ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

M. MENDES

Sur quelques groupes finis de transformations

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série, tome 23 (1959), p. 141-155
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1959_4_23__141_0>

Sur quelques groupes finis de transformations

par M. MENDES

Résumé. — Etude des groupes de transformations dépendant de paramètres dans le plan et dans l'espace qui conservent les angles ou la forme de l'équation du potentiel : détermination des transformations infinitésimales. Application aux solutions de l'équation de Laplace.

1. — Généralités.

Considérant un groupe de transformations

(1) $$x'_i = x'_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

liant les n variables x' aux n variables x, dépendant de r paramètres a et admettant la transformation identique obtenue en annulant tous ces paramètres, nous chercherons successivement la condition nécessaire et suffisante pour que ces transformations conservent soit les angles, soit la forme de l'équation du potentiel. Plus précisément, un groupe de transformations étant défini par ses transformations infinitésimales, nous étudierons la forme de ces dernières. Le cas du plan, particulièrement simple et qui ne peut d'ailleurs, comme on le verra, être considéré comme un cas particulier obtenu en faisant $n = 2$, sera traité à part pour chacune des ces questions.

Nous utiliserons ce résultat de la théorie des groupes :

Étant donné le groupe de transformation (1), si l'on représente par

$$X_h F = \xi_{hi}(x) \frac{\partial F}{\partial x_i} \text{ [1]} \qquad (h = 1, \ldots, r)$$

les transformations infinitésimales, les x' vérifient un système d'équations

(2) $$\frac{\partial x'_i}{\partial a_h} = \lambda_{kh}(a)\, \xi_{ki}(x'),$$

et leur développement suivant les puissances des a est

(3) $$x'_i = x_i + \lambda^0_{kh}\, \xi^0_{ki}\, a_h + \ldots.$$

les indices supérieurs 0 indiquant que l'on a remplacé les a par 0, les x' par les x correspondants dans les fonctions où ils se présentent. De plus, le déterminant d'ordre r formé par les λ^0_{kh} est différent de zéro, de sorte que tout système linéaire et homogène aux u de la forme

$$\lambda^0_{kh}\, u_k = 0$$

entraîne $u_1 = \ldots = u_r = 0$.

---

(1) Nous utilisons de façon générale dans ce mémoire la convention classique consistant à considérer comme indice de sommation un indice écrit deux fois dans un monome.

PREMIER PROBLÈME : TRANSFORMATIONS CONFORMES

2. — Position du problème.

Les équations (1) transformant l'espace des x en l'espace des x', considérons, à partir de chacun de deux points homologues (x) et (x'), deux déplacements correspondants liés par les relations

$$dx'_i = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}\, dx_j\,, \qquad \delta x'_i = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}\, \delta x_j\,.$$

L'égalité des angles des directions $(dx,\ \delta x)$ et $(dx',\ \delta x')$ est donnée par

$$\frac{\dfrac{\partial x'_i}{\partial x_j}\dfrac{\partial x'_i}{\partial x_{j'}}\, dx_j\, \delta x_{j'}}{\sqrt{\sum\limits_i \left(\dfrac{\partial x'_i}{\partial x_j}\, dx_j\right)^2}\ \sqrt{\sum\limits_i \left(\dfrac{\partial x'_i}{\partial x_j}\, \delta x_j\right)^2}} = \frac{dx_j\, \delta x_j}{\sqrt{\sum\limits_j dx_j^2}\ \sqrt{\sum\limits_j \delta x_j^2}}\,.$$

Pour qu'elle soit vérifiée identiquement, il faut et il suffit que l'on ait

$$\sum_i \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}\frac{\partial x'_i}{\partial x_{j'}} = 0, \tag{4}$$

$$(j \neq j')$$

$$\sum_i \left(\frac{\partial x'_i}{\partial x_j}\right)^2 = \sum_i \left(\frac{\partial x'_i}{\partial x_{j'}}\right)^2. \tag{5}$$

Ces relations expriment en même temps qu'entre les éléments linéaires des deux espaces existe la relation

$$ds'^2 = \lambda^2\,(x,\ a)\; ds^2,$$

λ^2 étant la valeur commune de toutes les quantités $\sum\limits_i \left(\dfrac{\partial x'_i}{\partial x_j}\right)^2$.

Compte tenu de (3), elles s'écrivent, i étant indice de sommation, et δ_{ij} étant le symbole de Kronecker, égal à 1 ou 0 selon que $i = j$ ou $i \neq j$,

$$\left(\delta_{ij} + \lambda^0{}_{kh}\, a_h \frac{\partial \xi^0{}_{ki}}{\partial x_j} + \ldots\right)\left(\delta_{ij'} + \lambda^0{}_{kh}\, a_h \frac{\partial \xi^0{}_{ki}}{\partial x_{j'}} + \ldots\right) = 0,$$

$$\sum_i \left(\delta_{ij} + \lambda^0{}_{kh}\, a_h \frac{\partial \xi^0{}_{ki}}{\partial x_j} + \ldots\right)^2 = \sum_i \left(\delta_{ij'} + \lambda^0{}_{kh}\, a_h \frac{\partial \xi^0{}_{ki}}{\partial x_{j'}} + \ldots\right)^2,$$

