité de n, la série f et toutes ses dérivées convergent absolument et uniformément dans le disque $|z| \leqslant R$.

où on a posé $|z_n| = r_n$. Ces quantités pourront surtout être utilisées lorsqu'on ne fera d'hypothèses que sur les *modules* des z_n. On a vu que, si la première ligne de A n'a aucun élément nul, c'est-à-dire si $z_0 \neq 0$, les théorèmes des paragraphes (I, 5) et (I, 6) peuvent se traduire simplement en introduisant les β_j. Or, dans ce qui suit, il sera toujours loisible de supposer $z_0 \neq 0$: s'il n'en était pas ainsi, on raisonnerait sur une dérivée d'ordre convenable de f.

II. 4. — Zéros des dérivées successives (5).

Nous supposons que, dans le problème général posé au paragraphe prédent, *les seconds membres* b_n *sont tous nuls.*

Si $f(z) = \sum \frac{a_n}{n!} z^n$ est une solution non identique à 0, on sait que *$B'A'X'$ n'existe pas* (I, 5), ce qui se traduit par la divergence d'une série (et même d'une infinité) de la forme $\Sigma \lambda_j |x_j|$, où les λ_j sont fonctions des z_n : les $|x_j|$ ne peuvent être « trop petits ».

Les résultats établis ci-dessous sont contenus dans ce théorème. Dès que la suite (z_n) est donnée, A, B, A′, B′ sont déterminés : c'est à *chaque suite* (z_n) que correspond une matrice B′A′ donnant une propriété des solutions non banales.

Mais, comme le calcul explicite des b_{ij} n'est en général pas possible, on sera amené à faire des majorations. C'est ainsi que, si $z_0 \neq 0$, on peut utiliser les β_j précédemment introduits, et on a l'énoncé très simple :

pour une solution non banale du problème, $\Sigma\ \beta_{n+1}\ |a_n|$ *diverge.*

Rappelons d'où cela provient. A étant une matrice triangulaire régulière et B son inverse à gauche, on peut majorer B′ comme suit (voir (I, 4) et (I, 5)) : il suffit de remplacer A par $\mathfrak{A} = 2I - A'$; on a $\mathfrak{A}' = A'$; l'inverse $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{A}$ a ses éléments $\geqslant 0$ ($\mathfrak{B} = \mathfrak{B}'$) et majore la matrice B′, chaque élément de $\mathfrak{B}$ majorant l'élément homologue de B′. De plus $\mathfrak{A}'\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}' = 2\mathfrak{B} - I$. La première ligne de $\mathfrak{B}$ est formée des β_j; s'ils sont tous $\neq 0$ (c'est-à-dire ici si $z_0 \neq 0$), la $i^{\text{ème}}$ ligne a des éléments majorés par les β_j/β_i. Dès lors si, au lieu d'exprimer la non-existence de B′A′X′, on exprime celle de $\mathfrak{B}\,\mathfrak{A}'X'$, on aboutit au résultat indiqué.

Remarquons que $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{A}'$ majorent respectivement non seulement les matrices B′ et A′ correspondant à la suite (z_n) considérée, mais les matrices analogues correspondant à *toute* suite (ζ_n) qui vérifie $|\zeta_n| \leqslant |z_n|$. C'est évident pour $\mathfrak{A}'$. Quant aux éléments de $\mathfrak{B}$, ce sont des polynômes à coefficients > 0 des éléments de $\mathfrak{A}'$ (6). La propriété établie — divergence

5. Nous développons ici des calculs esquissés dans les deux notes [3].

6. On pourrait aussi remarquer que chaque élément b_{ij} de B est un polynôme par rapport à certains z_n. Si les z_n sont astreints à varier dans des disques $|z_n| \leqslant \rho_n$, le maximum de $|b_{ij}|$ est atteint à la frontière, pour des valeurs telles que $|z_n| = \rho_n$. Donc, plus généralement, si une matrice C majore la matrice B′ correspondant à toute suite qui vérifie $|z_n| = \rho_n$, elle majore la matrice B′ pour toutes les suites qui vérifient $|z_n| \leqslant \rho_n$.

de $\Sigma\ \beta_{n+1}\ |a_n|$ pour une solution non banale — est donc valable non pour la seule suite (z_n), mais pour toute suite (ζ_n) telle que $|\zeta_n| \leqslant |z_n|$.

EXEMPLES. — a) *Supposons que, pour tout* n, $|z_n| \leqslant 1$.

D'après ce qui vient d'être dit, on peut supposer $|z_n| = 1$ et utiliser les β_j calculés dans cette hypothèse. Ils sont définis par le système $\beta_1 = 1, \ldots,$ $\beta_{p+1} = \frac{1}{p!} + \frac{\beta_2}{(p-1)!} + \ldots + \beta_p, \ldots$ qui signifie que la série $\Sigma\ \beta_{n+1}\ t^n$ est l'inverse de $1 - \frac{t}{1!} \cdots - \frac{t^n}{n!} - \ldots = 2 - e^t$. Comme $\frac{1}{2-e^t} = \frac{1}{2(\log 2 - t)} + \varphi(t)$, $\varphi(t)$ ayant un rayon de convergence $> \log 2$, on voit que $\beta_n \sim \frac{1}{2(\log 2)^n}$. Donc, *si* $f(z) = \sum \frac{a_n z^n}{n!} \not\equiv 0$ *s'annule ainsi que chacune de ses dérivées dans le disque* $|z| \leqslant 1$, $\sum \frac{|a_n|}{(\log 2)^n}$ *diverge.*

Il en résulte en particulier que, pour une infinité de valeurs de n, $|a_n| > \frac{(\log 2)^n}{n^2}$, et que par suite f *est au moins du type* log 2 *de l'ordre* 1.

On retrouve ainsi que la *constante de Whittaker W* est $\geqslant \log 2 = 0{,}69\ldots$: W est le plus grand des nombres τ tels que la seule fonction holomorphe dans le disque unité, y présentant un zéro ainsi que chacune de ses dérivées successives, et de croissance moindre que (ordre 1, type τ), soit identique à 0 (voir par exemple [9] et [10]).

Dans la démonstration qui précède, nous avons remplacé les $|z_n|$ par 1, et utilisé les β_j, c'est-à-dire remplacé A par $\mathcal{A} = 2\mathrm{I} - \mathrm{A}'$. Cette matrice, dont la première ligne est $\left(1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} \ldots\right)$ et dont les autres s'obtiennent par translation parallèle à la diagonale principale, n'est égale à la matrice A pour *aucune* répartition des z_n dans le disque unité. La majoration faite est trop forte, ce qui explique que le minorant log 2 obtenu pour W soit trop faible; il s'obtient d'ailleurs de façon élémentaire par la démonstration directe donnée à la fin de (II, 1), et il convient, non seulement aux solutions du système (s), mais à celles du système obtenu en modifiant de façon *arbitraire* les arguments des a_{ij}.

