Annales de la faculté des sciences de Toulouse

R. Gouyon

Contributions à la théorie des houles

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série, tome 22 (1958), p. 1-55
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1958_4_22__1_0>

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

POUR LES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES.

CONTRIBUTION A LA THÉORIE DES HOULES

INTRODUCTION

Jusqu'en 1924, à l'exception de la solution très particulière découverte un siècle auparavant par GERSTNER, le problème des houles n'avait reçu aucune solution rigoureuse : Lord RAYLEIGH, STOKES, notamment, n'avaient pu en donner que des solutions approchées.

En 1924, LEVI-CIVITA [1] résout rigoureusement le problème dans le cas d'une profondeur infinie et d'un mouvement irrotationnel. En 1926, STRUIK [2] étend la solution de Lévi-Civita au cas d'une profondeur finie, mais toujours dans le cas irrotationnel. Enfin en 1934, M^me DUBREIL-JACOTIN [3] apporte une solution complète : en profondeur finie ou infinie, elle prouve à la fois l'existence et l'unicité des solutions, dépendant de certaines constantes, qui correspondent à une donnée largement arbitraire (sauf assujettissement à une condition de Hölder) de la fonction tourbillon.

Une lacune subsistait, à peu près rédhibitoire quant aux possibilités d'utilisation effective par les techniciens. Chez tous ces auteurs, les solutions apparaissent comme des fonctions analytiques d'un « petit paramètre », lié à l'amplitude des oscillations superficielles, et ces solutions sont obtenues par un processus d'approximations successives dont la convergence est prouvée pour des valeurs « suffisamment petites » du paramètre : mais, si l'on démontre l'existence d'un rayon de convergence non nul, on n'indique aucun moyen d'en obtenir une quelconque estimation... C'est ainsi que, cherchant à expliciter les solutions de M^me Dubreil, A. DAUBERT [5] n'a pu obtenir les trois premières approximations qu'au prix de calculs laborieux; et surtout, pour aucune valeur numérique du « petit paramètre », il ne peut affirmer la convergence des séries dont il a calculé les trois premiers termes.

C'est sur ce point, détermination d'un rayon de convergence (c'est-à-dire, bien entendu, d'un minorant du rayon de convergence), que K. KRAVTCHENKO a bien voulu me suggérer de compléter le beau travail de M^me Dubreil.

Je n'ai pu y parvenir qu'au prix d'un autre progrès : celui qui consistait à expliciter complètement les solutions. Je montre en toute généralité (comme l'avaient vu Lévi-Civita dans le cas irrotationnel et A. Daubert pour les houles « höldériennes » de M[me] Dubreil) que le n^e terme est une somme de Fourier d'ordre n; et, cette fois, chaque coefficient de cette somme est explicitement défini par des quadratures en fonction des termes précédents (et, bien entendu, des termes successifs de la fonction tourbillon).

Sur ces expressions explicites, des questions non encore élucidées reçoivent une immédiate réponse. Par exemple, la question des harmoniques; il est prouvé que les solutions correspondant aux valeurs successives d'un certain entier N (cf. II. 6 et IV. 5) admettent une période réduite $\frac{\lambda}{N}$. De même, une précision se dégage quant à la forme des lignes de courant : sur chacune, entre deux axes de symétrie consécutifs, la cote est fonction monotone de l'abscisse.

Enfin, disposant de solutions explicites, j'ai pu obtenir de la façon la plus élémentaire qui soit (à savoir par majoration directe des expressions obtenues) la définition d'un rayon de convergence, que les calculateurs n'auront nulle peine à améliorer. J'ai recouru, pour ces majorations, à un certain type de « majorantes fortes » : majorantes *numériques,* au contraire des majorantes stokiennes de Lévi-Civita. Leur emploi s'est révélé efficace en ce qu'il m'a permis, non seulement de préciser un rayon de convergence, mais aussi de prouver la convergence elle-même sous des hypothèses plus larges que celles de M[me] Dubreil. Ses méthodes exigeaient pour la fonction tourbillon, une continuité höldérienne : la continuité simple me suffit.

Ce travail, finalement, se présente sous une forme beaucoup plus élémentaire que celui de ma brillante devancière. Puisse-t-il du moins, s'il n'apporte que peu de chose à la Mathématique, rendre quelque service aux utilisateurs : c'est sa seule et modeste ambition.

J'ai dit que M. Kravtchenko a été l'initiateur de ce travail. Il en a été aussi, tout au long de l'exécution, le contrôleur attentif et le précieux conseiller. Il voudra bien trouver ici l'expression de ma très grande et très affectueuse reconnaissance.

Mais il m'en voudrait de l'exprimer à lui seul. D'heureuses discussions avec les membres de sa jeune équipe grenobloise m'ont beaucoup aidé à situer les difficultés du sujet, et finalement à choisir mes méthodes compte tenu des tentatives déjà faites. Il convient donc que A. Daubert, G. Chabert d'Hières, P. Jolas, soient très amicalement cités ici par celui qu'ils ont bien voulu admettre comme membre associé de leur « Club de la Houle » de Grenoble.

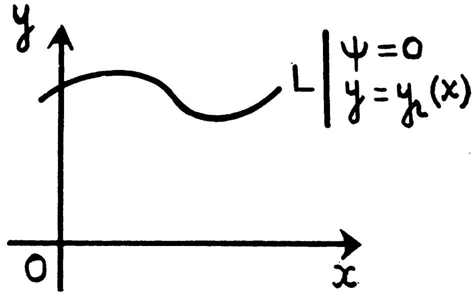
Je dois d'autres remerciements à M. le Recteur DELTHEIL, ainsi qu'à MM. ESCANDE, COMBES et HURON, et non point seulement pour avoir bien voulu me faire l'honneur de constituer mon jury : c'est à leur amitié dévouée que je dois d'avoir pu disposer des loisirs nécessaires à ce travail.

CHAPITRE PREMIER.

RECHERCHE D'UNE MÉTHODE ET RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

I. 1. — Position du problème.

Considérons d'abord en toute généralité, pour une masse liquide homogène, incompressible et pesante, les mouvements jouissant seulement des deux propriétés suivantes (à l'exclusion provisoire d'une hypothèse de périodicité).



1° Le mouvement est *plan :* les phénomènes sont les mêmes dans tous les plans parallèles à un plan vertical fixe, les vitesses des particules étant constamment dans ces plans.

2° Le mouvement est *permanent :* dans l'un de ces plans verticaux, il existe un repère galiléen (en translation horizontale uniforme, de vitesse c), par rapport auquel le champ des vitesses relatives (u, v) est indépendant du temps. Il s'ensuit notamment que la ligne libre, soit L, est invariablement liée à ce repère : son équation, indépendante du temps, est de la forme $y = y_L(x)$.

Nous supposerons $0x$ horizontal (orienté dans le sens de propagation de l'onde), $0y$ vertical ascendant. Dans le cas d'un fond horizontal à distance finie, $0x$ pourra coïncider avec lui. Sinon, ce sera une horizontale arbitraire.

On sait que la détermination des mouvements de ce type se ramène à celle des deux fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$, composantes du champ des vitesses relatives, et d'une fonction auxiliaire $\psi(x, y)$, « fonction de courant » relative, satisfaisant aux conditions suivantes (auxquelles on adjoindra, dans le cas d'un fond horizontal à distance finie, la condition $\psi = C^{te}$ sur $y = 0$) :

1° On a identiquement, dans le domaine D occupé par le liquide,

$$\frac{\partial\psi}{dy} = u, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = -v, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = f(\psi),$$

la fonction f étant arbitraire : on sait que $f(\psi)$ est la mesure du tourbillon;

2° sur la ligne libre, conventionnellement caractérisée par $\psi = 0$, on a

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = -2\,g\,y_L + C^{te}.$$

Nous supposerons avec M^me^ Dubreil que les « lignes de courant relatives », $\psi = C^{te}$, *n'ont pas de tangentes verticales* $(u \neq 0)$: la relation $\psi = \psi(x, y)$ est résoluble en y. Alors, pour toute solution, le premier membre de (2°) est une fonction de ψ et de x. Nous la prendrons pour inconnue auxiliaire : nous sommes donc conduits (abstraction faite d'une condition éventuelle de fond) à déterminer les inconnues $u(x, y)$, $v(x, y)$, $\psi(x, y)$, $F(\psi, x)$ par le système

$$(\Sigma)\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial\psi}{\partial y} = u & (1) \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x} = -v & (2) \\ \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = f(\psi) & (3) \\ \left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\psi}{dy}\right)^2 = 2F(\psi, x) & (4) \end{array}\right.$$

et par la condition de surface libre :

$$F(0, x) + g\,y_L(x) = C^{te} \qquad (5)$$

Ne retenant que la seule inconnue $\psi(x, y)$, M^me^ Dubreil cherchait à en déterminer une fonction partiellement inverse, à savoir Φ telle que $y = \Phi(\psi, x)$: grâce à quoi, dans le champ en ψ et x, la condition aux limites (5) porte sur une ligne libre d'équation connue $(\psi = 0)$ bien que de forme inconnue.

Adoptant comme M^me^ Dubreil ces variables ψ et x, nous allons d'abord, comme premier essai d'amélioration de sa méthode, chercher à utiliser comme elle une inconnue unique, mais choisie de façon à vérifier une équation aux dérivées partielles de forme plus simple : rappelons que celle de M^me^ Dubreil, linéaire du second ordre, était du *troisième degré* par rapport aux dérivées premières.

I. 2. — Elimination de l'inconnue $\psi(x, y)$.

Négligeant provisoirement (5), considérons le système (Σ). Toutes ses solutions (sous la clause $u \neq 0$) font de u et v des fonctions de ψ et x. Au lieu de les éliminer, prenons-les pour inconnues fondamentales. Et éliminons au contraire $\psi(x, y)$ en exprimant que le système

$$(\Sigma_1)\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial\psi}{\partial y} = u(\psi, x) & (1') \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x} = -v(\psi, x) & (2') \end{array}\right.$$

est compatible, et que ses solutions vérifient (3) et (4).

Précisons l'exigence $u \neq 0$, par exemple, sous la forme $u < 0$, en accord avec l'hypothèse couramment admise selon laquelle les vitesses absolues (de composantes $u + c$ et v) sont faibles : u est donc voisin de $-c$. Comme corollaire, ψ sera positif dans la masse $y < y_L$, puisqu'il est nul sur $y = y_L$ et fonction décroissante de y. Précisons : $\psi \rightarrow +\infty$ quand $y \rightarrow -\infty$.

(Σ_1) est compatible, et déterminera $\psi(x, y)$ par deux quadratures et une inversion (légitime sous l'hypothèse $u \neq 0$), si et seulement si

$$u \frac{\partial v}{\partial \psi} - v \frac{\partial u}{\partial \psi} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{6}$$

Une fois cette condition satisfaite, la fonction $\psi(x, y)$ déterminée par (Σ_1) est telle que

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = v \frac{\partial v}{\partial \psi} - \frac{\partial v}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = u \frac{\partial u}{\partial \psi}$$

en sorte que (3) devient

$$u \frac{\partial u}{\partial \psi} + v \frac{\partial v}{\partial \psi} - \frac{\partial v}{\partial x} = f(\psi) \tag{3'}$$

Joignant [4], on est donc ramené à déterminer les fonctions u, v, F (de ψ et x) par le système suivant, à compléter par (5) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u \dfrac{\partial v}{\partial \psi} - v \dfrac{\partial u}{\partial \psi} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 & (6) \\ u \dfrac{\partial u}{\partial \psi} + v \dfrac{\partial v}{\partial \psi} - \dfrac{\partial v}{\partial x} = f(\psi) & (3') \\ u^2 + v^2 = 2\,\mathrm{F} & (4') \end{array} \right.$$

Ce système équivaut visiblement au suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u \dfrac{\partial v}{\partial \psi} - v \dfrac{\partial u}{\partial \psi} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 & (6) \\ \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial \psi} - \dfrac{\partial v}{\partial x} = f(\psi) & (3'') \\ u^2 + v^2 = 2\,\mathrm{F} & (4') \end{array} \right.$$

I. 3. — Choix d'une inconnue unique.

Adoptons pour inconnue unique une fonction $z(\psi, x)$ telle que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \mathrm{F} - \varphi(\psi) \quad (7), \qquad \text{avec } \varphi(\psi) = \int_0^{\psi} f(\tau)\, d\tau$$

Autrement dit :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{u^2 + v^2}{2} - \varphi$$

L'équation (3″) devient

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\psi\,\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

qui s'intègre sous la forme

$$\frac{\partial z}{\partial\psi} = v$$

à une fonction $\mu(\psi)$ près. Mais on ne restreint pas la généralité des solutions ainsi écrites en la négligeant : cela revient à incorporer $\int \mu(\psi)\,d\psi$ à z, qui n'était visiblement défini par (7) qu'à une fonction de ψ près.

On a ainsi traduit (3″) et (4′) en exprimant u, v, F en fonction de la seule inconnue z par

$$F = \frac{\partial z}{\partial x} + \varphi, \quad v = \frac{\partial z}{\partial\psi}, \quad u = -\sqrt{2\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \varphi\right) - \left(\frac{\partial z}{\partial\psi}\right)^2}$$

Portant dans (6), on ramène donc l'intégration du système (6), (3″), (4′) à celle de l'équation, en $z(\psi, x)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial\psi}\left(2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial\psi} + \varphi'\right) + 2\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \varphi\right)\frac{\partial^2 z}{\partial\psi^2} = 0 \qquad (8)$$

complétée par l'inégalité, à satisfaire dans tout le domaine du liquide.

$$2\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \varphi\right) - \left(\frac{\partial z}{\partial\psi}\right)^2 > 0 \qquad (9)$$

I. 4. — Détermination explicite des lignes de courant : Formation de la condition de surface libre.

Une fois obtenue la fonction $z(\psi, x)$ on déterminera l'inconnue éliminée, $\psi(x, y)$, en intégrant le système compatible

$$(\Sigma_1)\ \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial x} &= -v(\psi, x) \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} &= u(\psi, x)\end{aligned}\right. \quad \text{avec} \quad \left\{\begin{aligned} v(\psi, x) &= \frac{\partial z}{\partial\psi} && (10) \\ u(\psi, x) &= -\sqrt{2\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \varphi\right) - \left(\frac{\partial z}{\partial\psi}\right)^2} && (11)\end{aligned}\right.$$

On tire de la deuxième équation (toutes ces manipulations étant légitimées par la condition $u \neq 0$) :

$$y = H(\psi, x) + h(x), \quad \text{avec} \quad H(\psi, x) = \int_0^{\psi} \frac{d\tau}{u(\tau, x)}$$

Cette relation définit (puisque $\dfrac{\partial H}{\partial\psi} = \dfrac{1}{u} \neq 0$) une fonction $\psi(x, y)$, pour laquelle on a

$$dy = \frac{\partial H}{\partial\psi}\,d\psi + \frac{\partial H}{\partial x}\,dx + h'(x)\,dx, \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial H}{\partial x} + h'(x)}{\dfrac{\partial H}{\partial\psi}}$$

Portant dans la première équation (Σ_1), on achève donc en déterminant $h(x)$ par :

$$h'(x) = v\,\frac{\partial H}{\partial \psi} - \frac{\partial H}{\partial x}\,,\quad \text{c'est-à-dire } h'(x) = \frac{v(\psi, x)}{u(\psi, x)} - \int_0^{\psi} \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{u(\tau, x)}\right] d\tau$$

Le système étant compatible, il est certain que le second membre est indépendant de ψ. Il est donc identique à sa valeur pour $\psi = 0$, soit

$$h'(x) = \frac{v\,(0,x)}{u\,(0,x)}$$

Finalement, la fonction $\psi\,(x, y)$ sera définie par

$$y = \int_0^{\psi} \frac{d\tau}{u\,(\tau, x)} + \int \frac{v^*}{u^*}\,dx \tag{12}$$

l'astérisque désignant les restrictions des diverses fonctions à la ligne libre $\psi = 0$. De façon complètement explicite, l'équation générale des lignes de courant $\psi = \psi_1$ ($= \mathrm{C^{te}}$) sera donc

$$y = -\int_0^{\psi_1} \frac{d\psi}{\sqrt{2\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \varphi\right) - \left(\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)^2}} - \int \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)^* dx}{\sqrt{2\,\frac{\partial z^*}{\partial x} - \left(\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)^{*2}}} \tag{12'}$$

En particulier, l'équation de la ligne $\psi = 0$ sera $y = y_L(x)$, avec

$$y_L = -\int \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)^* dx}{\sqrt{2\,\frac{\partial z^*}{\partial x} - \left(\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)^{*2}}} \tag{13}$$

La condition (5) de surface libre est donc, y_L étant défini par (13) à une constante additive près :

$$\frac{\partial z^*}{\partial x} + g\,y_L = \mathrm{C^{te}} \tag{14}$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial z^*}{\partial x} - \int \frac{g\left(\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)^* dx}{\sqrt{2\,\frac{\partial z^*}{\partial \psi} - \left(\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)^{*2}}} = \mathrm{C^{te}} \tag{15}$$

I. 5. — Première application.

La condition (15) a été obtenue par élimination de y_L entre (13) et (14). Renoncer à cette élimination revient à considérer la ligne libre L, c'est-à-dire la fonction $y_L(x)$, comme une *donnée* : au lieu de la condition unique (15), on impose alors les *deux* conditions (13) et (14).

On peut les écrire, de façon équivalente :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)^*}{\sqrt{2\,\frac{\partial z^*}{\partial x}-\left(\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)^{*2}}}=-y'_{\mathrm{L}} \\ &\frac{\partial z^*}{\partial x}=\mathrm{C}-g\,y_{\mathrm{L}} \qquad\qquad (\text{avec } \mathrm{C}=\mathrm{C^{te}}) \end{aligned}\right.$$

La première équivaut encore à

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)^{*2}(1+y'^2_{\mathrm{L}})=2\,\frac{\partial z^*}{\partial x}\,y'^2_{\mathrm{L}} \\ &\left(\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)^{*} y'_{\mathrm{L}}<0 \end{aligned}\right.$$

soit, simplement (compte tenu de la deuxième) :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)^{*}=-y'_{\mathrm{L}}\sqrt{\frac{2\,(\mathrm{C}-g\,y_{\mathrm{L}})}{1+y'^2_{\mathrm{L}}}}$$

Quant à la seconde, elle équivaut à la suivante :

$$z^*=\mathrm{C}x-g\int y_{\mathrm{L}}\,dx$$

Finalement, le problème du mouvement *admettant une ligne libre donnée* se pose dans les termes suivants : trouver une intégrale de l'équation (8) telle que

$$\left\{\begin{aligned} &z\,(0,x)=\mathrm{C}x-g\int y_{\mathrm{L}}(x)\,dx \\ &\frac{\partial z}{\partial \psi}(0,x)=-y'_{\mathrm{L}}(x)\sqrt{2\,\frac{\mathrm{C}-g\,y_{\mathrm{L}}(x)}{1+y'^2_{\mathrm{L}}(x)}} \end{aligned}\right.$$

C'est un problème de Cauchy-Kovalewska (pour tout choix de C tel que, sur L, on ait constamment $g\,y_{\mathrm{L}}<\mathrm{C}$). On obtient ainsi le théorème suivant :

Au voisinage d'une ligne libre analytique régulière arbitrairement donnée, il existe une simple infinité d'écoulements permanents dans lesquels le tourbillon est une fonction analytique régulière arbitrairement donnée de la fonction de courant.

