JACQUELINE BRETAGNOLLE-NATHAN

Cubiques définies sur un corps de caractéristique quelconque

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4^e^ série, tome 22 (1958), p. 175-234
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1958_4_22__175_0>

Cubiques définies sur un corps de caractéristique quelconque

par Jacqueline BRETAGNOLLE-NATHAN

Le présent travail a pour but l'étude des « cubiques » définies sur un corps de caractéristique $p > 0$.

Certaines des propriétés valables en caractéristique nulle s'étendent aux cas de caractéristique non nulle et les démonstrations classiques — que l'on trouvera reproduites — peuvent être présentées de manière à être valables dans tous les cas.

Il n'en est pas toujours ainsi et comme il était facile de le prévoir les propriétés « différentielles » sont très différentes suivant que $p = 0$ ou $p > 0$.

Comme d'habitude, les « petites » valeurs de p, $p = 2$ et $p = 3$ notamment, sont les plus intéressantes.

CHAPITRE PREMIER

DÉTERMINATION D'UNE COURBE DU TROISIÈME DEGRÉ LE THÉORÈME DES NEUF POINTS

1,1. NOTATIONS

Soit k un corps de caractéristique p quelconque, K un domaine universel pour k. Les ensembles algébriques que nous étudierons sont définis dans $A^2(K)$ ou dans $P^2(K)$ (plan et plan projectif par abus de langage).

Nous appellerons « cubique » toute courbe (donc variété irréductible) définie sur le corps k et de degré 3.

Une cubique qui est une $Z/(p)$ variété sera dite « universelle ».

Par abus de langage et suivant la tradition, nous écrirons « courbe du troisième degré » au lieu d'ensemble algébrique du troisième degré.

1,2. CYCLES PROPRES ET CYCLES IMPROPRES

THÉORÈME 1. *Par neuf points distincts* P_i $(1 \leqslant i \leqslant 9)$ *il passe une courbe du troisième degré.*

Un polynome homogène du troisième degré a 10 monomes. Une courbe du troisième degré est donc terminée par la donnée de 10 coefficients, deux systèmes de coefficients proportionnels donnant la même courbe.

Or, un système linéaire homogène de 9 équations à 10 inconnues admet une solution non triviale.

COROLLAIRE 1. *Par huit points distincts du plan projectif, il passe une infinité de courbes du troisième degré.*

THÉORÈME 2. *Par dix points du plan projectif il ne passe pas, en général, de courbe du troisième degré.*

Soit (x_i, y_i, z_i) des coordonnées homogènes du point P_i $(1 \leqslant i \leqslant 10)$. En écrivant qu'une courbe du troisième degré passe par ces points, on obtient un système linéaire et homogène de 10 équations à 10 inconnues.

Une condition nécessaire et suffisante pour que ce système admette une solution autre que la solution banale est que son déterminant soit nul.

Ceci fournit immédiatement l'équation d'une courbe du troisième degré passant par 9 points distincts $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant 9)$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} X^3 & Y^3 & Z^3 & X^2Y & Y^2Z & Z^2X & XY^2 & YZ^2 & ZX^2 & XYZ \\ x^3_i & y^3_i & z^3_i & x^2_iy_i & y^2_iz_i & z^2_ix_i & x_iy^2_i & y_iz^2_i & z_ix^2_i & x_iy_iz_i \end{vmatrix} = 0$$

Considérons maintenant les cycles homogènes, de dimension 0, de degré 9, chaque point ayant + 1 pour coefficient.

Soit Γ un tel cycle :

THÉORÈME 3. *Les cycles Γ se répartissent en deux classes :*

a) *les cycles propres tels qu'il passe une courbe du troisième degré et une seule par leurs 9 points,*

b) *les cycles impropres dont les points sont les points de base d'un faisceau linéaire de courbes du troisième degré.*

a) *Il existe des cycles propres :* ceci n'est pas évident parce qu'en caractéristique $p > 0$, certains déterminants sont nuls sans qu'il existe une même relation entre les éléments des lignes ou des colonnes [1].

D'autre part, il est impossible de construire un modèle universel en caractéristique $p = 2$, parce qu'il n'existe pas 9 points dont les coordonnées soient dans le corps premier.

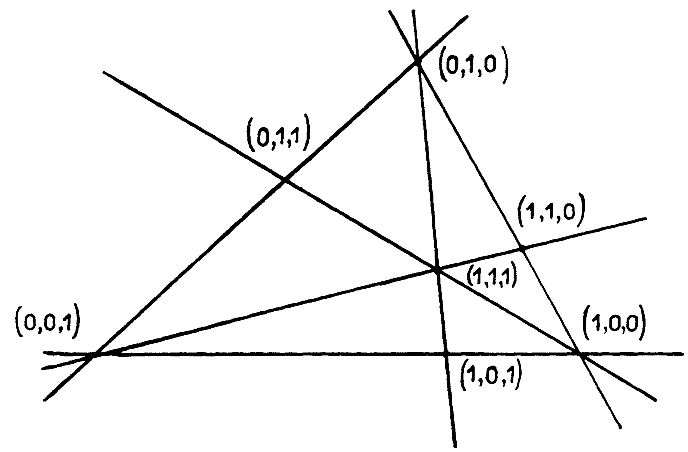
On peut raisonner de la façon suivante :

Considérons les 7 points :

$$(0,0,1),\ (0,1,0),\ (1,0,0),\ (1,1,0),\ (1,0,1),\ (0,1,1),\ (1,1,1)$$

Toute courbe du troisième degré passant par ces 7 points a une équation de la forme :

$$A\,(X^2Y - XY^2) + B\,(Y^2Z - YZ^2) + C\,(Z^2X - ZX^2) = 0$$



Le troisième point d'intersection de la courbe et de la droite d'équation :

$X - Y - Z = 0$ est sur la droite d'équation : $(A + C)\,X + B\,(Z - Y) = 0$

$Y - Z - X = 0$ — — $(B + A)\,Y + C\,(X - Z) = 0$

$Z - X - Y = 0$ — — $(C + B)\,Z + A\,(Y - X) = 0$

Considérons maintenant les points de coordonnées :

$$(y_1 + z_1, y_1, z_1), \qquad (x_2, x_2 + z_2, z_2), \qquad (x_3, y_3, x_3 + y_3)$$

et écrivons que la courbe passe par ces trois points : on obtient les relations :

$$A\,(y_1 + z_1) + B\,(z_1 - y_1) + C\,(y_1 + z_1) = 0$$
$$A\,(x_2 + y_2) + B\,(x_2 + z_2) + C\,(x_2 - z_2) = 0$$
$$A\,(y_3 - x_3) + B\,(x_3 + y_3) + C\,(x_3 + y_3) = 0$$

1. Tel est le cas du Hessien d'une courbe définie sur un corps de caractéristique $p = 2$.

Il revient au même d'écrire que la droite d'équation $AX + BY + CZ = 0$ passe par trois points ce qui, en toute caractéristique, est en général impossible.

b) *Étude des cycles impropres.* — Il existe des cycles impropres : il suffit, par exemple, de considérer le cycle intersection de deux cubiques non singulières et non tangentes.

THÉORÈME 4. *Les cycles impropres forment un système algébrique de cycles.*

Soit : $G = \sum_{1}^{9} P_i$ un cycle impropre, et soit $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant 9)$ les points de G.

Par hypothèse, le déterminant Δ introduit précédemment est nul quelles que soient les valeurs que l'on donne aux indéterminées X, Y, Z. En effet, par les neuf points P_i passent une infinité de cubiques appartenant à un faisceau linéaire admettant pour éléments de base les deux cubiques dont le cycle intersection est G. Par un point générique du plan, il passe une cubique de la famille et le déterminant est « identiquement » nul.

Par conséquent, les 10 mineurs des éléments de la première ligne sont nuls.

Remplaçons dans ces déterminants x_i, y_i, z_i respectivement par les indéterminés U_i, V_i, W_i $(1 \leqslant i \leqslant 9)$. Les 10 mineurs deviennent des polynomes par rapport à ces indéterminées.

Ce sont des polynomes invariants, au signe près, dans toute permutation des indices, par conséquent ce sont des polynomes par rapport aux coordonnées de Chow du cycle G.

1,3. COURBES DU TROISIÈME DEGRÉ QUI CONTIENNENT UN CYCLE IMPROPRE

1, 3, 1. Considérons, d'une façon plus générale, la courbe F d'équation $f = 0$, de degré m et la courbe G d'équation $g = 0$ de degré n.

Soit : $F.G = \sum_i \varepsilon_i . P_i$ le cycle intersection des courbes F et G.

Dans tout ce qui suit, on suppose que $\varepsilon_i = +1$ quel que soit i.

Par conséquent : $F.G = \sum_i P_i$.

Nous nous proposons de démontrer le théorème de Noether :

THÉORÈME 5. — *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe H d'équation $h = 0$ contienne le cycle $F.G$ (satisfaisant aux conditions indiquées ci-dessus) est qu'il existe deux polynomes homogènes (de (même degré)* $a \in k[X, Y, Z]$ *et* $b \in k[X, Y, Z]$ *tels que :* $h = a.f + b.g$.

La condition est évidemment suffisante, montrons qu'elle est nécessaire :

1,3,2. L'ensemble A des éléments de k [X, Y, Z] qui sont des polynomes homogènes de degré r est un espace vectoriel sur k.

Une base de A est $(X^\alpha, Y^\beta, Z^\gamma)$ avec $\alpha + \beta + \gamma = r$. La dimension de A est donc :

$$\frac{r(r+3)}{2} + 1 = \frac{(r+1)(r+2)}{2}$$

1,3,3. Le sous-ensemble B ⊂ A dont les éléments sont les polynomes homogènes de degré r qui s'annulent en chaque point P_i ($1 \leqslant j \leqslant mn$) est un sous-espace vectoriel de A.

On a évidemment : $dim.B \geqslant dim.A - mn$.

1,3,4. Nous allons démontrer que, pour r assez grand, **on a :**

$$dim.B = dim.A - mn.$$

Il suffit pour cela de démontrer que, pour r assez grand, les mn conditions imposées au polynome (s'annuler en chaque P_i) sont indépendantes.

Considérons mn-1 points choisis arbitrairement parmi les mn points P_i. Par chacun de ces mn-1 points P_i, faisons passer une droite D_i qui ne contienne aucun autre des points P_j ($1 \leqslant j \leqslant mn$) que le point P_i.

Soit, d'autre part, L une droite ne passant par aucun des points P_i ($1 \leqslant i \leqslant mn$).