ce qui donne, en se bornant aux transformations infinitésimales,

$$\lambda^0{}_{kh}\left(\frac{\partial \xi^0{}_{kj}}{\partial x_{j'}} + \frac{\partial \xi^0{}_{kj'}}{\partial x_j}\right) = 0,$$

$$\lambda^0{}_{kh} \frac{\partial \xi^0{}_{k1}}{\partial x_1} = \lambda^0{}_{kh} \frac{\partial \xi^0{}_{k2}}{\partial x_2} = \ldots = \lambda^0{}_{kh} \frac{\partial \xi^0{}_{kn}}{\partial x_n}\,.$$

On en tire, d'après une remarque précédente, toutes les relations

(6) $$\frac{\partial \xi^0_{kj}}{\partial x_{j'}} + \frac{\partial \xi^0_{kj'}}{\partial x_j} = 0, \qquad (j \neq j')$$

(7) $$\frac{\partial \xi^0_{k1}}{\partial x_1} = \frac{\partial \xi^0_{k2}}{\partial x_2} = \ldots = \frac{\partial \xi^0_{kn}}{\partial x_n}.$$

3. — Cas de deux variables.

Bornons-nous d'abord au cas du plan ($n = 2$) et, pour simplifier, posons

$$x_1 = x, \qquad x_2 = y, \qquad x'_1 = x' \qquad x_2' = y',$$
$$\xi_{k1} = \xi_k, \qquad \xi_{k2} = \eta_k.$$

Les relations précédentes se réduisent à

(6') $$\frac{\partial \xi^0_k}{\partial y} + \frac{\partial \eta^0_k}{\partial x} = 0,$$

(7') $$\frac{\partial \xi^0_k}{\partial x} = \frac{\partial \eta^0_k}{\partial y}.$$

Ces équations donnent, $U_k(x, y)$ étant une fonction harmonique quelconque,

$$\xi^0_k = \frac{\partial U_k}{\partial x}, \quad \eta^0_k = -\frac{\partial U_k}{\partial y}.$$

Ces égalités sont des identités en x, y; on a donc, x', y' étant mis à la place de x, y dans les U,

$$\xi_k(x', y') = \frac{\partial U_k(x', y')}{\partial x'}, \quad \eta_k(x', y') = -\frac{\partial U_k(x', y')}{\partial y'},$$

d'où les relations

(8) $$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial x'}{\partial a_h} &= \lambda_{kh}(a)\,\xi_k(x', y') = \lambda_{kh}(a)\frac{\partial U_k(x', y')}{\partial x'}, \\ \frac{\partial y'}{\partial a_h} &= \lambda_{kh}(a)\,\eta_k(x', y') = -\lambda_{kh}(a)\frac{\partial U_k(x', y')}{\partial y'}, \end{aligned}\right.$$

et les transformations infinitésimales engendrant le groupe de transformations sont, x, y étant remis dans les U, données par les symboles

$$X_h F = \frac{\partial U_h}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial U_h}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial y}.$$

Démontrons que, réciproquement, si les ξ et les η sont de cette forme, avec les U fonctions harmoniques, les transformations (1) sont des transformations conformes quels que soient les a. Cela revient à démontrer que les relations (4), (5), qui se réduisent ici à

(4') $$\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y} = 0,$$

$$(5') \qquad \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial y}\right)^2,$$

sont vérifiées.

Elles donnent successivement

$$\frac{\dfrac{\partial x'}{\partial x}}{\dfrac{\partial y'}{\partial y}} = - \frac{\dfrac{\partial y'}{\partial x}}{\dfrac{\partial x'}{\partial y}} = \mu,$$

$$(\mu^2 - 1)\left[\left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial y}\right)^2\right] = 0,$$

d'où $\mu = \pm 1$. Mais, x' et y' se réduisant respectivement à x et y pour tous les a nuls, la solution $\mu = 1$ est seule acceptable, et l'on a les égalités classiques, qui remplacent (4′) et (5′),

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial y'}{\partial y}, \qquad \frac{\partial x'}{\partial y} = - \frac{\partial y'}{\partial x}.$$

Or les relations (8) donnent, par dérivation,

$$\frac{\partial^2 x'}{\partial a_h\, dx} = \lambda_{kh}\left(\frac{\partial \xi_k}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial \xi_k}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 x'}{\partial a_h\, \partial y} = \lambda_{kh}\left(\frac{\partial \xi_k}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial \xi_k}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 y'}{\partial a_h\, \partial x} = -\lambda_{kh}\left(\frac{\partial \eta_k}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial \eta_k}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 y'}{\partial a_h\, \partial y} = -\lambda_{kh}\left(\frac{\partial \eta_k}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial \eta_k}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y}\right),$$

d'où, en posant

$$\frac{\partial x'}{\partial x} - \frac{\partial y'}{\partial y} = u, \qquad \frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial y'}{\partial x} = v,$$

et en tenant compte de (6′) et (7′),

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial a_h} &= \lambda_{kh}\left(\frac{\partial \xi_k}{\partial x'}u + \frac{\partial \xi_k}{\partial y'}v\right), \\ \frac{\partial v}{\partial a_h} &= \lambda_{kh}\left(-\frac{\partial \xi_k}{\partial y'}u + \frac{\partial \xi_k}{\partial x'}v\right). \end{aligned}\right\} \qquad (h = 1, \ldots, r)$$