Remarque. — Une observation s'impose, qui va réduire considérablement la portée de cet énoncé. Avec les notations classiques $\frac{\partial z}{\partial x}=p$, etc..., l'équation (8) s'écrit

$$r-q\;(2s+\varphi')+2\,(p+\varphi)\,t=0.$$

Elle est elliptique sous la condition nécessaire et suffisante

$$2\,(p+\varphi)-q^2>0,$$

qui est précisément la condition (9) de réalité des solutions. Donc : *dans le champ de réalité des solutions, l'équation* (8) *est toujours elliptique.*

Il résulte de là (d'après les remarques classiques de M. Hadamard) qu'elle ne peut se prêter, pour un problème du type Cauchy-Kovalewska, à la recherche de solutions qui ne soient étroitement locales. C'est une des raisons (cf. I-8 ci-dessous) qui, pour l'étude du problème des houles avec condition « de fond », nous feront renoncer à l'inconnue unique z.

Avant de l'abandonner, tirons-en pourtant une autre application.

I. 6. — Deuxième application : mouvements barotropes.

Les mouvements barotropes (c'est-à-dire à lignes de courant isobares) sont définis par le système

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = f(\psi) \\ \left(\dfrac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 = 2h(\psi) - 2gy \end{array}\right.$$

où h est une nouvelle fonction arbitraire. Ce système se traite comme le système (Σ) de (I.1), à une permutation près des rôles de x et y.

Soulignons que le calcul, supposant cette fois qu'aucune vitesse n'est horizontale, n'aura donc qu'une validité locale, mais cela est sans importance pour la démonstration d'unicité que nous avons en vue : si nous montrons que la seule solution localement possible (dans un voisinage excluant toute annulation de v) est la solution de Gerstner, il s'ensuivra a fortiori que cette solution est aussi la seule qui soit valable dans tout le champ.

Par cette transposition, z devient une fonction de ψ et y telle que

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \mathrm{F}(\psi, y) - \varphi = h - \varphi - gy$$

d'où

$$z = -g\frac{y^2}{2} + [h(\psi) - \varphi(\psi)]\,y + \nu(\psi)$$

où ν est une nouvelle fonction arbitraire. L'équation (8) où z, d'inconnue, devient donnée, déterminera donc cette fois φ, h, ν. Elle s'explicite en effet comme suit :

$$g + (2h' - \varphi')\,[(h' - \varphi')\,y + \nu'] + 2\,(gy - h)\,[(h'' - \varphi'')\,y + \nu''] = 0$$

soit, par identification en y :

$$\left\{\begin{array}{ll} h' = \varphi' + \mathrm{K} & (\mathrm{K} = \mathrm{C^{te}} \\ 2g\,\nu'' = -\mathrm{K}\,(\varphi' + 2\,\mathrm{K}) & \\ \nu' = -\dfrac{g}{\varphi' + 2\,\mathrm{K}} - \dfrac{\mathrm{K}}{g}\,h. & \end{array}\right.$$

Eliminant ν' et h, on a

$$2\,g^2\,\varphi'' = \mathrm{K}\,\varphi'\,(\varphi' + 2\,\mathrm{K})^2, \quad \text{d'où} \quad \psi = \frac{2g^2}{\mathrm{K}}\int\frac{d\varphi'}{\varphi'\,(\varphi' + 2\mathrm{K})^2}$$

Plutôt que les expressions explicites de $\varphi(\psi)$, $h(\psi)$, $\nu(\psi)$ on obtient ainsi le paramétrage.

$$\left\{\begin{aligned} \psi &= \frac{g^2}{2K^3}\left[\mathrm{Log}\left|\frac{\varphi'}{\varphi'+2K}\right| + \frac{2K}{\varphi'+2K}\right] + C^{te} \\ h &= \frac{g^2}{2K^2}\left[\mathrm{Log}\left|\frac{\varphi'}{\varphi'+2K}\right| - \frac{2K}{\varphi'+2K}\right] + C^{te} \\ \nu' &= -\frac{g}{2K}\left[\mathrm{Log}\left|\frac{\varphi'}{\varphi'+2K}\right| + 2K_1\right] \qquad (K_1 = C^{te}) \end{aligned}\right.$$

Il s'ensuivra, par les transposées de (10) et (11) :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial x} &= -\sqrt{2(h-gy)-(Ky+\nu')^2} = -\sqrt{\frac{g^2\varphi'}{K^4(\varphi'+2K)} - \left(Ky+\nu'+\frac{g}{K}\right)^2} \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} &= -(Ky+\nu') \end{aligned}\right.$$

ce qui invite à poser (cette quantité devant être positive) :

$$\frac{\varphi'}{\varphi'+2K} = e^{-2\theta}$$

Il vient, par ce changement :

$$\psi = \frac{g^2}{2K^3}(2\theta + e^{-2\theta}) + C^{te}, \quad \nu' = \frac{g}{K}(\theta - K_1),$$

en sorte que l'équation aux différentielles totales, en $\psi(x, y)$, devient :

$$\frac{g^2}{K^3}(1-e^{-2\theta})\, d\theta = \sqrt{\frac{g^2}{K^2}e^{-2\theta} - \left(Ky + \frac{g}{K}\theta - g\frac{K_1}{K} + \frac{g}{K}\right)^2}\, dx + \left(Ky + \frac{g}{K}\theta - g\frac{K_1}{K}\right) dy$$

Allégeons en introduisant des coordonnées réduites (ξ, η) telles que :

$$x = \frac{g}{K^2}\xi, \quad y - g\frac{K_1}{K^2} = \frac{g}{K^2}\eta$$

d'où :

$$(1 - e^{-2\theta})\,d\theta = \sqrt{e^{-2\theta} - (\eta + \theta + 1)^2}\, d\xi + (\eta + \theta)\, d\eta.$$

Pour achever par quadratures élémentaires, introduisons un paramètre supplémentaire α tel que

$$\eta = e^{-\theta}\cos\alpha - \theta - 1, \qquad 0 < \alpha < \pi$$

Il vient, après suppression d'un facteur $e^{-\theta}\sin\alpha$,

$$d\xi = -e^{-\theta}\sin\alpha\, d\theta - (1 - e^{-\theta}\cos\alpha)\, d\alpha$$

d'où

$$\xi = e^{-\theta}\sin\alpha - \alpha + C^{te}$$

Finalement, ψ étant défini comme fonction de θ par

$$\psi = -\frac{g^2}{2K^3}(2\theta + e^{-2\theta}) + C^{te},$$

θ est défini en fonction de x et y, en même temps qu'un paramètre auxiliaire α, par le système

$$\begin{cases} g\,(e^{-\theta}\sin\alpha - \alpha) = K^2\,x + C^{te} \\ g\,(e^{-\theta}\cos\alpha - \theta) = K^2\,y + C^{te} \end{cases}$$

On reconnaît les équations des houles de Gerstner. Donc :

Pour un fluide incompressible pesant, les seuls mouvements plans et permanents où les lignes de courant soient isobares sont les houles de Gerstner.

Rappelons que ce résultat, ainsi établi de façon directe, avait été rattaché par M^me^ Dubreil [4] à un théorème de J. Kiebel [6] sur les mouvements adiabatiques des fluides compressibles.

I. 7. — Remarque : Précisions nouvelles sur le transport de masse dans les houles de Gerstner.

Renonçons maintenant au point de vue local qui suffisait, comme il a été dit, pour la vérification précédente.

Autrement dit, renonçons à toute limitation de α.

Par contre, notant θ_o un nombre fixe $\geqslant 0$, nous imposerons à θ la limitation

$$\theta \geqslant \theta_o$$

qui assure la biunivocité de la correspondance $(\theta,\ \alpha) \to (x,\ y)$ ainsi que l'existence et la régularité (dans la masse) des dérivées $\dfrac{\partial\theta}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial\theta}{\partial y}$:

on a en effet

$$\frac{\partial\,(x,\ y)}{\partial\,(\theta,\ \alpha)} = -\ \frac{g^2}{K^4}\ (1 - e^{-2\theta})$$

Rappelons que cette même limitation, $\theta \geqslant \theta_o \geqslant 0$, est aussi celle qui impose aux lignes de courant d'être des trochoïdes sans points doubles : ce sont les lignes $\theta = C^{te} \geqslant \theta_o$ et la ligne libre L est la ligne $\theta = \theta_o$.

Dans le domaine $\theta \geqslant \theta_o$ le champ des vitesses relatives est défini par

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad , \quad v = -\,\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

avec

$$d\,\psi = -\,\frac{g^2}{k^3}\,(1 - e^{-2\theta})\,d\theta$$

et

$$\begin{cases} e^{-\theta}\sin\alpha\,d\theta + (1 - e^{-\theta}\cos\alpha)\,d\alpha = -\,\dfrac{K^2}{g}\,dx \\ (1 + e^{-\theta}\cos\alpha)\,d\theta + e^{-\theta}\sin\alpha\,d\alpha = -\,\dfrac{K^2}{g}\,dy \end{cases}$$

Il vient ainsi

$$(1 - e^{-2\theta})\, d\theta = \frac{K^2}{g} \left[e^{-\theta} \sin \alpha\, dx - (1 - e^{-\theta} \cos \alpha)\, dy \right]$$

d'où

$$u = \frac{g}{K} (1 - e^{-\theta} \cos \alpha), \qquad v = \frac{g}{K} e^{-\theta} \sin \alpha$$

La vitesse absolue étant $(c + u,\ v)$, on définit le repère absolu (ou, ce qui revient au même, la célérité c) par la condition que cette vitesse absolue tende vers zéro quand $y \to -\infty$, c'est-à-dire quand $\theta \to +\infty$: cela revient à imposer la relation

$$\frac{g}{K} = - c.$$

Etudions alors le débit *absolu* à travers une verticale *absolument fixe*, soit $x = - ct$. En un point d'ordonnée y de cette verticale, on a, quand il est immergé (en prenant c pour unité de vitesse, $\frac{g}{K^2}$ pour unité de longueur, et en annulant les constantes de translation par choix convenable des axes)

$$c + u = e^{-\theta} \cos \alpha$$

avec :

$$\begin{cases} e^{-\theta} \sin \alpha - \alpha = - t \\ e^{-\theta} \cos \alpha - \theta = y \end{cases}$$

Pour y donné, on voit que α, θ, u sont des fonctions de t (α impaire et croissant de 2π avec t, θ et u paires et de période 2π), telles que

$$\begin{cases} e^{-\theta} \sin \alpha\, d\theta + (1 - e^{-\theta} \cos \alpha)\, d\alpha = dt \\ (1 + e^{-\theta} \cos \alpha)\, d\theta + e^{-\theta} \sin \alpha\, d\alpha = 0 \end{cases}$$

d'où par exemple :

$$dt = \frac{1 - e^{-2\theta}}{1 + e^{-\theta} \cos \alpha}\, d\alpha$$

a) Considérons d'abord un élément dy, d'ordonnée y, constamment immergé :

$$y < - \theta_0 - e^{-\theta_0}.$$

Le débit absolu moyen, par période, à travers cet élément est $d\Phi$ tel que

$$2\pi\, d\Phi = \int_{-\pi}^{\pi} (c + u)\, dt = 2 \int_{0}^{\pi} G(\theta) \cos \alpha\, d\alpha$$

avec

$$G(\theta) = \frac{e^{-\theta} (1 - e^{-2\theta})}{1 + e^{-\theta} \cos \alpha} = \frac{e^{-\theta} (1 - e^{-2\theta})}{1 + y + \theta}.$$

Sur $0 < \alpha < \pi$, θ est fonction continue et strictement décroissante de α. D'autre part, sur l'intervalle correspondant $[\theta_1 = \theta(\pi),\ \theta_2 = \theta(o)]$, il est aisé de vérifier que la fonction $G(\theta)$ est strictement décroissante.

En effet $G'(\theta)$, a le signe de

$$(3e^{-2\theta} - 1)\,\Gamma(\theta) \quad , \quad \text{avec} \quad \Gamma(\theta) = 1 + y + \theta - \frac{1 - e^{-2\theta}}{3e^{-2\theta} - 1}$$

d'où

$$\Gamma'(\theta) = \frac{(1 - e^{-2\theta})(1 - 9e^{-2\theta})}{(3e^{-2\theta} - 1)^2}, \quad \Gamma(\theta_1) = \frac{(1 - e^{-\theta_1})^2(2 + 3e^{-\theta_1})}{1 - 3e^{-2\theta_1}}$$

En un point quelconque θ de l'intervalle (θ_1, θ_2), la condition $G'(\theta) \geqslant 0$ exigerait alors, séparément, $3e^{-2\theta} - 1 > 0$ et $\Gamma(\theta) \geqslant 0$, ce qui est incompatible : vérifiée au point θ, la première condition le serait sur tout le segment (θ_1, θ) où elle entraînerait $9e^{-2\theta} - 1 > 0$, d'où $\Gamma'(\theta) < 0$, d'où $\Gamma(\theta) < \Gamma(\theta_1) < 0$. Il résulte de tout cela que, sur $0 < \alpha < \pi$, $G(\theta)$ est fonction strictement croissante de α. On a donc, cette fonction étant d'autre part continue et à valeurs partout positives :

$$2\pi\, d\Phi = 2\int_0^{\pi} G(\theta)\cos\alpha\, d\alpha = 2\left[\int_0^{\pi/2} + \int_{\pi/2}^{\pi}\right]$$

$$\text{avec} \int_0^{\pi/2} > 0, \int_{\pi/2}^{\pi} < 0, \quad \left|\int_{\pi/2}^{\pi}\right| > \int_0^{\pi/2}, \quad \text{d'où } d\Phi < 0. \text{ Donc:}$$

Sur toute verticale absolument fixe, chaque élément constamment immergé est le siège d'un débit absolu moyen en sens inverse de la propagation de l'onde.

b) Cette observation précise, en l'étendant à toutes les amplitudes, un résultat déjà établi par M[me] Dubreil-Jacotin pour les faibles amplitudes.

Considérons maintenant la totalisation (soit Φ) de ce débit absolu moyen à travers tout l'ensemble de la verticale considérée. M. Kravtchenko (7) a montré la nullité de Φ pour toute la famille des houles de M[me] Dubreil (compte tenu de sa définition de la célérité) en profondeur infinie. Retrouvons rapidement ce résultat pour le cas de Gerstner. On a alors :

$$2\pi\Phi = \int_{-\pi}^{\pi} dt \int_{-\infty}^{e^{-\theta_0}\cos\alpha - \theta_0} (u + c)\, dy = \int_{-\pi}^{\pi} dt \int_{-\infty}^{e^{-\theta_0}\cos\alpha - \theta_0} e^{-\theta}\cos\alpha\, dy,$$

α étant la fonction de θ et t définie par

$$e^{-\theta}\sin\alpha - \alpha = -t.$$

L'intégrale en dy se calcule sur $t = C^{te}$, d'où

$$e^{-\theta}\sin\alpha\, d\theta + (1 - e^{-\theta}\cos\alpha)\, d\alpha = 0,$$

$$dy = -(1 + e^{-\theta}\cos\alpha)\, d\theta - e^{-\theta}\sin\alpha\, d\alpha = -\frac{1 - e^{-2\theta}}{1 - e^{-\theta}\cos\alpha}\, d\theta.$$

Elle est, visiblement, absolument convergente et l'on a :

$$2\pi\Phi = \int_{-}^{\pi} dt \int_{\theta_0}^{+\infty} \frac{e^{-\theta}(1 - e^{-2\theta})}{1 - e^{-\theta}\cos\alpha}\cos\alpha\, d\theta = \int_{\theta_0}^{+\infty} d\theta \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-\theta}(1 - e^{-2\theta})}{1 - e^{-\theta}\cos\alpha}\cos\alpha\, dt$$

Sous cette nouvelle forme, l'intégrale en dt se calcule sur

$$\theta = C^{te}, \text{ d'où } dt = (1 - e^{-\theta} \cos \alpha)\, d\alpha.$$

Finalement :

$$2\pi\Phi = \int_0^{+\infty} e^{-\theta}(1 - e^{-2\theta})\, d\theta \int_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha\, d\alpha = 0$$

Donc : *sur l'ensemble de toute verticale absolument fixe, le débit absolu moyen, par période, est nul.*

Rapprochant du résultat précédent, on conclut que la partie d'immersion intermittente est le siège d'un débit absolu moyen, par période, dans le sens de la propagation de l'onde.

Soulignons surtout que, dans le cas d'une houle de Gerstner, les deux définitions suivantes du repère absolu (ou de la célérité) sont équivalentes :

1° repère par rapport auquel la vitesse absolue tend vers zéro, en profondeur infinie;

2° repère tel que, sur l'ensemble d'une verticale invariablement liée à ce repère, le débit moyen par période soit nul.

I. 8. — Préliminaires à une théorie complète des houles planes.

Revenons sur le mode d'étude proposé en (1.3) et (1.4). Outre la difficulté signalée en (1.5-Rem.), l'emploi de l'inconnue unique $z(\psi, x)$ en soulèverait une autre quant à son application à l'étude des houles : la périodicité en x ne se traduirait pas par une propriété simple de la fonction z.

Pour cette raison, plutôt que l'inconnue unique $z(\psi, x)$, nous conserverons les deux inconnues $u(\psi, x)$ et $v(\psi, x)$. Nous retiendrons seulement des considérations précédentes (cf. 1.2) qu'elles sont déterminées par les équations aux dérivées partielles (6)-(3'), que nous numérotons à nouveau :

$$\left\{\begin{aligned} & u\frac{\partial v}{\partial \psi} - v\frac{\partial u}{\partial \psi} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 && (16)\\ & u\frac{\partial u}{\partial \psi} + v\frac{\partial v}{\partial \psi} - \frac{\partial v}{\partial x} = f(\psi) && (17)\end{aligned}\right.$$

et par la condition de surface libre [cf. (5) et (4')]

$$u^{*2} + v^{*2} + 2g\, y_L = C^{te},$$

avec, par (12),

$$y_L = \int \frac{v^*}{u^*}\, dx;$$

donc simplement :

$$u^* \frac{du^*}{dx} + v^* \frac{dv^*}{dx} + g\frac{v^*}{u^*} = 0 \tag{18}$$

(où l'astérisque, rappelons-le, désigne les restrictions à $\psi = 0$).

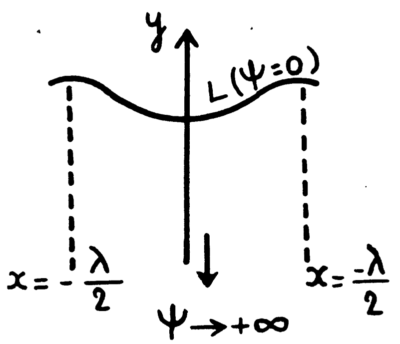
CHAPITRE II.