Il est clair qu'il existe un système de mn droites répondant à ces conditions, donc qu'il existe un diviseur passant par $mn - 1$ points choisis arbitrairement parmi les mn points P_i et qui ne passe pas par le mn-ième.

Ce diviseur est de degré mn. Par conséquent, pour $r \geqslant mn$ les mn conditions sont indépendantes et :

$$r \geqslant mn \rightarrow \dim.B = \dim.A - mn.$$

$$r \geqslant mn \rightarrow \dim.B = \frac{(r+1)(r+2) - 2\,mn}{2}$$

1,3,5. Considérons deux polynomes homogènes f et g, éléments de K [X, Y, Z], f étant de degré m et g étant de degré n.

Désignons par C_{fg} l'ensemble des couples d'éléments homogènes de k [X, Y, Z] tels que si (a, b) est un tel couple :

$$d°\,(af + bg) = r.$$

C_{fg} est canoniquement muni d'une structure d'espace vectoriel sur k et de plus est somme directe des sous-espaces vectoriels de k [X, Y, Z] : C_f et C_g où :

C_f est l'ensemble des polynomes homogènes de degré $r - m$
C_g est l'ensemble des polynomes homogènes de degré $r - n$.

Sa dimension est donc :

$$\dim. C_{fg} = \frac{(r-m+1)(r-m+2)+(r-n+1)(r-n+2)}{2}$$

1,3,6· f et g étant deux éléments donnés de k [X, Y, Z] l'ensemble D_{fg} des polynomes lde k [X, Y, Z] qui sont de degré r et de la forme a.f + b.g où a et b sont des éléments de k [X, Y, Z] est un sous-espace vectoriel de A.

Nous nous proposons de calculer $\dim. D_{fg}$.

Considérons l'application φ de C_{fg} dans D_{fg} définie par :

$$\varphi(a, b) = af + bg.$$

φ est un *homomorphisme surjectif.*

Il suffit de vérifier que φ est surjectif. Soit $h \varepsilon D_{fg}$. Par hypothèse, il existe $a \varepsilon k$ [X, Y, Z] et $b \varepsilon k$ [X, Y, Z] avec :

$$d^\circ(a) = r - m \qquad d^\circ(b) = r - n$$

tels que $h = af + bg$. Par conséquent : $\varphi(a, b) = af + bg$.

Cherchons le noyau de φ :

$$(a, b) \,\varepsilon\, \ker.\varphi \leftrightarrow af + bg = 0$$

f et g sont étrangers puisque le cycle F.G est équidimensionnel de dimension 0. Puisque g divise af, il divise a.

Par conséquent, il existe $a' \varepsilon k$ [X, Y, Z] tel que :

$$a = a'g \qquad \text{et} \qquad b = a'f$$

Donc :

$\ker.\varphi$ = ensemble des éléments de C_{fg} de la forme $(a'g, -a'f)$; a' étant un élément homogène de degré $r - (m + n)$, mais à part cela quelconque, de k [X, Y, Z].

Par conséquent :

$$\dim. \ker. \varphi = \frac{(r-(m+n)-1)(r-(m+n)+2)}{2}$$

Or on sait que :

$$\dim.(D_{fg}) = \dim.(\varphi(C_{fg})) = \dim.(C_{fg}) - \dim.(\ker.\varphi)$$

Par conséquent :

$$\text{Dim}. D_{fg} = \frac{(r-m+1)(r-m+2)+(r-n+1)(r-n+2)-(r-(m+n)+1)(r-(m+n)+2)}{2}$$

Cette expression se simplifie et l'on trouve :

$$\dim . D_{fg} = \frac{(r+1)(r+2) - 2\,mn}{2}$$

1,3,7. Le résultat que nous venons de démontrer peut encore s'écrire :

$$r \geqslant mn \rightarrow \dim . D_{fg} = \dim . B$$

Or, D_{fg} est un sous espace vectoriel de B. Par conséquent,

$$r \geqslant mn \rightarrow D_{fg} = D$$

ce qui démontre le théorème de Noether dans ce cas.

1,3,8. Montrons que cette relation est encore exacte lorsque $r > m + n$.

Considérons une courbe (absolument irréductible) H de degré $r - 1$ qui contienne le cycle F.G.

Soit L une droite générique du plan.

Considérons le diviseur L + H : il est de degré r et contient le cycle F.G. Supposons alors le théorème de Noether démontré pour les diviseurs de degré r. Une équation du diviseur L + H est donc de la forme : $af + bg = 0$.

Cette équation peut encore s'écrire : $(a - gp)f + (b + fp)g = 0$ où p est un polynome homogène arbitraire de degré $r - (m + n)$.

Le cycle L.F est équidimensionnel (F est absolument irréductible) et de degré m (L est une droite).

Aucun de ses points n'est sur G (L est générique dans le plan) : donc tous sont sur le diviseur d'équation $b + fp = 0$, de degré $r - (m+n)$.

On peut faire un raisonnement analogue pour le cycle L.G et l'on démontre que tous ses points sont sur le diviseur d'équation : $a - gp = 0$ dont le degré est également $r - (m + n)$.

On peut (par le choix de p, polynome arbitraire de degré $r - (m + n)$) faire en sorte que le diviseur d'équation $b + fp = 0$ passe par :

$$\frac{(r - (m+n) + 1)(r - (m+n) + 2)}{2}$$

points choisis arbitrairement sur L. Choisissons ces points distincts de ceux du cycle L.F.

En définitive, le diviseur d'équation $a - gp = 0$ contient

$$N = m + \frac{(r - (m+n)+1)(r - (m+n) + 2)}{2}$$

points de la droite L, et son degré est $r - (m + n)$.

Or l'hypothèse $r \geqslant m + n$ implique l'inégalité :

$$r - (m + n) + 1 < \frac{(r - (m+n) + 1)(r - (m+n) + 2)}{2}$$

Par conséquent, L est une composante du diviseur d'équation $a - gp = 0$ et l'on démontrerait de la même manière que L est aussi une composante du diviseur d'équation $b + fp = 0$.

Par conséquent il existe deux polynomes homogènes a' et b' éléments de $k[X, Y, Z]$ tels que $l = 0$ étant l'équation de la droite L, on ait :

$$a - gp = la' \quad \text{et} \quad b + fp = lb'$$

et l'on a : $$h = a'f + b'g.$$

En résumé les hypothèses : r est $\geqslant m + n$ et le théorème de Noether est vrai pour l'entier r, impliquent que ce théorème est encore vrai pour l'entier $r - 1$.

Le théorème de Noether est donc démontré pour toute valeur de $r > m + n - 1$.

1,3,9. Supposons maintenant $r = m + n - q$ avec $q > 0$.

Soit comme précédemment H un diviseur de degré r qui contient le cycle F.G et soit H′ un diviseur de degré q, d'équation $h' = 0$ qui ne contient aucun point du cycle F.G.

Ce qui précède montre qu'il existe deux polynomes homogènes $a \varepsilon k[X, Y, Z]$ et $b \varepsilon k[X, Y, Z]$ tels que :

$$hh' = af + bg = (a - cg)f + (b + cf)g$$

Le degré du polynome arbitraire c est :

$$d^\circ(c) = d^\circ(a) - d^\circ(g) = m + n - d^\circ(f) - d^\circ(g) = 0$$

Le polynome c est donc une constante arbitraire.

Le cycle F.H′ est de degré mq. Ses points ne sont pas sur la courbe G, dont ils sont sur le diviseur d'équation : $b + cf = 0$.

Or on peut choisir la constante arbitraire c de manière que ce diviseur rencontre H′ en un point différent des précédents soit en tout en $mq + 1$ points : H′ est donc une composante du diviseur d'équation $b + cf = 0$ et il existe un polynome homogène $b' \varepsilon k[X, Y, Z]$ tel que : $h'b' = b + cf$.

On démontre de la même façon l'existence d'un polynome homogène $a' \varepsilon k[X, Y, Z]$ tel que : $h'a' = a - cf$.

Par conséquent : $h = a'f + b'g$.

Le théorème de Noether est donc démontré dans tous les cas.

1,4. APPLICATION DU THÉORÈME DE NOETHER AUX CUBIQUES

1,4,1. Le théorème du neuvième point. Toute cubique qui contient 8 points d'un cycle impropre contient le neuvième.

Considérons le cycle impropre F.G intersection des deux cubiques F et G d'équation respective $f = 0$ et $g = 0$.

Considérons une cubique H d'équation $h = 0$ passant par huit des neuf points du cycle F.G et soit L une droite générique dans la famille des droites passant par le neuvième point. Soit $l = 0$ son équation.

Il existe deux polynomes homogènes du premier degré éléments de $k[X, Y, Z]$, a et b tels que :

$$lh = af + bg$$

L coupe F en trois points dont un seul est sur G, par conséquent deux sont sur la droite d'équation $b = 0$. Celle-ci est donc confondue avec L et il existe une constante a' telle que

$$b = b'l$$

Un raisonnement analogue montre qu'il existe une constante a' telle que :

$$a = a'l$$

et par conséquent :

$$h = a'f + b'g.$$

On peut énoncer le même théorème autrement :

Théorème 2. *Tous les diviseurs du troisième degré, définis sur un corps de caractéristique quelconque, passant par huit points distincts du plan passent tous par un neuvième point.*

En particulier :

Théorème 3. *Soit C une cubique définie sur un corps de caractéristique quelconque. Soient A et B deux droites qui rencontrent C en* a, a′, a″ *et* b, b′, b″, *ces six points étant distincts.*

Soient :

c *le point d'intersection, distinct de* a *et* b, *de la droite* ab *avec C,*

c′ *le point d'intersection, distinct de* a′ *et* b′, *de la droite* a′b′ *avec C,*

c″ *le point d'intersection, distinct de* a″ *et* b″, *de la droite* a″b″ *avec C.*

Les points c, c′, c″ *sont alignés.* (Cf. figure p. 11.)

Les droites ab, $a'b'$, $a''b''$ constituent les composantes d'un diviseur du troisième degré qui rencontrent la cubique aux points a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' et les précautions prises font que le cycle :

$$a + b + c + a' + b' + c' + a'' + b'' + c''$$

est un cycle impropre.