Pour tous les a nuls, x' se réduit à x, y' à y, donc u et v à 0. La seule solution de ce système aux dérivées partielles correspondant à ces valeurs initiales est précisément $u = v = 0$. Les relations $u = 0$, $v = 0$ sont donc bien vérifiées pour toutes les valeurs des paramètres; elles entraînent les relations (4′), (5′).

Nous sommes ainsi arrivés au résultat suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que les transformations

$$x' = x'(x, y, a), \qquad y' = y'(x, y, a),$$

formant un groupe à r *paramètres* a *contenant la transformation identique, soient des transformations conformes quelles que soient les valeurs attribuées aux paramètres est que les transformations infinitésimales de ce groupe soient de la forme*

$$X_h F = \frac{\partial U_h}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial U_h}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial y},$$

où les U sont des fonctions harmoniques.

On sait d'ailleurs que ces transformations infinitésimales engendrant un groupe de transformations, il existe r^3 coefficients c_{hks} dépendant de trois indices variant de 1 à r et vérifiant les relations

$$(9) \quad \begin{cases} c_{hks} + c_{khs} = 0, \\ c_{hks}\, c_{slt} + c_{kls}\, c_{sht} + c_{lhs}\, c_{skt} = 0, \end{cases}$$

tels que l'on ait toutes les identités

$$(X_h X_k - X_k X_h)\, F = c_{hks} X_s F,$$

ce qui donne

$$(10) \quad \begin{cases} X_h\left(\dfrac{\partial U_k}{\partial x}\right) - X_k\left(\dfrac{\partial U_h}{\partial x}\right) = 0, \\[2ex] X_h\left(\dfrac{\partial U_k}{\partial y}\right) - X_k\left(\dfrac{\partial U_h}{\partial y}\right) = 0, \end{cases}$$

ou

$$(11) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial U_h}{\partial x}\dfrac{\partial^2 U_k}{\partial x^2} - \dfrac{\partial U_h}{\partial y}\dfrac{\partial^2 U_k}{\partial x\,\partial y} - \dfrac{\partial U_k}{\partial x}\dfrac{\partial^2 U_h}{\partial x^2} + \dfrac{\partial U_k}{\partial y}\dfrac{\partial^2 U_h}{\partial x\,\partial y} = c_{hks}\dfrac{\partial U_s}{\partial x}, \\[2ex] \dfrac{\partial U_h}{\partial x}\dfrac{\partial^2 U_k}{\partial x\,\partial y} - \dfrac{\partial U_h}{\partial y}\dfrac{\partial^2 U_k}{\partial y^2} - \dfrac{\partial U_k}{\partial x}\dfrac{\partial^2 U_h}{\partial x\,\partial y} + \dfrac{\partial U_k}{\partial y}\dfrac{\partial^2 U_h}{\partial y^2} = c_{hks}\dfrac{\partial U_s}{\partial y}. \end{cases}$$

Réciproquement, *si l'on considère* r *fonctions harmoniques U solutions de (11), les* c *vérifiant les relations (9), les transformations infinitésimales supposées indépendantes*

$$X_h F = \frac{\partial U_h}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial U_h}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial y}$$

engendrent un groupe à r *paramètres essentiels de transformations conformes,* car des équations (11) ou des équations équivalentes (10) on déduit immédiatement les identités

$$(X_h X_k - X_k X_h)\, F = c_{hks} X_s F.$$

En résumé, *la recherche des groupes de transformations conformes dans le plan revient à l'intégration du système (11) au moyen de fonctions harmoniques.*

4. — Détermination de fonctions harmoniques.

Indiquons au sujet du système (11) une propriété permettant, à partir de fonctions harmoniques données de x, y, d'en déduire de nouvelles.

Soient q fonctions harmoniques données $U_1, \ldots, U_q$; considérons les équations (11) correspondant à $h, k = 1, \ldots, q$, les coefficients c étant quelconques; elles se partagent en deux groupes de $\dfrac{q(q-1)}{2}$ équations chacun qui permettent de calculer les $\dfrac{\partial U_t}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial U_t}{\partial y}$ $(t = q+1, \ldots, r)$ si, q et r étant liés par la relation $r - q = \dfrac{q(q-1)}{2}$, d'où $r = \dfrac{q(q+1)}{2}$, le déterminant

$$\delta = \begin{vmatrix} c_{1,2,q+1} & \cdots\cdots & c_{1,2,r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{1,q,q+1} & \cdots\cdots & c_{1,q,r} \\ c_{2,3,q+1} & \cdots\cdots & c_{2,3,r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{q-1,q,q+1} & \cdots\cdots & c_{q-1,q,r} \end{vmatrix}$$

est différent de *zéro*.