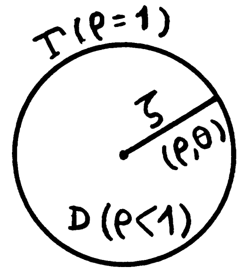
PROBLÈME DES HOULES EN PROFONDEUR INFINIE : CALCUL FORMEL DES SOLUTIONS

II. 1. — Changements de variables et de fonctions.

Conformément à la conception physique du phénomène, supposons u voisin de $-c$ et v petit. Introduisons donc des inconnues petites (et sans dimension) en posant

$$u = -c\,(1 + \mathrm{U}),\ v = cV \qquad (\text{avec } |\mathrm{U}| < 1)$$





Notant λ la longueur d'onde (période en x, de u et v), nous avons à traiter le problème dans le domaine défini par

$$-\frac{\lambda}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\lambda}{2}\,,\quad 0 \leqslant \psi < +\infty.$$

Transformons-le biunivoquement en D $(\rho < 1)$ + Γ $(\rho = 1)$ en posant

$$\rho = e^{-\frac{2\pi\psi}{c\lambda}}\,,\quad \theta = 2\pi\,\frac{x}{\lambda}\,.$$

Les équations (16) et (17) deviennent (à satisfaire sur D + Γ) :

$$\left\{\begin{aligned} &(1 + \mathrm{U})\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \rho} - \mathrm{V}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \theta} = 0 \\ &(1 + \mathrm{U})\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \rho} + \mathrm{V}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \theta} = \varphi(\rho) \end{aligned}\right. \tag{19}$$

étant posé

$$\varphi(\rho) = -\frac{\lambda}{2\,\pi\,c\rho}\,f(\psi).$$

La condition (18) à vérifier sur Γ devient (l'astérisque désignant toujours pour chaque fonction, sa restriction à Γ) :

$$(1 + U^*) \frac{dU^*}{d\theta} + V^* \frac{dV^*}{d\theta} = p \frac{V^*}{1+U^*} , \text{ avec } p = \frac{\lambda g}{2\pi c^2} \tag{20}$$

Enfin nous imposerons aux inconnues U (ρ, θ) et V (ρ, θ) les conditions exprimant que le mouvement absolu s'amortit aux grandes profondeurs

$$U_0 = V_0 = 0 \tag{21}$$

(l'indice zéro désignant les valeurs en 0), à quoi nous adjoindrons, en faisant passer l'axe $x = 0$ par un point de L où la tangente est horizontale, la condition supplémentaire

$$V^* (0) = 0. \tag{22}$$

Quant à la donnée $\varphi (\rho)$, nous la supposerons petite comme U et V, *continue sur (0, 1)*, et notamment finie en 0 : comme on a, explicitement

$$\varphi (\rho) = - \frac{\lambda}{2 \pi c} e^{\frac{2\pi\psi}{c\lambda}} f(\psi) ,$$

cette dernière exigence est celle que le tourbillon tende vers zéro aux grandes profondeurs avec le même ordre, au moins, que

$$e^{-\frac{2\pi\psi}{c\lambda}}$$

II. 2. — Procédure d'approximations successives.

Suivant un artifice classique, au lieu de considérer une fonction $\varphi (\rho)$ unique, nous allons la plonger (ce qui est évidemment possible de multiples façons) dans un ensemble simplement infini de fonctions $\varphi (\rho, \alpha)$ de la forme

$$\varphi (\rho, \alpha) = \sum_{n-1}^{+\infty} \varphi_n (\rho) \alpha^n,$$

α étant un petit paramètre de l'ordre de U et de V (donc aussi de l'amplitude), les φ_n étant continus sur $o \leqslant \rho \leqslant 1$, et la série des α^n max $[\varphi_n (\rho)]$ admettant un rayon de convergence non nul en α.

Il est clair qu'une façon de constituer une telle famille de fonctions φ consisterait à poser, simplement, $\varphi (\rho,\alpha) = \alpha \varphi_1 (\rho)$. Nous adoptons une forme plus générale : ce qui suit n'en sera pratiquement pas compliqué.

Enfin, nous poserons

$$\Phi (\rho,\alpha) = \int_0^\rho \varphi (r,\alpha)\, dr, \text{ et, pour tout } n, \Phi_n (\rho) = \int_0^\rho \varphi_n (r)\, dr.$$

Cherchons alors, pour le problème précisé en (II-1), les solutions de forme analogue (qui sont d'ailleurs les seules solutions, d'après l'étude de M^{me} Dubreil, si la fonction φ est en outre höldérienne) :

$$U = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n (\rho, \theta) \alpha^n \quad , \quad V = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n (\rho, \theta) \alpha^n.$$

Nous admettrons, à charge de le vérifier au terme de l'étude, que ces séries convergent uniformément sur D + Γ, ainsi que les séries des dérivées premières par rapport à ρ et θ, dans un rayon $R \neq o$ en α. Posons enfin, de même :

$$p = p_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n \alpha^n.$$

Nous sommes amenés, par identification de séries entières en α, à résoudre successivement les systèmes suivants :

a) en première approximation

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial v_1}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_1}{\partial \theta} = 0 \\ &\frac{\partial u_1}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_1}{\partial \theta} = \varphi_1 \\ &\frac{du_1}{d\theta} - p_0 v_1{}^* = 0 \\ &(u_1)_0 = (v_1)_0 = 0 \\ &v_1{}^*(0) = 0 \end{aligned}\right.$$

b) quant aux approximations suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial v_n}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_n}{\partial \theta} = P_n \\ &\frac{\partial u_n}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_n}{\partial \theta} = Q_n + \varphi_n \\ &\frac{du_n{}^*}{d\theta} - p_0 v_n{}^* = R_n{}^* \\ &(u_n)_0 = (v_n)_0 = 0 \\ &v_n{}^*(o) = 0. \end{aligned}\right.$$

étant posé :

$$P_n = \sum_{q=1}^{n-1}\left[v_q \frac{\partial u_{n-q}}{\partial \rho} - u_q \frac{\partial v_{n-q}}{\partial \rho}\right]$$

$$Q_n = -\sum_{q=1}^{n-1}\left[u_q \frac{\partial u_{n-q}}{\partial \rho} + v_q \frac{\partial v_{n-q}}{\partial \rho}\right]$$

$$R_n{}^* = \sum_{q=1}^{n-1}\left[p_q v^*_{n-q} - \left(2u^*_q \frac{du^*_{n-q}}{d\theta} + v^*_q \frac{dv^*_{n-q}}{d\theta}\right) - u^*_{n-q} \sum_{r=1}^{q-}\left(u_r{}^* \frac{du^*_{q-r}}{d\theta} + v_r{}^* \frac{dv^*_{q-r}}{d\theta}\right)\right]$$

(quantités connues quand les approximations d'ordres $< n$ le sont).

II. 3. — Calcul de la première approximation.

Posant $Z_1 = v_1 + i\,(u_1 - \Phi_1)$, $\zeta = \rho\, e^{i\theta}$, on voit qu'on a à déterminer la fonction $Z_1\,(\zeta)$ par les conditions suivantes :

1° $Z_1\,(\zeta)$ est holomorphe sur $D + \Gamma$;

2° $\mathcal{R}^* \left(\zeta \dfrac{dZ_1}{d\zeta} - p_0\, Z_1\right) = 0$;

3° $Z_1\,(0) = 0$;

4° $Z_1\,(1)$ est imaginaire pur.

D'après (1°), $\zeta \dfrac{dZ_1}{d\zeta} - p_0\, Z_1$ est holomorphe sur $D + \Gamma$; d'après (2°), elle se réduit à une constante imaginaire pure; d'après (3°), cette constante est nulle. Donc :

$$\zeta \frac{dZ_1}{d\zeta} = p_0\, Z_1, \qquad \text{d'où} \qquad Z_1 = i\, k_1\, \zeta^{p_0},$$

avec $k_1 = C^{te}$. L'holomorphie exige que p_0 (a priori positif) soit entier.

Cet entier, d'ailleurs, doit être non nul : sinon, l'approximation linéaire se réduisant à un écoulement horizontal, l'amplitude serait (en contradiction avec la définition de α) du second ordre au moins en α.

Enfin, d'après (4°), k_1 est réel. Donc :

$$\begin{cases} u_1 = \Phi_1 + k_1\, \rho^N \cos N\theta \\ v_1 = -\, k_1\, \rho^N \sin N\theta \end{cases}$$

où N est un entier strictement positif et k_1 une constante réelle (et *non nulle*, pour la même raison que N). On peut préciser : $k_1 > 0$ si on a pris, pour origine des abscisses, un « creux » de L (ce qui exige, au voisinage de $x = 0$ et par conséquent de $\theta = 0$, qu'on ait $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{v}{u}\right) > 0$, c'est-à-dire $\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{V}{1+U}\right) < 0$, ou enfin $\dfrac{dV}{d\theta} < 0$).

II. 4. — Calcul de l'approximation d'ordre n.

a) Supposons connue une solution (u_n, v_n) du système qui définit l'approximation d'ordre n quand les précédentes sont connues. Cherchant à définir la solution générale par son accroissement $(\Delta u_n, \Delta v_n)$ à partir de la solution considérée, on obtient, en Δu_n et Δv_n, un système identique à celui qui définissait (en $u_1 - \Phi_1$ et v_1) la première approximation.

Donc : si l'on connaît une solution en (u_n, v_n), on en déduira la solution générale en ajoutant un multiple arbitraire de

$$(\rho^N \cos N\theta, \; -\, \rho^N \sin N\theta).$$

b) Admettons alors, aux ordres $q < n$, les propriétés suivantes (vérifiées à l'ordre 1) :

1° *tout* u_q *est fonction paire de* θ, *tout* v_q *est fonction impaire de* θ;

2° *tout* u_q *et tout* v_q *sont, en* $N\theta$*, des sommes trigonométriques d'ordre* q;

3° *leurs coefficients sont des fonctions de* ρ*, nulles en 0, à dérivée continue sur le fermé* (0, 1).

Il résulte de ces hypothèses que P_n, Q_n, R_n ont des expressions analogues :

$$P_n = \sum_{m=1}^{n} P_m^n(\rho) \sin m\,N\theta,\quad Q_n = \sum_{m=0}^{n} Q_m^n(\rho) \cos m\,N\theta,\quad R_n{}^* = \sum_{m=1}^{n} r_m^n \sin m\,N\theta,$$

les $P_m{}^n$ et $Q_m{}^n$ étant continus sur (0, 1) et s'annulant, avec un ordre $\geqslant 1$, pour $\rho = 0$. Cherchons alors les solutions (u_n, v_n) de la forme

$$u_n = \sum_{m=0}^{n} u_m^n(\rho) \cos m\,N\theta, \qquad v_n = \sum_{m=1}^{n} v_m^n(\rho) \sin m\,N\theta$$

Si nous en trouvons une infinité, dépendant additivement d'un multiple arbitraire de $(\rho^N \cos N\theta, -\rho^N \sin N\theta)$, nous serons assurés de détenir la solution générale.

Identifiant en θ, on a d'abord simplement, pour $m = 0$,

$$u'^{\,n}_0 = Q_0{}^n + \varphi_n,\quad u_0{}^n(0) = 0\ , \qquad \text{d'où} \qquad u_0{}^n = \Phi_n + \int_0^\rho Q_0{}^n(r)\,dr\ ;$$

puis, pour $1 \leqslant m \leqslant n$ (les accents désignant les dérivées par rapport à ρ) :

$$\begin{cases} v'^{\,n}{}_m + \dfrac{mN}{\rho} u^n{}_m = P^n{}_m \\ u'^{\,n}{}_m + \dfrac{mN}{\rho} v^n{}_m = Q^n{}_m \\ m\,u^n{}_m(1) + v^n{}_m(1) = -\dfrac{1}{N} r^n{}_m \\ u^n{}_m(0) = v^n{}_m(0) = 0 \end{cases}$$

Posant :

$$I^n{}_m(\rho) = \int_0^\rho \frac{P^n{}_m(r) + Q^n{}_m(r)}{2} r^{mN}\,dr,\ J^n{}_m(\rho) = \int_\rho^1 \frac{P^n{}_m(r) - Q^n{}_m(r)}{2r^{mN}}\,dr,$$

on a, comme intégrale générale du système des deux premières équations :

$$\begin{cases} u^n{}_m = \rho^{-mN}(I^n{}_m + C^n{}_m) + \rho^{mN}(J^n{}_m + K^n{}_m) \\ v^n{}_m = \rho^{-mN}(I^n{}_m + C^n{}_m) - \rho^{mN}(J^n{}_m + K^n{}_m) \end{cases}$$

avec $C^n{}_m = C^{te}$, $K^n{}_m = C^{te}$. Les conditions suivantes se traduisent par

$$\begin{cases} C^n{}_m = 0 \\ (m-1)\,K^n{}_m + \dfrac{1}{N} r^n{}_m + (m+1)\,I^n{}_m(1) = 0. \end{cases}$$

Cette dernière détermine $K^n{}_m$ pour tout $m > 1$, mais se réduit pour $m = 1$ à une condition de possibilité :

$$r^n{}_1 + 2\,N\,I^n{}_1(1) = 0 \qquad (23)$$

c) On assure cette condition en disposant des p_n, *qu'elle détermine univoquement*. En effet, l'approximation d'ordre n ne dépend que de $p_0, p_1 \dots p_{n-1}$. Donc P_n et Q_n sont indépendants de p_{n-1} : il figure seulement dans $R^*{}_n$, et plus précisément dans son terme $p_{n-1}\, v^*{}_1 = -k_1\, p_{n-1} \sin N\theta$. Donc, dans (23), p_{n-1} figure linéairement avec le coefficient $-k_1 \neq 0$.

d) Ayant ainsi assuré (23), on peut prendre arbitrairement $K^n{}_1$: d'où une solution qui, contenant l'arbitraire voulue (cf. *a*), est la solution générale. Elle jouit évidemment des propriétés (1°) et (2°). Vérifions (3°).

Pour tout $m > 0$ ($u'^n{}_0$ ne soulevant pas de difficulté), on a

$$u'^n{}_m = Q^n{}_m - mN\left[\frac{I^n{}_m}{\rho^{mN+1}} - \rho^{mN-1}(J^n{}_m + K^n{}_m)\right]$$

$$v'^n{}_m = P^n{}_m - mN\left[\frac{I^n{}_m}{\rho^{mN+1}} + \rho^{mN-1}(J^n{}_m + K^n{}_m)\right].$$

Il s'agit de vérifier que ces quantités restent finies quand $\rho \to 0$, leurs continuités étant évidentes en tout autre point. Or $P^n{}_m$ et $Q^n{}_m$ sont des sommes de termes $v^p{}_q\, u'^r_k$, $u^p{}_q\, v'^r_k$, $\varphi_q\, v^r_k$, $\Phi_q\, v'^r_k$: ils tendent tous vers zéro avec ρ, avec un ordre $\geqslant 1$ puisqu'on a admis (3°) aux ordres $< n$. Il existe donc des constantes $C > 0$ et $h > 0$ telles que, pour $\rho < h$,

$$\left|\frac{P^n{}_m + Q^n{}_m}{2}\right| < C\rho\,, \quad \left|\frac{P^n{}_m - Q^n{}_m}{2}\right| < C\rho.$$

Il s'ensuit d'abord, pour tout $m > 0$ (et $\rho < h$) :

$$\left|\frac{I^n{}_m}{\rho^{mN+1}}\right| < \frac{C}{\rho^{mN+1}}\int_0^\rho r^{mN+1}\, dr = \frac{C\rho}{mN+2} \to 0\,;$$

ensuite, si $mN > 1$:

$$\left|\rho^{mN-1} J^n{}_m\right| < \rho^{mN-1}\left|\int_h^1 \frac{P^n{}_m - Q^n{}_m}{2\rho^{mN}}\, d\rho\right| + C\rho^{mN-1}\int_\rho^h \frac{dr}{r^{mN-1}} \to 0$$

et, si $mN = 1$ (c'est-à-dire $m = 1$ et $N = 1$) :

$$\rho^{mN-1} J^n{}_m = J^n{}_1 = \int_\rho^1 \frac{P^n{}_1(r) - Q^n{}_1(r)}{2r}\, dr \to \text{limite finie } J^n{}_1(0).$$

Les u'^n_m et v'^n_m restent donc bien finis au point $\rho = 0$. Précisons même qu'ils s'y annulent *à la seule exception, dans le cas* $N = 1$, de

$$u'^n_1(0) = J^n_1(0) + K^n_1, \quad v'^n_1(0) = -J^n_1(0) - K^n_1.$$

II. 5. — Examen d'une objection.

La condition (23), qui détermine p_{n-1}, est apparue comme nécessaire *pour l'existence de solutions de la forme particulière définie en* (II. 4. b). *Il reste* à examiner si elle est nécessaire en toute généralité : autrement dit, si le problème n'admettrait pas des solutions d'une autre forme pour des valeurs des p_n ne vérifiant pas les conditions (23).

Reprenons donc sous sa forme la plus générale la recherche des solutions du système (cf. II. 2. b) qui définit l'approximation d'ordre n. Soit (a_n, b_n) une solution particulière du système des deux premières équations :

$$\frac{\partial b_n}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_n}{\partial \theta} = \mathrm{P}_n, \quad \frac{\partial a_n}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial b_n}{\partial \theta} = \mathrm{Q}_n + \varphi_n.$$

Elle est, a priori, indépendante de p_{n-1}, qui intervient seulement dans R^*_n. D'autre part, comme $(a_n + \mathrm{C^{te}}, b_n + \mathrm{C^{te}})$ est aussi solution, on peut supposer $(a_n)_0 = (b_n)_0 = 0$. Cherchons alors les solutions du système complet sous la forme :

$$u_n = a_n + \mathrm{A}_n, \quad v_n = b_n + \mathrm{B}_n.$$

Posant $\mathrm{B}_n + i\,\mathrm{A}_n = \mathrm{Z}_n$, $\rho e^{i\theta} = \zeta$, on est conduit comme en (II. 3) à déterminer l'inconnue $\mathrm{Z}_n(\zeta)$ par les conditions suivantes :

1° l'application $\zeta \to \mathrm{Z}_n$ est holomorphe sur $\mathrm{D} + \Gamma$;

2° $\mathcal{R}^*\left(\zeta \dfrac{d\mathrm{Z}_n}{d\zeta} - p_0\,\mathrm{Z}_n\right) = \mathrm{R}^*_n + p_0\, b^*_n - \dfrac{da_n^*}{d\theta}$;

3° $\mathrm{Z}_n(0) = 0$;

4° $\mathcal{R}\,[\mathrm{Z}_n(1)] = - b^*_n(0)$.

La seconde détermine dans tout le domaine, à une constante (imaginaire pure) près, la fonction holomorphe

$$\zeta \frac{d\mathrm{Z}_n}{d\zeta} - p_0\,\mathrm{Z}_n = \mathrm{T}_n, \text{ avec } \mathrm{T}_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\varphi}+\zeta}{e^{i\varphi}-\zeta}\left[\mathrm{R}_n^*(\varphi) + p_0 b_n^*(\varphi) + \frac{da^*_n}{d\theta}(\varphi)\right] d\varphi + i\,\mathrm{C}_n;$$

Cherchant à déterminer Z_n lui-même sous la forme $\mathrm{Z}_n = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \nu_k\, \zeta^k$, on détermine les ν_k par

$$(k - p_0)\,\nu_k = \frac{1}{k!}\,\mathrm{T}_n^{(k)}(0).$$

On voit donc apparaître, pour $k = p_0$, la condition de compatibilité $\mathrm{T}_n^{(p_0)}(0) = 0$, c'est-à-dire

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-p_0 i\theta}\left(\mathrm{R}^*_n + p_0\, b^*_n - \frac{da^*_n}{d\theta}\right) d\theta = 0.$$

Dans cette condition, p_{n-1} figure au 1$^{\text{er}}$ degré avec le coefficient

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-p_0 i\theta}\, v_1^*\, d\theta = -k_1 \int_{-\pi}^{\pi} e^{-p_0 i\theta} \sin p_0\,\theta\, d\theta = i\pi\, k_1 \neq 0.$$

Concluons que la solution comporte, en toute généralité, une condition de possibilité qui détermine univoquement les p_n : il est donc certain qu'elle coïncide avec (23). Autrement dit, les solutions obtenues en (II. 4) sont les seules.

II. 6. — Réduction au cas N = 1.

Or on les a explicitées sous la forme

$$\left\{\begin{aligned} U &= \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n \left[\Phi_n + \int_0^\rho Q_0^n(r)\,dr + u^n_1(\rho)\cos N\theta + \dots + u_n^n(\rho)\cos nN\theta \right] \\ V &= \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n \left[v^n_1(\rho)\sin N\theta + \dots + v^n_n(\rho)\sin nN\theta \right]. \end{aligned}\right.$$

Elles admettent, en θ, la période $\frac{2\pi}{N}$; en x, la période $\frac{\lambda}{N}$: ce sont donc, exclusivement, les « harmoniques » des solutions correspondant à $N = 1$.

Si donc nous appelons λ la période *stricte*, en x, du champ des vitesses (à l'exclusion des multiples de λ), nous devons nous limiter au cas $N = 1$. C'est ce que nous ferons désormais.