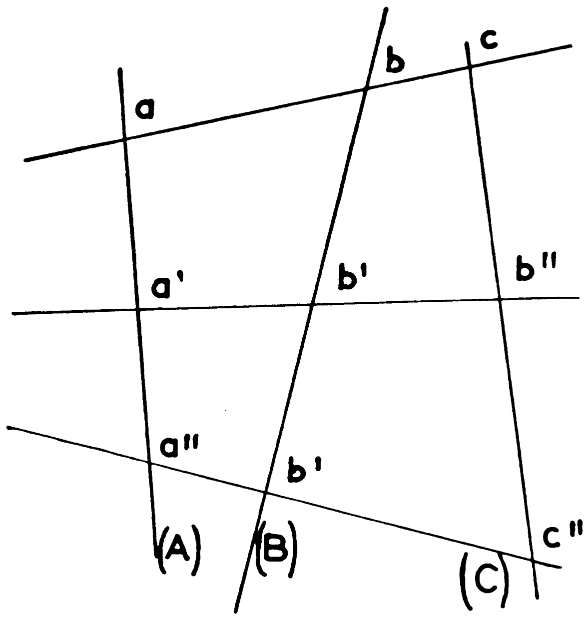
Les droites : $aa'a''$, $bb'b''$, cc' sont les composantes d'un diviseur du troisième degré qui passe par huit des neuf points du cycle impropre : il passe aussi par le neuvième.

Mais il faut prendre garde que certaines conséquences classiques en caractéristique nulle ne sont pas nécessairement vraies en caractéristique non·nulle : en particulier toutes celles où interviennent des tangentes ne peuvent se déduire de ce théorème sans précautions nouvelles. D'autre part, certains énoncés deviennent triviaux : par exemple, une conséquence classique du théorème des neuf points est le théorème de Brianchon. Or, pour des coniques définies sur un corps de caractéristique $p = 2$, ce théorème perd tout intérêt puisque leurs tangentes passent par un point fixe.

Démontrons cependant le théorème suivant :

THÉORÈME 4. *Soit C une cubique, A une droite qui la coupe en trois points distincts* a, a′, a″.

Les tangentes à C aux points a, a′, a″ *rencontrent C en trois points alignés.*



Considérons la k-spécialisation $a \to b$, $a' \to b'$.
a, a', a'' sont simples sur C (sinon deux d'entre eux seraient confondus). On sait qu'il existe une place unique φ de $k(a, a', a'', b, b', b'')$ qui prolonge la $k(a, a', b, b')$-spécialisation :

$$a \to b, \quad a' \to b'$$

L'image par φ de b'' est a'', celles des droites ab et $a'b'$ les tangentes à C en a et a' respectivement. Les points c, c', c'' se spécialisent en les points d'intersection des droites ab, $a'b'$, $a''b''$ avec C, qui par conséquent sont alignés.

Signalons quelques conséquences de ce théorème :

THÉORÈME 4. *Une cubique définie sur un corps de caractéristique quelconque et qui a deux points d'inflexion en a nécessairement trois et la droite qui joint deux points d'inflexion coupe la courbe en un troisième point d'inflexion.*

Supposons en effet que les points a et a' de C soient points d'inflexion. Soient a'' le troisième point d'intersection de C avec la droite aa', c, c' et c'' les points d'intersection respectifs des tangentes C, on a a, a' et a''.

Les points a et c, a' et c' sont confondus : il en est donc de même de a'' et c'' et le point a'' est aussi point d'inflexion.

De là, résulte immédiatement le lemme :

LEMME. *Le nombre de points d'inflexion d'une cubique définie sur un corps de caractéristique* p *quelconque est un nombre impair multiple de 3, ou est défini* (2).

THÉORÈME 5. *Le point par lequel passent les tangentes à une cubique de classe 1 est nécessairement un point de la courbe et il est non simple ou est infini* (2).

La démonstration est immédiate.

2. Nous montrerons plus loin que cette circonstance est effectivement réalisée par certaines cubiques.

CHAPITRE II

FORME RÉDUITE DE L'ÉQUATION D'UNE CUBIQUE

1. PRÉLIMINAIRES ALGÉBRIQUES : LA FORMULE DE TAYLOR POUR UN POLYNOME SUR UN ANNEAU DE CARACTÉRISTIQUE $p > 0$ [1].

La formule de Taylor, sous sa forme classique, n'est pas valable pour un polynome dont les coefficients sont les éléments d'un anneau de caractéristique $p > 0$ (présente de factorielles nulles en dénominateur).

Nous nous proposons d'établir une « formule de Taylor » valable dans ce cas.

Soit A un anneau unitaire, intègre, de caractéristique $p > 0$ et $A[X_1, ..., X_n] = A[X]$ l'anneau des polynomes à n indéterminées sur A.

DÉFINITIONS. *On appelle semi-dérivation partielle de hauteur* s *par à* X_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *un A-endomorphisme* DX_i *de la structure additive de l'anneau* $A[X]$ *tel que :*

$$\frac{D_s}{DX_i}(X_i^{mp^s}) = mX_i^{(m-1)\ p^s} \qquad m \in Z_+ \text{ et } s \in Z_+$$

$$\frac{D_s}{DX_i}(X_j^{a_j}) = 0 \qquad \text{pour } i \neq j$$

Rappelons que le nom « semi-dérivation partielle » est justifié de la façon suivante : la restriction de la semi-dérivation partielle D_s/DX_i au sous-anneau :

$$A[X_1, \ldots, X_i^{p^s}, \ldots, X_n]$$

est une dérivation partielle par rapport à X_i.

On vérifie immédiatement les théorèmes suivants :

THÉORÈME 1. *La semi-dérivation partielle de hauteur* 0, *par rapport à* X_i *est la dérivation partielle par rapport à* X_i.

THÉORÈME 2. *Quels que soient :*

$$f \in A[X_1, \ldots, X_i^{p^s}, \ldots, X_n] \quad \text{et} \quad g \in A[X_1, ..., X_i, ..., X_n]$$

on a :

$$\frac{D_s}{DX_i}(fg) = \frac{D_s}{DX_i}(f) \cdot g + f \cdot \frac{D_s}{DX_i}(g)$$

Considérons alors l'anneau $A[X]$ et n nouvelles indéterminées sur A, algébriquement indépendantes sur $A[X]$, que nous noterons $Y_1, ..., Y_n$.

Soit $f \in A[X]$. On peut écrire :

$$f(X_1 + Y_1, ..., X_n + Y_n) = f(X + Y) = \sum_m \mathcal{Y}_m(X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_n)$$

1. Boughon. Thèse Paris 1955.

$\mathcal{Y}_m$, élément de $A[X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_n] = A[X, Y]$ étant l'ensemble des termes de degré total m, par rapport aux Y_i.

Posons :

$$\mathcal{Y}_m(X, Y) = \sum_{a_1+\dots+a_n=m} Y_1^{a_1} \dots Y_n^{a_n} \frac{\Delta_m f(X_1, \dots, X_n)}{\Delta X_1^{a_1} \dots \Delta X_n^{a_n}}$$

Les $\frac{\Delta_m}{\Delta X_1^{a_1} \dots \Delta X_n^{a_n}}$ sont des applications A-linéaires de $A[X]$ dans lui-même qui satisfont aux relations fondamentales suivantes :

Soit $= a_i \sum_{s_i=o} \alpha_{i,\, s_i} \cdot p^{s_i}$ le développement p-adique de l'entier a_i.

THÉORÈME 3. *Quels que soient les indices* i *et* j, i $\neq$ j, *les endomorphismes :*

$$\frac{\Delta a_i}{\Delta X^{a_i}} \text{ et } \frac{\Delta a_j}{\Delta X^{a_j}}$$

sont permutables et

$$\frac{\Delta a_i}{\Delta X^{a_i}} \cdot \frac{\Delta a_j}{\Delta X^{a_j}} = \frac{\Delta a_i + a_j}{\Delta X^{a_i + a_j}}$$

$$\frac{\Delta a_i}{\Delta X^{a_i}} = \prod_{S=o}^{+\infty} \frac{1}{(a_{i,\, s_i})\,!} \left(\frac{D_{s_i}}{DX_i}\right)^{\alpha_{i,\, s_i}}$$

Il résulte immédiatement de ce qui précède que, pour $a_i < p$,

$$\frac{\Delta a_i}{X^{a_i}} = \frac{\partial a_i}{\partial X^{a_i}}$$

et qu'en particulier quel que soit la caractéristique p :

$$\frac{\Delta_i}{X} = \frac{\partial}{\partial X}$$

2,2. APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES

2,2,1. Les courbes polaires.

Plaçons-nous dans le cas de trois variables ($n = 3$) :

$$f(X_1 + Y_1, X_2 + Y_2, X_3 + Y_3) = \sum \mathcal{Y}_m(X, Y)$$

Le polynome $\mathcal{Y}_m \, \varepsilon A[X, Y]$ homogène de degré total m par rapport aux Y_i $(1 < i < m)$ est *le m-ième polynome polaire de f.*

Dans le cas où f est un polynome homogène de degré d, m est un polynome homogène par rapport aux X_i $(1 < i < n)$ de degré total $m - d$.

Quelle que soit la caractéristique, le premier polynome polaire $\mathcal{Y}_1(f)$ s'écrit :

$$\mathcal{Y}_1 = Y_1 \frac{\partial f}{\partial X_1} + Y_2 \frac{\partial f}{\partial X_3} + Y_3 \frac{\partial f}{\partial X_3}$$

Au contraire, le second polynome polaire revêt deux formes distinctes selon que la caractéristique $p = 2$ ou $p \geqslant 3$.

$$\mathcal{Y}_2 = Y_1^2 \frac{\Delta_2 f}{\Delta X_1^2} + Y_2^2 \frac{\Delta_2 f}{\Delta X_2^2} + Y_3^2 \frac{\Delta_2 f}{\Delta X_3^2} + Y_1 Y_2 \frac{\Delta f}{\Delta X_1 \Delta X_2} + Y_2 Y_3 \frac{\Delta_2 f}{\Delta X_1 \Delta X_2} + Y_3 Y_1 \frac{\Delta_2 f}{\Delta X_3 \Delta X_1}$$

En caractéristique $p = 2$:

$$\frac{\Delta_2 f}{\Delta X_i^2} = \frac{D_2 f}{DX_i^2} \quad (1 \leqslant i \leqslant 3) \quad \frac{\Delta_2 f}{\Delta X_i \Delta X_j} = \frac{\Delta_2 f}{\Delta X_i \Delta X_j} \quad (1 \leqslant i, j \leqslant 3)$$

En caractéristique $p \geqslant 3$:

$$\frac{\Delta_2 f}{\Delta X_i^2} = \frac{\partial_2 f}{\partial X_i^2} (1 \leqslant i \leqslant 3) \quad \frac{\Delta_2 f}{\Delta X_i \Delta X_j} = \frac{\partial_2 f}{\partial X_i \partial X_j} \quad (1 \leqslant i, j \leqslant 3)$$

2,2,2. Diviseurs polaires d'un point par rapport à une courbe.