La dérivation par rapport à y des équations de la première ligne et par rapport à x des équations de la seconde ligne donne, par soustraction et en tenant compte de

$$\frac{\partial^2 U_h}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 U_h}{\partial y\, \partial x}, \quad \Delta U_h = 0, \qquad (h = 1, \ldots, q)$$

les relations

$$c_{hkt}\left(\frac{\partial^2 U_t}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial^2 U_t}{\partial y\, \partial x}\right) = 0,$$

d'où, en vertu de $\delta \neq 0$,

$$\frac{\partial^2 U_t}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 U_t}{\partial y\, \partial x}.$$

Le système considéré aux fonctions inconnues U_t est donc complètement intégrable.

La dérivation par rapport à x des équations de la première ligne et par rapport à y des équations de la seconde ligne donne ensuite, par addition, compte tenu de $\Delta U_h = 0$,

$$c_{hkt}\, \Delta U_t = 0,$$

d'où l'on déduit pour tous les indices t, $\Delta U_t = 0$.

Le système (11) nous a donc fourni, à partir de q fonctions harmoniques, $\frac{q(q-1)}{2}$ nouvelles fonctions harmoniques.

Ces fonctions, même si les c vérifient les relations (9), ne vérifient d'ailleurs pas en général les relations

$$X_h\left(\frac{\partial U_t}{\partial x}\right) - X_t\left(\frac{\partial U_h}{\partial x}\right) = c_{hts}\frac{\partial U_s}{\partial x},$$

$$X_t\left(\frac{\partial U_{t'}}{\partial x}\right) - X_{t'}\left(\frac{\partial U_t}{\partial x}\right) = c_{tt's}\frac{\partial U_s}{\partial x}, \quad (t, t' = q+1, \quad .., r)$$

et les analogues, de sorte qu'on ne peut les associer à $U_1, \ldots, U_q$ pour obtenir de nouvelles transformations infinitésimales.
Il suffit, pour s'en convaincre, de prendre

$$U_1 = \mathrm{Log}\,(x^2+y^2), \qquad U_2 = x,$$

et de considérer une troisième fonction U_3 définie par les relations (11) qui se réduisent à

$$-\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} = c_{121}\frac{\partial U_1}{\partial x} + c_{122} + c_{123}\frac{\partial U_3}{\partial x},$$

$$-\frac{\partial^2 U_1}{\partial x\,\partial y} = c_{121}\frac{\partial U_1}{\partial y} + c_{123}\frac{\partial U_3}{\partial y},$$

et donnent

$$U_3 = -\frac{1}{c_{123}}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + c_{121}U_1 + c_{122}x\right) + C^{te};$$

quels que soient les coefficients c, on ne peut réaliser les équations (11) dans lesquelles on fait $h=1$, $k=3$, puis $h=2$, $k=3$.

5. — Cas général.

Supposons maintenant que le nombre n des variables x soit au moins égal à *trois.*

En désignant par $U_{ij}(x_i, x_j)$ $(i \neq j)$ des fonctions arbitraires des deux seules variables x_i, x_j, vérifiant la relation $U_{ij} + U_{ji} = 0$, on voit facilement que l'intégrale générale du système (6) est donnée par

$$\xi^0_{ki} = \sum_{j\neq i}\frac{\partial U_{ij}}{\partial x_i}.$$

Les relations (7) s'écrivent

$$\sum_{j\neq 1}\frac{\partial^2 U^k_{1j}}{\partial x_1^2} = \sum_{j\neq 2}\frac{\partial^2 U^k_{2j}}{\partial x_2^2} = \ldots = \sum_{j\neq n}\frac{\partial^2 U^k_{nj}}{\partial x^2_n}.$$

Tenant compte de l'égalité $U_{12} + U_{21} = 0$ et posant $\Delta U_{12} = \frac{\partial^2 U_{12}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U_{12}}{\partial x_2^2}$, on aura, en particulier,

$$\Delta U_{12} + \sum_{l \neq 1,2} \left(\frac{\partial^2 U^k{}_{1l}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 U^k{}_{2l}}{\partial x_2^2} \right) = 0,$$

d'où, en vertu de la dépendance des fonctions U par rapport aux variables, l'égalité

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial^2 U^k{}_{13}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 U^k{}_{23}}{\partial x_2^2} \right) = 0,$$

qui entraîne des relations de la forme

$$\frac{\partial^2 U^k{}_{13}}{\partial x_1^2} = \rho^k{}_{13}(x_3) + \sigma^k{}_{13}(x_1),$$

$$\frac{\partial^2 U^k{}_{23}}{\partial x_2^2} = \rho^k{}_{23}(x_3) + \sigma^k{}_{23}(x_2),$$

avec $\rho^k{}_{13}(x_3) = \rho^k{}_{23}(x_3)$.