II. 7. — Unicité de la solution.

Revenons sur l'apparente arbitraire K^n_1 qui figure dans les u^n_1 et v^n_1 :

$$u^n_1 = \frac{1}{\rho} I_1^n(\rho) + \rho\,[J_1^n(\rho) + K_1^n], \quad v_1^n = \frac{1}{\rho} I_1^n(\rho) - \rho\,[J_1^n(\rho) + K_1^n],$$

Il résulte des précisions obtenues en (II. 4. d) que leurs dérivées premières au point $\rho = 0$ sont :

$$u'^n_1(0) = J^n_1(0) + K^n_1, \quad v'^n_1(0) = -J^n_1(0) - K^n_1$$

alors que celles de tous les autres v^n_m et u^n_m sont nulles.
Substituant à K^n_1, comme constante arbitraire, $k_n = J^n_1(0) + K^n_1$, on a donc :

$$u^n_1 = k_n\rho + \varepsilon_n(\rho), \qquad v^n_1 = -k_n\rho + \eta_n(\rho),$$

où ε_n et η_n sont infiniment petits d'ordre > 1 quand $\rho \to 0$. Il vient ainsi (convergences admises) :

$$\left\{\begin{aligned} U &= \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n \left[\Phi_n + \int_0^\rho Q_0^n\,d\rho + (k_n\rho + \varepsilon_n)\cos\theta + u_2^n\cos 2\theta + \dots + u_n^n\cos n\theta \right] \\ V &= \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n \left[(-k_n\rho + \eta_n)\sin\theta + v^n_2\sin 2\theta + \dots + v_n^n\sin n\theta \right] \end{aligned}\right.$$

avec, d'ailleurs, $Q^1_0 = \varepsilon_1 = \eta_1 = 0$.

Donc $\left(\text{avec } \varpi_n = \int_0^\rho Q_0^n\,d\rho\right)$:

$$U = \Phi + \left(\sum_{n=1}^{+\infty} k_n\,\alpha^n\right)\rho\cos\theta + \sum_{n=2}^{+\infty} \alpha^n\,[\varpi_n + \varepsilon_n\cos\theta + u_2^n\cos 2\theta + \dots + u_n^n\cos n\theta]$$

$$V = -\left(\sum_{n=1}^{+\infty} k_n \alpha^n\right) \rho \sin\theta + \sum_{n=2}^{+\infty} \alpha^n \left[\eta_n \sin\theta + v_2{}^n \sin 2\theta + \ldots + v_n{}^n \sin n\theta\right]$$

où cette fois, *tous* les coefficients figurant sous les $\sum_{n=2}^{+\infty}$ sont infiniment petits d'ordre > 1 quand $\rho \to 0$. Substituant à α, comme « petit paramètre »,

$$\nu = \sum_{n=1}^{+\infty} k_n \alpha^n \text{ (petit du même ordre que } \alpha),$$

on se ramène aux expressions suivantes (où les « soulignés » désignent des expressions présentant les mêmes caractères que les expressions non soulignées) :

$$U = \Phi + \nu\rho\cos\theta + \sum_{n=2}^{+\infty} \nu^n \left[\underline{\varpi_n} + \underline{\varepsilon_n}\cos\theta + \underline{u^n{}_2}\cos 2\theta + \ldots + \underline{u_n{}^n}\cos n\theta\right.$$

$$V = -\nu\rho\sin\theta + \sum_{n=2}^{+\infty} \nu^n \left[\underline{\eta_n}\sin\theta + \underline{v_2{}^n}\sin 2\theta + \ldots + \underline{v_n{}^n}\sin n\theta\right].$$

On voit donc qu'on ne restreint pas la généralité des solutions en imposant, au prix d'un changement de paramètre, $k_1 = 1$ et $k_2 = \ldots = k_n = \ldots = 0$: ce qui revient à imposer à tous les $v^n{}_m$ et $u^n{}_m$ (sauf $v^1{}_1$ et $u^1{}_1$, égaux à ρ et $-\rho$) d'être infiniment petits d'ordre > 1 quand $\rho \to 0$. Moyennant quoi, pour chaque valeur du paramètre ainsi précisé, la solution est unique.

II. 8. — Premières conclusions.

Récapitulons les conclusions obtenues à ce stade, sous réserve des vérifications ultérieures de convergence.

1° *Pour chaque valeur du couple* (α, p_0) *où α est un « petit paramètre » arbitraire et p_0 un entier positif, le problème posé en* (II. 1) *admet une solution unique, où la fonction φ reste arbitraire* (*analytique en α et continue en* ρ) *et où le nombre positif* p *est déterminé.* Cette solution, pour $p_0 = 1$, est de la forme :

$$\left\{\begin{aligned} U &= \Phi + \alpha\rho\cos\theta + \sum_{n=2}^{+\infty} \alpha^n \left[\int_0^\rho Q_0{}^n\, d\rho + u_1{}^n(\rho)\cos\theta + \ldots + u_n{}^n(\rho)\cos n\theta\right] \\ V &= -\alpha\rho\sin\theta + \sum_{n=2}^{+\infty} \alpha^n \left[v_1{}^n(\rho)\sin\theta + \ldots + v_n{}^n(\rho)\sin n\theta\right], \end{aligned}\right.$$

où pour tous $n \geqslant 2$ et $m \geqslant 1$, les $v^n{}_m$ et $u^n{}_m$ sont infiniment petits d'ordre > 1 quand $\rho \to 0$.

2° *La solution correspondant à* $p_0 = N$ (*entier* > 1) *est parasite, en ce sens qu'elle admet, en* θ (*ou en* x) *une sous-période :* elle est donc en réalité (et c'est ce qui prouve son unicité, non directement établie) solution du problème correspondant à $p_0 = 1$ et à la période $\dfrac{\lambda}{N}$ en x.

3° *Le champ des vitesses est symétrique* (au sens de M^{me} Dubreil, qui a déjà donné ce résultat sous ses propres hypothèses) par rapport à l'axe $x = 0$; aux points symétriques par rapport à cet axe, les U sont égaux et les V sont opposés.

4° Cette symétrie résulte exclusivement de l'hypothèse selon laquelle la tangente à L, en son point d'abscisse nulle, est horizontale. Une autre conséquence apparaît : *L ne présente de tangentes horizontales que sur ses axes de symétrie, qui sont aussi les axes de symétrie* ($x = k\,\dfrac{\lambda}{2}$) *du champ des vitesses.*

5° De façon plus précise, l'hypothèse décisive (cf. II. 3, réalité de k_1) a été la suivante : on a $V = 0$ en un point de l'axe $\theta = 0$ (le fait que c'était le point $\rho = 1$ n'a joué, en réalité, aucun rôle particulier). Donc : *l'ensemble des axes* $x = k\,\dfrac{\lambda}{2}$ *est le lieu des points où les tangentes aux lignes de courant sont horizontales.*

II. 9. — Récapitulation de la technique du calcul.

Posons, comme il a été dit,

$$I_m^n = \int_0^\rho \frac{P_m^n(r) + Q_m^n(r)}{2}\, r^m\, dr, \qquad J_m^n = \int_\rho^1 \frac{P_m^n(r) - Q_m^n(r)}{2\, r^m}\, dr$$

On aura :

$$\begin{cases} U = \alpha\,(\Phi_1 + \rho\cos\theta) + \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \alpha^n\,[u_0^n + u_1^n \cos\theta + \ldots + u_n^n \cos n\theta] \\ V = -\,\alpha\rho\sin\theta + \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \alpha^n\,[v_1^n \sin\theta + \ldots + v_n^n \sin n\theta] \end{cases}$$

avec, d'abord,

$$u_0^n = \Phi_n + \int_0^\rho Q_0^n(r)\, dr;$$

ensuite, pour $1 \leqslant m \leqslant n$:

$$\begin{cases} u_m^n = \dfrac{1}{\rho^m}\, I_m^n + \rho^m\,(J_m^n + K_m^n) \\ v_m^n = \dfrac{1}{\rho^m}\, I_m^n - \rho^m\,(J_m + K_m^n). \end{cases}$$

La constante K^n_m est définie, pour $m > 1$, par

$$(m - 1)\, K^n_m + r^n_m + (m + 1)\, I^n_m(1) = 0; \tag{25}$$

pour $m = 1$, cette condition détermine p_{n-1}, par

$$0 = r^n_1 + 2\, I^n_1(1) \tag{26}$$

et K^n_1 est défini par

$$K^n_1 + J^n_1(0) = 0 \tag{27}$$

(exprimant que u^n_1 et v^n_1 sont infiniment petits d'ordre > 1 quand $\to 0$).

II. 10. — Calcul des premiers termes.

a) En première approximation, rappelons qu'on a

$$u_1 = \Phi_1 + \rho\cos\theta, \qquad v_1 = -\rho\sin\theta$$

b) Il s'ensuit, pour le calcul de la deuxième approximation :

$$\left\{\begin{array}{l} P_2 = (\Phi_1 - \rho\,\varphi_1)\sin\theta, \text{ c'est-à-dire } P^2_1 = \Phi_1 - \rho\,\varphi_1,\ P^2_2 = 0; \\ Q_2 = -(\rho + \Phi_1\varphi_1) - (\Phi_1 + \rho\,\varphi_1)\cos\theta, \text{ soit } Q^2_0 = -(\rho + \Phi_1\varphi_1), \\ \qquad Q^2_1 = -(\Phi_1 + \rho\,\varphi_1),\ Q^2_2 = 0; \\ R^\star_2 = (2\,\Phi^\star_1 - p_1)\sin\theta + \dfrac{1}{2}\sin 2\theta, \text{ soit } r^2_1 = 2\,\Phi^\star_1 - p_1,\ r^2_2 = \dfrac{1}{2}; \end{array}\right.$$

d'où :

$$\int_0 Q_0^2\, d\rho = -\frac{\rho^2 + (\Phi_1)^2}{2} \quad\Bigg|\quad I_1^2 = -\int_0^\rho \rho^2\varphi_1\, d\rho = -\rho^2\Phi_1 + 2\int_0^\rho \rho\,\Phi_1\, d\rho \quad\Bigg|\quad I_2^2 = 0$$

$$J_1^2 = \int_0^1 \frac{\Phi_1}{\rho}\, d\rho \qquad\qquad J_2^2 = 0$$

$$p_1 = 4\int_0^1 \rho\Phi_1\, d\rho, \quad K_1^2 = -\int_0^1 \frac{\Phi_1}{\rho}\, d\rho, \quad K_2^2 = -\frac{1}{2}.$$

Donc :

$$\left\{\begin{array}{l} u_2 = \Phi_2 - \dfrac{\rho^2 + (\Phi_1)^2}{2} - \left(\rho\,\Phi_1 + \rho\displaystyle\int_0^\rho \frac{\Phi_1}{\rho}\, d\rho - \frac{2}{\rho}\int_0^\rho \rho\Phi_1\, d\rho\right)\cos\theta - \dfrac{\rho^2}{2}\cos 2\theta \\ v_2 = -\left(\rho\Phi_1 - \rho\displaystyle\int_0^\rho \frac{\Phi_1}{\rho}\, d\rho - \frac{2}{\rho}\int_0^\rho \rho\,\Phi_1\, d\rho\right)\sin\theta + \dfrac{\rho^2}{2}\sin 2\theta \end{array}\right.$$

c'est-à-dire :

$$\left\{\begin{array}{l} U = \alpha\,(\Phi_1 + \rho\cos\theta) + \alpha^2\left[\Phi_2 - \dfrac{\rho^2 + (\Phi_1)^2}{2} - (\rho\Phi_1 + \rho\displaystyle\int_0^\rho \frac{\Phi_1}{\rho}\, d\rho - \frac{2}{\rho}\int_0^\rho \Phi_1\, d\rho)\cos\theta\,\frac{\rho^2}{2} - \cos 2\theta\right] + . \\ V = -\alpha\rho\sin\theta + \alpha^2\left[(-\rho\Phi_1 + \rho\displaystyle\int_0^\rho \frac{\Phi_1}{\rho}\, d\rho + \frac{2}{\rho}\int_0^\rho \rho\,\Phi_1\, d\rho)\sin\theta + \frac{\rho^2}{2}\sin 2\theta\right] + \dots \end{array}\right.$$

$$p = 1 + 4\,\alpha\int_0^1 \rho\,\Phi_1\, d\rho + \dots$$

II. 11. — Calcul de l'amplitude.

Notant $y_L(x)$ l'ordonnée du point courant de L, on a l'amplitude :

$$A = y_L\left(\frac{\lambda}{2}\right) - y_L(0) = \int_0^{\frac{\lambda}{2}} \frac{v^*}{u^*}\,dx = -\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{V^*}{1+U^*}\,d\theta.$$

c'est-à-dire, d'après la condition sur L :

$$A = \frac{\lambda}{4\pi p}\Big[(1+U^*)^2 + V^{*2}\Big]_{\pi}^{0} = \frac{\lambda}{4\pi p}\Big[U^*(0) - U^*(\pi)\Big]\Big[2 + U^*(0) + U^*(\pi)\Big]$$

Il vient ainsi, en première approximation :

$$A \sim \frac{\lambda\alpha}{\pi}$$

qui donne une interprétation de α, ou du moins de sa partie principale.

En deuxième approximation :

$$A = \frac{\lambda}{\pi}\left[\alpha - \alpha^2\left(\int_0^1 \frac{\Phi_1}{\rho}\,d\rho + 2\int_0^1 \rho\,\Phi_1\,d\rho\right) + \dots\right]$$

II. 12. — Propriétés particulières des développements dans le cas irrotationnel.

a) Les calculs sont sensiblement plus aisés dans le cas $\Phi = 0$, du fait que les expressions ne comportent plus aucun signe d'intégration portant sur une fonction arbitraire. Il vient ainsi très rapidement :

$$\left\{\begin{aligned} U &= \alpha\rho\cos\theta - \frac{\alpha^2}{2}\rho^2(1+\cos 2\theta) + \frac{3\alpha^3}{8}\rho^3(3\cos\theta + \cos 3\theta) - \\ &\qquad - \frac{\alpha^4}{3}[3\rho^4 + \rho^2(4\rho^2+3)\cos 2\theta + \rho^4\cos 4\theta] + \dots \\ V &= -\alpha\rho\sin\theta + \frac{\alpha^2}{2}\rho^2\sin 2\theta - \frac{3\alpha^3}{8}\rho^3(\sin\theta + \sin 3\theta) \\ &\qquad + \frac{\alpha^4}{3}[\rho^2(2\rho^2+3)\sin 2\theta + \rho^4\sin 4\theta] + \dots \end{aligned}\right.$$

avec $p = 1 - \alpha^2 + \dots$

b) Cherchons à généraliser les propriétés qui apparaissent ainsi sur les premiers termes : *pour tout entier* k, *les* u^n_{n-2k+1} *et les* v^n_{n-2k+1} *sont nuls, ainsi que les* p_{2k-1}.

Supposons en effet qu'il soit ainsi aux ordres $< n$ pour les u et v, aux ordres $< n-1$ pour les p. P_n est alors une somme de termes en

$2\sin(q-2k)\,\theta\cos(n-q-2h)\,\theta$
$= \sin(n-2k-2h)\,\theta - \sin(n-2q+2k-2h)\,\theta$

et de façon analogue, Q_n est une somme de termes en

$2\cos(q-2k)\,\theta\cos(n-q-2h)\,\theta$
$= \cos(n-2k-2h)\,\theta + \cos(n-2q+2k-2h)\,\theta$
$2\sin(q-2k)\,\theta\sin(n-q-2h)\,\theta$
$= \cos(n-2q+2k-2h)\,\theta - \cos(n-2k-2h)\,\theta$

On a donc, pour tout entier k :

$$P^n_{n-2k+1} = Q^n_{n-2k+1} = 0, \text{ d'où } I^n_{n-2k+1} = J^n_{n-2k+1} = 0$$

Quant à R_n, on vérifie de la même façon que tous ses termes sont en sin $(n - 2h)\,\theta$, sauf toutefois les termes $p_q\, v^*{}_{n-q}$. Donc :

$$r^n_{n-2k+1} = \sum_{q=1}^{n-1} p_q\, v^{*n-q}_{n-2k+1}$$

Si q est pair, le coefficient de p_q est nul. Quant aux indices impairs, utilisons l'hypothèse précise qu'on a $p_{2k-1} = 0$ pour $2k - 1 < n - 1$. Il s'ensuit :

pour $n - 2k + 1 > 1$ (c'est-à-dire $2k - 1 < n - 1$),

$$r^n_{n-2k+1} = p_1 v^{*\,n-1}_{n-3k+1} + p_3\, v^{*\,n-3}_{n-2k+1} + \ldots + p_{2k-1}\, v^{*\,n-2k+1}_{n-2k+1} = 0, \text{ d'où } K^n_{n-2k+1} = 0$$

qui, avec la nullité des I^n_{n-2k+1} et des J^n_{n-2k+1}, assure celle des u^n_{n-2k+1} et v^n_{n-2k+1} ; enfin, pour $n - 2k + 1 = 1$ (c'est-à-dire $n = 2k$),

$$r_1^{2k} = p_1\, v_1^{*2k-1} + p_3\, v^{*}{}_1^{2k-3} + \ldots + p_{2k-1}\, v^{*}{}_1^{1} = -\, p_{2k-1}$$

qui, par (26), assure la persistance de $p_{2k-1} = 0$ au rang $n - 1$.

CHAPITRE III.

CONVERGENCE DES SOLUTIONS EN PROFONDEUR INFINIE

III. 1. — Définition et axiomatique d'un certain type de majorations.

a) Soit S (ρ, θ) une somme de Fourier en θ à coefficients fonctions continues de ρ sur $0 \leqslant \rho \leqslant 1$. Nous dirons qu'elle est *fortement majorée* par K (constante positive) si la *somme des bornes supérieures des valeurs absolues de ses coefficients,* sur $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, est inférieure à K : ce que nous noterons S (ρ, θ) « K. Donc

$$\sum_{m=0}^{n} (A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta) \ll K \text{ si } \sum_{m=0}^{n} [\max |A_m| + \max |B_m|] < K.$$

La forte majorance implique évidemment la majorance banale.

Elle lui équivaut pour une fonction de ρ indépendante de θ.

b) On va facilement vérifier les trois axiomes suivants.

1. *Axiome* FM_1 (d'intégration) : S (ρ, θ) « K implique :

$$\frac{1}{\rho} \int_0^\rho S(r, \theta)\, dr \ll K$$

Car, terme à terme :

$$\max \left| \frac{1}{\rho} \int_0^\rho A_m(r)\, dr \right| \leqslant \max \left[\frac{1}{\rho} \int_0^\rho \left| A_m(r) \right| dr \right]$$
$$\leqslant \max \left[\frac{1}{\rho} \int_0^\rho \max \left| A_m \right| dr \right] \leqslant \max \left| A_m \right| .$$

2. *Axiome* FM_2 (d'addition) : si S (ρ, θ) « K et s $(\rho, \theta$ « k, alors aussi λ S (ρ, θ) + $\mu\, s$ (ρ, θ) « $|\lambda|$ K + $|\mu|\, k$, λ et μ étant deux constantes quelconques.

Car, en écritures sommaires :

$$\Sigma [\max |\lambda A_m + \mu a_m| + \max |\lambda B_m + \mu b_m|]$$
$$\leqslant \Sigma [\max |\lambda A_m| + \max |\mu a_m| + \max |\lambda B_m| + \max |\mu b_m|]$$
$$= |\lambda| \Sigma [\max |A_m| + \max |B_m|] + |\mu|\, \Sigma [\max |a_m| + \max |b_m|].$$

3. *Axiome* FM_3 (de multiplication) : si S (ρ, θ) « K et s $(\rho, \theta$ « k, alors aussi S (ρ, θ) . s (ρ, θ) « Kk. Car, d'abord :

$$\Sigma (A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta) . \Sigma (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$
$$= \Sigma\Sigma [A_m a_n \cos m\theta \cos n\theta + A_m b_n \cos m\theta \sin n\theta$$
$$+ B_m a_n \sin m\theta \cos n\theta + B_m b_n \sin m\theta \sin n\theta]$$

avec
$$\Sigma\Sigma [\max |A_m a_n| + \max |A_m b_n| + \max |B_m a_n| + \max |B_m b_n|]$$
$$\leqslant \Sigma\Sigma [\max |A_m| . \max |a_n| + \ldots]$$
$$= \Sigma [\max |A_m| + \max |B_m|] . \Sigma [\max |a_n| + \max |b_n|].$$

D'autre part, on ne modifie évidemment pas la somme des bornes supérieures des valeurs absolues des coefficients du produit, développé d'abord sous sa forme brute ci-dessus, en y remplaçant $A_m a_n \cos m\theta \cos n\theta$, par exemple, par $\frac{A_m a_n}{2} \cos (m+n)\,\theta + \frac{A_m a_n}{2} \cos (m-n)\theta$: on ne peut que la diminuer (comme peuvent aussi la diminuer les « réductions » éventuelles) en remplaçant $A_m b_m \cos m\theta \sin m\theta$ par $\frac{A_m b_m}{2} \sin 2m\theta$.