DÉFINITION. *Soit F une courbe d'équation* f = 0 *et A* = (x_1, x_2, x_3) *un point du plan de F.*

On appelle m-*ième diviseur polaire de A par rapport à F le diviseur d'équation :* $\mathcal{Y}_m(x, X) = 0$.

Il est immédiat qu'en toutes caractéristiques la première polaire d'un point simple d'une courbe est la tangente à la courbe en ce point.

Nous conviendrons de dire que la première polaire d'un point non simple d'une courbe n'est pas définie plutôt que de considérer que c'est le plan tout entier, ce qui obligerait à ne pas parler de diviseurs.

2,3,1. Point d'inflexion d'une courbe.

DÉFINITION. *Un point I d'une courbe F est un point dinflexion de F si :*

1° *I est simple sur F,*

2° *la tangente en I à F coupe F en trois points confondus avec I.*

Soit $f(X, Y, Z) = 0$ l'équation de la courbe F et supposons que le point $(x, y, z) = I$ soit point d'inflexion de F [2].

Soient $\mathcal{Y}_1(x, X) = 0$ et $\mathcal{Y}_2(x, X) = 0$ les équations des diviseurs polaires d'ordre 1 et 2 de I.

$\mathcal{Y}_1(x, X) = 0$ est l'équation de la tangente en I à F qui par hypothèse existe : soit P = $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ un point générique de la tangente en I.

Par hypothèse $\mathcal{Y}_2(x, \bar{x}) = 0$ et le diviseur d'équation $\mathcal{Y}_2(x, Y) = 0$ admet la tangente en I pour composante.

La réciproque est immédiate : par conséquent :

2. Nous modifions, dans toute la suite de ce chapitre, nos notations et posons $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$.

THÉORÈME. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point I d'une courbe F soit point d'inflexion de cette courbe est que :*

1° *I soit simple sur F,*

2° *la seconde polaire de I admette la tangente en I pour composante.*

Nous retrouvons donc le même résultat que dans le cas de caractéristique nulle.

La seconde polaire est un diviseur de degré 2. Nous aurons besoin dans la suite de savoir reconnaître lorsque qu'un tel diviseur est irréductible.

2,4. CONDITION DE NON RÉDUCTIBILITÉ D'UN DIVISEUR DE DEGRÉ 2.

Soit $f = AX^2 + BY^2 + CZ^2 + aYZ + bZX + cXY = 0$

l'équation de ce diviseur. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il soit non irréductible et qu'il ait un point non simple.

2,4,1. Supposons que la caractéristique p = 2.

Le système :

$$\begin{aligned} f_X &= \qquad cY + bZ = 0 \\ f_Y &= cX \qquad + aZ = 0 \\ f_Z &= bX + aY \qquad = 0 \end{aligned}$$

admet *toujours* la solution : $X = a,\ Y = b,\ Z = c.$

Mais le point (a, b, c) (point par lequel passe toutes les tangentes au diviseur du second degré lorsque celui-ci est une conique [3]) n'est pas nécessairement sur D.

En effet la démonstration en caractéristique 0 s'appuie sur l'identité d'Euler qui dans ce cas s' « évanouit » le polynome figurant au premier membre étant nul.

La condition de décomposition s'écrit en écrivant que ce point (a, b, c) est sur le diviseur D.

On obtient :

$$Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + abc = 0.$$

2,4,2. Supposons que la caractéristique p soit $\geqslant 3$.

Les calculs ont la même forme qu'en caractéristique 0 et l'on peut cette fois profiter de l'identité d'Euler :

La condition cherchée s'écrit :

$$\begin{vmatrix} 2A & c & b \\ c & 2B & a \\ b & a & 2C \end{vmatrix} = 0$$

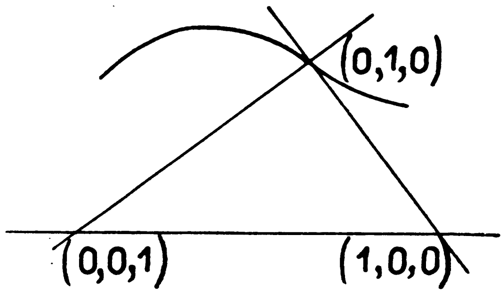
3. Pierre Boughon, Jacqueline Nathan, Pierre Samuel. Propriétés différentielles des courbes planes en caractéristiques 2. Bulletin de la Société Mathématique de France, 1955.

2,5. APPLICATIONS AUX CUBIQUES

Choisissons le triangle de référence de manière que le sommet (0, 1, 0) soit un point de la courbe et prenons pour tangente en ce point la droite Z = 0. Ordonnons l'équation f (X, Y, Z) = 0 de C par rapport aux Y :

φ_q étant un élément de $k\,x$, Z homogène de degré q, on peut écrire :

$$f(X, Y, Z) = ZY^2 + \varphi_2(X, Z)\ Y + \varphi_3(X, Z) = 0$$



La première polaire de (0, 1, 0) est la droite d'équation Z = 0 (tangente en ce joint).

La seconde polaire s'obtient en considérant le groupe des termes homogènes de degré 2 dans le développement du polynome :

$$f(0 + X, 1 + Y, 0 + Z) = f(X, 1 + Y, Z)$$

Distinguons deux cas :

2,5,2. La caractéristique p = 2.

$$f(X, 1 + Y, Z) = Z + \varphi_2(X, Z) + Y^2 Z + \varphi_2(X, Z)\ Y + \varphi_3(X, Z)$$

L'équation de la seconde polaire est donc :

$$\varphi_2(X, Z) = 0$$

THÉORÈME. *La seconde polaire d'un point simple d'une cubique définie sur un corps de caractéristique* p = 2, *par rapport à cette cubique, est décomposée.*

REMARQUE. Supposons que l'équation de cette seconde polaire soit :

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 + aYZ + bZX + cXY = 0.$$

Remplaçons dans les coefficients A, B, C, a, b, c les coordonnées du point de la cubique par les indéterminées X, Y, Z. On obtient ainsi six polynomes du premier degré. La condition de décomposition (cf. paragraphe 2,4,1) s'écrit sous la forme d'un polynome égalé à 0 : ce polynome s'annule en un point générique de la cubique :

La condition de décomposition de la seconde polaire :

$$Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + abc = 0$$

est donc l'équation de la cubique.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point simple (x, y, z) de la cubique C soit point d'inflexion de cette cubique est donc que la seconde polaire de ce point admette la tangente en ce point pour élément de décomposition.

Nous verrons plus loin qu'il existe des cubiques pour lesquelles cette condition est réalisée en un point générique, donc, qu'il existe des cubiques dont un point générique est point d'inflexion.

En général, cette condition se traduit par une seule relation algébrique entre les coordonnées x, y, z du point I qui doit donc se trouver sur un certain diviseur H.

Calculons le degré de H.

Écrivons l'équation de la cubique C par rapport à un triangle de référence dont les trois sommets sont des points de cette cubique :

$$f(X, Y, Z) = uX^2Y + vXY^2 + wY^2Z + rYZ^2 + sZ^2X + tZX^2 + \alpha XYZ = 0$$

L'équation de la première polaire d'un point $= (x, y, z)$ générique du plan s'écrit :

$$(vy^2 + \alpha yz + sz^2)X + (rz^2 + \alpha zx + ux^2)Y + (tx^2 + \alpha xy + wy^2)Z = 0$$

et celle de la seconde polaire du même point :

$$(uy + tz)X^2 + (vx + wz)Y^2 + (ry + sx)Z^2 + \alpha(XYz + YZx + ZXy) = 0$$

On vérifie immédiatement le résultat annoncé dans le paragraphe précédent lorsque α est $= 0$: on a, en effet :

$$\begin{array}{lll} A = uy + tz & B = vy + wz & C = ry + sx \\ a = \alpha x & b = \alpha y & c = \alpha z \end{array}$$

Lorsque $\alpha = 0$, la seconde polaire est décomposée en une droite double et ceci quelque soit le point M générique dans le plan (alors que ce phénomène de décomposition n'a lieu en général que pour un point M générique sur la cubique et la décomposition s'effectue alors suivant deux droites distinctes).

Lorsque M est un point générique de la cubique, on vérifie, en outre, que cette droite double passe par M ce qui explique que le polynome $Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + abc$ soit nul.

On voit aisément que le degré de H est 5 et que par conséquent une cubique définie sur un corps de caractéristique 2 a, au plus, 15 points d'inflexion.

En fait, ce nombre n'est jamais atteint.

2,5,3. La caractéristique p est > 3.

$$f(X, 1 + Y, Z) = Z + 2YZ + \varphi_2(X, Z) + \varphi_2(X, Z)Y + \varphi_3(X, Z)$$

L'équation de la seconde polaire du point $(0, 1, 0)$ est donc :

$$\mathcal{Y}_2(X, Y, Z) = 2YZ + \varphi_2(X, Z) = 0$$

Contrairement à ce qui se passait lorsque la caractéristique $p = 2$, c'est en général une conique (absolument irréductible) passant par le sommet (0, 1, 0).

Supposons que cette seconde polaire soit décomposée : l'absence des monomes YX, YZ, montre que la décomposition est nécessairement de la forme :

$$\mathcal{Y}_2(X, Y, Z) = Z \ \psi(X, Y, Z)$$

THÉORÈME. *Lorsque la seconde polaire d'un point P d'une cubique C définie sur un corps de caractéristique* p $\geqslant$ 3 *est par rapport à cette cubique est décomposée, la tangente en A à la cubique C est un élément de décomposition.*

Par conséquent :

THÉORÈME. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point I d'une cubique C, définie sur un corps de caractéristique* p $\geqslant$ 3, *soit point d'inflexion de cette cubique est :*

1° *Que I soit simple,*

2° *Que la seconde polaire de I par rapport à C soit décomposée.*

Soit (x, y, z) un point générique du plan. Une condition nécessaire et suffisante pour que la seconde polaire de (x, y, z) soit décomposée est que ce point appartienne à un certain diviseur H du troisième degré.

Par conséquent une cubique définie sur un corps de caractéristique $p \geqslant 3$ admet au plus 9 points d'inflexion. Nous verrons que ce maximum est effectivement atteint dans certains cas.