Pour trouver un *meilleur minorant* de W, il faut améliorer la majoration des b_{ij} lorsque les z_n appartiennent au disque unité. Considérons la première ligne de B. $b_{1,\,p+1}$ est la valeur à l'origine du polynôme de GONTCHAROFF relatif à $z_0, z_1 \ldots z_{p-1}$. Ces valeurs ont été étudiées par LEVINSON, puis par M[me] MACINTYRE [10] qui a montré $|b_{1,\,p+1}| < k^p$, avec $k = 1{,}3775$ $(p > 0)$. Dès lors les éléments successifs de la première ligne de B'A' sont majorés par $1,\ 1 + k, \ldots, \frac{1}{p!} + \frac{k}{(p-1)!} + \ldots + k^p < k^p e^{1/k}, \ldots$ On fait de même pour les autres lignes (7). Et, par suite, pour une solution non banale, $\Sigma\, k^n\, |a_n|$ diverge, ce qui entraîne que $W \geqslant 1/k > 0{,}7259$. (M^me^ MAC-INTYRE a aussi établi, à l'aide de contre-exemples, que $W < 0{,}7378$). Notons que, dans notre présentation par les systèmes infinis d'équations linéaires, comme dans la présentation classique par les séries d'interpolation, la difficulté qu'on rencontre pour obtenir de meilleurs minorants de W est exactement la même : c'est l'évaluation des b_{ij}, c'est-à-dire des coefficients des polynômes de GONTCHAROFF.

b) *Soit* (r_n) *une suite non décroissante de nombres positifs,* et considérons les β_j définis par les formules (4) de (II, 3)

$$\beta_1 = 1, \qquad \beta_{p+1} = \frac{r_0^p}{p!} + \beta_2 \frac{r_1^{p-1}}{(p-1)!} + \ldots + \beta_p\, r_{p-1} \qquad (p > 0)$$

Si on pose $\beta_{p+1} = r_0\, r_1 \ldots r_{p-1}\, \beta'_{p+1}$, on voit qu'on a :

$$\beta'_{p+1} \leqslant \frac{1}{p!} + \frac{\beta'_2}{(p-1)!} + \ldots + \beta'_p.$$

D'après les calculs faits au *a*) ci-dessus (pour le cas où on a le signe = au lieu de $\leqslant$), on voit que, K étant une constante numérique convenable, on a les inégalités :

$$\beta_{p+1} \leqslant \mathrm{K} r_0\, r_1 \ldots r_{p-1}\, (1/\log 2)^p.$$

Dès lors *si, pour la fonction entière* f *non identique à* 0, *chaque dérivée* $f^{(n)}$ *s'annule dans le disque* $|z| \leqslant r_n$, $\sum \frac{|a_n|\, r_0\, r_1 \ldots r_{n-1}}{(\log 2)^n}$ diverge.

Si, par exemple, $r_n = (n+1)^\alpha$ $(\alpha > 0)$, $\sum \frac{(n!)^\alpha\, |a_n|}{(\log 2)^n}$ diverge : *f* ne peut être de croissance moindre que $\left(\text{ordre } \rho = \frac{1}{\alpha+1},\ \text{type } \frac{(\log 2)^\rho}{\rho}\right)$ On traiterait de même le cas où $r_n = \mathrm{C}(n+1)^\alpha$ (β_{p+1} est alors multiplié par C^p) et celui où $\limsup r_n/n^\alpha = \mathrm{C}$ (voir [3]).

c) *Prenons maintenant* $r_n = \dfrac{1}{(n+1)^\alpha}$ *avec* $0 < \alpha \leqslant 1$.

Les β_j correspondants sont définis par :

$$\beta_1 = 1, \qquad \beta_{p+1} = \sum_{n=1}^{p} \frac{\beta_{p+1-n}}{n!\,(p+1-n)^{\alpha n}}$$

Soient K et λ deux nombres positifs ($\mathrm{K} > 1$, $\lambda < 1$) tels que l'inégalité $\beta_{n+1} < \dfrac{\mathrm{K}}{\lambda^n\,(n!)^\alpha}$ soit vérifiée pour $n = 0, 1, \ldots p-1$, et cherchons si l'iné-

---

7. Dans chaque ligne, après les premiers éléments nuls, comme situés au-dessous de la diagonale principale, on retrouve évidemment les mêmes majorations $1, 1+k, \ldots$. Cela tient à ce que tous les z_n sont soumis à la même condition $|z_n| \leqslant 1$.

galité a encore lieu pour $n = p$. Il suffit pour cela que l'on ait :

$$(5) \qquad \sum_{n=1}^{p} \frac{\lambda^n}{n!} \left(\frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{(p-n+1)^n} \right)^\alpha < 1.$$

On voit facilement que, lorsque $p \to \infty$, le premier membre tend vers $\sum_1^\infty \frac{\lambda^n}{n!} = e^\lambda - 1$. On peut en effet le considérer comme une série entière en λ, où, pour n donné, le coefficient de λ^n, d'abord nul pour $n > p$, tend vers $\frac{1}{n!}$ lorsque $p \to \infty$. Ce coefficient est d'autre part maximum lorsque $\alpha = 1$ et que $p = n$: il vaut alors 1; or la série $\Sigma\, \lambda^n$ converge puisque $\lambda < 1$.

Si on a pris λ tel que $e^\lambda - 1 < 1$, c'est-à-dire $\lambda < \log 2$, on voit que l'inégalité (5) aura lieu pour p assez grand, et, K étant convenablement choisi, on aura

$$\beta_{n+1} < \frac{K}{\lambda^n (n!)^\alpha} \text{ pour tout } n.$$

Il en résulte que *si, pour la série* $f(z) = \sum \frac{a_n z^n}{n!}$, *non identique à* 0, *chaque dérivée* $f^{(n)}(z)$ *s'annule dans le disque* $|z| \leqslant \frac{1}{(n+1)^\alpha}$, *la série* $\sum \frac{|a_n|}{\lambda^n (n!)^\alpha}$ *diverge pour tout* $\lambda < \log 2$.

D'où des inégalités pour l'ordre et le type de f, lorsque $0 < \alpha < 1$, ou pour son rayon de convergence, lorsque $\alpha = 1$ (voir [3]).

On trouvera dans [2] et [3] d'autres résultats concernant le cas où f présente des lacunes et l'étude de certaines constantes analogues à la constante de WHITTAKER.

II. 5. — Système non homogène. — Petites valeurs des dérivées successives.

On a vu en (I, 6) que, pour le système triangulaire régulier AX = Y, si A'B'Y' existe, le système admet la solution de Cramer X = BY, et pour cette solution A'X' existe; si B'A'B'Y' existe, la solution de Cramer est la seule pour laquelle B'A'X' existe [8].

Nous appliquons ces résultats au système (s) : $f^{(n)}(z_n) = b_n$, les z_n et b_n étant des nombres complexes donnés. Il faut soit calculer B', soit majorer ses éléments $|b_{ij}|$. On pourra aussi remplacer A par $\mathcal{A} = 2I - A'$, au besoin après avoir augmenté les modules des z_n ou de certains d'entre eux (ce qui permettra de supposer $z_0 \neq 0$), et introduire les β_j calculés après cette modification éventuelle. $\mathcal{B}$ majore alors B'.

8. L'existence de A'B'Y' ne suffit pas pour que B'A'X' existe. Un exemple est donné par le système des équations $x_n - x_{n+1} = y_n$.

Si $\mathcal{A}'\mathcal{B}Y'$ *existe, c'est-à-dire si* $\Sigma\,\beta_j\,|y_j|$ *converge,* $A'B'Y'$ *existe à fortiori, donc le système admet au moins la solution de Cramer; si* $\mathcal{B}\mathcal{A}'\mathcal{B}Y'$ *existe, ce qui est certainement réalisé si* $\Sigma\, j\,\beta_j\,|y_j|$ *converge, on voit que, pour la solution de Cramer* $X = BY$, $\mathcal{B}\mathcal{A}'X'$ *existe, c'est-à-dire que* $\Sigma\,\beta_j\,|x_j|$ *converge, et c'est la seule ayant cette propriété* (puisque c'est la seule pour laquelle $B'A'X'$ existe).

Enfin on pourra représenter la fonction $f(z)$ correspondant à la solution de Cramer par une *série d'interpolation.* $f(z)$ s'écrit en effet $Z\,(BY)$, où Z désigne la matrice formée de l'unique *ligne* $(1\ z\ z^2/2!\ \ldots)$. S'il est légitime d'écrire $f(z) = (ZB)Y$ on obtient le développement de $f(z)$ en série d'interpolation de Gontcharoff [9]. La matrice à une ligne ZB a en effet pour éléments les polynômes de Gontcharoff successifs. D'après (I, 3) et (III, 2), si, pour $z = r > 0$, $ZB'Y'$ existe, le calcul est légitime et $f(z)$ se trouve développée en série de polynômes absolument et uniformément convergente pour $|z| \leqslant r$.