III. 2. — Introduction d'une forme particulière de fortes majorantes.

a) Nous utiliserons ci-dessous des fortes majorantes de la forme

$$\mu_n = A \frac{K^n}{7\,n^2} ,$$

A et K étant deux constantes positives. Leur intérêt tient ici à la propriété suivante. Posons

$$M_n = \sum_{b=1}^{n=1} \mu_q \, \mu_{n-q} ,$$

c'est-à-dire

$$M_n = \frac{A^2 K^n}{49} \sum_{q=1}^{n=1} \frac{1}{q^2 \, (n-q)^2} .$$

On a

$$\sum_{q=1}^{n=1} \frac{1}{q^2 \, (n-q)^2} = \sum_{q=1}^{n=1} \left[\frac{1}{n^2 q^2} + \frac{2}{n^3 q} + \frac{1}{n^2 (n-q)^2} + \frac{2}{n^3 (n-q)} \right] = 2 \sum_{q=1}^{n=1} \left(\frac{1}{n^2 q^2} + \frac{2}{n^3 q} \right),$$

avec

$$\sum_{q=1}^{n-1} \frac{1}{q^2} < 2 - \frac{1}{n}, \qquad \sum_{q=1}^{n-1} \frac{1}{q} < 1 + \operatorname{Log} n,$$

d'où

$$\sum_{q=1}^{n-1} \frac{1}{q^2 \, (n-q)^2} < \frac{2}{n^2} \left(2 + \frac{1}{n} + 2 \frac{\operatorname{Log}}{n} \right) < \frac{1}{n^2} (5 + 2 \operatorname{Log} 2) < \frac{7}{n^2} .$$

Il s'ensuit :

$$M_n = \sum_{q=1}^{n-1} \mu_q \, \mu_{n-q} < A \, \mu_n \tag{28}$$

qu'on pourra, en prenant A assez petit, rendre inférieur à tout $\varepsilon\mu_n$, ε étant un nombre positif arbitrairement fixé.

b) Considérons la série $\varphi(\rho) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n \varphi_n(\rho)$. Elle admet par hypothèse, sur $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, un rayon de convergence uniforme non nul en α.

Choisissons arbitrairement $\alpha_0 > 0$ inférieur à ce rayon.

Sur $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, les $(\alpha_0)^n \varphi_n(\rho)$ sont uniformément bornés par un certain $\frac{\nu}{7}$, d'où $|\varphi_n| < \frac{\nu}{7(\alpha_0)^n}$

A cette majoration on peut, d'une double infinité de façons, en substituer une autre de la forme ci-dessus, soit

$$|\varphi_n| < |\mu_n|. \qquad (29)$$

Il suffit que l'inégalité

$$A\frac{K^n}{n^2} > \frac{\nu}{(\alpha_0)^n}\text{, c'est-à-dire } A\frac{K^n(\alpha_0)^n}{n^2} > \nu,$$

soit constamment assurée. Et pour cela il suffit que soient vérifiées les suivantes (exprimant que le premier membre croît sur $n \geqslant 1$ et que sa valeur initiale majore ν) :

$$K\alpha_0 > 4 \quad , A K\alpha_0 > \nu. \qquad (30)$$

Soulignons dès maintenant que $\frac{1}{K}$ est le rayon de convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n \alpha^n$: c'est donc un minorant du rayon de convergence de toute série majorée par celle-là, ou par une série à termes proportionnels.

III. 3. — Majoration forte des P_n et Q_n.

Admettons aux rangs $q < n$ les majorations fortes

$$\frac{\partial u_q}{\partial \rho} - \varphi_q \ll \mu_q, \quad \frac{\partial v_q}{\partial \rho} \ll \mu_q,$$

vérifiées au rang 1 sous la seule condition

$$\mu_1 > 1\text{, c'est-à-dire } AK > 7. \qquad (31)$$

Elles impliquent, par (29) et MF_1 :

$$\frac{\partial u_q}{\partial \rho} \ll 2\,\mu_q > \frac{1}{\rho} u_q \ll 2\,\mu_q, \quad \frac{1}{\rho} v_q \ll \mu_q,$$

d'où, au rang n et à tout rang inférieur (cf. MF_2 et MF_3) :

$$\frac{1}{\rho} P_n \ll 4\,M_n, \quad \frac{1}{\rho} Q_n \ll 5\,M_n$$

III. 4. — Majoration forte de R^*_n et majoration de p_{n-1}.

Détaillons maintenant :

$$R^*_n = p_{n-1} v^*_1 + \sigma_n + s_n, \text{ avec } \sigma_n = \sum_{q=1}^{n-2} p_q v^*_{n-q}.$$

Nous désignerons donc par s_n la somme des termes indépendants des p_q.

a) D'après les équations (cf. II.2 — *b*) qui définissent l'approximation d'ordre q, on a, pour tout $q < n$:

$$\begin{cases} \dfrac{du^*_q}{d\theta} = \left(\dfrac{\partial v_q}{\partial \varphi}\right)^* - P^*_q \ll \mu_q + 4\, M_q < (4\,A+1)\,\mu_q. \\ \dfrac{dv^*_q}{d\theta} = Q^*_q + \varphi^*_q - \left(\dfrac{\partial u_q}{\partial \varphi}\right)^* \ll 5\,M_q + \mu_q < (5A+1)\,\mu_q. \end{cases}$$

Il s'ensuit d'abord, par applications répétées de (28) :

$$s_n \ll \sum_{q=1}^{n-1} [(21A+5)\,\mu_q\,\mu_{n-q} + 2\,(13A+3)\,\mu_{n-q}\,M_q] < (5 + 27A + 26A^2)\,M_n.$$

b) Faisons maintenant les nouvelles hypothèses (où $\omega = C^{te} > 0$, $C = C^{te} > 0$) :

$$\begin{cases} \text{pour } 1 \leqslant q \leqslant n-1, & |p_q| < C\,\mu_{q+1} \\ \text{pour } 2 \leqslant q \leqslant n-1, & {}_*{}^b a \ll \omega\mu_q. \end{cases}$$

Il s'ensuit d'abord, compte tenu de $\mu_{q-1} < K\mu_q$:

$$\sigma_n \ll \omega\,CK \sum_{q=1}^{n-2} \mu_q\,\mu_{n-q} < \omega\,CK\,M_n,$$

d'où

$$\sigma_n + s_n \ll M_n\,(5 + 27A + 26A^2 + \omega CK)$$

D'autre part, avec ces notations, l'équation (26) qui détermine p_{n-1} s'explicite comme suit (puisque $v^*_1 = -\sin\theta$) :

$$p_{n-1} = [\text{coefficient de } \sin\theta \text{ dans } \sigma_n + s_n] + 2\,I^n_1\,(1)$$

Le premier terme est majoré par $M_n\,(5 + 27\,A + 26\,A^2 + \omega CK)$. Quant au second, on a

$$|P^n_1| < 4\,\rho\,M_n,\ |Q^n_1| < 5\,\rho\,M_n,\ \text{ d'où }\ 2\,I^n_1\,(1) < 9\,M_n \int_0^1 \rho^2\,d\rho = 3\,M_n.$$

Au total :

$$|p_{n-1}| < M_n\,(8 + 27\,A + 26\,A^2 + \omega CK),$$

d'où :

$$R^*_n \leqslant M_n\,(13 + 54\,A + 52\,A^2 + 2\,\omega CK)$$

c) La majoration forte admise pour les v^*_q à partir du rang $q = 2$ exige la vérification initiale

$$\omega\mu_2 > V_2,\ \text{c'est-à-dire}\ \omega\,A\,K^2 > 28\,V_2 \tag{33}$$

V_2 étant une majorante forte de v^*_2 : c'est donc une quantité connue (cf. II. 10), indépendante de A, K, ω, C.

Quant à la majoration des p_q, on l'assurerait au rang $q = 1$, compte tenu de $\sigma_2 = 0$, par

$$M_2\,(8 + 27\,A + 26\,A^2) < C\,\mu_2$$

Mais cette condition sera englobée ci-dessous dans la condition plus générale

$$M_n\,(8 + 27\,A + 26\,A^2 + \omega CK) < C\,\mu_n$$

qui exprime le maintien de la majoration au rang $q = n - 1$.

III. 5. — Majoration des solutions.

Sous les hypothèses admises aux rangs $q < n$, nous sommes donc en possession de majoration fortes des seconds membres des équations de l'approximation d'ordre n. Voyons maintenant quelles majorations fortes en résulteront pour les solutions de ces équations ou, plus précisément, pour

$$\frac{\partial u_n}{\partial \rho} - \varphi_n, \frac{\partial v_n}{\partial \rho} \text{ et } v^*_n.$$

a) D'après les formules de résolution récapitulées en II.9. on a

$$\frac{\partial u_n}{\partial \rho} - \varphi_n = Q_0^n + u'^n_1 \cos \theta + \sum_{m=2}^{n} u'^n_m \cos m\theta, \qquad \frac{\partial v_n}{\partial \rho} = v'^n_1 \sin \theta + \sum_{m=2}^{n} v'^n_m \sin m\theta,$$

avec, de façon complètement explicite :

$$u'^n_1 = Q_1^n - \int_0^\rho \frac{P_1^n - Q_1^n}{2\,\rho}\, d\rho - \frac{1}{\rho^2} \int_0^\rho \frac{P_1^n + Q_1^n}{2}\, \rho\, d\rho$$

$$v_1'^n = P_1^n + \int_0^\rho \frac{P_1^n - Q_1^n}{2\rho}\, 2\,\rho - \frac{1}{\rho^2} \int_0^\rho \frac{P_1^n + Q_1^n}{2}\, \rho\, d\rho,$$

et, pour $m \geqslant 2$,

$$\left\{\begin{aligned} u'^n_m &= Q_m^n + m\rho^{m-1} \int_\rho^1 \frac{P^n_m - Q^n_m}{2\,\rho^m}\, d\rho - \frac{m}{\rho^{m+1}} \int_0^\rho \frac{P^n_m + Q^n_m}{2}\, \rho^m\, d\rho \\ &\qquad - \frac{m\,\rho^{m-1}}{m-1} \left[r_m^n + (m+1) \int_0^1 \frac{P_m^n + Q_m^n}{2}\, \rho^m\, d\rho \right] \\ v'^n_m &= P_m^n - m\rho^{m-1} \int_\rho^1 \frac{P_m^n - Q_m^n}{2\,\rho^m}\, d\rho - \frac{m}{\rho^{m+1}} \int_0^\rho \frac{P_m^n - Q_m^n}{2}\, \rho^m\, d\rho \\ &\qquad + \frac{m\,\rho^{m-1}}{m-1} \left[r_m^n + (m+1) \int_0^1 \frac{P_m^n + Q_m^n}{2}\, \rho^m\, d\rho \right]. \end{aligned}\right.$$

Or (tout ce qu'on va écrire pour les P^n_m valant aussi, bien entendu pour les Q^n_m), on a d'abord, pour tout $m \geqslant 1$:

$$\max \left| \frac{m}{\rho^{m+1}} \int_0^\rho \frac{P_m^n}{2}\, \rho^m d\rho \right| < \text{amx} \left| \frac{P_m^n}{2\rho} \right| .\ \max \left[\frac{m}{\rho^{m+1}} \int_0^\rho \rho^{m+1}\, d\rho \right] < \frac{1}{2} \max \left| \frac{P_m^n}{2\rho} \right|$$

Ensuite, pour $m \geqslant 3$:

$$\max \left| m\rho^{m-1} \int_\rho^1 \frac{P_m^n}{2\rho^m}\, d\rho \right| < \frac{1}{2} \max \left| \frac{P_m^n}{\rho} \right| \max \left[\frac{m}{m-2} (\rho - \rho^{m-1}) \right] < \frac{1}{2} \max \left| \frac{P_m^n}{\rho} \right|$$

et on s'assure facilement que ce résultat subsiste pour $m = 1$ et $m = 2$. Enfin, pour $m = 1$:

$$\max \left| \int_0^\rho \frac{P_1^n}{2\rho}\, d\rho < \frac{1}{2} \max \left| \frac{P_1^n}{\rho} \right| ,\quad \max \left| P_1^n \right| \leqslant \max \left| \frac{P_1^n}{\rho} \right|$$

et, pour $m \geqslant 2$:

$$\max\left|P_m^n\right| \leqslant \max\left|\frac{P_m^n}{\rho}\right|$$

$$\max\left|\frac{m}{m-1}\rho^{m-1} r_m^n\right| < 2\left|r_m^n\right|$$

$$\max\left|\frac{m(m+1)}{m-1}\rho^{m-1}\int_0^1 \frac{P_m^n}{2}\rho^m d\rho\right| < (m+1)\max\left|\frac{P_m^n}{\rho}\right|\int_0^1 \rho^{m+1} d\rho < \max\left|P_m^n\right|.$$

Au total, on a donc, pour $m = 1$,

$$\left\{\begin{aligned} &\max\left|u'^n_1\right| < \max\left|\frac{P_1^n}{\rho}\right| + 2\max\left|\frac{Q_1^n}{\rho}\right| \\ &\max\left|v'^n_1\right| < 2\max\left|\frac{P_1^n}{\rho}\right| + \max\left|\frac{Q_1^n}{\rho}\right| \end{aligned}\right.$$

et, pour $m \geqslant 2$:

$$\left\{\begin{aligned} &\max\left|u'^n_m\right| < 2\max\left|\frac{P_m^n}{\rho}\right| + 3\max\left|\frac{Q_m^n}{\rho}\right| + 2\left|r_m^n\right| \\ &\max\left|v'^n_m\right| < 3\max\left|\frac{P_m^n}{\rho}\right| + 2\max\left|\frac{Q_m^n}{\rho}\right| + 2\left|r_m^n\right| \end{aligned}\right.$$

où s'englobe le résultat précédent. Finalement

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial u_n}{\partial \rho} - \varphi_n \ll \max\left|\frac{Q_0^n}{\rho}\right| + \sum_{m=1}^{n}\left[2\max\left|\frac{P_m^n}{\rho}\right| + 3\max\left|\frac{Q_m^n}{\rho}\right| + 2\left|r_m^n\right|\right] \\ &\frac{\partial v_n}{\partial \rho} \ll \sum_{m=1}^{n}\left[3\max\left|\frac{P_m^n}{\rho}\right| + 2\max\left|\frac{Q_m^n}{\rho}\right| + 2\left|r_m^n\right|\right] \end{aligned}\right.$$

avec, par hypothèse,

$$\sum_{m=1}^{n}\max\left|\frac{P_m^n}{\rho}\right| < 4M_n, \quad \sum_{m=1}^{n}\max\left|\frac{Q_m^n}{\rho}\right| < 5M_n, \quad \sum_{m=1}^{n}\left|r_m^n\right| < M_n(13+54A+52A^2 + 2\omega CK).$$

Donc :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial u_n}{\partial \rho} - \varphi_n \ll M_n(49 + 108A + 104A^2 + 4\omega CK) \\ &\frac{\partial v_n}{\partial \rho} \ll M_n(48 + 108A + 104A^2 + 4\omega CK). \end{aligned}\right.$$

b) Quant à $v^\star_n$, on a rapidement, de façon analogue :

$$v^\star_n \ll 2M_n(11 + 27A + 26A^2 + \omega CK).$$

III. 6. — Conclusion.

a) Récapitulons. Nous avons fait les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} \text{pour } 1 \leqslant q < n, & \dfrac{\partial u_q}{\partial \rho} - \varphi_q \ll \mu_q, \ \dfrac{\partial u_q}{\partial \rho} \ll \mu_q\,; & (35)\\ \text{pour } 2 \leqslant q < n, & v^*_q \ll \omega\mu_q\,; & (36)\\ \text{pour } 2 \leqslant q < n, & |p_{q-1}| < C\mu_q. & (37)\end{cases}$$

Nous avons vu qu'elles entraînent, au rang n :

$$\frac{\partial u_n}{\partial \rho} - \varphi_n \ll M_n (49 + 108\,A + 104\,A^2 + 4\,\omega\,CK)$$

$$\frac{\partial v_n}{\partial \rho} \ll \qquad \text{id.}$$

$$v^*_n \ll 2\,M_n (11 + 27\,A + 26\,A^2 + \omega CK)$$

$$|p_{n-1}| < M_n (8 + 27\,A + 26\,A^2 + \omega CK).$$

D'autre part leurs vérifications initiales (jointes aux clauses qui traduisent la majoration des φ_n) sont assurées par l'ensemble des conditions

$$(38) \quad \begin{cases} K > \max\left(\dfrac{4}{\alpha_0}, \ \dfrac{\nu}{A\alpha_0}, \ \dfrac{7}{A}\right) & (38\text{-}1)\\ \omega\,AK^2 > 28\,V_2. & (38\text{-}2)\end{cases}$$

Quant à leur maintien au rang n, on voit maintenant qu'il sera assuré par

$$(39) \quad \begin{cases} A\,(49 + 108\,A + 104\,A^2 + 4\,\omega CK) < 1 & (39\text{-}1)\\ 2\,A\,(11 + 27\,A + 26\,A^2 + \omega CK) < \omega & (39\text{-}2)\\ A\,(8 + 27\,A + 26\,A^2 + \omega CK) < C & (39\text{-}3)\end{cases}$$

Vérifions que ces conditions sont compatibles en A, K, ω C.

b) Tout d'abord (39-1) exige déjà $A < \dfrac{1}{50}$, ce qui permet d'assurer les conditions (39) par les suivantes :

$$(39^{bis}) \quad \begin{cases} A\,(52 + 4\,\omega CK) < 1 & (39^{bis}\text{-}1)\\ 2\,A\,(12 + \omega CK) < \omega & (39^{bis}\text{-}2)\\ A\,(9 + \omega CK) < C & (39^{bis}\text{-}3)\end{cases}$$

La dernière exige $\omega AK < 1$, qui rapproché de $AK > 7$ (cf. 38. 1), exige $\omega < \dfrac{1}{7}$. Ecrivant alors (39^{bis}-1) et (39^{bis}-2) sous forme résolue en C, soit

$$C < \frac{1 - 52\,A}{4\,\omega\,AK}, \quad C < \frac{\omega - 24\,A}{2\,\omega\,AK},$$

on voit que la première est impliquée par la seconde. Eliminant alors C entre celle-ci et (39^{bis}-3) on est ramené à disposer de ω, A, K pour assurer

$$\left\{\begin{array}{l} K > \dfrac{4}{\alpha_0} \\ AK > \max\left(\dfrac{\nu}{\alpha_0}, 7\right) \\ \omega\, AK^2 > 28\, V_2 \\ \omega\, AK < 1 \\ \dfrac{9A}{1-\omega AK} < \dfrac{\omega - 24 A}{2\omega AK}. \end{array}\right.$$

La dernière inégalité, compte tenu de la précédente, se résout sous la forme :

$$\omega\, AK < \frac{\omega - 24 A}{\omega - 6 A}$$

qui exige $\omega - 24\, A > 0$ et implique alors la précédente.