Mais le résultat fondamental pour la suite est le suivant :

THÉORÈME. *Toute cubique, non singulière, définie sur un corps de caractéristique* p *quelconque, admet au moins un point d'inflexion.*

REMARQUE. La recherche des points d'inflexion d'une courbe définie sur un corps de caractéristique nulle, se fait classiquement en introduisant la Hessienne de cette courbe.

On vérifie sans difficulté que ce procédé s'étend aux cas des courbes définies sur un corps de caractéristique $p \geqslant 3$.

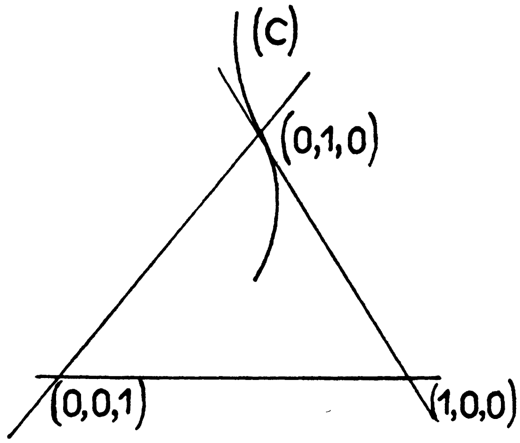
Par contre, en caractéristique $p = 2$, le polynome :

$$\begin{vmatrix} f''_{X2} & f''_{XY} & f''_{XZ} \\ f''_{YX} & f''_{Y2} & f''_{YZ} \\ f''_{ZX} & f''_{ZY} & f''_{Z2} \end{vmatrix}$$

est nul.

2,6. CLASSIFICATION PROJECTIVE DES CUBIQUES NON SINGULIÈRES

Nous choisissons le sommet (0, 1, 0) en un point d'inflexion de la cubique C, et prenons pour côté $Z = 0$ du triangle de référence la tangente d'inflexion.



Par rapport à ce triangle, l'équation de la cubique s'écrit :

$$f(X, Y, Z) = Y^2Z + YZ\varphi_1(X, Z) + \varphi_3(X, Z) = 0$$

2,6,1. La caractéristique p = 2.

La seconde polaire du point (0, 1, 0) est décomposée en les droites d'équation : $Z = 0$ et $\varphi_1(X, Z) = 0$; cette seconde droite passe également par le point d'inffexion.

2,6,1,1. Supposons que cette seconde droite est distincte de la première.

Prenons la pour côté $X = 0$ du triangle de référence. Dans des conditions $\varphi_1(X, Z) = ax$ et :

$$f(X, Y, Z) = Y^2Z + aXYZ + \varphi_3(X, Z) = 0.$$

THÉORÈME. *La seconde polaire d'un point d'inflexion d'une cubique C définie sur un corps de caractéristique* p = 2 *est décomposée suivant les deux tangentes menées du point d'inflexion à la cubique.*

Le théorème est évident lorsque la seconde polaire est décomposée en une droite double. Il suffit de faire $X = 0$ dans l'équation obtenue plus haut pour le démontrer dans le cas où les éléments de décomposition sont deux droites distinctes.

Choisissons le point de contact pour sommet (0, 0, 1) du triangle de référence, ce qui implique :

$$\varphi_3(X, Z) = bX^3 + cX^2Z + dXZ^2$$

$$f(X, Y, Z) = Y^2Z + aXYZ + bX^3 + cX^2Y + dXZ^2 = 0$$

Reste à préciser la droite choisie pour côté $Y = 0$.

La seconde polaire du sommet (0, 0, 1) est décomposée et son équation s'écrit :

$$Y^2 + aXY + cX^2 = 0$$

Prenons pour côté Y = 0 l'une des composantes de cette seconde polaire : c'est alors nul et :

$$f(X, Y, Z) = Y^2Z + aXYZ + bX^3 + dXZ^2$$

On peut enfin choisir le point unitaire : considérons la substitution :

$$X = \alpha\overline{X} \quad , \quad Y = \beta\overline{Y} \quad , \quad Z = \gamma\overline{Z}$$

la nouvelle équation de C s'écrit :

$$\bar{f}(\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}) = \beta^2\gamma\overline{Y}^2\overline{Z} + a\alpha\beta\gamma\overline{XYZ} + b\alpha^3\overline{X}^3 + d\alpha\gamma^2\overline{XZ}^2$$

Faisons, en outre, l'hypothèse que la cubique C est non singulière : b et d sont alors différente de 0 et par un choix convenable de α, β, γ, l'équation de C prend la forme :

$$f(X, Y, Z) = Y^2Z + gXYZ + X^3 + XZ^2 = 0$$

Il faut encore vérifier que cette équation définit une cubique non singulière :

$$\begin{aligned} f_X &= X^2 + Z^2 + gXY = 0 \\ f_Y &= gXY = 0 \\ f_Z &= Y^2 + gXY = 0 \end{aligned}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que ce système ait une solution autre que la solution banale est que :

$$g = 0 \qquad \text{ou} \qquad g = 1.$$

Lorsque $g = 0$, le point (1, 0, 1) est non simple.
Lorsque $g = 1$, le point (0, 0, 1) est non simple.

2,6,1,2. Supposons que la seconde polaire du point d'inflexion (0, 1, 0) soit décomposée suivant une droite double.

Prenons cette droite pour côté Z = 0 du triangle de référence. Prenons pour sommet (0, 0, 1) un point de la cubique : son équation s'écrit alors :

$$f(X, Y, Z) = Y^2Z + aYZ^2 + bX^3 + cX^2Z + dXZ^2 = 0.$$

On vérifie sans difficulté que la seule tangente issue du point d'inflexion (0, 1, 0) est la tangente d'inflexion. Par conséquent les calculs faits dans le cas précédent ne sont plus valables ici.

Le sommet (0, 1, 0) est un point d'inflexion de la cubique et la droite Z = 0 est la tangente d'inflexion. L'équation C s'écrit dans ces conditions :

$$f(X, Y, Z) = Y^2Z + aYZ^2 + bX^3 + cX^3Z + dXZ^2 + eZ^3 = 0$$

Considérons la substitution linéaire :

$$X = \overline{X} + \gamma\overline{Z} \qquad y = \overline{Y} \qquad Z = \overline{Z}$$

ou ce qui revient au même, prenons pour axe X = 0 une nouvelle droite passant par le point d'inflexion : l'équation de la cubique par rapport à ce nouveau triangle de référence s'écrit :

$$f(X, Y, Z) = Y^2Z + aYZ^2 + bX^3 + X^2Z(b\gamma + c + XZ^2(b\gamma^2 + d) + \\ + Z^3(b\gamma^3 + c\gamma^2 + d\gamma + e) = 0 \ [4]$$

Choisissons γ de manière que le coefficient du monome XZ^2 soit nul, ce qui est toujours possible.

Le côté $Y = 0$ reste complètement arbitraire. Prenons pour sommet $(0, 0, 1)$ un point de la cubique le coefficient du monome Z^3 est alors nul et l'équation de la cubique s'écrit :

$$f(X, Y, Z) = Y^2Z + aYZ^2 + bX^3 + cX^2Z = 0$$

Nous pouvons encore prendre pour côté $Y = 0$ une autre droite passant par le sommet $(0, 0, 1)$. La seconde polaire de ce point a pour équation :

$$Y^2 + cX^2 = 0$$

Elle est décomposée en une droite double que l'on peut prendre pour axe $Y = 0$.

Par rapport à ce triangle de référence qui est bien déterminé dès que l'on a choisi le point d'inflexion, l'équation de la cubique s'écrit :

$$f(X, Y, Z) = Y^2Z + aYZ^2 + bX^3 = 0$$

Enfin par un choix convenable du point unitaire, cette équation se ramène à la forme réduite :

On vérifie immédiatement que cette cubique est non singulière.

En résumé :

Les cubiques non singulières définies sur un corps de caractéristique $p = 2$ sont projectivement équivalentes à l'un ou à l'autre de deux modèles : le premier a pour équation :

$$Y^2Z + gXYZ + X^3 + XZ^2 = 0 \quad (g \neq 0 \text{ et } g \neq 1)$$

le second a pour équation :

$$Y^2Z + YZ^2 + X^3 = 0.$$

2,6,1,3. Supposons que la cubique C ait deux points d'inflexion, auquel cas elle en aura au moins trois qui seront alignés.

Prenons cette droite portant les trois points d'inflexion pour côté $Z = 0$ du triangle de référence, et deux des tangentes d'inflexion pour côtés $X = 0$ et $Y = 0$.

Dans ces conditions l'équation de la cubique C s'écrit :

$$f(X, Y, Z) = XY\psi_1(X, Y, Z) + Z\varphi_2(X, Y) + Z^2\varphi_1(X, Y) + dZ^3 = 0$$
$$f(X, Y, Z) = XY(aX + bY) + cXYZ + dZ^3 = 0$$

---

4. Pour simplifier l'écriture, nous ne surlignons pas les lettres X, Y, Z. De même, nous conservons les mêmes lettres pour les coefficients de l'équation avant et après la substitution.

Pour faire choix du point unitaire considérons la substitution :

$$X = \alpha\overline{X} \quad , \quad Y = \beta\overline{Y} \quad , \quad Z = \gamma\overline{Z}$$

L'équation de la cubique s'écrit alors :

$$f(X, Y, Z) = \alpha\beta\,(a\alpha X + b\beta Y) + c\alpha\beta\gamma XYZ + d\gamma^3 Z^3 = 0$$

Les nombres a, b, d ne peuvent être nuls, par contre c peut l'être : par conséquent, on peut, par un choix convenable du point unitaire, ramener l'équation de C à la forme :

$$f(X, Y, Z) = XY(X + Y) + g\,XYZ + Z^3 = 0$$

Cherchons pour quelles valeurs de g cette cubique est singulière. Le système :

$$f_X = Y^2 + gZY = 0$$
$$f_Y = X^2 + gZX = 0$$
$$f_Z = gXY + Z^2 = 0$$

n'admet que la solution banale lorsque g est $\neq 1$. Lorsque $g = 1$, il admet en outre la solution (1, 1, 1). Mais le point unitaire n'appartient pas à la cubique.

THÉORÈME. *Il existe* ∞^1 *cubiques non singulières définies sur un corps de caractéristique* p = 2, *qui ne sont pas projectivement équivalentes.*
Leur équation peut s'écrire :

$$XY(X + Y) + gXYZ + Z^3 = 0$$

On remarquera que la droite d'équation $X + Y + gZ = 0$ est tangente d'inflexion au point (1, 1, 0).

Il est plus commode dans certaines questions de choisir les points $(1, 1, 0)$, $(1, j, 0)$, $(1, j^2, 0)$ pour points d'inflexion.