Nous nous bornerons à appliquer ce qui précède au cas où, pour tout n, $|z_n| \leqslant 1$. Les β_n, calculés pour $|z_n| = 1$, vérifient $\beta_n \sim \dfrac{1}{2\,(\log 2)^n}$.

Donc :

si $\sum \dfrac{|\,b_n\,|}{(\log 2)^n}$ *converge, le système admet au moins la solution de Cramer; si* $\sum \dfrac{n\,|b_n|}{(\log 2)^n}$ *converge, pour la solution de Cramer, et pour elle seule,* $\sum \dfrac{|a_n|}{(\log 2)^n}$ *converge.*

On voit aussi, lorsque $\sum \dfrac{|\,b_n\,|}{(\log 2)^n}$ converge, que la fonction $f(z)$ correspondant à la solution de Cramer est développable en *série de* Gontcharoff *uniformément convergente dans tout domaine borné :* on trouve en effet facilement que les éléments successifs de la matrice colonne $B'Y'$ sont majorés par $K\,(\log 2)^p$ $(p = 0, 1, 2\ \ldots)$, K désignant une constante.

Remarques. — *a*) Nous venons, ici encore, d'utiliser d'abord les β_n. De façon plus précise, on sait (voir III, 4) que M^me^ Macintyre a établi que, lorsque tous les $|z_n|$ sont $\leqslant 1$, les éléments b_{ij} de B satisfont à $|b_{1,\,p+1}| \leqslant k^p$, donc aussi à $|b_{n+1;\,p+1}| \leqslant k^{p-n}$, avec $k = 1{,}3775$. En utilisant la majoration qui en résulte pour les éléments de $A'B'$ ou de $B'A'B'$ (le calcul a été fait en (II, 4, a) pour $B'A'$), on établit facilement que, *dans l'énoncé précédent,* $\log 2$ *peut être remplacé par* $1/k = 0{,}7259\ldots$

b) (z_n) désigne toujours une suite quelconque de points du disque $|z| \leqslant 1$.

Soit $f(z) = \sum \dfrac{a_n\,z^n}{n!}$ *une fonction de croissance moindre que (ordre 1, type 1). La fonction* $g(z) = \sum b_n \dfrac{z^n}{n!}$ *avec* $b_n = f^{(n)}(z_n)$ *a une croissance inférieure ou égale à celle de* f.

Cela résulte des égalités $b_n = a_n + a_{n+1}\, z_n + \ldots$. En effet, soit $F = \sum \frac{A_n\, z^n}{n!}$ une fonction majorant f ($A_n > |a_n|$ pour tout n), de croissance moindre que (ordre 1, type 1), et telle de plus que les quantités A_{n+1}/A_n restent inférieures à un nombre $\lambda < 1$. (Si par exemple f est du type $\delta < 1$ de l'ordre 1, on prendra $A_n = K\ (\delta + \varepsilon)^n$ avec $\varepsilon > 0$ assez petit). On voit sans peine que $|b_n| < A_n\, e^{\lambda}$. La croissance de g est donc inférieure ou égale à celle de F, quelle que soit la façon dont a été choisie F, donc aussi à celle de f.

c) *k ayant la signification indiquée ci-dessus, soit maintenant* $g(z) = \sum \frac{b_n\, z^n}{n\,!}$ *une fonction de croissance moindre que (ordre 1, type $1/k$)*, ce qui entraîne que $\Sigma\, n\, k^n\, |b_n|$ converge. Il existe une seule fonction $f(z) = \sum \frac{a_n\, z^n}{n\,!}$ telle que $\Sigma\, k^n\, |a_n|$ converge et que $f^{(n)}(z_n) = b_n$ pour tout n.

Nous allons montrer que cette fonction $f(z)$ *a la même croissance que* g (même ordre, même type).

D'après b) on sait déjà que la croissance de g est inférieure ou égale à celle de f. Il suffit de prouver l'inégalité en sens contraire, et pour cela on utilise le fait que les vecteurs X de coordonnées $a_0, a_1 \ldots$ et Y de coordonnées $b_0, b_1 \ldots$ sont liés par $X = BY$.

Soit $G = \sum \frac{B_n\, z^n}{n\,!}$ une fonction majorant g ($B_n > |b_n|$ pour tout n), de croissance moindre que (ordre 1, type $1/k$) et telle que tous les B_{n+1}/B_n soient inférieurs à un nombre $\lambda < 1/k$. On a, d'après la majoration des éléments de B, $|a_n| < B_n + k\, B_{n+1} + k^2\, B_{n+2} \ldots < \frac{B_n}{1 - \lambda k}$, ce qui donne le résultat.

En conclusion, *soit $\mathcal{E}$ l'espace des fonctions entières de croissance moindre que (ordre* 1, *type* $1/k = 0{,}7259\ldots$).

Si on part de $g \in \mathcal{E}$, il existe dans $\mathcal{E}$ une et une seule fonction f telle que $f^{(n)}(z_n) = g^{(n)}(0)$ pour tout n; si on part de $f \in \mathcal{E}$, $g = \sum \frac{f^{(n)}(z_n)\, z^n}{n\,!} \in \mathcal{E}$; et, dans les deux cas, f et g ont même croissance.

L'application $f \to g$ *avec* $g(z) = \sum \frac{f^{(n)}(z_n) z^n}{n\,!}$ *est un automorphisme de $\mathcal{E}$ qui conserve la croissance.*

Ceci précise grandement un théorème de BOAS sur les petites valeurs des dérivées successives (voir [11] et aussi [13], 3ᵉ note) : BOAS démontrait, pour f entière de type exponentiel $\delta < \log 2$ et vérifiant $f(0) = 1$, que $\sum_0^\infty |f^{(n)}(z_n)|^2 r^{-2n} \geqslant 2e^r - e^{2r}$ lorsque $r < \delta$; on voit qu'en fait la série écrite au premier membre diverge.

Notons encore que, *si* f $\in \mathcal{E}$, *on peut la développer en série de polynômes de* GONTCHAROFF *construits à l'aide d'une suite arbitraire de points z_n du* *disque* $|z| \leqslant 1$: cette série converge absolument en tout point, et uniformément dans tout domaine borné.

II. 6. — Autres problèmes.

La méthode des systèmes infinis d'équations linéaires s'applique commodément à des problèmes autres que ceux du type d'ABEL-GONTCHAROFF, que nous avons examinés jusqu'ici. Par exemple on peut, pour chaque n, égaler à 0 ou à une valeur donnée une combinaison linéaire de valeurs en certains points de la dérivée d'ordre n et d'un nombre fini de dérivées suivantes de f. Nous traiterons deux problèmes de cette nature, dont les résultats étendent et éclairent ceux qui ont été obtenus pour les zéros des dérivées successives.

UNIVALENCE DES DÉRIVÉES SUCCESSIVES :

Soit $f(z) = \sum \frac{a_p z^p}{p\,!}$ une fonction holomorphe au moins pour $|z| \leqslant 1$. Si $f^{(n)}$ prend la même valeur en deux points distincts u et v du disque $|z| \leqslant 1$, les coefficients a_p vérifient $f^{(n)}(u) = f^{(n)}(v)$, ou :

$$a_{n+1} + \frac{a_{n+2}}{2\,!}\,(u+v) + \ldots + \frac{a_{n+p}}{p\,!}\,(u^{p-1} + u^{p-2}\,v + \ldots + v^{p-1}) + \ldots = 0$$

Lorsque $u = v$, cette équation exprime que u est racine multiple de $f^{(n)}(z) = f^{(n)}(u)$.

Si donc f et toutes ses dérivées sont *multivalentes* dans le disque $|z| \leqslant 1$, les coefficients a_1 et suivants satisfont à un système triangulaire régulier pour lequel la matrice A′ est majorée par la matrice du type (II, 1) dont la première ligne est

$$1 \qquad 1 \qquad \frac{1}{2\,!} \quad \cdots \quad \frac{1}{(p-1)\,!} \quad \cdots$$

Les β_n qui correspondent à cette dernière se calculent en inversant la série $1 - t - \frac{t^2}{2\,!} \ldots = 2 - e^t$, calcul qui a déjà été fait.