Posant $A = \varepsilon\omega$, on est donc ramené à disposer de ε, ω, K pour assurer .

$$\left\{\begin{array}{l} K > \dfrac{4}{\alpha_0} \\ \varepsilon\,\omega\, K > \max\left(\dfrac{\nu}{\alpha_0}, 7\right) \\ \varepsilon\omega^2 K^2 > 28\, V_2 \\ 0 < 24\,\varepsilon < 1 \\ \varepsilon\,\omega^2\, K < \dfrac{1-24\,\varepsilon}{1-6\,\varepsilon}. \end{array}\right.$$

L'élimination de ω (ou de $\varepsilon\omega^2 K$) conduit à

$$\left\{\begin{array}{l} 0 < 24\,\varepsilon < 1 \\ K > \max\left[\dfrac{4}{\alpha_0}, \dfrac{\nu^2\gamma(\varepsilon)}{(\alpha_0)^2\,\varepsilon}, 49\,\dfrac{\gamma(\varepsilon)}{\varepsilon}, 28\, V_2\, \gamma(\varepsilon)\right], \end{array}\right.$$

étant posé

$$\gamma(\varepsilon) = \frac{1-6\varepsilon}{1-24\,\varepsilon}.$$

Eliminant enfin ε, on conclut qu'on pourra associer des valeurs convenables des autres constantes à tout $K > K_0$, avec

$$K_0 = \min_{0<\varepsilon<\frac{1}{24}} \max\left[\frac{4}{\alpha_0}, \frac{\nu^2\gamma(\varepsilon)}{(\alpha_0)^2\,\varepsilon}, 49\,\frac{\gamma(\varepsilon)}{\varepsilon}, 28\, V_2\, \gamma(\varepsilon)\right].$$

c) Pour les valeurs ainsi associées, les $u_n\alpha^n$, $v_n\alpha^n$, $\dfrac{\partial v_n}{\partial\rho}\,\alpha^n$, $\dfrac{\partial v_n}{\partial\rho}\,\alpha^n$ seront uniformément majorés par des termes proportionnels à $\mu_n\alpha^n$, c'est-à-dire à $\dfrac{K^n\,\alpha^n}{n^2}$.

D'après un résultat de S. Bernstein (8), les $\dfrac{\partial u_n}{\partial\theta}\,\alpha^n$ et $\dfrac{\partial v_n}{\partial\theta}\,\alpha^n$ seront alors majorés par des termes proportionnels à $n\,\mu_n\alpha^n$, c'est-à-dire à $\frac{K^n\,\alpha^n}{n}$: toutes les conditions de convergence uniforme seront donc satisfaites sur

$$\left|\alpha\right| < \frac{1}{K} < \frac{1}{K_0}\,.$$

Enfin une ultime majoration de $|\alpha|$, assurant la dernière clause de validité $|U| < 1$, ne corrigera que très peu la précédente. Sur $0 < \alpha < \frac{1}{K}$, par exemple (pour alléger les écritures d'un signe de valeur absolue), on aura en effet

$$\left|U\right| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\,\alpha^n\right| < \frac{2A}{7}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{K^n\alpha^n}{n^2} = \frac{2A}{7}\left|\,\mathrm{Log}\,(1-K\alpha)\right|.$$

On assurera donc $|U| < 1$ par

$$\left|\alpha\right| < \frac{1}{K}\left(1 - e^{-\frac{7}{2A}}\right)$$

qui, A étant petit, n'est que très peu inférieur à $\frac{1}{K}$.

L'essentiel reste donc l'expression de K_0, tel que $\frac{1}{K_0}$ minore le rayon de *convergence* des solutions. Il va sans dire que son estimation ci-dessus est très grossière et que les utilisateurs l'amélioreront considérablement en « serrant » davantage les majorations dont on s'est contenté ici.

III. 7. — Cas des mouvements irrotationnels.

Dans le cas irrotationnel, on a $\nu = 0$, α_0 quelconque, $28\,V_2 = 14$ (cf. II. 12). D'autre part, les majorations fortes de $\frac{\partial u_q}{\partial \rho}$ et u_q se réduisant à μ_q, on a simplement :

$$\frac{1}{\rho}\,P_n \ll 2\,M_n \quad , \quad \frac{1}{\rho}\,Q_n \ll 2\,M_n.$$

On en déduit comme ci-dessus :

$$\left|p_{n-1}\right| < M_n\left(\frac{13}{3} + 8A + 4A^2 + \omega\,CK\right)$$

$$R_n^* < 2\,M_n\left(\frac{11}{3} + 8A + 4\,A^2 + \omega\,CK\right)$$

d'où

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u_n}{\partial \rho} - \varphi_n \ll M_n\left(\dfrac{74}{3} + 32\,A + 16\,A^2 + 4\,\omega\,CK\right) \\ \dfrac{\partial v_n}{\partial \rho} \ll \quad \text{id.} \\ v_n^* \ll 2\,M_n\left(\dfrac{17}{3} + 8\,A + 4\,A^2 + \omega\,CK\right) \end{array}\right.$$

Le système des conditions (38) et (39) est donc remplacé par

$$\begin{cases} AK > 7 \\ \omega\, AK^2 > 14 \\ A\left(\frac{74}{3} + 32\,A + 16\,A^2 + 4\,\omega\, CK\right) < 1 \\ 2\,A\left(\frac{17}{3} + 8\,A + 4\,A^2 + \omega\, CK\right) < \omega \\ A\left(\frac{13}{3} + 8A + 4\,A^2 + \omega\, CK\right) < C. \end{cases}$$

On le traite comme ci-dessus (à partir cette fois de la majoration $25\,\mathbf{A} < 1$) et on trouve, comme large minoration du rayon de convergence des solutions :

$$|\alpha| < \frac{1}{K_0}, \text{ avec } K_0 = \min_{0 < \varepsilon < \frac{1}{12}} \frac{49\,(1 - 2\,\varepsilon)}{\varepsilon\,(1 - 12\,\varepsilon)} \# 2000.$$

Cela correspondrait (cf. II. 11) à une amplitude de l'ordre de $\dfrac{\lambda}{2000\,\pi}$.

Il est certain que le rayon de validité des solutions, et donc aussi le maximum de l'amplitude possible, sont beaucoup plus importants. On n'a cherché, dans le cadre de cette étude, qu'à ouvrir la *possibilité* d'en obtenir des minorations numériques : le calcul ci-dessus n'est qu'une très sommaire illustration de cette possibilité.

CHAPITRE IV.

CAS DE LA PROFONDEUR FINIE : CALCUL FORMEL DES SOLUTIONS

IV. 1. — Enumération nouvelle des conditions aux limites.

a) En variables initiales x et ψ, on a toujours les mêmes équations aux dérivées partielles qu'en (II. 1) et la même condition de ligne libre. Il s'y ajoute cette fois la condition qu'une certaine ligne de courant, soit $\psi = \psi_1$ (constante > 0), coïncide avec le fond. Cette condition est double :

1° la ligne $\psi = \psi_1$ est horizontale :

$$v(\psi_1, x) = 0;$$

2° la cote de cette horizontale est celle du fond. Pour traduire cette précision, rappelons l'équation générale explicite des lignes de courant :

$$y = \int_0^{\psi} \frac{d\tau}{u(\tau, x)} + \int_0^{x} \frac{v(0, X)}{u(0, X)} dX + C \qquad \text{(avec } C = C^{te}\text{).}$$

En particulier, les équations de L ($\psi = 0$) et du fond ($\psi = \psi_1$) seront

$$y_L = \int_0^{x} \frac{v(0, X)}{u(0, X)} dX + C, \qquad y_1 = \int_0^{\psi_1} \frac{d\tau}{u(\tau, x)} + \int_0^{x} \frac{v(0, X)}{u(0, X)} dX + C.$$

Si donc H désigne la profondeur au repos, nous aurons la condition cherchée en exprimant la conservation de la masse :

$$\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} (y_L - y_1)\, dx = \lambda H, \text{ c'est-à-dire } \int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} dx \int_0^{\psi_1} \frac{d\psi}{-u(\psi, x)} = \lambda H. \qquad (40)$$

Cette condition ne jouera aucun rôle dans le problème essentiel, que nous traiterons en considérant ψ_1 comme une donnée arbitraire : (40) n'interviendra, au terme de la recherche, que pour lier cette arbitraire à H. Il est clair qu'elle le fera de façon biunivoque, l'exigence $u < 0$ faisant du premier membre une fonction constamment croissante (de 0 à $+\infty$, puisque $u \neq -c$) de ψ_1.

b) Il reste à adjoindre une condition caractérisant le repère absolu, ce qui revient à faire choix d'une définition de la célérité.

En profondeur infinie, on la définissait en admettant l'immobilité absolue des couches infiniment profondes : c'est bien à cela que revenait la clause $u \to c$ quand $\psi \to -\infty$.

1° Une première adaptation au problème actuel (adoptée par Stokes) consiste à exiger *que la valeur moyenne de la vitesse absolue* $u + c$, *sur une période en* t, *en un point absolument fixe, soit nulle au fond.* Notant $-ct$ l'abscisse relative d'un point absolument fixe, on a ainsi la condition

$$\int_{-\frac{\lambda}{2c}}^{\frac{\lambda}{2c}} [u(\psi_1, -ct) + c]\, dt = 0, \text{ c'est-à-dire } \int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} [u(\psi_1, x) + c]\, dx = 0. \qquad (41)$$

2° Une autre façon de caractériser le repère absolu consiste à exiger *que le flux absolu, par période, à travers une verticale absolument fixe, soit nul.* Prenons une telle verticale pour axe $x_0 = 0$ d'un repère absolument fixe, tel que $x_0 = x + ct$. A la date t, le flux instantané à travers cet axe est

$$\int_{y_1}^{y_L} [u(\psi, -ct) + c]\, dy \ ,$$

d'où le flux total pendant la durée $\frac{\lambda}{c}$ d'une période en t :

$$\Phi = \int_{-\frac{\lambda}{2c}}^{\frac{\lambda}{2c}} dt \int_{y_1}^{y_L} [u(\psi, -ct) + c]\, dy = \frac{1}{c}\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} dx \int_{y_1}^{y_L} [u(\psi, x) + c]\, dy.$$

La condition de flux moyen nul est donc :

$$\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} dx \int_{y_1}^{y_L} [u(\psi, x) + c]\, dy = 0.$$

Or, sur $x = C^{te}$ (équivalent à $t = C^{te}$), on a $dy = \dfrac{d\psi}{u(\psi, x)}$. La condition écrite peut donc encore se mettre sous la forme

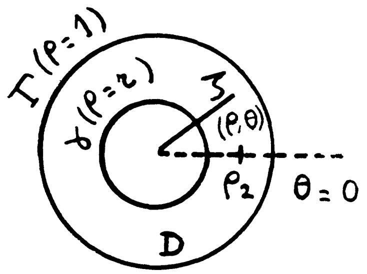
$$\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} dx \int_{\psi_1}^{0} \frac{u(\psi, x) + c}{u(\psi, x)}\, d\psi = 0. \qquad (41^{bis})$$

L'adoptant plutôt que (41), il est intéressant d'observer qu'on donnerait à (40) une forme particulièrement simple :

$$\psi_1 = cH.$$

Nous ne choisirons pas, et montrerons que l'une ou l'autre des clauses (41) et (41^{bis}) détermine complètement le problème.

IV. 2. — Changements de variables et de fonctions.



Posons, comme au chap. II,

$$u = -c(1 + U),\ v = cV,\ \rho = e^{-\frac{2\pi\psi}{c\lambda}},\ \theta = 2\pi\frac{x}{\lambda},\ \text{avec } p = \frac{\lambda g}{2\pi c^2}$$

et d'autre part $\dfrac{2\pi\psi_1}{c\lambda} = s_1$, $r = e^{-s_1}$,

de façon que le champ $\left(-\frac{\lambda}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\lambda}{2},\ 0 \leqslant \psi \leqslant \psi_1\right)$ se transforme en

$D + \Gamma + \gamma$, Γ et γ étant les cercles $\rho = 1$ et $\rho = r$ et D étant la couronne circulaire comprise entre Γ et γ. Notons $c^2\Phi(\rho) = \int_{\psi_1}^{\psi} f(\psi)\, d\psi$ l'intégrale du tourbillon à partir du fond, d'où $\varphi(\rho) = \Phi'(\rho) = -\dfrac{\lambda}{2\pi c\rho} f(\psi)$.

Enfin, toujours comme au Chap. II, faisons passer l'axe $\theta = 0$ par l'un des points du cercle $\rho = \rho_2$ (constante arbitraire telle que $r < \rho_2 \leqslant 1$) où l'on a $V = 0$: il existe évidemment de tels points, correspondant aux extremums de y sur la ligne de courant $\psi = \psi_2$ qui a pour image ce cercle.

Les équations du problème deviennent (l'astérisque double désignant les « restrictions » des diverses fonctions à γ) :

$$(42)\quad \left\{\begin{array}{l}
(1+U)\dfrac{\partial V}{\partial \rho} - V\dfrac{\partial U}{\partial \rho} - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \\[2mm]
(1+U)\dfrac{\partial U}{\partial \rho} + V\dfrac{\partial V}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} = \varphi(\rho) \\[2mm]
(1+U^*)\dfrac{dU^*}{d\theta} + V^*\dfrac{dV^*}{d\theta} = p\,\dfrac{V^*}{1+U^*} \\[2mm]
V^{**} = 0 \\[2mm]
V(\rho_2, 0) = 0 \\[2mm]
\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} U^{**}\, d\theta = 0 \qquad \text{ou} \quad \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_r^1 \frac{d\rho}{\rho(1+U)} = -2\pi \operatorname{Log} r
\end{array}\right.$$

Cette alternative est celle qui traduit le choix entre, respectivement, les définitions (41) et (41 *bis*) du repère absolu.

IV. 3. — Calcul de la première approximation.

Procédons comme en (II.2) : la seule différence, quant aux notations, sera en ceci que les primitives Φ_n des φ_n seront annulées cette fois au point r, les régularités admises ci-dessus sur $o \leqslant \rho \leqslant 1$ n'étant plus requises que sur $r \leqslant \rho \leqslant 1$. Il vient, comme équations de l'approximation linéaire :

$$(43)\quad \left\{\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial v_1}{\partial \rho} - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u_1}{\partial \theta} = 0 & (43\text{-}1) \\[2mm]
\dfrac{\partial u_1}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v_1}{\partial \theta} = \varphi_1 & (43\text{-}2) \\[2mm]
\dfrac{du_1^*}{d\theta} - p_0\, v_1^* = 0 & (43\text{-}3) \\[2mm]
v_1^{**} = 0 & (43\text{-}4) \\[2mm]
v_1(\rho_2, 0) = 0 & (43\text{-}5) \\[2mm]
\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} u_1^{**}\, d\theta = 0 \quad (43\text{-}6) \qquad \text{ou} \quad \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_r^1 u_1 \frac{d\rho}{\rho} = 0 & (43\text{-}6^{\text{bis}})
\end{array}\right.$$

Les deux premières expriment que l'application $\zeta \to Z_1$, avec

$$\zeta = \rho e^{i\theta} \quad , \quad Z_1 = v_1 + i\,(u_1 - \Phi_1)$$

est holomorphe sur $D + \Gamma + \gamma$. Cherchons donc à la définir par son développement en série de Laurent :

$$Z_1 = a_o + ib_o + \sum_{m=1}^{+\infty} \left[(a_m + ib_m)\,\zeta^m + (a_{-m} + ib_{-m})\,\zeta^{-m}\right],$$

d'où

$$v_1 = a_o + \sum_{m=1}^{+\infty} \left[(a_m\rho^m + a_{-m}\rho^{-m})\cos m\theta - (b_m\rho^m - b_{-m}\rho^{-m})\sin m\theta\right]$$

$$u_1 - \Phi_1 = b_o + \sum_{m=1}^{+\infty} \left[(a_m\rho^m - a_{-m}\rho^{-m})\sin m\theta + (b_m\rho^m + b_{-m}\rho^{-m})\cos m\theta\right].$$

(43-3) et (43-4) donnent, par identification de séries trigonométriques (convergentes pour tout θ) : $a_o = o$ et, pour tout $m \geqslant 1$,

$$\left\{\begin{array}{l}(m - p_o)\,a_m - (m + p_o)a_{-m} = 0\\ r^m\,a_m + r^{-m}\,a_{-m} = 0\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}(m - p_o)\,b_m + (m + p_o)b_{-m} = 0\\ r^m\,b_m - r^{-m}\,b_{-m} = 0.\end{array}\right.$$

Dans chacun de ces deux systèmes, la nullité des déterminants se traduit par la même condition

$$(m - p_o)r^{-m} + (m + p_o)\,r^m = 0 \quad , \quad \text{c'est-à-dire } p_o = \frac{m}{\operatorname{Th} m\,s_1}.$$

Cette équation n'admet, en $m > 0$, qu'une racine au plus, son second membre étant continu et croissant sur $m > 0$. Si cette racine n'était pas entière, tous les a_m, b_m, a_{-m}, b_{-m} seraient nuls et la solution de l'approximation linéaire se réduirait à un écoulement horizontal. Il faut donc exiger (cf. II.3)

$$p_o = \frac{N}{\operatorname{Th} N\,s_1} \qquad\qquad (N \text{ entier} > 0).$$

Alors, comme il est nécessaire, on peut attribuer des valeurs non toutes nulles à d'autres coefficients que b_o, à savoir (exclusivement)

$$a_N = \mu r^{-N},\ a_{-N} = -\mu r^N,\ b_N = k_1\,r^{-N},\ b_{-N} = k_1\,r^N$$

d'où (μ, k_1, C_1 étant des constantes arbitrairement réelles) :

$$\left|\begin{array}{l} u_1 = \Phi_1 + C_1 + \left(\dfrac{\rho^N}{r^N} + \dfrac{r^N}{\rho^N}\right)\ (\mu \sin N\theta + k_1 \cos N\theta)\\ v_1 = \left(\dfrac{\rho^N}{r^N} - \dfrac{r^N}{\rho^N}\right)(\mu \cos N\theta - k_1 \sin N\theta).\end{array}\right.$$

Achevons : (43-5) se traduit par $\mu = 0$, d'où

$$\left\{\begin{array}{l} u_1 = \Phi_1 + C_1 + k_1\left(\dfrac{\rho^N}{r^N} + \dfrac{r^N}{\rho^N}\right)\cos N\,\theta\\ v_1 = -\,k_1\left(\dfrac{\rho^N}{r^N} - \dfrac{r^N}{\rho^N}\right)\sin N\,\theta \qquad \text{avec, obligatoirement, } k_1 \neq 0.\end{array}\right.$$

Enfin C_1 est univoquement déterminé, soit par (43-6) :

$$C_1 = 0,$$

soit par (43-6 *bis*) :

$$C_1 \operatorname{Log} r = \int_r^1 \frac{\Phi_1}{\rho} d\rho$$

Soulignons que ces deux déterminations de C_1, confondues dans le cas irrotationnel, sont en général distinctes : il apparaît donc dès la première approximation que les deux définitions proposées pour la célérité ne sont pas, en général, équivalentes.