De façon générale on aura

$$\frac{\partial^2 U^k{}_{ij}}{\partial x^2_i} = \rho^k{}_j(x_j) + \sigma^k{}_{ij}(x_i),$$

les fonctions ρ ne dépendant, outre l'indice k, que de l'indice dont est affectée la variable dont elles dépendent.

Les relations (7) donnent alors, pour deux indices quelconques différents i, i',

$$\sum_{j \neq i} \left[\rho^k{}_j(x_j) + \sigma^k{}_{ij}(x_i) \right] = \sum_{j' \neq i'} \left[\rho^k{}_{j'}(x_{j'}) + \sigma^k{}_{i'j'}(x_{i'}) \right],$$

ou

$$\sum_j \sigma^k{}_{ij}(x_i) - \rho^k{}_i(x_i) = \sum_{j'} \sigma^k{}_{i'j'}(x_{i'}) - \rho^k{}_{i'}(x_{i'}) = c^k,$$

la constante du dernier membre ne dépendant que de l'indice k. On en déduit

$$\frac{\partial \xi^0{}_{ki}}{\partial x_i} = \sum_{p=1}^{n} \rho^k{}_p(x_p) + c^k.$$

Mais l'égalité

$$\frac{\partial^4 U^k{}_{ij}}{\partial x_i^2 \, \partial x_j^2} = \frac{\partial^4 U^k{}_{ij}}{\partial x_j^2 \, \partial x_i^2}$$

donne

$$\rho^k{}_j{}''(x_j) + \rho^k{}_i{}''(x_i) = 0,$$

et de même, avec un troisième indice j',

$$\rho^k{}_{j'}{}''(x_{j'}) + \rho^k{}_i{}''(x_i) = 0.$$

On en déduit immédiatement toutes les égalités $\rho^k{}_i{}''(x_i) = 0$, d'où

$$\rho^k{}_i(x_i) = c^k{}_i x_i + d^k{}_i.$$

On a donc, en posant $c^k + \sum_p d^k{}_p = D^k$,

$$\frac{\partial \xi^0{}_{ki}}{\partial x_i} = \sum_{p=1}^{n} c^k{}_p\, x_p + D^k,$$

d'où

$$\xi^0{}_{ki} = x_i \Big(\sum_{j \neq i} c^k{}_j\, x_j + D^k\Big) + \frac{c^k{}_i}{2} x_i^2 + \varphi_i^k (x_j).$$

La relation

$$\frac{\partial \xi^0{}_{ki}}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi^0{}_{kj}}{\partial x_i} = 0$$

donne alors

$$c_j^k\, x_i + \frac{\partial \varphi_i^k}{\partial x_j} + c_i^k\, x_j + \frac{\partial \varphi_j^k}{\partial x_i} = 0.$$

Tenant compte de l'indépendance de $\varphi^k{}_i$ par rapport à x_i pour toutes les valeurs de i, on voit facilement que l'on a

$$\varphi_i^k = -\frac{c_i^k}{2} \sum_{j \neq i} x_j^2 + \sum_j e^k{}_{ij}\, x_j + f_i^k,$$

les e et f étant des coefficients constants vérifiant la condition $e^k{}_{ij} + e^k{}_{ji} = 0$.

Nous arrivons en définitive à l'expression des ξ^0 :

$$\xi^0{}_{ki} = \frac{c_i^k}{2} x_i^2 + D^k\, x_i + x_i \sum_{j \neq i} c_j^k\, x_j - \frac{c_i^k}{2} \sum_j x_j^2 + \sum_j e^k{}_{ij}\, x_j + f_i^k,$$

Cette relation étant une identité aux x, on a

$$\xi_{ki}(x') = \frac{c_i^k}{2} x'^2_i + D^k\, x'_i + x'_i \sum_{j \neq i} c_j^k\, x'_j - \frac{c_i^k}{2} \sum_j x'^2_j + \sum_j e^k{}_{ij}\, x'_j + f_i^k.$$

Ayant ainsi obtenu la forme nécessaire des transformations infinitésimales pour que les transformations (1) soient conformes, il nous faut montrer que, réciproquement, si les ξ sont de cette forme, les x' définis par (1) et vérifiant (2) définissent une transformation conforme quels que soient les a, c'est-à-dire qu'ils vérifient les relations (4) et (5).

Partons des égalités obtenues en exprimant, grâce à (1), les x' en fonction des x,

$$\frac{\partial \xi_{kp}(x')}{\partial x_i} = \Big(c_p^k\, x'_p + D^k + \sum_{j \neq p} c_j^k\, x'_j\Big) \frac{\partial x'_p}{\partial x_i} + \sum_{j \neq p} \Big(c_j^k x'_p - c_p^k x'_j + e^k{}_{pj}\Big) \frac{\partial x'_j}{\partial x_i}.$$