Il en résulte que, *si* $\sum \frac{|a_n|}{(\log 2)^n}$ *converge*, a_1 *et tous les coefficients suivants sont nuls;* f *est constante.*

On en déduit un résultat de BOAS [12] : *si une fonction entière, non réduite à un polynôme, est de croissance moindre que* (*ordre* 1, *type log* 2), *une infinité de ses dérivées sont univalentes dans le disque* $|z| \leqslant 1$ (si, en effet, toutes étaient multivalentes à partir d'un certain rang, il n'y aurait qu'un nombre fini de $a_n \neq 0$). Cela implique, bien entendu, que, sous les mêmes hypothèses, une infinité de dérivées ne s'annulent pas dans le disque $|z| \leqslant 1$.

QUOTIENTS DES VALEURS DE DÉRIVÉES EN DEUX POINTS :

Considérons maintenant une fonction entière f *satisfaisant au système d'équations* (6) $f^{(n)}(u_n) = \lambda_n f^{(n)}(v_n) \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots)$

Les u_n, v_n, λ_n sont des nombres donnés. *Nous supposons les* λ_n *tous* $\neq 1$ (on pourrait d'ailleurs, en intervertissant au besoin u_n et v_n, supposer les $|\lambda_n| \leqslant 1$).

L'équation générale (6) s'écrit :

$$a_n (1 - \lambda_n) + a_{n+1} (u_n - \lambda_n v_n) + \ldots + \frac{a_{n+p}}{p\,!} (u^p{}_n - \lambda_n v^p{}_n) + \ldots = 0$$

Supposons tous les $|u_n|$ et $|v_n| \leqslant$ R, et toutes les quantités $\dfrac{1+|\lambda_n|}{|1-\lambda_n|} \leqslant$ K, R et K étant deux nombres positifs donnés. Remarquons que $\dfrac{1+|\lambda_n|}{|1-\lambda_n|}$, invariant dans le changement $\lambda_n \to 1/\lambda_n$, ne peut être « grand » que pour λ_n voisin de 1.

Les a_n satisfont à un système triangulaire régulier, pour lequel la matrice A′ est majorée par la matrice du type (II, 1) dont la première ligne est :

$1 \;\mathrm{KR} \ldots \dfrac{\mathrm{KR}^p}{p\,!} \ldots$. A cette dernière correspondent des β_n qui se calculent en inversant la série $1 - \mathrm{K}\,(\mathrm{R}t + \ldots + \dfrac{\mathrm{R}^p t^p}{p\,!} + \ldots) = 1 + \mathrm{K} - \mathrm{K}\, e^{\mathrm{R}t}$ dont la racine de plus petit module est $t_0 = \dfrac{1}{\mathrm{R}} \log \dfrac{1 + \mathrm{K}}{\mathrm{K}}$.

Comme en (II, 4), ceci permet de trouver un équivalent de β_n, et on voit que, *si* f *n'est pas identique à* 0, *elle ne peut être de croissance moindre que* (*ordre* 1, *type* t_0).

Application : Soit f *une fonction entière, non réduite à un polynôme, qui est au plus du type* 0 *de l'ordre* 1.

Soit R un nombre positif *arbitraire,* D le disque $|z| \leqslant$ R. Pour chaque n, posons

$$m_n = \sup_{z,\, z' \in \mathrm{D}} \left| \frac{f^{(n)}(z)}{f^{n}(z')} - 1 \right| .$$

On a : lim inf $m_n = 0$.

C'est-à-dire qu'on peut trouver une suite d'indices n_k *telle que* $\dfrac{f^{(n_k)}(z)}{f^{n_k)}(z')}$ *tende uniformément vers* 1 *dans* D *lorsque* $n_k \to \infty$.

Si, en effet, on avait lim inf $m_n > 0$, on en déduirait que les a_p vérifient, à partir d'une certaine valeur de n, des équations $f^{(n)}(u_n) = \lambda_n f^{(n)}(v_n)$, où les $|\lambda_n|$ seraient $\leqslant 1$ et les $|\lambda_n - 1| \geqslant \alpha > 0$. Il en résulte facilement une contradiction.

On peut donner de l'énoncé précédent une forme peut-être plus frappante en utilisant, au lieu du nombre arbitraire R, une suite R_k qui tend vers l'infini et les disques D_k correspondants : il est clair qu'on *peut trouver une suite d'indices* n_k telle que $\dfrac{f^{(n_k)}(z)}{f^{(n_k)}(z')}$ *tende uniformément vers* 1 *dans* D_k.

Des résultats analogues, que nous ne détaillons pas, s'obtiendraient en partant des équations $f^{(n)}(u_n) = \lambda_n f^{(n+p)}(v_n)$, p étant un nombre positif donné, par exemple $p = 1$.

C'est ainsi que, *pour une fonction entière* f, *non réduite à un polynôme, et qui est au plus du type* 0 *de l'ordre* 1, *on peut, pour tout disque* D, *trouver une suite d'indices* n_k *telle que* $\dfrac{f^{(n_k+1)}(z)}{f^{(n_k)}(z')}$ *tende uniformément vers* 0 *dans* D.

Ces résultats, qu'on pourrait établir aussi directement, ne sont plus valables pour des fonctions d'ordre 1 mais de type positif, comme le montrent les exemples très simples des fonctions $e^{\alpha z}$ ou sin (αz).

II. 7. — Restes successifs des séries entières.

Une théorie analogue à celle qui a été développée dans les paragraphes (II, 3) à (II, 6) peut être appliquée aux restes successifs des séries entières.

Soit *ici* $f(z) = \sum\limits_{0}^{\infty} a_n z^n$, de rayon de convergence $R \geqslant 1$. Posons $f_n(z) = \sum\limits_{p=0}^{\infty} a_{n+p} z^p$. On a évidemment $f_0 = f$. Et supposons que chaque f_n *s'annule en au moins un point* z_n *du disque* $|z| \leqslant 1$.

Les a_n *satisfont au système*

$$(s') \qquad f_n(z_n) = 0 \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots)$$

qui est triangulaire régulier.

Adoptant les notations de la partie (I), on pose $x_{n+1} = a_n$, $a_{n+1,\, p+1} = z_n^{p-n}$. Les coefficients a_{ij} ont tous leur module majoré par 1. Remplaçons les $|z_n|$ par 1, et calculons dans cette hypothèse les β_n, ce qui revient à chercher l'inverse $\mathcal{B}$ de la matrice $\mathcal{A}$, du type (II, 1), dont la première ligne est $1 \; -1 \; -1 \; \ldots$, ou encore à chercher l'inverse de la série $1 - t - t^2 \ldots = \dfrac{1-2t}{1-t}$. On trouve, pour $n > 1$, $\beta_n = 2^{n-2}$.

Par suite, *si* f *n'est pas identique à* 0, $\Sigma\, 2^n |a_n|$ *diverge* [9], *c'est-à-dire que* f *a un rayon de convergence au plus égal à* 2.

Ou encore, si f, non identique à 0, est holomorphe dans le disque unité, et si chaque f_n s'annule dans le disque $|z| \leqslant r < 1$, on a nécessairement $r \geqslant \dfrac{1}{2}$.

9. Ici encore, ce résultat se démontre élémentairement par la démonstration directe donnée à la fin de (II, 1).

On peut donc définir une constante C, borne supérieure des nombres r tels que toute fonction f holomorphe dans le disque unité et s'annulant ainsi que chaque f_n dans le disque $|z| \leqslant r < 1$ soit identiquement nulle. On voit que $C \geqslant 0{,}5$.