Des raisonnements analogues aux précédents permettent de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME. *Il existe* ∞^1 *cubiques non singulières, définies sur un corps de caractéristiques* p = 2 *qui ne sont pas projectivement équivalentes.*
Leur équation peut s'écrire :

$$X^3 + Y^3 + gXYZ + Z^3 = 0$$

2,6,2. La caractéristique p est > 3.

Nous prenons comme précédemment le sommet (0, 1, 0) en un point d'inflexion et la tangente d'inflexion pour côté Z = 0. Dans ces conditions, l'équation de la cubique s'écrit

$$f(X, Y, Z) = Y^2Z + YZ\varphi_1(X, Z) + \varphi_3(X, Z) = 0$$

Cherchons l'équation de la seconde polaire du point (0, 1, 0).

$$f(X, 1 + Y, Z) = Z + 2\,YZ + Z\varphi_1(X, Z) + \dots$$

La seconde polaire a pour équation :

$$Z\,(2\,Y + \varphi_1\,(X, Z)) = 0$$

Elle est décomposée en la tangente d'inflexion et la droite d'équation : $2\,Y + \varphi_1\,(X, Z) = 0$ que nous prenons pour côté $Y = 0$ ce qui est toujours possible puisque $\varphi_1\,(X.Z)$ ne continue pas Y. L'équation de la cubique s'écrit alors :

$$f\,(X, Y, Z) = Y^2Z + \varphi_3\,(X, Z) = 0$$

Cherchons quelle est la première polaire du point (1, 0, 0) :

$$f\,(1 + X, Y, Z) = a + 3\,aX + bZ + \dots$$

La première polaire est la droite $3\,aX + bZ = 0$: nous devons distinguer deux cas :

2,6,2,1. La caractéristique p est $\geqslant 5$.

Prenons la première polaire du point (1, 0, 0) pour côté $X = 0$, l'équation de la cubique prend la forme :

$$f\,(X, Y, Z) = Y^2Z + aX^3 + cXZ^2 + dZ^3 = 0$$

Reste à choisir le point unitaire : considérons la substitution :

$$X = \alpha\overline{X} \quad , \quad Y = \beta\overline{Y} \quad , \quad Z = \gamma\overline{Z}$$

$$f\,(X, Y, Z) = \beta^2\gamma Y^2Z + a\alpha^3X^3 + c\alpha\gamma^2XZ^2 + d\gamma^3Z^3$$

On peut choisir α de manière que $a\alpha^3 = 1$ car a est nécessairement non nul (sinon C serait décomposée). On ne peut en faire autant avec $c\alpha\gamma^2$ et $d\gamma^3$, car c et d peuvent être nuls.

THÉORÈME. *Il existe* ∞^1 *cubiques non singulières définies sur un corps de caractéristique* p $\geqslant 5$, *qui ne sont pas projectivement équivalentes. Leur équation peut s'écrire :*

$$Y^2Z + X^3 + g_2XZ^2 + g_3Z^3 = 0 \qquad (4\,g^3_2 + 27\,g^2_3 \neq 0)$$

Une cubique non singulière, définie sur un corps de caractéristique $p \geqslant 5$ est caractérisée, au point de vue projectif, par l'invariant : $g^3{}_1/g^2{}_2$

On retrouve donc, pour $p \geqslant 5$, donc lorsque la caractéristique est assez grande, des résultats analogues à ceux valables caractéristique nulle, ce qui est assez normal.

2,6,2,2,. La caractéristique p = 3.

La première polaire du point (1, 0, 0) est la droite $Z = 0$ et les raisonnements précédents ne sont plus valables.

Rappelons que l'on a choisi :

le sommet (0, 1, 0) en un point d'inflexion de la cubique,

le côté $Z = 0$ suivant la tangente d'inflexion, le côté $Y = 0$ comme élément de décomposition distinct de la tangente d'inflexion de la seconde polaire du point d'inflexion.

Restent donc à préciser le côté $X = 0$ et le point unitaire.

Par le point d'inflexion on peut mener une seconde tangente distincte de la tangente d'inflexion : nous la prenons pour côté $X = 0$.

L'équation de la cubique C s'écrit alors :

$$f(X, Y, Z) = Y^2Z + aX^3 + bX^2Z + cXZ^2 = 0$$

Considérons alors la substitution :

$$X = \alpha\bar{X} \quad , \quad Y = \beta\bar{Y} \quad , \quad Z = \gamma\bar{Z}$$

$$f(X, Y, Z) = \beta^2\gamma Y^2Z + a\alpha^3X^3 + b\alpha^2\gamma X^2Z + c\alpha\gamma^2XZ^2 = 0$$

Les nombres a, b, c ne peuvent être nuls :

$a = 0$ ———— décomposition en $Z = 0$ et un diviseur de degré 2,

$c = 0$ ———— le point $(0, 0, 1)$ est non simple.

On peut donc ramener l'équation, par un choix convenable du point unitaire à la forme :

$$f(X, Y, Z) = Y^2Z + X^3 + g_1X^2Z + g_2XZ^2$$

Cherchons pour quelles valeurs de g_1 et g_2 cette cubique est singulière :

$$\begin{aligned} f_X &= Z(2\,Xg_1 + g_1Z) &&= 0 \\ f_Y &= 2\,YZ &&= 0 \\ f_Z &= g_1X^2 + Y^2 + 2\,g_1XZ &&= 0 \end{aligned}$$

Ce système admet, quelque soit g_1, la solution $(1, -1, 0)$. Mais ce point n'est pas un point de la cubique [5].

Il n'admet pas d'autre solution différente de la solution triviale, lorsque g_1 est différent de 0.

En résumé :

THÉORÈME. *Il existe* ∞^1 *cubiques non singulières définies sur un corps de caractéristiques* $p = 3$, *qui ne sont pas projectivement équivalentes. Leur équation peut s'écrire :*

$$Y^2Z + X^3 + g_1X^2Z + g_2XZ^2 = 0 \quad (g_2 \neq 0)$$

Une cubique non singulière, définie sur un corps de caractéristique $p = 3$, est caractérisée au point de vue projectif par l'invariant g_1^2/g_2.

2,7. CLASSIFICATION DES CUBIQUES SINGULIÈRES

2,7,1. Cubiques ayant un point double à tangentes distinctes.

Soit $(0, 0, 1)$ le point double à tangentes distinctes, $X = 0$, $Y = 0$ les tangentes en ce point.

L'équation de la cubique s'écrit :

$$f(X, Y, Z) = aX^3 + bX^2Y + cXY^2 + dY^3 + ZXY = 0$$

5. Nous sommes ici dans la situation déjà signalée, où l'identité d'Euler s'évanouit.

Il reste à choisir le côté $Z = 0$. Considérons la substitution :

$$Z = \alpha\overline{X} + \beta\overline{Y} + \overline{Z}$$

$$f(X, Y, Z) = aX^3 + (b + \alpha) X^2Y + (c + \beta) XY^2 + dY^3 + XYZ$$

On peut donc quelque soit la caractéristique, par le choix du côté $Z = 0$, ramener l'équation à la forme :

$$f(X, Y, Z) = aX^3 + dY^3 + XYZ = 0$$

Puis, en choisissant convenablement le point unitaire, on obtient le résultat :

THÉORÈME. *Toutes les cubiques à point double à tangentes distinctes définies sur un corps de caractéristique* p > 0, *sont projectivement équivalentes et leur équation peut s'écrire :*

$$f(X, Y, Z) = X^3 + Y^3 + XYZ = 0$$

REMARQUE. Lorsque la caractéristique $p = 3$, $X^3 + Y^3 = (X + Y)^3$ et la droite $Z = 0$ est tangente d'inflexion.

2,7,2. Cubiques à point de rebroussement.

Soit (0, 0, 1) le point de rebroussement, $Y = 0$ la tangente de rebroussement : l'équation de la cubique s'écrit :

$$f(X, Y, Z) = aX^3 + bX^2Y + cXY^2 + ZY^2 = 0$$

Considérons la substitution :

$$X = \overline{X} + \beta\overline{Y} \quad , \quad Y = \overline{Y} \quad , \quad Z = \overline{Z}$$

$$f(X, Y, Z) = Y^2Z + aX^3 + (3\,a\beta + b) X^2Y + (3\,a\beta^2 + 2\,b\beta + c) XY^2 \\ + (a\beta^3 + b\beta^2 + c\beta + d) Y^3$$

Les nombres a et b ne peuvent être nuls simultanément.

2,7,2,1. La caractéristique p est différente de 3.

On peut choisir β de manière que le coefficient du monôme X^2Y soit nul.

Prenons en outre pour sommet (0, 1, 0) un point de la courbe : par rapport à ce nouveau triangle de référence l'équation de la cubique prend la forme :

$$f(X, Y, Z) = Y^2Z + aX^3 + cXY^2 = 0$$

Reste à fixer le choix du côté $Z = 0$. Considérons la substitution :

$$X = \overline{X} \quad , \quad Y = \overline{Y} \quad , \quad Z = \alpha\overline{X} + \overline{Z}$$

$$f(X, Y, Z) = Y^2\,Z + aX^3 + (\alpha + c) XY^2$$

On peut donc choisir le côté $Z = 0$ de manière à annuler le coefficient du monome XY^2, puis par un choix convenable du point unitaire, on obtient le résultat suivant :

THÉORÈME. *Toutes les cubiques à points de rebroussement définies sur un corps de caractéristique* $p = 2$ *ou* $p > 5$ *sont projectivement équivalentes et leur équation peut s'écrire :*

$$Y^2 Z + X^3 = 0$$

2,7,2,2. La caractéristique $p = 3$.

Choisissons pour côté $X = 0$ une droite quelconque, passant par $(0, 0, 1)$ et distincte de la tangente de rebroussement, pour sommet $(0, 1, 0)$ le point d'intersection de cette droite et de la courbe distincte du point de rebroussement et pour côté $Z = 0$ la tangente à la courbe en ce point.