Posant, avec p indice de sommation variant de 1 à n,

$$S_{ii'} = \frac{\partial x'_p}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x'_p}{\partial x_{i'}},$$

on a, en vertu de (2),

$$\frac{\partial S_{ii'}}{\partial a_h} = \lambda_{kh}(a)\left[\frac{\partial x'}{\partial x_{i'}}\frac{\partial \xi_{kp}(x')}{\partial x_i} + \frac{\partial x'_p}{\partial x_i}\frac{\partial \xi_k(x')}{\partial x_{i'}}\right], \quad (k \text{ indice de sommation}).$$

Remplaçant $\frac{\partial \xi_{kp}(x')}{\partial x_i}$ et $\frac{\partial \xi_{kp}(x')}{\partial x_{i'}}$ par leur valeur, on obtient, toutes simplifications faites,

$$\text{(12)} \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial S_{ii'}}{\partial a_h} = \lambda_{kh}(a)\left(\sum_p c^k{}_p\, x'_p + D^k\right) S_{ii'}\,.$$

Posant ensuite

$$T_i = \sum_{p=1}^{n}\left(\frac{\partial x'_p}{\partial x_i}\right)^2,$$

on a, avec p et k indices de sommation,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial T_i}{\partial a_h} = \lambda_{kh}(a)\frac{\partial x'_p}{\partial x_i}\frac{\partial \xi_{kp}(x')}{\partial x_i}$$
$$= \lambda_{kh}(a)\left(\sum_p c^k{}_p\, x'_p + D^k\right) T_i\,,$$

d'où pour deux indices différents quelconques,

$$\text{(13)} \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial (T_i - T_{i'})}{\partial a_h} = \lambda_{kh}(a)\left(\sum_p c^k{}_p\, x'_p + D^k\right)(T_i - T_{i'})\,.$$

Pour tous les a nuls, les x' se réduisent aux x correspondants, les $S_{ii'}$ à *zéro,* les T_i à l'*unité,* donc les différences $T_i - T_{i'}$ à *zéro*. La solution de chacun des systèmes d'équations aux dérivées partielles (12), (13) correspondant à ces conditions initiales est donnée par

$$S_{ii'} = 0, \; T_i - T_{i'} = 0.$$

Ces relations, vérifiées pour toutes les valeurs des a, ne sont autres que les relations (4), (5) que nous voulions démontrer. Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que les transformations

$$x'_i = x'_i(x, a) \qquad (i = 1, \ldots, n) \qquad (n \geqslant 3)$$

formant un groupe à r *paramètres* a *contenant la transformation identique soient des transformations conformes quelles que soient les valeurs attribuées aux paramètres est que les transformations infinitésimales de ce groupe soient de la forme*

$$X_h F = \left(x_i \sum_{j\neq i} c^h{}_j\, x_j - \frac{c^h{}_i}{2}\sum_{j\neq i} x_j^2 + \sum_{j\neq i} e^h{}_{ij}\, x_j + \frac{c^h{}_i}{2} x_i^2 + D^h x_i + f^h{}_i\right)\frac{\partial F}{\partial x_i}\,,$$
$$(e^h{}_{ij} + e^h{}_{ji} = 0),$$

que l'on peut écrire également

$$X_h F = \left[x_i \left(\sum_{p=1}^{n} c^h_p \, x_p + D^h \right) - \frac{c_i^h}{2} \sum_p x_p^2 + \sum_{j \neq} e_{ij} \, x_j + f_i^h \right] \frac{\partial F}{\partial x_i} .$$

Les identités

$$(X_h X_k - X_k X_h) \, F = c_{hks} X_s F$$

se traduisent par des égalités compliquées que nous n'écrirons pas.

SECOND PROBLÈME : TRANSFORMATIONS CONSERVANT L'ÉQUATION DE LAPLACE

6. — Énoncé du problème.

Soit V $(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction des x solution de l'équation de Laplace

$$\Delta V = \sum_i \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} = 0.$$

Si nous remplaçons dans cette fonction les x par les x', nous obtenons la fonction V $(x'_1, \ldots, x'_n)$ que nous désignerons plus brièvement par V'; cette fonction des x' vérifiera évidemment l'équation

$$\Delta' V' = \sum_i \frac{\partial^2 V'}{\partial x'^2_i} = 0.$$

Si dans cette fonction nous exprimons, au moyen des relations (1), les x' en fonction des x et des a, nous obtiendrons la fonction $V' \left(x' \, (x, a) \right) = W \, (x, a)$ qui se réduira, pour tous les a nuls, à $V(x)$. Nous nous proposons, sachant que $V(x)$ est harmonique, d'établir les conditions pour qu'il en soit de même de $W \, (x, a)$ quels que soient les a.