L'étude détaillée de cette question a été entreprise par d'autres méthodes par M. POMMIEZ [13], qui a notamment étudié le cas des fonctions f entières de croissance donnée, la question de l'univalence des f_n, et obtenu pour C l'encadrement $0{,}536 < C < 0{,}5617$. Comme dans le cas des dérivées successives (II, 4, a), trouver pour C un meilleur minorant que 0,5 revient à améliorer l'évaluation des éléments b_{ij} de la matrice B, au lieu de se contenter d'utiliser les β_n.

Nous nous bornerons à quelques considérations sur les deux points suivants.

CAS DU SYSTÈME NON HOMOGÈNE :

Soit une suite donnée (z_n) de points du disque $|z| \leqslant 1$, et soient b_n des constantes données. Cherchons s'il existe une série $f(z) = \Sigma\, a_n z^n$ vérifiant les équations $f_n(z_n) = b_n$.

On raisonne comme en (II, 5) : A'B' est majoré par $\mathcal{A}'\mathcal{B}$, etc...

D'où :

si $\Sigma\, 2^n |b_n|$ *converge, le problème admet au moins une solution, dont les coefficients* a_n *sont donnés par les formules de Cramer ; si* $\Sigma\, n\, 2^n |b_n|$ *converge, pour cette solution, et pour elle seule, la série* $\Sigma\, 2^n |a_n|$ *converge.*

CALCUL DES b_{ij} :

Revenons au système (s') $\qquad f_n(z_n) = 0 \qquad (|z_n| \leqslant 1).$

Cherchons, par exemple, la première ligne de l'inverse à gauche B de sa matrice A. Les relations de récurrence qui définissent les b_{ij} et qui s'écrivent :

$$b_{11} = 1, \qquad b_{11}\, z_0 + b_{12} = 0, \qquad b_{11}\, z^2_0 + b_{12}\, z_1 + b_{13} = 0, \qquad \ldots$$

signifient que, formellement :

$$\frac{b_{11}}{1 - z_0 z} + \frac{b_{12}\, z}{1 - z_1 z} + \ldots + \frac{b_{1,\,p+1}\, z^p}{1 - z_p\, z} + \ldots \equiv 1.$$

D'ailleurs, puisque $|b_{1,\,p+1}| \leqslant 2^{p-1}$, l'identité n'est pas seulement formelle, mais est valable au moins dans le disque $|z| < \dfrac{1}{2}$; la série du premier membre converge absolument dans ce disque, et uniformément dans tout compact intérieur.

Cette identité prend une forme particulièrement simple si la suite (z_n) ne prend qu'un nombre fini de valeurs distinctes. *Par exemple si, pour tout* n, $z_n = \pm 1$, on l'écrit :

$$(1 + z)\, \Sigma\, b_{1,q+1}\, z^q + (1 - z)\, \Sigma\, b_{1,\,r+1}\, z^r \equiv 1 - z^2$$

(q prenant celles des valeurs n pour lesquelles $z_n = 1$, et r les autres). On en déduit aussitôt, en annulant au premier membre les coefficients des puissances de $z^3, z^4 \ldots$ que $|b_{13}| = |b_{14}| = |b_{15}| \ldots$
D'ailleurs $b_{11} = 1$, $b_{12} = -z_0$, $b_{13} = z_0(z_1 - z_0)$. D'où, pour $j \geqslant 3$, $b_{1j} = 0$ si $z_1 = z_0$, $|b_{1j}| = 2$ si $z_1 = -z_0$.

Bien entendu ces résultats s'obtiennent aussi par l'examen direct du système (s') avec des seconds membres y_i ; si, par exemple, $z_1 = z_0$, les deux premières équations

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 z_0 + \ldots = x_1 + x_2 z_0 + \ldots &= y_1 \\ a_1 + a_2 z_0 + \ldots = x_2 + \ldots \quad &= y_2 \end{aligned}$$

donnent $a_0 = x_1 = y_1 - z_0 y_2$, d'où les valeurs des b_{1j} d'après l'interprétation donnée en (I, 4, p. 258).

Nous utiliserons ces résultats à la fin du paragraphe (III, 3).

III. — COMPLÉMENTS.

Cette dernière partie a pour objet d'éclairer par des exemples simples certaines questions rencontrées dans la partie (I). Le dernier paragraphe est consacré aux « matrices de changement d'origine », et aux matrices qui sont permutables avec elles.

III. 1. — Inverses à droite des matrices triangulaires régulières.

On a vu qu'une matrice triangulaire régulière A admet une matrice inverse à gauche *unique* B (I, 3, p. 257). B, qui est triangulaire régulière, est aussi inverse de A à droite ; c'est même la seule inverse à droite qui soit *à colonnes finies*, c'est-à-dire dont chaque colonne ne contienne qu'un nombre fini d'éléments non nuls, ce nombre pouvant varier avec la colonne.

Pour déterminer *toutes* les matrices inverses à droite de A, cherchons-les sous la forme B + C. On doit résoudre $A\,C = 0$. Si on écrit $C = (X_1\, X_2 \ldots X_n \ldots)$, X_n désignant la $n^{ième}$ colonne de C, on voit qu'il faut et suffit que :

$$A\,X_1 = 0, \; A\,X_2 = 0, \; \ldots \; A\,X_n = 0, \; \ldots .$$

$X_1, X_2, \ldots X_n \ldots$ doivent être solutions du système $A\,X = 0$ étudié dans la partie (I).

Si ce système n'admet que la solution banale $X = 0$ (voir des exemples (I, 7, p. 262) et aussi [1]), A n'a qu'une inverse à droite, B ; sinon A en admet une infinité.

Mais, de toute façon, la solution $X = 0$ est la seule solution « petite » de $A\,X = 0$, ce qui permet d'affirmer que B *est la seule inverse à droite de* A *non seulement parmi les matrices à colonnes finies, mais même parmi les matrices dont chaque colonne* X *a la propriété que* $B'A'X'$ *existe :*

si en effet cette dernière propriété a lieu pour chaque colonne de $B + C$, elle a lieu pour chaque colonne de C, d'où $C = 0$.

Remarquons que si on a trouvé $C \neq 0$ telle que $AC = 0$, CA existe (puisque A est à colonnes finies), mais $CA \neq 0$ (puisque B est la seule inverse de A à gauche).

III. 2. — Existence et associativité d'un produit fini de matrices quelconques.

Nous considérons (cf. (I, 3, p. 257)) une suite finie de matrices *quelconques* A, B, ... L dont toutes ou certaines admettent une infinité de lignes, ou une infinité de colonnes, ou une infinité de lignes et de colonnes.

Si l'un des produits formés avec ces matrices, convenablement associées mais sans changer leur ordre, existe, cela n'entraîne pas nécessairement, comme pour les matrices finies, que les autres produits existent et sont égaux. La condition que chaque matrice ait autant de colonnes que la suivante a de lignes se trouve bien réalisée, mais la difficulté vient de ce que le calcul des éléments d'un produit introduit des séries, et non plus des sommes finies.

Il est aisé de donner des exemples : soit A une matrice triangulaire régulière telle que le système $AX = 0$ admette la solution $X_0 \neq 0$. Si B est l'inverse à gauche de A, on a : $B(AX_0) = 0$, tandis que $(BA)X_0 = X_0$.

Nous avons indiqué une condition *suffisante* pour que tous les produits formés avec A, B, ... L en respectant leur ordre existent et soient égaux : *c'est qu'existe l'un des produits formés avec* A′, B′, ... L′ (matrices où on a remplacé les éléments par leurs modules), *et que, dans* A, B, ... L, *aucune ligne ni colonne n'ait tous ses éléments nuls* [10] .