IV. 4. — Calcul de l'approximation d'ordre n.

Définissant P_n, Q_n, R_n^* comme en (II.2), posons en outre, en vue de l'hypothèse (*bis*) :

$$\frac{1}{1+U} = \frac{1}{1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha^n u_n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n (u_n - \pi_n)$$

où π_n est donc un polynôme (isobare et de poids n par rapport à l'ensemble des indices) de u_1, ..., u_{n-1}. Il vient, à l'ordre n, le système :

$$(44) \begin{cases} \dfrac{\partial v_n}{\partial \rho} - \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial u_n}{\partial \theta} = P_n & (44\text{-}1) \\ \dfrac{\partial u_n}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial v_n}{\partial \theta} = Q_n + \varphi_n & (44\text{-}2) \\ \dfrac{du_n^*}{d\theta} - p_0\, v_n^* = R_n^* & (44\text{-}3) \\ v_n^{**} = 0 & (44\text{-}4) \\ v_n(\rho_2, 0) = 0 & (44\text{-}5) \\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} u_n^{**} d\theta = 0 & (44\text{-}6) \text{ ou } \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_r^1 \frac{u_n}{\rho} d\rho = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_r^1 \frac{\pi_n}{\rho} \partial\rho \quad (44\text{-}6^{\text{bis}}) \end{cases}$$

Nous allons d'abord étudier ce système en négligeant provisoirement sa dernière équation (44-6) ou (44-6 *bis*).

a) Connaissant une solution (u_n, v_n), on voit comme en (II.4) qu'on en déduira la solution générale en ajoutant celle du système (43) en $u_1 - \Phi_1$ et v_1, soit (compte non tenu de sa dernière équation)

$$\begin{cases} \Delta v_n = -\, k_n \left(\dfrac{\rho^N}{r^N} - \dfrac{r^N}{\rho^N} \right) \sin N\theta \\ \Delta u_n = C_n + k_n \left(\dfrac{\rho^N}{r^N} + \dfrac{r^N}{\rho^N} \right) \cos N\theta, \end{cases}$$

les constantes réelles k_n et C_n étant arbitraires.

b) Montrons qu'on obtient une famille de solutions comportant ces mêmes arbitraires (et qui, par conséquent, constituera la solution générale) sous la forme, constatée à l'ordre 1 :

$$v_n = \sum_{m=1}^{n} v_m{}^n (\rho) \sin m\,N\theta, \quad u_n = \sum_{m=1}^{n} u_m{}^n (\rho) \cos m\,N\theta \tag{45}$$

les $u^n{}_m$ *et* $v_n{}^m$ *étant continus et pourvus de dérivées premières continues sur* $r \leqslant \rho \leqslant 1$.

Admettant cette forme aux ordres $< n$, on a

$$P_n = \sum_{m=1}^{n} P^n{}_m (\rho) \sin mN\theta, \quad Q_n = \sum_{m=o}^{n} Q^n{}_m (\rho) \cos mN\theta,$$

$$R^*{}_n = \sum_{m=1}^{n} r^n{}_m \sin mN\theta,$$

les $r^n{}_m$ étant des constantes et les $P^n{}_m$ et $Q^o{}_m$ étant des fonctions de ρ continues sur le fermé $(r, 1)$. On détermine donc les solutions de la forme (45), à l'ordre n, par les équations suivantes :

d'abord, simplement, pour $m = 0$,

$u'^n{}_o = Q^n{}_o + \varphi_n$, d'où $u^n{}_o = C^n{}_o + \int_r^\rho Q^n{}_o (\rho)\, d\rho + \Phi_n$ (avec $C^n{}_o = C^{te}$) ;

ensuite, pour $1 \leqslant m \leqslant n$:

$$\left\{\begin{array}{l} v'_m{}^n + \dfrac{mN}{\rho} u^n{}_m = P^n{}_m \\ u'_m{}^n + \dfrac{mN}{\rho} v_m{}^n = Q_m{}^n \\ mN\, u_m{}^n (1) + p_o\, v_m{}^n (1) = -\, r_m{}^n \\ v_m{}^n (r) = 0, \end{array}\right.$$

et cela suffit, (44-5) étant automatiquement vérifié.

Le système des deux premières équations a pour intégrale générale

$$v^n{}_m = \rho^{-mN} [I^n{}_m (\rho) + C^n{}_m] + \rho^{mN} [J^n{}_m (\rho) + K^n{}_m]$$
$$u^n{}_m = \rho^{-mN} [I^n{}_m (\rho) + C^n{}_m] - \rho^{mN} [J^n{}_m (\rho) + K^n{}_m]$$

avec $C^n{}_m = C^{te}$, $K^n{}_m = C^{te}$ et

$$I_m{}^n (\rho) = \int_r^\rho \frac{P_m{}^n + Q_m{}^n}{2} \rho^{mN} d\rho, \quad J_m{}^n (\rho) = \int_r^\rho \frac{P_m{}^n - Q_m{}^n}{2} \rho^{-mN} d\rho,$$

Portant dans les suivantes, on a donc à déterminer les constantes $C^n{}_m$ et $K^n{}_m$ par

$$\left\{\begin{array}{l} (mN+p_o)\ C^n{}_m - (mN-p_o)\ K^n{}_m = -(mN+p_o)\ I^n{}_m(1) + (mN-p_o)\ J^n{}_m (1) - r^n{}_m \\ r^{-mN}\, C^n{}_m + r^{mN}\ K^n{}_m = 0. \end{array}\right.$$

Le déterminant (cf. III.3) s'annule si, et seulement si, $m = 1$. Donc, pour tout $m > 1$, ces conditions déterminent univoquement $C^n{}_m$ et $K^n{}_m$.

Pour $m = 1$, elles introduisent une condition de possibilité :

$$r^n_1 + (\mathrm{N}+p_0)\int_r^1 \frac{\mathrm{P}_1^n + \mathrm{Q}_1^n}{2}\,\rho^{\mathrm{N}}\,d\rho - (\mathrm{N}-p_0)\int_r^1 \frac{\mathrm{P}_1^n - \mathrm{Q}_1^n}{2}\,\rho^{-\mathrm{N}}\,d\rho = 0 \qquad (46)$$

qui, comme en (II.4), détermine univoquement p_{n-1}; il y figure au degré 1 avec le coefficient

$$\frac{v_1^*}{\sin \mathrm{N}\theta} = -\,k_1\left(\frac{1}{r^{\mathrm{N}}} - r^{\mathrm{N}}\right) \neq 0.$$

Cette condition une fois remplie, C^n_1 et K^n_1 ne sont définis qu'à un facteur près : $\mathrm{C}^n_1 = k_n r^{\mathrm{N}}$, $\mathrm{K}^n_1 = -\,k_n r^{-\mathrm{N}}$, d'où

$$u_n = \Phi_n + \mathrm{C}_0^n + k_n\left(\frac{\rho^{\mathrm{N}}}{r^{\mathrm{N}}} + \frac{r^{\mathrm{N}}}{\rho^{\mathrm{N}}}\right)\cos \mathrm{N}\theta + \int_r^\rho \mathrm{Q}_0^n\,d\rho + \left(\frac{\mathrm{I}_1^n}{\rho^{\mathrm{N}}} - \rho^{\mathrm{N}}\,\mathrm{J}_1^n\right)\cos \mathrm{N}\theta$$
$$+ \sum_{m=2}^{n}\left[\frac{\mathrm{I}_m^n + \mathrm{C}_m^n}{\rho^{m\mathrm{N}}} - \rho^{m\mathrm{N}}\,(\mathrm{J}_m^n + \mathrm{K}_m^n)\right]\cos m\,\mathrm{N}\theta$$

$$v_n = -\,k_n\left(\frac{\rho^{\mathrm{N}}}{r^{\mathrm{N}}} - \frac{r^{\mathrm{N}}}{\rho^{\mathrm{N}}}\right)\sin \mathrm{N}\theta + \left(\frac{\mathrm{I}_1^n}{\rho^{\mathrm{N}}} + \rho^{\mathrm{N}}\,\mathrm{J}_1^n\right)\sin \mathrm{N}\theta$$
$$+ \sum_{m=2}^{n}\left[\frac{\mathrm{I}_m^n + \mathrm{C}_m^n}{\rho^{m\mathrm{N}}} + \rho^{m\mathrm{N}}\,(\mathrm{J}_m^n + \mathrm{K}_m^n)\right]\sin m\mathrm{N}\theta$$

On vérifie :

d'une part l'intervention, sous la forme prévue en (*a*), des arbitraires (k_n et C^n_0) qui font de cette famille de solutions la solution générale; d'autre part la persistance des propriétés de régularité : les P^n_m et Q^n_m étant continus sur $(r, 1)$, les I^n_m et J^n_m, et donc aussi les v^n_m et u^n_m, y sont continus et pourvus de dérivées premières continues.

c) Il faut maintenant vérifier que la condition (46) est nécessaire en toute généralité, et non point seulement pour l'existence de solutions de la forme (45).

Admettons donc seulement, comme il est acquis à l'ordre 1, que les solutions des approximations d'ordres $< n$ soient de cette forme (45). Dans le problème d'ordre n tel qu'il est explicité en (*a*), le système *des deux* premières équations (44-1) et (44-2) admet aussi des solutions de cette même forme, puisque ce sont seulement les conditions suivantes qui ont fait apparaître un cas d'incompatibilité. Soit $(\mathrm{U}_n, \mathrm{V}_n)$ l'une de ces solutions, a priori indépendante de p_{n-1}. Cherchant la solution générale sous la forme $(\mathrm{U}_n + \Delta u_n, \mathrm{V}_n + \Delta v_n)$, on est conduit à déterminer $\mathrm{Z}_n = \Delta v_n + i\Delta u_n$ par les conditions suivantes :

1° l'application $\zeta \rightarrow \mathrm{Z}_n$ est holomorphe sur $\mathrm{D} + \Gamma + \gamma$;

2° $\dfrac{d}{d\theta}(\Delta u^*_n) - p_0 \Delta v^*_n = \mathrm{R}^*_n - \dfrac{d\mathrm{U}_n^*}{d\theta} + p_0 \mathrm{V}_n^*$;

3° $\Delta v_n^{**} = -\,\mathrm{V}_n^{**}$;

4° $\Delta v_n(\rho_2, 0) = -\,\mathrm{V}_n(\rho_2, 0)$.

Prenant alors pour inconnues les coefficients d'un développement de Laurent, avec les mêmes notations qu'en ((III.3), on a notamment comme équations en b_N et b_{-N} :

$$\begin{cases} (N - p_0) b_N + (N + p_0)\, b_{-N} = k_1\, p_{n-1} \left(\dfrac{1}{r^N} - r^N \right) + \dots \\ r^N b_N - r^{-N}\, b_{-N} = \dots \end{cases}$$

les termes non écrits étant indépendants de p_{n-1}. Le déterminant étant nul, on a donc bien là, en toute généralité, une condition de compatibilité : comme elle détermine univoquement p_{n-1}, il est certain qu'elle coïncide avec (46).

d) Il ne reste plus qu'à assurer (44-6) ou (44-6 *bis*). La première se traduit par

$$C^n_0 = 0\ ;$$

la seconde, par

$$\int_r^1 \left[\Phi_n + \int_r^\rho Q_0^n\, d\rho \right] \frac{d\rho}{\rho} - C_0^n \operatorname{Log} r = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_r^1 \frac{\pi_n}{\rho}\, d\rho\,.$$

Comme la précédente, on voit qu'elle détermine univoquement C^n_0, ne laissant subsister que la seule arbitraire k_n.

La première définition de la célérité (vitesse absolue nulle en moyenne sur le fond) apparaît ici comme donnant l'expression la plus simple. Rappelons d'ailleurs que les deux choix ne correspondraient pas à des problèmes fondamentalement différents, mais seulement à des interprétations physiques différentes de la constante c. Nous nous bornerons donc, désormais, au premier choix, traduit par $C^n_0 = 0$.

IV. 5. — Réduction au cas N = 1.

Il apparaît sur leur expression explicite que les solutions correspondant à :

$$p_0 = \frac{N}{\operatorname{Th} N s_1}$$

admettent, en θ, la période $\dfrac{2\pi}{n}$; donc, en x, la période $\dfrac{\lambda}{N}$.

Autrement dit, ce ne sont que les harmoniques des solutions correspondant à $N = 1$.

Exigeant que λ soit la période *stricte* en x, à l'exclusion de ses multiples, nous devrons donc faire, désormais, $N = 1$.

Il s'ensuit :

IV. 6. — Unicité de la solution.

$$U = \Phi + \left(\sum_{n=1}^{+\infty} k_n \alpha^n\right)\left(\frac{\rho}{r} + \frac{r}{\rho}\right)\cos\theta$$

$$+ \sum_{n=2}^{+\infty} \alpha^n \left[\int_r^\rho Q_0^n \, d\rho + \left(\frac{I_1^n}{\rho} - \rho J_1^n\right)\cos\theta + u_2^n \cos 2\theta + \ldots + u_n^n \cos n\theta\right]$$

$$V = -\left(\sum_{n=1}^{+\infty} k_n \alpha^n\right)\left(\frac{\rho}{r} - \frac{r}{\rho}\right)\sin\theta$$

$$+ \sum_{n=2}^{+\infty} \alpha^n \left[\left(\frac{I_1^n}{\rho} + \rho J_1^n\right)\sin\theta + v_2^n \sin 2\theta + \ldots + v_n^n \sin n\theta\right].$$

Il apparaît comme en (II.7), par changement de paramètre $\nu = \sum_{n=1}^{+\infty} k_n \alpha^n$ (petit comme α), qu'on ne restreint pas la généralité des solutions en imposant $k_1 = 1$ et, pour $n > 1$, $k_n = o$: ce qui revient à imposer aux u^n_1, pour $n > 1$, de s'annuler sur γ. Finalement, posant (pour $m \geqslant 1$).

$$I_m^n = \int_r^\rho \frac{P_m^n + Q_m^n}{2} \rho^m \, d\rho, \quad J_m^n = \int_r^\rho \frac{P_m^n - Q_m^n}{2} \rho^{-m} \, d\rho.$$

on a la solution générale :

$$\left\{\begin{array}{l} U = \alpha\left[\Phi_1 + \left(\dfrac{\rho}{r} + \dfrac{r}{\rho}\right)\cos\theta\right] + \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \alpha^n \left[u_0^n + u_1^n \cos\theta + \ldots + u_n^n \cos n\theta\right] \\ V = -\alpha\left(\dfrac{\rho}{r} - \dfrac{r}{\rho}\right)\sin\theta + \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \alpha^n \left[v_1^n \sin\theta + \ldots + v_n^u \sin n\theta\right] \end{array}\right.$$

avec

$$u^n_0 = \Phi_n + \int_r^\rho Q^n_0 \, d\rho \qquad \left\{\begin{array}{l} u^n_m = \rho^{-m}(I^n_m + C^n_m) - \rho^m (J^n_m + K^n_m) \\ v^n_m = \rho^{-m}(I^n_m + C^n_m) + \rho^m (J^n_m + K^n_m), \end{array}\right. \qquad (m \geqslant 1)$$

les constantes C^n_m et K^n_m étant données par

$$C^n_1 = K^n_1 = 0,$$

et, pour $m \geqslant 2$,

$$\left\{\begin{array}{l} (m + p_0)\, C^n_m - (m - p_0)\, K^n_m = -(m + p_0)\, I^n_m(1) + (m - p_0)\, J^n_m(1) - r^n_m \\ C^n_m + r^{2m} K^n_m = 0. \end{array}\right.$$

Enfin, à partir de

$$p_0 = \frac{1}{\mathrm{Th}\, s_1} = \frac{1 + r^2}{1 - r^2},$$

les p_{n-1} sont successivement définis par

$$r^n_1 + (p_0 + 1)\, I^n_1(1) + (p_0 - 1)\, J^n_1(1) = 0.$$

IV. 7. — Conclusion.

Toutes les conclusions formulées en (II.8), pour le cas de la profondeur infinie, se trouvent ainsi généralisées.

1° *La fonction* φ, *analytique en* α *et continue en* ρ, *étant arbitrairement donnée, il correspond une solution et une seule (sous réserve des convergences) à chaque choix de* ψ_1 *et* α, la donnée de ψ_1 étant d'ailleurs équivalente (cf. III.1 - *a*) à celle de la profondeur. Dans chacune de ces solutions, p (et donc aussi c) est défini sans ambiguïté.

2° Cette affirmation d'unicité contient en particulier la suivante : il existe (correspondant aux entiers $N > 1$) des solutions autres que celles qu'on vient d'expliciter. *Mais ces solutions, explicitées en (III.4.b), sont parasites comme admettant en réalité la période* $\dfrac{\lambda}{N}$.

3° Dans chaque solution, le champ des vitesses est symétrique (au sens déjà précisé) par rapport à l'axe $x = 0$, passant par l'un quelconque des points où la tangente à une ligne $\psi = \psi_2 \neq \psi_1$ est horizontale. Il l'est donc aussi par rapport à l'axe $x = \lambda$, et aussi par rapport à un axe compris entre les deux précédents (puisque la ligne $\psi = \psi_2$ présente nécessairement un creux entre deux crêtes et inversement). L'abscisse de ce nouvel axe est nécessairement $x = \dfrac{\lambda}{2}$ sinon une période inférieure s'introduirait. Finalement, *le champ des vitesses admet tous les axes de symétrie* $x = k\dfrac{\lambda}{2}$ (k *entier quelconque) et ceux-là seulement.*

4° *En dehors de ces axes, aucune ligne de courant autre que la ligne de fond ne présente de points à tangente horizontale :* entre deux axes de symétrie consécutifs, la cote est fonction monotone de l'abscisse.

IV. 8. — Calcul de l'amplitude.

On a comme en (II. 11)

$$A = \frac{\lambda}{4\pi p}\left[U^*(0) - U^*(\pi)\right]\left[2 + U^*(0) + U^*(\pi)\right],$$

d'où, en première approximation :

$$\tilde{A} \sim \frac{\lambda(1 - r^2)}{\pi r}\,\alpha$$

qui interprète encore le « petit paramètre » α, ou du moins sa partie principale.

IV. 9. — Calcul des premiers termes.

a) En première approximation, rappelons qu'on a :

$$\left|\begin{array}{l} u_1 = \Phi_1 + \left(\dfrac{\rho}{r} + \dfrac{r}{\rho}\right)\cos\theta \\[2ex] v_1 = -\left(\dfrac{\rho}{r} - \dfrac{r}{\rho}\right)\sin\theta \end{array}\right.$$

b) Il s'ensuit, pour le calcul de la deuxième approximation :

$$\left|\begin{array}{l} P_2 = \left[\left(\frac{\rho}{r}+\frac{r}{\rho}\right)\frac{\Phi_1}{\rho}-\left(\frac{\rho}{r}-\frac{r}{\rho}\right)\varphi_1\right]\sin\theta+\frac{2}{\rho}\sin 2\theta \\ Q_2 = -\left[\Phi_1\varphi_1+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\rho^2}{r^2}-\frac{r^2}{\rho^2}\right)\right]-\left[\left(\frac{\rho}{r}-\frac{r}{\rho}\right)\frac{\Phi_1}{\rho}+\left(\frac{\rho}{r}+\frac{r}{\rho}\right)\varphi_1\right]\cos\theta \\ R_2^* = \left[2\,\frac{1+r^2}{r}\Phi_1^*-\frac{1-r^2}{r}p_1\right]\sin\theta+\frac{1+6r^2+r^4}{2r^2}\sin 2\theta \end{array}\right.$$

Il vient ainsi, par les calculs indiqués :

$$\left\{\begin{array}{l} u_2 = \Phi_2-\frac{1}{2}(\Phi_1)^2-\frac{(\rho^2-r^2)^2}{2r^2\rho^2} \\ \quad +\left[\frac{1}{\rho}\int_r^\rho\left(\frac{r}{\rho}+2\frac{\rho}{r}\right)\Phi_1 d\rho-\rho\int_r^\rho\left(\frac{\rho}{r}+\frac{2r}{\rho}\right)\frac{\Phi_1}{\rho^2}d\rho-\left(\frac{\rho}{r}+\frac{r}{\rho}\right)\Phi_1\right]\cos\theta \\ \quad -\left[\frac{(\rho^2-r^2)^2}{2r^2}+6\,\frac{r^4+\rho^4}{\rho^2(1-r^2)^2}\right]\cos 2\theta \\ v_2 = \left[\frac{1}{\rho}\int_r^\rho\left(\frac{r}{\rho}+\frac{2\rho}{r}\right)\Phi_1 d\rho+\rho\int_r^\rho\left(\frac{\rho}{r}+\frac{2r}{\rho}\right)\frac{\Phi_1}{\rho^2}d\rho-\left(\frac{\rho}{r}-\frac{r}{\rho}\right)\Phi_1\right]\sin\theta \\ \quad +\frac{(1+10r^2+r^4)(\rho^4-r^4)}{2r^2\rho^2(1-r^2)^2}\sin 2\theta \end{array}\right.$$

et pour la suite :

$$p_1 = \frac{4}{(1-r^2)^2}\int_0^1\frac{r^4+r^2\rho^2+\rho^4}{\rho^3}\Phi_1\,d\rho$$

IV. 10. — Propriétés particulières des développements dans le cas irrotationnel.

a) Pour $\Phi = 0$, les expressions se simplifient et le développement d'ordre 2 est simplement :

$$\left\{\begin{array}{l} U = \alpha\left(\frac{\rho}{r}+\frac{r}{\rho}\right)\cos\theta-\alpha^2\left[\frac{(\rho^2-r^2)^2}{2\,r^2\rho^2}(1+\cos 2\theta)+6\,\frac{r^4+\rho^4}{\rho^2(1-r^2)^2}\cos 2\theta\right]+\dots \\ V = -\alpha\left(\frac{\rho}{r}-\frac{r}{\rho}\right)\sin\theta+\alpha^2\,\frac{1+10r^2+r^4}{2(1-r^2)^2}\left(\frac{\rho^2}{r^2}-\frac{r^2}{\rho^2}\right)\sin 2\theta+\dots \end{array}\right.$$

avec

$$p = \frac{1+r^2}{1-r^2}+\dots \qquad \text{(au second ordre près)}$$

b) En toute généralité, on établit exactement comme en (II. 12) les propriétés suivantes : *pour tout entier* k, *les* u^{u}_{u-2k+1} *et les* v^{n}_{u-2k+1} *sont nuls, ainsi que les* p_{2k-1}.