On a les formules

$$\frac{\partial W}{\partial x_i} = \frac{\partial V'}{\partial x'_j} \frac{\partial x'_j}{\partial x_i} , \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial x_i^2} = \frac{\partial V'}{\partial x'_j} \frac{\partial^2 x'_j}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 V'}{\partial x'_j \partial x'_k} \frac{\partial x'_j}{\partial x_i} \frac{\partial x'_k}{\partial x_i} ,$$

d'où

$$\Delta W = \frac{\partial V'}{\partial x'_j} \Delta x'_j + \sum_i \frac{\partial^2 V'}{\partial x'^2_j} \left(\frac{\partial x'_j}{\partial x_i} \right)^2 + 2 \sum_i \sum_{j \neq k} \frac{\partial^2 V'}{\partial x'_j \partial x'_k} \frac{\partial x'_j}{\partial x_i} \frac{\partial x'_k}{\partial x_i} .$$

L'équivalence des relations $\Delta V = 0$ (ou $\Delta' V' = 0$), $\Delta W = 0$ entraîne les conditions

$$\sum_i \frac{\partial x'_j}{\partial x_i} \frac{\partial x'_{j'}}{\partial x_i} = 0, \tag{14}$$

$$(j \neq j')$$

$$\sum_i \left(\frac{\partial x'_j}{\partial x_i} \right)^2 = \sum_i \left(\frac{\partial x'_{j'}}{\partial x_i} \right)^2 , \tag{15}$$

$$\Delta x'_i = 0. \tag{16}$$

Les relations (14) et (15) donnent, en vertu de (3), les relations

$$\left(\delta_{ij} + \lambda^{0}_{kh}\, a_h \frac{\partial \xi^{0}_{kj}}{\partial x_i} + \dots\right)\left(\delta_{ij'} + \lambda^{0}_{kh}\, a_h \frac{\partial \xi^{0}_{kj'}}{\partial x_i} + \dots\right) = 0,$$

$$\sum_i \left(\delta_{ij} + \lambda^{0}_{kh}\, a_h \frac{\partial \xi^{0}_{kj}}{\partial x_i} + \dots\right)^2 = \sum_i \left(\delta_{ij'} + \lambda^{0}_{kh}\, a_h \frac{\partial \xi^{0}_{kj'}}{\partial x_i} + \dots\right)^2,$$

qui se réduisent, en se bornant aux transformations infinitésimales, aux équations (6) et (7).

(16) donne, dans les mêmes conditions, $\Delta \xi^{0}_{ki} = 0$.

7. — Cas de deux variables.

Avec les notations du paragraphe 3, on trouve, les U étant des fonctions harmoniques,

$$\xi^{0}_{k} = \frac{\partial U_k}{\partial x}, \qquad \eta^{0}_{k} = -\frac{\partial U_k}{\partial y},$$

et l'on a bien $\Delta \xi^{0}_{k} = \Delta\, \eta^{0}_{k} = 0$.

Les transformations infinitésimales sont données encore par les symboles

$$X_h F = \frac{\partial U_h}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial U_h}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial y},$$

les U étant des fonctions harmoniques.

Réciproquement, si les ξ et η sont de la forme précédente, les relations $\Delta V = 0$, $\Delta W = 0$ sont équivalentes. En effet, des équations (14), (15), (16) qui s'écrivent ici

$$\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial y'}{\partial y} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial y}\right)^2.$$

$$\Delta x' = \Delta y' = 0,$$

on déduit

$$\frac{\dfrac{\partial x'}{\partial x}}{\dfrac{\partial y'}{\partial y}} = -\frac{\dfrac{\partial x'}{\partial y}}{\dfrac{\partial y'}{\partial x}} = \lambda,$$

puis

$$(1 - \lambda^2)\left[\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial y}\right)^2\right] = 0,$$

d'où $\lambda = 1$ comme seule solution acceptable, ce qui donne

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial y'}{\partial y}, \quad \frac{\partial x'}{\partial y} = -\frac{\partial y'}{\partial x}.$$

Ces relations coïncident avec celles du paragraphe 3 et entraînent $\Delta x' = \Delta y' = 0$. Le raisonnement fait précédemment est donc valable, les deux problèmes étudiés dans ce mémoire étant équivalents dans le cas du plan.

8. — Cas général.

Dans le cas d'un nombre de variables supérieur à *deux,* on trouve, en vertu de (6) et (7), la même expression que précédemment pour les ξ^0. Mais la relation supplémentaire $\Delta\xi^0_{ki} = 0$ donne, de plus, $(n-2)\, c^k_i = 0$, d'où $c^k_i = 0$. On obtient ainsi

$$\xi^0_{ki} = D^k x_i + \sum_{j \neq i} e^k_{ij}\, x_j + f^k_i, \qquad (e^k_{ij} + e^k_{ji} = 0),$$

et les transformations infinitésimales cherchées ont pour symboles

$$X_h F = \Big(D^h x_i + \sum_{j \neq i} e^h_{ij}\, x_j + f^h_i\Big) \frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

Supposons, réciproquement, que les ξ soient de la forme précédente. On a les formules

$$\frac{\partial \xi_{kj}(x')}{\partial x_i} = e^k_{ji} \frac{\partial x'_i}{\partial x_i} + D^k \frac{\partial x'_j}{\partial x_i} + \sum_{j' \neq j} e^k_{jj'} \frac{\partial x'_{j'}}{\partial x_i},$$

toujours valables en supposant $e^k_{ii} = 0$.