La démonstration revient à faire des regroupements de termes dans une série multiple absolument convergente, et la dernière clause est destinée à légitimer des mises en facteur, d'après le schéma suivant : la série convergence $\Sigma\, a x_n$ peut être écrite $a \Sigma x_n$ si l'on sait soit que *a est* $\neq 0$, soit que Σx_n converge. Pour bien montrer le mécanisme, explicitons les calculs dans le cas simple de *trois matrices A, B, C à éléments positifs ou nuls.*

Si $(AB)C$ existe, cela signifie (avec des notations évidentes) que $\sum_k \left(\sum_j a_{ij} b_{jk}\right) c_{kl}$ existe quels que soient i et l, et on peut l'écrire comme une série double $s_{il} = \sum_k \sum_j (a_{ij} b_{jk} c_{kl})$ sans imposer d'ordre de sommation. Peut-on l'écrire aussi $\sum_j a_{ij} \left(\sum_k b_{jk} c_{kl}\right)$? La mise en facteur faite sera jus-

10. On pourrait évidemment, au lieu de A′, B′..., faire intervenir des matrices A″, B″..., à éléments $\geqslant 0$ *majorant* les modules des éléments homologues dans A, B... Si l'un des produits formés avec A″, B″... existe, et si dans A″, B″... (et non plus dans A, B...) aucune ligne ni colonne n'a tous ses éléments seuls, le produit AB... L existe et est associatif.

tifiée si l'on prouve que la série entre parenthèses converge, quels que soient j et l. Pour cela, l et j étant donnés, on considère la série double s_{il} correspondant à l et à une valeur de i (existant par hypothèse) telle que $a_{ij} \neq 0$; dans s_{il} l'ensemble des termes pour lesquels j a la valeur donnée forme une série convergente. Finalement on voit que A(B C) existe et est égal à (A B)C. De la même façon, si on suppose que A(B C) existe, (A B)C existe et lui est égal.

Des contre-exemples simples montrent bien la nécessité de la clause imposant qu'aucune ligne ni colonne ne soit identiquement nulle [11] : par exemple, pour trois matrices A, B, C, si (A B)C existe mais si $A = 0$, B C, donc A(B C) peuvent très bien ne pas exister ; de même pour une suite quelconque de matrices A, B, ... L, dont la première serait nulle : un produit existe, mais il peut n'en exister aucun autre, et cela *même si toutes les matrices ont leurs éléments* $\geqslant 0$. (Notons pourtant dans ce dernier cas que si plusieurs produits existent, ils sont nécessairement égaux : ils correspondent à divers modes de calcul de séries multiples absolument convergentes).

Voici encore un exemple.

Prenons pour A la matrice triangulaire régulière définie par $a_{ij} = 0$ si $j < i$, $a_{ij} = 1$ si $j \geqslant i$; soit B la matrice déduite de A en remplaçant la colonne de rang donné k par une colonne dont tous les éléments ont la valeur 1. Soit enfin X une matrice à une colonne formée des éléments $x_1, x_2, \ldots x_n \ldots$, x_k *étant nul*. Le produit A B n'existe pas (sa $k^{\text{ième}}$ colonne n'est pas définie), donc (A B)X n'existe pas ; par contre A(B X) peut exister : il n'y a qu'à prendre $x_n = y_n - y_{n+1}$, la série $\Sigma\, y_n$ étant convergente et y_{k+1} étant égal à y_k. B X est alors le vecteur de coordonnées $(y_1, y_2 \ldots)$.

Si on suppose de plus que la suite y_n, qui nécessairement tend vers 0, est réelle et décroissante, les x_n sont $\geqslant 0$, et peuvent même être tous > 0 à l'exception de x_k. A′(B′X′) existe, tandis que (A′B′)X′ n'existe pas ; pourtant *une seule ligne ne satisfait pas à la clause indiquée :* la $k^{\text{ième}}$ ligne x_k de X.

Remarquons enfin que, *dans l'application de ces résultats qui a été faite en* (I, 5) *et* (I, 6), *les choses étaient plus simples :* on considérait des produits tels que B′A′X′, B′A′B′Y′ ..., où A et B étaient des matrices triangulaires régulières, et X et Y des matrices à une colonne.

B′A′, B′A′B′ ... existent toujours, leurs éléments se calculant par des sommes finies ; d'autre part chaque ligne ou colonne de A ou B contient au moins un élément non nul : l'élément 1 situé sur la diagonale principale. *Et il n'y a pas lieu ici d'imposer aux éléments de* X *ou* Y (*lignes des matrices* X *ou* Y) *d'être tous* $\neq 0$. Précisons sur l'exemple de B′A′B′Y′.

11. Remarquons toutefois, dans le cas qui vient d'être examiné de trois matrices A, B, C, qu'elle n'est pas utilisée en totalité : seul est utile ce qui concerne les colonnes de A et les lignes de C.

Si on a vérifié que (B′A′) (B′Y′) existe, les mises en facteur à faire pour passer à B′ (A′(B′Y′)) par exemple sont légitimes, puisque ni A ni B n'ont de ligne ou colonne identiquement nulle ; pour (B′A′B′)Y′, où il faut mettre en facteur les éléments de Y′, il n'y a pas de difficulté, puisque, dans l'expression d'un élément de la matrice produit, chaque élément de Y′ n'est multiplié que par une *somme finie*.

III. 3. — Solutions non cramériennes de AX = Y.

Soit A une matrice triangulaire négulière, et deux vecteurs X et Y tels que AX = Y.

On a vu en (I, 5, p. 259) que si $X \neq BY$, B′A′X′ n'existe pas, c'est-à-dire que, parmi les séries écrites dans la formule (5) du paragraphe cité et qui constituent les éléments de la matrice colonne B′A′X′, *l'une au moins* est divergente.

Ceci peut être précisé comme suit. Soit, par exemple, l'inconnue x_1. Considérons la série double de terme général $b_{1i}\, a_{ij}\, x_j$ (on a multiplié la $i^{ième}$ équation scalaire par b_{1i} ; c'est le calcul qui, pour un système fini, servirait à éliminer les inconnues autres que x_1). Si la série double envisagée est absolument convergente, c'est-à-dire si la première série (5) de (I, 5) est convergente, on voit, en sommant la série double par colonnes, puis par lignes, que x_1 est donnée par la formule de Cramer $x_1 = \Sigma\, b_{1j}\, y_j$ (cette dernière série étant d'ailleurs absolument convergente). De même pour les autres inconnues. *Si la $i^{ième}$ série* (5) *est convergente, l'inconnue* x_i *est donnée par la formule de Cramer;* ou, de façon équivalente, *si* x_i *n'est pas donnée par la formule de Cramer, la $i^{ième}$ série* (5) *est nécessairement divergente* (ce qu'on retrouverait encore en remarquant que la quantité ξ_{ip} introduite en (I, 5, p. 260) ne tend pas vers 0).

De ceci résulte que, comme on l'avait déjà vu, pour une solution non banale du système homogène une infinité de séries (5) divergent, puisqu'il y a nécessairement une infinité de $x_i \neq 0$.

Par contre, pour une solution *non cramérienne du système* AX = Y *avec second membre* $Y \neq 0$, *il peut arriver qu'une seule série* (5) *diverge* (et que par suite une seule des inconnues x_i ne soit pas donnée par la formule de Cramer).

Un exemple est fourni par le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{r} x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n + \ldots = y_1 \\ x_2 + x_3 + \ldots + x_n + \ldots = y_2 \\ x_3 + \ldots + x_n + \ldots = y_3 \\ \ldots\ldots \end{array}\right.$$

(pour $i \geqslant 2$ et $j \geqslant i$, $a_{ij} = 1$).

Prenons $y_n = \dfrac{1}{n}$, $a_{1n} = n\,(-1)^n$.