L'équation de la cubique par rapport à ce triangle de référence prend la forme :

$$f(X, Y, Z) = Y^2 Z + aX^3 + bX^2 Y = 0$$

Le nombre a ne peut être nul, par contre b peut l'être : par conséquent, en choisissant convenablement le point unitaire, on obtient deux formes réduites :

$$Y^2 Z + X^3 + X^2 Y = 0$$

$$Y^2 Z + X^3 = 0$$

Il n'est pas évident que ces deux cubiques ne sont pas projectivement équivalentes. On peut, par exemple, remarquer que le point $(0, 1, 0)$ est point d'inflexion de la seconde, alors que la première n'a pas de point d'inflexion elle admet la représentation paramétrique :

$$x = t^2 \quad , \quad y = t^3 \quad , \quad z = -(1 + t)$$

Les paramètres des points d'intersection avec la droite d'équation : $uX + vY + wZ = 0$ sont racines de l'équation :

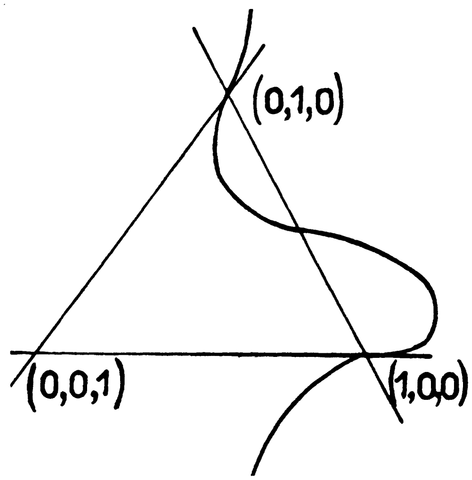
$$vt^3 + ut^2 - vt - w = 0$$

qui admet une racine triple pour : $u = w = 0$ ce qui redonne la tangente de rebroussement.

THÉORÈME. *Toutes les cubiques à point de rebroussement définies sur un corps de caractéristique* $p = 3$ *sont projectivement équivalentes à l'un ou l'autre des deux modèles suivants :*

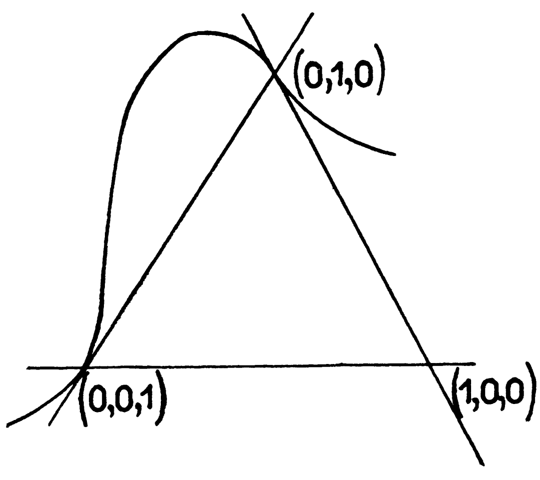
$$Y^2 Z + X^3 + X^2 Y = 0$$

$$Y^2 Z + X^3 = 0$$



Cubiques non singulières définies sur un corps de caractéristique 2 :

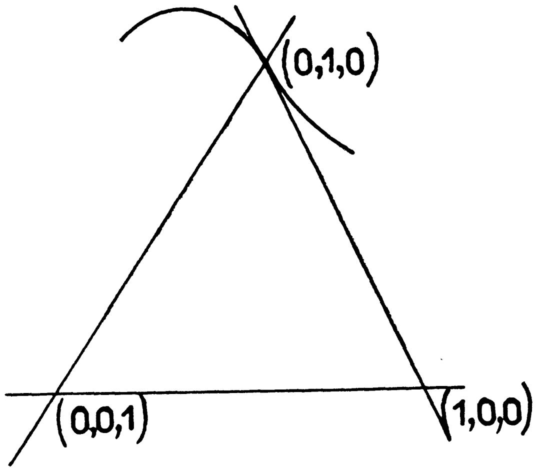
$$XY(X+Y)+gXYZ+Z^3=0$$



Cubiques non singulières définies sur un corps de caractéristique 3 :

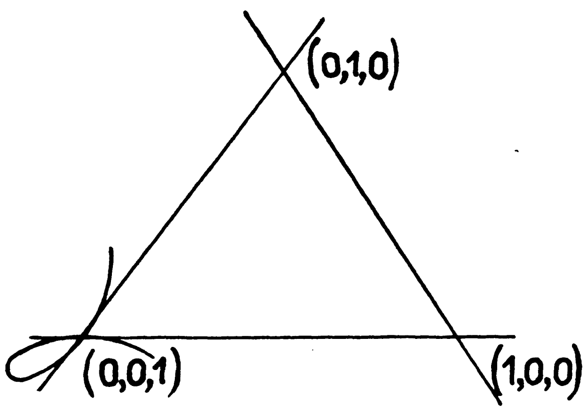
$$Y^2Z+X^3+X^2Z+gXZ^2=0$$

avec $g \neq 0$



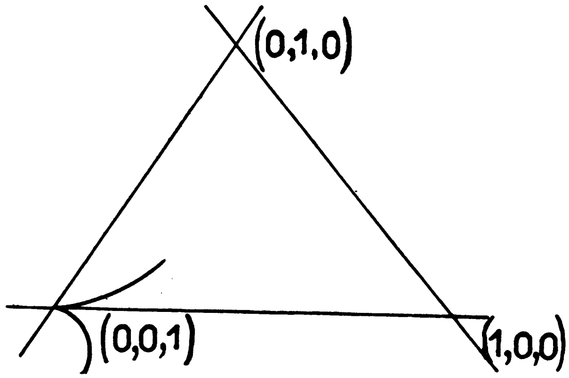
Cubiques non singulières définies sur un corps de caractéristique $p > 3$:

$$Y^2 Z + X^3 + g_2 XZ^2 + g_3 Z^3 = 0$$
$$\text{avec} \ : \ 4 g^3{}_2 + 27 g^2{}_3 \neq 0$$



Cubiques à point double définies sur un corps de caractéristique quelconque :

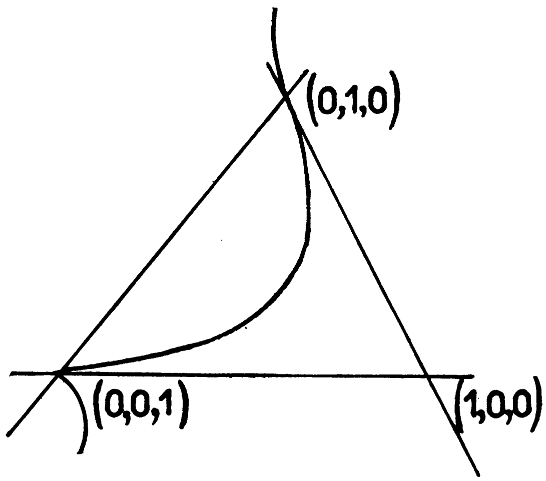
$$X^3 + Y^3 + XYZ = 0$$



Cubiques à point de rebroussement définies sur un corps de caractéristique $p = 3$:

$$Y^2 Z + X^3 + X^2 Y = 0$$

$$Y^2 Z + X^3 = 0$$



Cubiques à point de rebroussement définies sur un corps de caractéristique $p \neq 3$:

$$Y^2 Z + X^3 = 0$$

CHAPITRE III

PROPRIÉTÉS INFINITÉSIMALES DES CUBIQUES NON SINGULIÈRES

3,1. CLASSE D'UNE CUBIQUE NON SINGULIÈRE

3,1,1. La caractéristique est égale à 2.

Un raisonnement général permet de montrer que la classe d'une courbe définie sur un corps de caractéristique $p = 2$ de degré n est au plus égal à $n(n-1)/2$ (au lieu de $n(n-1)$ dans le cas de caractéristique $p = 0$) (1).

Au moyen d'un choix convenable des coordonnées (non homogènes), il suffit de majorer le nombre des tangentes menées à la courbe par le point à l'infini sur l'axe des X.

Si $F(X, Y) = 0$ représente l'équation de la courbe C, nous avons à majorer le nombre des points communs à la courbe C et à la courbe d'équation $F'_X(X, Y) = 0$. (Certains de ces points pouvant être des points multiples de C.)

On peut écrire :

$$F(X,Y) = XA(X^2, Y) + B(X^2, Y)$$

Par conséquent, on a à majorer le nombre des points communs aux deux courbes d'équation :

$$A(X^2, Y) = 0 \quad \text{et} \quad B(X^2, Y) = 0$$

Ces courbes sont de degré $n-1$ et n respectivement. Mais toutes leurs tangentes sont parallèles à l'axe des Y. Par conséquent, chaque point d'intersection compte pour deux et ces deux courbes ont au plus $n(n-1)/2$ points d'intersection distincts.

Une cubique non singulière, définie sur un corps de caractéristique $p = 2$, est donc au plus de classe 3.

Ce maximum est atteint pour la cubique d'équation :

$$X^3 + Y^3 + Z^3 + gXYZ = 0$$

THÉORÈME. *Une cubique non singulière, définie sur un corps de caractéristique* p = 2, *est de classe 3.*

3,1,2. La caractéristique p = 3.

La classe est au plus 6. Montrons qu'elle est atteinte :

Considérons le modèle d'équation :

$$f(X, Y, Z) = Y^2Z + X^3 + X^2Z + gXZ^2 = 0$$

1. Pierre Boughon, Jacqueline Nathan et Pierre Samuel : Courbes planes en caractéristique 2. Bulletin de la Société Mathématique de France. 83, 1955, pp. 275-78.

Les points de contact des tangentes à cette courbe menées du point (a, b, c) sont sur la courbe d'équation :

$$af'_X + bf'_Y + cf'_Z = a(2XZ + gZ^2) + 2bYZ + c(X^2 + 2gXZ) = 0$$

Prenons pour point (a, b, c) le point $(0, 0, 1)$: on trouve effectivement six (dont la tangente en $(0, 0, 1)$ qui compte pour deux).

3,1,3. La caractéristique p est > 5.

Les calculs sont identiques à ceux valables en caractéristique nulle : la classe est six.

En résumé :

THÉORÈME. *La classe d'une cubique non singulière définie sur un corps de caractéristique 2 est égale à 3.*

La classe d'une cubique non singulière définie sur un corps de caractéristique $p \neq 2$ *est égale à 6.*

3,2. CLASSE D'UNE CUBIQUE A POINT DOUBLE ORDINAIRE

3,2,1. La caractéristique $p = 2$.

Soit : $X^3 + Y^3 + XYZ = 0$ l'équation de la cubique C.

Les points de contact des tangentes issues du point (a, b, c) sont sur la conique d'équation :

$$aX^2 + bY^2 + aYZ + bZX + cXY = 0$$

dont toutes les tangentes passent précisément par le point (a, b, c). D'autre part, cette conique passe par le point double $(0, 0, 1)$ de la cubique qui compte au moins pour deux dans l'intersection.

La classe de la cubique C est donc au plus égale à 2.