CHAPITRE V

CONVERGENCE DES SOLUTIONS EN PROFONDEUR FINIE

Nous utiliserons les mêmes types de majorantes fortes qu'au chap. III. L'axiome FM_1 sera adapté ici sous la forme suivante : si l'on a $S(\rho, \theta) \ll K$, on a aussi $\frac{1}{\rho - r}\int_r^\rho S(\tau, \theta)\, d\tau \ll K$, d'où à fortiori $\frac{1}{\rho}\int_r^\rho S(\tau, \theta)\, d\tau \ll K$ et $\int_r^\rho S(\tau, \theta)\, d\tau \ll K$.

Car, bien entendu :

$$\max \left| \frac{1}{\rho - r}\int_r^\rho a_m(\tau)\, d\tau \right| < \max \left| a_m \right|$$

V. 1. — Majoration forte des P_n et Q_n.

Les μ_q étant toujours définis comme au chap. III, admettons ici, aux rangs $q < n$, les majorations fortes

$$\frac{\partial u_q}{\partial \rho} - \varphi_q \ll \mu_q\,, \quad \frac{\partial v_q}{\partial \rho} \ll \mu_q\,, \quad u_q^{**} \ll \mu_q \tag{47}$$

Comme on a

$$\max \left| \frac{\rho}{r} + \frac{r}{\rho} \right| = \frac{1 + r^2}{r}\,, \quad \max \left| \frac{1}{r} - \frac{r}{\rho^2} \right| = \frac{1 - r^2}{r}\,, \quad \max \left| \frac{1}{r} + \frac{r}{\rho^2} \right| = \frac{2}{r}\,,$$

la vérification initiale de ces majorations impose la seule condition

$$\mu_1 < \frac{2}{r}\,, \text{ c'est-à-dire } AK > \frac{14}{r}\,,$$

à joindre, toujours (cf. III. 2, b), aux conditions

$$\alpha_0 K > 4, \quad \alpha_0 AK > \nu$$

qui assurent les majorations $|\varphi_q| < \mu_q$.

Admises aux rangs $q < n$, les majorations (47) entraînent, à ces mêmes rangs,

$$\frac{\partial u_q}{\partial \rho} \ll 2\,\mu_q, \quad u_q \ll 3\,\mu_q, \quad v_q \ll \mu_q \text{ (puisque } v_q^{**} = 0),$$

d'où, au rang n et à tout rang inférieur :

$$P_n \ll 5\,M_n, \; Q_n \ll 7\,M_n.$$

V. 2. — Majoration forte de R^*_n et majoration de p_{n-1}.

a) Posant, toujours comme au Chap. III,

$$R_n^* = p_{n-1}\, v_1^* + \sigma_n + s_n,$$

on a d'abord, de la même façon :

$$\frac{du_q^*}{d\theta} \ll \mu_q + 5\,M_q < (1 + 5A)\,\mu_q$$

$$\frac{dv_q^*}{d\theta} \ll \mu_q + 7\,M_q < (1 + 7A)\,\mu_q$$

d'où :

$$s_n \ll \sum_{q=1}^{n-1} [(7 + 37\,A)\,\mu_q\,\mu_{n-q} + 3\,(4 + 22\,A)\,\mu_{n-q}\,M_q] < (7 + 49\,A + 66\,A^2)\,M_n.$$

b) Faisons maintenant les nouvelles hypothèses (où ω et C sont toujours des constantes positives) :

$$\begin{cases} \text{pour } 1 \leqslant q < n\text{-}1, & |p_q| < C\mu_{q+1}\,; \\ \text{pour } 2 \leqslant q < n, & v_q^* \ll \omega\,\mu_q. \end{cases} \tag{48}$$

Il s'ensuit d'abord

$$\sigma_n \ll \omega\,CK \sum_{q=}^{n-2} \mu_q\,\mu_{n-q} < \omega\,CK\,M_n$$

D'autre part, p_{n-1} est donné par l'équation (cf. IV. 6)

$$\frac{1 - r^2}{r}\,p_{n-1} = [\text{coefficient de } \sin\theta \text{ dans } s_n + \sigma_n]$$
$$+ (p_0 + 1)\,I^n_1(1) + (p_0 - 1)\,J^n_1(1).$$

Le premier terme est majoré par $(7 + 49\,A + 66\,A^2 + \omega CK)\,M_n$.
Quant aux suivants, on a :

$|P^n_m| < 5\,M_n, |Q^n_m| < 7\,M_n$, d'où $\left| I_1^n(1) \right| < 6\,M_n \int_r^1 \rho\,d\rho = 3\,M_n\,(1 - r^2)$

$$\left| J_1^n(1) \right| < 6\,M_n \int_r^1 \frac{d\rho}{\rho} = 6\,M_n \left| \operatorname{Log} r \right| < \frac{6\,M_n\,(1-r)}{r}.$$

Compte tenu de

$$p_0 + 1 = \frac{2}{1 - r^2}\,,\quad p_0 - 1 = \frac{2\,r^2}{1 - r^2}\,,\quad \frac{2\,r}{1 + r} < 1\,,$$

il vient donc

$$\left| p_{n-1} \right| < \frac{r\,M_n}{1 - r^2}\,(19 + 49\,A + 66\,A^2 + \omega\,CK),$$

d'où :

$$R^*_n \ll 2\,(13 + 49\,A + 66\,A^2 + \omega CK)\,M_n.$$

c) La majoration forte admise pour v^*_q exige la vérification initiale (V_2 ayant la même signification qu'en III. 4)

$$\omega AK^2 > 28\,V_2.$$

Quant à la majoration des p_q, elle sera maintenue pour p_{n-1} (et à fortiori vérifiée pour p_1) si :

$$\frac{rM_n}{1-r^2}\ (19 + 49\,A + 66\,A^2 + \omega CK) < C\,\mu_n.$$

V. 3. — Majoration des solutions.

Reportons-nous alors aux formules de résolution récapitulées en (IV. 6). Il en résulte d'abord :

$$\frac{\partial u_n}{\partial \rho} - \varphi_n = Q_n + \sum_{m=1} U_m{}^n \cos m\theta, \quad \frac{\partial v_n}{\partial \rho} = P_n + \sum_{m=1}^{n} V_m{}^n \sin m\,\theta,$$

étant posé :

$$\left\{\begin{aligned} U_m{}^n &= -\frac{m}{\rho^{m+1}}(I_m{}^n + C_m{}^n) - m\rho^{m-1}(J_m{}^n + K_m{}^n) \\ V_m{}^n &= -\frac{m}{\rho^{m+1}}(I_m{}^n + C_m{}^n) + m\rho^{m-1}(J_m{}^n + K_m{}^n) \end{aligned}\right.$$

Les $C^n{}_m$ et $K^n{}_m$ sont nuls pour $m = 1$ et, résolvant les équations qui les définissent pour $m \geqslant 2$, on a

$$r^{-m}\,C_m{}^n = -\,r^m\,K_m{}^n = -\,\frac{(m + p_0)\,I_m{}^n(1) - (m - p_0)\,J_m{}^n(1) + r_m{}^n}{(m+p_0)\,r^m + (m-p_0)\,r^{-m}}$$

Utilisons alors les évidentes majorations suivantes :
pour tout m,

$$\left|I_m{}^n\right| < \frac{\max|P_m{}^n| + \max|Q_m{}^n|}{2\,(m+1)}\,\rho^{m+1}, \text{d'où } I_m{}^n(1) < \frac{\max|P_m{}^n| + \max|Q_m{}^n|}{2\,(m+1)};$$

pour $m = 1$,

$$\left|J_1{}^n\right| < \frac{\max|P_1{}^n| + \max|Q_1{}^n|}{2}\,\mathrm{Log}\,\frac{\rho}{r} < \frac{\max|P_1{}^n| + \max|Q_1{}^n|}{2}\left|\,\mathrm{Log}\,r\,\right|;$$

pour $m \geqslant 2$,

$$\left|J_m{}^n\right| < \frac{\max|P_m{}^n| + \max|Q_m{}^n|}{2\,(m-1)}\,\frac{1}{\rho^{m-1}}, \text{ d'où } J_m{}^n(1) < \frac{\max|P_m{}^n| + \max|Q_m{}^n|}{2\,(m-1)}$$

Exception faite pour $U^n{}_1$ et $V^n{}_1$, où ils ont des valeurs bien déterminées, les coefficients de max $|P^n{}_m|$, max $|Q^n{}_m|$ et $|r^n{}_m|$ dans $U^n{}_m$ et $V^n{}_m$, sont donc majorés par les suivants :
1° pour max $|P^n{}_m|$ et max $|Q^n{}_m|$:

$$\frac{m}{2\,(m+1)} + \frac{m}{2\,(m-1)} + \frac{m}{(m+p_0)\,r^m + (m-p_0)\,r^{-m}}\left(\frac{r^m}{\rho^{m+1}} + \frac{\rho^{m-1}}{r^m}\right)\left[\frac{m+p_0}{2\,(m+1)} + \frac{m-p_0}{2(m-1)}\right]$$

$$< \frac{3}{2} + \frac{m}{(m+p_0)\,r^m + (m-p_0)\,r^{-m}}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^m}\right)\frac{m^2 - p_0}{m^2 - 1}$$

qui continu sur $m \geqslant 2$, tend vers $\frac{5}{2}$ quand $m \to + \infty$;

2° pour $|r^n{}_m|$:

$$\frac{m}{(m+p_0)\,r^m + (m-p_0)\,r^{-m}}\left(\frac{r^m}{\rho^{m-1}} + \frac{\rho^{m-1}}{r^m}\right) < \frac{m}{(m+p_0)\,r^m + (m-p_0)\,r^{-m}}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^m}\right)$$

qui continu sur $m \geqslant 2$, tend vers 1 quand $m \to + \infty$.

Concluons que tous ces coefficients sont bornés : il existe des constantes $k_1 > 1$ et $k_2 > 0$ (qu'il serait élémentaire de préciser) telles que

$$|U^n{}_m| < (k_1 - 1)\ [\max |P^n{}_m| + \max |Q^n{}_m|] + k_2 |r^n{}_m|$$
$$|V^n{}_m| < (k_1 - 1)\ [\max |P^n{}_m| + \max |Q^n{}_m|] + k_2 |r^n{}_m|,$$

d'où :

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{\partial u_n}{\partial \rho} - \varphi_n \\ \dfrac{\partial v_n}{\partial \rho} \end{matrix}\right\} \ll M_n\,[12\,k_1 + 2\,k_2\,(13 + 49\,A + 66\,A^2 + \omega\,CK)].$$

On obtiendrait de la même façon, pour $u_n{}^{**}$ et $v_n{}^{*}$, des majorations de la même forme, avec des coefficients k_1 et k_2 qui seraient d'ailleurs plus petits : nous admettrons les mêmes, pour nous contenter ici de majorations très grossières qui suffiront pour la conclusion théorique qui suit. Il conviendrait évidemment de les serrer de plus près pour une application pratique où r serait donné.

V. 4. — Conclusion.

a) Récapitulons. Nous avons admis, aux rangs $q < n$, les majorations suivantes :

$$\text{pour } 1 \leqslant q < n,\quad \frac{\partial u_q}{\partial \rho} - \varphi_q \ll \mu_q,\quad \frac{\partial v_q}{\partial \rho} \ll \mu_q,\quad u_q{}^{**} \ll \mu_q; \tag{50}$$

$$\text{pour } 2 \leqslant q < n,\quad v_q{}^{*} \ll \omega\mu_q; \tag{51}$$

$$\text{pour } 2 \leqslant q < n,\quad |p_{q-1}| < C\mu_q. \tag{52}$$

Il est établi :

1° qu'elles entraînent au rang n les majorations

$$|p_{n-1}| < \frac{rM_n}{1 - r^2}\ (19 + 49\,A + 66\,A^2 + \omega CK)$$

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{\partial u_n}{\partial \rho} - \varphi_n \\ \dfrac{\partial v_n}{\partial \rho} \\ u^{**} \\ v^{*} \end{matrix}\right\} \ll M_n\,[12\,k_1 + 2k_2\,(13 + 49\,A + 66\,A^2 + \omega\,CK)]\ ;$$

2° que leurs vérifications initiales (à l'exclusion de celle qui concernait p_1, et dont nous avons vu l'inutilité) sont assurées par les conditions suivantes (où nous englobons celles qui expriment la majoration des φ_q) :

$$(53)\quad \begin{cases} K > \dfrac{4}{\alpha_0} & (53\text{-}1) \\ AK > \max\left(\dfrac{\nu}{\alpha_0}, \dfrac{14}{r}\right) & (53\text{-}2) \\ \omega AK^2 > 28\, V_2. & (53\text{-}3) \end{cases}$$

On assurera donc la persistance à tout rang des majorations admises en choisissant A, K, ω, C de façon à assurer, outre les conditions (53), les suivantes :

$$(54)\quad \begin{cases} A\, \dfrac{r}{1-r^2}\,(19 + 49\, A + 66\, A^2 + \omega CK) < C & (54\text{-}1) \\ A\, [12\, k_1 + 2\, k_2\, (13 + 49\, A + 66\, A^2 + \omega CK) < \min(1, \omega). & (54\text{-}2) \end{cases}$$

Il ne reste plus qu'à vérifier, comme en (III. 6), la compatibilité de l'ensemble des conditions (53) et (54).

b) Posons pour alléger, $\quad 12\, k_1 + 26\, k_2 = a$

(54-2) exige déjà $A < \dfrac{1}{a}$, ce qui permet d'assurer les deux conditions (54) par les suivantes

$$(54^{bis})\quad \begin{cases} \dfrac{Ar}{1-r^2}\,(h + \omega CK) < C & (54\text{-}1^{bis}) \\ A\,(h' + k\, \omega CK) < \min(1, \omega) & (54\text{-}2^{bis}) \end{cases}$$

étant posé

$$h = 19 + \frac{49}{a} + \frac{66}{a^2}, \quad h' = a + 2 k_2 \left(\frac{49}{a} + \frac{66}{a^2}\right), \quad k = 2 k_2.$$

D'autre part, (54-1^{bis}) implique $r\, \omega AK < 1 - r^2$ qui, rapproché de $rAK > 14$ (cf. 53-2), exige

$$\omega < \frac{1 - r^2}{14}, \quad \text{d'où } \min(1, \omega) = \omega.$$

Eliminant alors C entre les conditions (54-1^{bis}) et (54-2^{bis}), et posant $A = \varepsilon\omega$, on est ramené à disposer de ε, ω, K pour assurer

$$\begin{cases} K > \dfrac{4}{\alpha_0} \\ \varepsilon\omega\, K > \max\left(\dfrac{\nu}{\alpha_0}, \dfrac{14}{r}\right) \\ \varepsilon\omega^2\, K^2 > 28\, V_2 \\ \varepsilon\, \omega^2\, K < \dfrac{1 - r^2}{r} \\ \dfrac{rh\, \varepsilon}{1 - r^2 - r\, \varepsilon\, \omega^2\, K} < \dfrac{1 - h'\, \varepsilon}{k\, \varepsilon\, \omega^2\, K}. \end{cases}$$

La dernière de ces conditions, compte tenu de la précédente, exige $1 - h'\varepsilon > 0$ et se résout sous la forme

$$\varepsilon\,\omega^2 K < \frac{(1-r^2)(1-h'\varepsilon)}{r(1-h'\varepsilon+kh\varepsilon)},$$

qui, sur $0 < h'\varepsilon < 1$, implique la précédente. On est donc ramené à disposer de ε, ω, K pour assurer

$$\left\{\begin{array}{l} K > \dfrac{4}{\alpha_0}. \\ \varepsilon\omega K > \max\left(\dfrac{\nu}{\alpha_0}, \dfrac{14}{r}\right) \\ \varepsilon\omega^2 K^2 > 28\, V_2 \\ h'\varepsilon < 1 \\ \varepsilon\,\omega^2 K < \dfrac{(1-r^2)(1-h'\varepsilon)}{r(1-h'\varepsilon+kh\varepsilon)}. \end{array}\right.$$

On achève, à partir de là, exactement comme en (III. 6) : posant

$$\frac{r(1-h'\varepsilon+kh\varepsilon)}{(1-r^2)(1-h'\varepsilon)} = \gamma(\varepsilon)$$

on voit que les convergences uniformes sont assurées sur $|\alpha| < \dfrac{1}{K_0}$, avec

$$K_0 = \min_{0<\varepsilon<\frac{1}{h'}} \max\left[\frac{4}{\alpha_0}, \frac{\nu^2\gamma(\varepsilon)}{\alpha_0^2\varepsilon}, \frac{196\,\gamma(\varepsilon)}{r^2\varepsilon}, 28\, V_2\,\gamma(\varepsilon)\right].$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Lévi-Civita (T.). — Détermination rigoureuse des ondes permanentes d'ampleur finie. (*Mathematische Annalen,* 1925, vol. 93.)

[2] Struik (D. J.). — Détermination rigoureuse des ondes irrotationnelles périodiques dans un canal de profondeur finie. (*Math. Annalen,* 1926, vol. 95.)

[3] Dubreil-Jacotin (Mme M. L.). — Sur la détermination rigoureuse des ondes permanentes périodiques d'ampleur finie. (*Thèse,* Paris, 1934.)

[4] Dubreil-Jacotin (Mme M. L.). — *Acc. Nazionale dei Lincei,* 21, 6e série, 1er sem., fasc. 5, mars 1935, pp. 344-346.

[5] Daubert (A.). — Sur les équations approchées des ondes permanentes et périodiques de gravité. (*C. R. de l'Académie des Sciences,* 13 mai 1957.)
— Calcul approché au troisième ordre d'une houle de gravité. (*C. R. de l'Académie des Sciences,* 20 mai 1957.)

[6] Kiebel (J.). — Sur les mouvements adiabatiques d'un fluide homogène compressible. (*Revue de Math. Appliquées et de Mécanique,* Moscou, 1 fasc., I, 1953.)

[7] Kravtchenko (J.). — Aperçu de la théorie générale de la houle. (*Cours lithographié de l'Université de Grenoble,* 1957.)

[8] Bernstein (S.). — Sur la meilleure approximation des fonctions continues au moyen de polynômes. (*Œuvres, T. I. Ac. des Sciences de Moscou,* 1951.)