Pour $n \geqslant 2$, $x_n = y_n - y_{n+1} = \dfrac{1}{n\,(n+1)}$, tandis que

$$x_1 = y_1 - a_{12}\, x_2 - \ldots - a_{1n}\, x_n \ldots$$

ou $x_1 = y_1 - a_{12}\,(y_2 \text{-} y_3) \ldots - a_{1n}\,(y_n \text{-} y_{n+1}) \ldots,$

mais on ne peut écrire

$$x_1 = y_1 - a_{12}\, y_2 + \ldots + y_n\,(a_{1,n-1} - a_{1n}) \ldots$$

On a immédiatement la matrice inverse B d'après l'interprétation des b_{ij} donnée en (I, 4, p. 258) : dans une ligne d'indice $i \geqslant 2$, $b_{ii} = 1$, $b_{i,i+1} = -1$, les éléments suivants étant nuls, tandis que $b_{11} = 1$, $b_{12} = -a_{12}$, $\ldots$ $b_{1n} = a_{1,n-1} - a_{1n} \ldots$. Les inconnues x_2 et suivantes sont données par les formules de Cramer, mais pas l'inconnue x_1. Pour $i \geqslant 2$, la somme $\sum_{k=i}^{j} |b_{ik}\, a_{kj}| = 1$ ou 2 suivant que $j = i$ ou $j > i$; toutes les séries (5) correspondant à $i \geqslant 2$ convergent ; la première doit nécessairement diverger, comme on le vérifie d'ailleurs aisément. Le système a une solution unique : on voit donc que *le fait qu'une solution soit unique n'entraîne pas qu'elle soit cramérienne.*

Notons enfin, en supposant toujours l'égalité AX = Y vérifiée, que *la convergence de la $i^{\text{ème}}$ série* (5) *n'est qu'une condition suffisante* (*et non nécessaire*) *pour que* x_i *s'exprime en fonction des* y_j *par la formule de Cramer :* une condition nécessaire et suffisante a été donnée en (I, 5) à l'aide de la quantité ξ_{ip}. Un exemple élémentaire de ce fait est fourni par le système :

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots = y_1 \\ \qquad x_2 + x_3 + \ldots \qquad = y_2 \\ \qquad\quad \ldots\ldots \end{array}\right. \qquad (a_{ij} = 1 \text{ pour } j \geqslant i)$$

Il suffit de prendre pour x_n le terme général d'une série convergente, mais non absolument convergente ; toutes les séries (5) divergent, or $x_1 = y_1 \text{-} y_2, \ldots$

Un exemple moins banal résulte de ce qui a été vu à la fin du paragraphe (II, 7). Soit le système :

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2\, z_0 + \ldots \qquad + x_n\, z_0^{\,n-1} + \ldots = y_1 \\ \qquad x_2 + x_3\, z_1 + \ldots + x_n\, z_1^{\,n-2} + \ldots = y_2 \\ \qquad\quad \ldots\ldots \end{array}\right.$$

Pour $p \geqslant n$, $a_{n+1,\, p+1} = z_n^{\,p-n}$; on suppose que $z_n = (-1)^n$. On a vu qu'alors tous les $|b_{ij}|$ sont égaux à 1 ou 2. Prenons $x_n = \dfrac{1}{n^2 \log(n+1)}$. Les séries (5) divergent, comme la série de terme général $\dfrac{1}{n \log(n+1)}$; par contre tous les

$\xi_{ip} \to 0$, car il en est ainsi de $p(x_p + x_{p+1} + \ldots)$, et cela entraîne que tous les x_i sont donnés en fonction des y_j par les formules de Cramer.

III. 4. — Exemples de séries doubles non absolument convergentes.

La résolution de systèmes linéaires, homogènes ou non, d'une infinité d'équations à une infinité d'inconnues, donne un procédé systématique de formation de séries doubles non absolument convergentes.

Soit le système (S) : $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j = y_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, où les a_{ij}, x_j, y_i sont des nombres complexes. Supposons pour fixer les idées les *seconds membres* y_i *tous nuls,* et soit une solution non banale X (on a vu en (I, 7) des cas où il en existe ; d'ailleurs le théorème de Pólya en fournit).

Si nous considérons la série double de terme général $a_{ij} x_j$, on peut sommer par lignes, et on trouve évidemment 0, tandis que la sommation par colonnes n'est en général pas possible : il suffit pour l'empêcher que, si $x_j \neq 0$, la série $\sum_i a_{ij}$ diverge ; ou encore la sommation par colonnes peut être possible mais donner une somme différente. Des exemples élémentaires de telles séries doubles, avec $x_j = 1$ pour tout j, sont fournis par les matrices $A = (a_{ij})$ suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \ldots \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \ldots \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \ldots \\ & \ldots\ldots & & \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \ldots \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \ldots \\ & & \ldots\ldots & & \end{pmatrix}$$

Revenons au système (S), $AX = Y$, et supposons-le maintenant triangulaire régulier, de sorte que A admet une inverse à gauche $B = (b_{ij})$. Si (S) admet une solution $X \neq BY$, à chacune des inconnues x_k non donnée par la formule de Cramer correspond d'après (III, 3) une série double non absolument convergente, la série de terme général $b_{ki} a_{ij} x_j$ (k fixé ; $i, j = 1,2 \ldots$).

III. 5. — Cas où A′B′ = B′A′.

A est toujours triangulaire régulière, B est son inverse à gauche, I la matrice unité : $A B = B A = I$.

Nous avons vu en (I, 5, p. 260) un cas où le produit $A'B'$ est *commutatif :* celui où, dans A, $a_{ij} \leqslant 0$ pour $j > i$; A est alors égale à $2I - A'$. $B = B'$, et de $AB = BA = I$, on tire $A'B' = B'A' = 2B - I$.

Un autre cas de commutativité du produit $A'B'$ est celui où, dans A, les lignes se déduisent de la première par translation parallèle à la diagonale principale (cf. (II, 1)). La même propriété a lieu pour B, A′, B′ et par suite $A'B' = B'A'$.

Mais il n'est pas vrai que, pour une matrice triangulaire régulière quelconque, A'B' = B'A'.

Il suffit pour le voir d'expliciter le début des calculs. Pour simplifier l'écriture, nous désignons les éléments qui seront utilisés par des lettres sans indices.

$$\text{Soit} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c & \dots \\ 0 & 1 & d & e & \dots \\ 0 & 0 & 1 & f & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ & & \dots & & \end{pmatrix}$$

$$\text{On trouve :} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -a & ad-b & ae-c-f(ad-b) & \dots \\ 0 & 1 & -d & df-e & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -f & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ & & & \dots & \end{pmatrix}$$

On voit aussitôt que les quatrièmes éléments de la première ligne de A'B' et de celle de B'A' sont en général différents.

III. 6. — Matrices de changement d'origine.

Voici enfin un exemple usuel de matrice triangulaire régulière, qui est du type étudié en (II, 1).

Soit $f(z) = \sum a_n \frac{z^n}{n!}$ une série de rayon de convergence non nul R. Soit $\sum b_n \frac{(z-z_0)^n}{n!}$ son développement autour d'un point quelconque z_0, intérieur au cercle de convergence. Si l'on désigne par X et Y les matrices à une colonne, formées des éléments $a_0, a_1, \dots$ pour X, $b_0, b_1 \dots$ pour Y, on voit que l'on a : $Y = 0(z_0)\, X$, où $0(z_0)$ désigne la matrice triangulaire régulière dont la première ligne est :

$$1 \qquad z_0 \qquad z^2{}_0/2! \qquad \dots \qquad z^n{}_0/n! \qquad \dots$$

et dont les autres lignes s'obtiennent par translation parallèle à la diagonale principale. Nous dirons qu'une telle matrice $0(z_0)$ est une *matrice de changement d'origine.* Elle correspond bien en fait à un changement d'origine pour les séries entières de rayon de convergence supérieur à $|z_0|$.

De cette interprétation découle la formule [12]

$$0(z_0)\;\; 0(z_1) = 0(z_0 + z_1),$$

que l'on vérifie d'ailleurs aisément par un calcul direct. L'inverse à gauche de $0(z_0)$ est $0(-z_0)$. D'après (III, 1) et le théorème de Pólya vu en (I, 7),

12. Pour n'avoir pas à soulever inutilement de questions de convergence, on effecterait le changement d'origine pour un polynôme arbitraire.