Posant

$$S_{jj'} = \sum_i \frac{\partial x'_j}{\partial x_i} \frac{\partial x'_{j'}}{\partial x_i}, \qquad T_j = \sum_i \Big(\frac{\partial x'_j}{\partial x_i}\Big)^2,$$

on a, en vertu de (2),

$$\frac{\partial S_{jj'}}{\partial a_h} = \lambda_{kh}(a) \left[\frac{\partial x'_j}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_{kj'}(x')}{\partial x_i} + \frac{\partial x'_{j'}}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_{kj}(x')}{\partial x_i}\right],$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial T_j}{\partial a_h} = \lambda_{kh}(a) \frac{\partial x'_j}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_{kj}(x')}{\partial x_i},$$

et, en remplaçant les dérivées des ξ par leur expression, on obtient

$$\frac{\partial S_{jj'}}{\partial a_h} = \lambda_{kh}(a) \Big[2 D^k S_{jj'} + e^k_{j'j}(T_j - T_{j'}) + \sum_{j'' \neq j, j'} (e^k_{jj''} S_{j'j''} + e^k_{j'j''} S_{jj''})\Big], \tag{17}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial (T_j - T_{j'})}{\partial a_h} = \lambda_{kh}(a) \Big[D^k (T_j - T_{j'}) + 2 e^k_{jj'} S_{jj'} + \sum_{j'' \neq j, j'} \Big(e^k_{jj''} S_{jj''} - e^k_{j'j''} S_{j'j''}\Big)\Big]. \tag{18}$$

On trouve ensuite

$$\frac{\partial}{\partial a_h}(\Delta x'_i) = \lambda_{kh}(a)\left[D^k \Delta x'_i + \sum_{j \neq i} e^k{}_{ij} \Delta x'_j\right]. \tag{19}$$

Pour tous les a nuls et pour tous les indices on a

$$\Delta x'_i = 0, \qquad S_{jj'} = 0, \quad T_j - T_{j'} = 0.$$

Un raisonnement déjà fait montre, grâce au système (17), (18) et au système (19), que ces relations subsistent pour toutes les valeurs des paramètres.

Donc, *la condition nécessaire et suffisante pour que les transformations* $x' = x'(x, a)$ *formant un groupe à* r *paramètres* a *contenant la transformation identique conservent l'équation de Laplace quelles que soient les valeurs attribuées aux paramètres est que les transformations infinitésimales de ce groupe soient de la forme*

$$X_h F = \left(D^h x_i + \sum_{j \neq i} e^h{}_{ij} x_j + f^h{}_i\right)\frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

Les identités relatives à la structure du groupe se réduisent ici à

$$f^h D^k - f^k D_h + \sum_{j \neq i}\left[\left(\sum_{j' \neq j} e^h{}_{jj'} x_{j'} + f_j{}^h\right) e^k{}_{ij} - \left(\sum_{j' \neq j} e^k{}_{jj'} x_{j'} + f^k{}_j\right) e^h{}_{ij}\right] =$$
$$c_{hks}\left(D^s x_i + \sum_{j \neq i} e^s{}_{ij} x_j + f^s{}_i\right).$$

On voit, en particulier, que, le coefficient de x_i dans le premier membre étant nul, on a $c_{hks} D^s = 0$.

9. — Propriétés de l'équation de Laplace.

Reprenons la fonction $V'(x')$ qui se réduit à $V(x)$ pour tous les a nuls. $\Delta' V'$ se réduit, dans les mêmes conditions, à ΔV. Supposant qu'il n'y ait qu'un paramètre a, une formule classique donne, en posant $\lambda(a) a = t$, et en se bornant au premier ordre par rapport à t considéré comme infiniment petit principal,

$$V'(x') = W(x, a) = V(x) + t \xi_i^0 \frac{\partial V}{\partial x_i}.$$

Les égalités $\Delta V = \Delta W = 0$ donnent alors, par passage à la limite,

$$\Delta\left(\xi_i^0 \frac{\partial V}{\partial x_i}\right) = 0 .$$

Si donc V (x) *est une fonction harmonique, il en est de même de*

$$\sum_i \Big(\mathrm{D}x_i + \sum_{j \neq i} e_{ij}\, x_j + f_i \Big) \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_i} \qquad (e_{ij} + e_{ji} = 0)$$

dans le cas général.

Dans le cas du plan, U (x, y) *et* V (x, y) *étant harmoniques, il en est de même de* $\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} - \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}$.

Si l'on fait $\mathrm{V} = \mathrm{U}$, on voit que *la fonction* $\left(\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}\right)^2$ *est également harmonique.*

En prenant V fonction associée de U, *on en déduit encore l'intégrale* $\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}$.

Indiquons encore que, U *et* V *étant deux fonctions associées,* $\mathrm{U}^2 - \mathrm{V}^2$ *et* UV *sont également des fonctions harmoniques.*

En considérant, par exemple, les deux fonctions associées $\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}$ et $-\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}$, on retombe sur les fonctions harmoniques $\left(\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}\right)^2$ et $\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}$.

Tous ces résultats se démontrent, bien entendu, immédiatement par le calcul direct.