$0(z_0)$ admet une infinité d'inverses à droite, lorsque $z_0 \neq 0$: le système $0(z_0)\,X = 0$ satisfait en effet à l'hypothèse du théorème de Pólya.

Matrices permutables avec les matrices de changement d'origine

Soit $M = (m_{ij})$ une matrice quelconque ($i, j = 1, 2 \ldots$). Le produit $M\,0(z_0)$ existe toujours (ses éléments sont des polynômes en z_0), tandis que, si $z_0 \neq 0$, le produit $0(z_0)\,M$ peut ne pas exister, ses éléments étant des séries entières en z_0.

Mais, si $0(z_0)\,M$ existe, il en est de même de $0(z)\,M$ pour tout z de module $< |z_0|$.

Supposons que, pour $z_0 \neq 0$, $0(z_0)\,M$ existe, et cherchons à quelle condition $0(z)\,M = M\,0(z)$ pour tout z de module $< |z_0|$. On voit facilement, en explicitant les calculs, que M doit être une matrice *triangulaire du type étudié en* (II, 1) : la première ligne, que nous notons $c_0\, c_1 \ldots c_n \ldots$, est arbitraire, les autres se déduisent de la première par translation parallèle à la diagonale principale, tous les termes au-dessous de cette diagonale étant nuls. Inversement, s'il en est ainsi, le produit par M d'une matrice de changement d'origine quelconque existe et est commutatif.

Application :

Soit E l'espace vectoriel des suites de nombres complexes, F le sous-espace des suites qui ne comportent qu'un nombre fini d'éléments non nuls, λ une *application linéaire* de F dans F. Nous représentons toujours la suite $(a_0, a_1, \ldots a_n \ldots)$ par la matrice à une colonne ou vecteur-colonne X.

A λ correspond une matrice bien déterminée $M = (m_{ij})$ ($i, j = 1, 2 \ldots$), telle que, pour $X \in F$, $\lambda(X) = MX$. M est à *colonnes finies* : sa $j^{ième}$ colonne est formée par la suite transformée de la suite (a_n) dont tous les termes sont nuls, sauf le $j^{ième}$ qui vaut 1.

On peut interpréter λ comme application linéaire de l'espace vectoriel des polynômes $\Sigma \frac{a_n}{n!} z^n$ dans lui-même. C'est pourquoi se pose le problème suivant : *quelles sont les applications linéaires λ dont la matrice* M *est invariante lorsqu'on effectue dans le plan* (z) *un changement arbitraire d'origine?*

La condition est $0(z_0) \times (MX) = M(0(z_0)X)$, quels que soient $X \in F$ et z_0; or les matrices en jeu sont toutes à colonnes finies, les produits existent et sont associatifs d'après (I, 3). La condition s'écrit donc encore :

$$0(z_0)\; M = M\; 0(z_0) \quad \text{pour tout } z_0.$$

Les matrices M ayant cette propriété viennent d'être caractérisées. On voit que, pour les polynômes, *l'opérateur λ correspondant est* $\lambda = \Sigma c_n D^n$, où D est le symbole de la dérivation.

Nous avons, dans ce qui précède, considéré seulement une application linéaire λ de F dans F, de sorte que n'apparaissaient que des matrices à colonnes finies, et qu'il n'y avait pas de problème de convergence. On pourrait plus généralement, *étant donné une matrice* $M = (m_{ij})$ quelconque, à colonnes finies ou non, considérer l'application $X \to MX$ pour tous les X de de E tels que MX soit défini (ces X forment un sous-espace de E, qui contient F), ou pour certains d'entre eux. Si les m_{ij} ne sont pas « trop grands », on pourra se limiter aux vecteurs X tels que les coordonnées a_n de X et α_n de MX soient les coefficients de fonctions $f(z) = \sum \frac{a_n z^n}{n!}$, $\varphi(z) = \sum \frac{\alpha_n z^n}{n!}$ holomorphes à l'origine, et dont on pourra supposer de plus que la croissance est limitée.

Voici des exemples très simples :

a) si, pour tout j, $|m_{ij}| \leqslant \mu_i$, la série $\Sigma\mu_i$ étant convergente, l'application $X \to MX$ applique dans lui-même l'espace E_1 des fonctions $f(z) = \sum \frac{a_n z^n}{n!}$ telles que $\Sigma|a_n|$ converge;

b) si on suppose seulement que tous les $|m_{ij}|$ sont $\leqslant K$, $X \to MX$ applique le même espace E_1 des fonctions $f(z)$ dans l'espace E_2 des fonctions $\mathcal{F}(z) = \sum \frac{A_n z^n}{n!}$ pour lesquelles la suite $|A_n|$ est majorée.

Ici aussi se pose le problème de la recherche des matrices M telles que l'application qu'elles définissent soit encore représentée par la matrice M, c'est-à-dire soit de la forme $Y \to MY$, lorsqu'on a effectué dans le plan (z) un *changement arbitraire d'origine,* qui à X fait correspondre $Y = 0(z_0)X$.

Le raisonnement et le résultat sont les mêmes que ci-dessus. Le seul point qui mérite attention est la démonstration de l'existence et de l'associativité des produits $0(z_0)\ MX$ et $M\ 0(z_0)\ X$.

Pour cela, on remarque d'abord que la propriété caractéristique de $f \in E_1$ (et aussi de $\mathcal{F} \in E_2$) est *invariante dans un changement d'origine.* Si, en effet, pour $f \in E_1$, $f(z) = \Sigma \frac{a_n z^n}{n!} = \Sigma \frac{b_n}{n!}(z-z_0)^n$, on voit aisément, en écrivant les égalités qui donnent les b_n en fonction des a_n et en les ajoutant, que $\Sigma |b_n| \leqslant e^{|z_0|} \Sigma |a_n|$.

Dès lors, il suffit de remplacer z_0 par $|z_0|$, f par une fonction majorante appartenant à E_1 et dont tous les coefficients sont strictement > 0, M par une matrice satisfaisant à des inégalités analogues à celles de *b*), et dont les éléments, tous > 0, majorent les $|m_{ij}|$. Il est clair que les produits formés avec ces nouvelles matrices existent; d'après les remarques développées en (III, 2), cela entraîne l'existence et l'associativité des produits initialement considérés.

Les seules matrices répondant à la question sont les matrices

$$\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_n & \dots \\ 0 & c_0 & c_1 & \dots & c_{n-1} & \dots \\ 0 & 0 & c_0 & \dots & . & \\ & & & \dots & & \end{pmatrix}, \text{ avec } |c_n| \leqslant K.$$

Elles sont du type b). Il n'y en a pas du type a) (sauf la matrice nulle). On voit aisément qu'elles définissent sur E_1 l'opérateur $\Sigma\, c_n\, D^n$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] à [6] : les références sont données dans la bibliographie qui termine la partie (I) de ce mémoire (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* 4e série, t. XXI, p. 255-265).

[7] VON KOCH (H.). On a class of equations connected with Euler-Maclaurin's sum-formula. *Arkiv för Matematik,* Bd 15, n° 26 (1921).

[8] VALIRON (G.). *Théorie des fonctions,* Paris (Masson), 1942.

[9] GONTCHAROFF (W.). *Détermination des fonctions entières par interpolation,* Paris (Hermann), 1937.

[10] MACINTYRE (S. S.). On the zeros of successive derivatives of integral functions. *Trans. Amer. Math. Soc.,* 67 (1949), p. 241-251.

[11] BOAS (R. P.). Expansions of analytic functions. *Trans. Amer. Math. Soc.,* 48 (1940), p. 467-487.

[12] BOAS (R. P.). Univalent derivatives of entire functions. *Duke Math. Journal,* 6 (1940), p. 719-721.

[13] POMMIEZ (M.). Trois notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. 250 (1960), p. 1168-1170 et p. 2669-2671 ; t. 251 (1960), p. 1707-1709.