Elle est égale à 2 : en effet, par le point $(0, 0, 1)$ on peut mener deux tangentes à la cubique.

THÉORÈME. *La classe d'une cubique à point double ordinaire définie sur un corps de caractéristique* $p = 2$ *est égale à 2.*

3,2,2. La caractéristique p est > 3.

Les calculs et les raisonnements sont les mêmes qu'en caractéristique nulle.

THÉORÈME. *La classe d'une cubique définie sur un corps de caractéristique* $p > 3$ *à point double ordinaire est égale à 4.*

3,3. CLASSE D'UNE CUBIQUE A POINT DE REBROUSSEMENT

3,3,1. La caractéristique $p = 2$.

Soit (x, y, z) un point générique de la cubique C. L'équation de la tangente en ce point s'écrit :

$$x^2 X + y^2 Z = 0$$

La tangente en un point générique passe donc par le point « fixe » (0, 1, 0) qui est point d'inflexion de la courbe.

On remarquera que la tangente de rebroussement ne passe pas par ce point et que c'est la seule à faire exception [2].

THÉORÈME. *Une cubique à point de rebroussement définie sur un corps de caractéristique* p = 2 *est de classe 1.*

Il résulte immédiatement des raisonnnements précédents qu'*une telle cubique a un unique point d'inflexion,* par lequel passe la tangente générique.

3,3,2. La caractéristique p = 3.

Nous savons qu'il existe alors deux modèles projectifs.

3,3,2,1. *La cubique considérée est projectivement équivalente au modèle :*

$$Y^2 Z + X^3 + X^2 Y = 0$$

Les points de contact des tangentes issues du point (a, b, c) sont sur la conique d'équation :

$$bX^2 + cY^2 + 2\,aXY + 2\,bYZ = 0$$

Cette conique coupe la cubique, outre le point de rebroussement, en trois points. Par conséquent la classe de C est au plus égale à trois. Elle est effectivement égale à trois comme le montre la considération d'un point $(a, b. c)$ particulier (1, 1, 0) par exemple.

THÉORÈME. *Une cubique C, définie sur un corps de caractéristique* p = 3, *ayant un point de rebroussement et projectivement équivalente au modèle* $Y^2 Z + X^3 + X^2 Y = 0$, *est de classe 3.*

3,3,2,2. *La cubique considérée est projectivement équivalente au modèle :*

$$Y^2 Z + X^3 = 0$$

Soit (x, y, z) un point générique de cette cubique : l'équation de la tangente en ce point s'écrit :

$$2\,yzY + y^2 Z = 0$$

Elle passe par le point « fixe » (1, 0, 0) qui, au contraire de ce qui se passait en caractéristique $p = 2$, appartient également à la tangente de rebroussement.

THÉORÈME. *Une cubique C, définie sur un corps de caractéristique* p = 3, *ayant un point de rebroussement et projectivement équivalente au modèle* $Y^2 Z + X^3 = 0$, *est de classe 1.*

2. Cette partcularité est liée, comme nous le verrons plus loin au fait que le point caractéristique de la tangente n'est jamais le point de contact de la tangente avec la courbe.

3,3,3. La caractéristique p est > 3.

Les calculs et raisonnements sont analogues à ceux valables en caractéristique nulle.

THÉORÈME. *La classe d'une cubique à point de rebroussement définie sur un corps de caractéristique* $p > 3$ *est égale à 3.*

3,2. POINT CARACTÉRISTIQUE DE LA TANGENTE A UNE CUBIQUE.

Soit C une courbe plane définie sur un corps de caractéristique p quelconque.

Soient $P^\circ = (x^\circ, y^\circ)$, un point simple de C et $P = (x, y)$, un point $k(x^\circ, y^\circ)$ — générique de C. Soient T° la tangente en P°, T la tangente en P.

DÉFINITION. *On appelle point caractéristique de la tangente T° l'unique spécialisation du cycle $T^\circ . T$ dans le prolongement de la* $k(P^\circ)$ *— spécialisation $P \to P^\circ$* (3).

On démontre qu'en caractéristique $p > 0$, le point caractéristique de la tangente générique n'est pas nécessairement le point de contact de cette tangente et de la courbe.

3,2,1. La caractéristique $p = 2$.

THÉORÈME. *Le point caractéristique de la tangente générique à une courbe quelconque définie sur un corps de caractéristique* $p = 2$ *n'est jamais le point de contact.*

Il est commonde de démontrer les lemmes suivants.

LEMME 1. *Soit* k *un corps caractéristique* $p = 2$ *et* (s, t) *un point générique d'une courbe plane d'équation non homogène* $g(S, T) = 0$. *Le produit* $g'_S(s, t) . g'_T(s, t)$ *est un élément de* $k(s^2, t^2)$.

Écrivons, en effet :

$$g(S, T) = A(S^2, T^2) + S . B(S^2, T^2) + T . C(S^2, T^2) + S . B(S^2, T^2)$$

$$g'_S = B + T . D \quad , \quad g'_T = C + S . D$$

et par conséquent :

$$g'_S(s, t) . g'_T(s, t) = B(s^2, t^2) . C(s^2, t^2) + D(s^2, t^2) . A(s^2, t^2)$$

puisque : $g(s, t) = 0$ par hypothèse.

LEMME 2. *Soit* $uX + vY + wZ = 0$ *l'équation homogène de la tangente à la courbe S en un point générique* $P = (s, t)$.

Les coefficients u. v, w *sont des éléments de* $k(s^2, t^2)$.

3. Pierre Boughon. Propriétés différentielles des variétés algébriques définies sur un corps de caractéristique $p > 0$. Thèse, Paris, 1955.

Soit (x, y, z) un système de coordonnées homogènes du point P. L'équation de la tangente s'écrit :

$$Xf'_X(x, y, z) + Yf'_Y(x, y, z) + Zf'_Z(x, y, z) = 0$$

Les coefficients ne sont pas nuls tous les trois : supposons que $f'_Y(x, y, z)$ ne soit pas nul.

$$u = \frac{f'_x(x, y, z)}{f'_y(x, y, z)} \quad \frac{f'_x\left(\frac{x}{y}, 1, \frac{z}{y}\right)}{f'_y\left(\frac{x}{y}, 1, \frac{z}{y}\right)} = \frac{g'_s(s, t)}{g'_t(s, t)}$$

$$u = \frac{g'_s(s, t,). g'_t(s, t)}{g'^2_t(s, t)} \varepsilon\, k(s^2, t^2)$$

LEMME 3. *Les coordonnées du point caractéristique de la tangente générique à la courbe C au point $P = (s, t)$ sont des éléments de* $k(s^4, t^4)$.

Soit $\varphi(U, V, W) = 0$ l'équation tangentielle homogène de la courbe C. On démontre (4) que des cordonnées homogènes du point caractéristique de la tangente générique (u, v, w) sont

$$(\varphi'_U(u, v, w),\ \varphi'_V(u, v, w),\ \varphi'_W(u, v, w))$$

Ces coordonnées ne sont pas nulles toutes les trois : supposons que $\varphi'_V(u, v, w)$ ne sont pas nulle : un raisonnement entièrement analogue au précédent démontre le lemme.

Si $(a, b, c,)$ sont des coordonnées homogènes du point caractéristique de la tangente générique, on a donc :

$$a \varepsilon k(x^4, y^4, z^4) \quad , \quad b \varepsilon k(x^4, y^4, z^4) \quad , \quad c \varepsilon k(x^4, y^4, z^4)$$

et par conséquent on ne saurait avoir $(a, b, c) = (x, y, z)$, ce qui démontre le théorème.

Nous nous proposons de préciser ces résultats dans le cas où la courbe C est une cubique.

3,2,2. Application aux cubiques non singulières définies sur un corps de caractéristique p = 2.

Considérons le modèle projectif d'équation non homogène :

$$X^3 + Y^3 + gXY + 1 = 0$$

Équation de la tangente au point $P = (x, y)$:

$$(x^2 + y)X + (y^2 + x)Y + gxy + 1 = 0$$

Mais : $\quad (x^2 + y)(gxy + 1) = x^2 + gx^3y + g^2xy^2 + gy$

En remplaçant x^3 par $y^3 + gxy + 1$, on trouve :

$$(x^2 + gy)(gxy + 1) = x^2 + gy^4$$

4. Cf. 1 page précédente.
5. Aucune confusion n'étant à craindre, nous abandonnons la notation (S, T) pour désigner des coordonnées non homogènes.

En définitive, on peut écrire l'équation de la tangente sous la forme :

$$(x^2 + gy^4)X + (y^2 + gx^4)Y + 1 + g^2 x^2 y^2 = 0$$

On trouve pour équation tangentielle homogène de cette cubique :

$$U^3 + V^3 + g^2 UVW + W^3 = 0$$

Les coordonnées non homogènes du point caractéristique sont $a = x^4$, $b = y^4$.

Le lieu du point caractéristique est la cubique d'équation non homogène :

$$X^3 + Y^3 + g^4 XY + 1 = 0$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que le point caractéristique soit le tangentiel du point de contact est que $g^4 + g = 0$.

3,2,3. Application aux cubiques à point double ordinaire définies sur un corps de caractéristique p = 2.

Les calculs ne présentent pas de difficulté : les résultats sont résumés ci-dessous :

Équation de la cubique : $X^3 + Y^3 + XYZ = 0$
Équation de la tangente : $y^4 X + x^4 Y + x^2 y^2 Z = 0$
Équation tangentielle de la cubique : $UV + W^2 = 0$
Point caractéristique de la tangente au point (x, y, z) : $(x^4, y^4, 0)$.

THÉORÈME. *Le point caractéristique de la tangente générique à une cubique à point double ordinaire, définie sur un corps de caractéristique* p = 2, *est sur la droite qui joint les trois points d'inflexion de la cubique* [6].

3,2,4. Application aux cubiques à point de rebroussement définies sur un corps de caractéristique p = 2.

Nous savons déjà que la tangente générique passe par un point fixe : c'est nécessairement le point caractéristique.

THÉORÈME. *Le point caractéristique de la tangente générique à la cubique à point de rebroussement d'équation :*

$$Y^2 Z + X^3 = 0$$

définie sur un corps de caractéristique p = 2, *est le point* (0, 1, 0).

3,2,5. Nous nous proposons maintenant de préciser les relations qui existent entre point caractéristique et point de contact d'une tangente à une courbe définie sur un corps de caractéristique $p > 2$.

3,2,5,1. Soit C une courbe d'équation $f(X, Y, Z) = 0$ définie sur un corps de caractéristique $p \geqslant 0$.

---

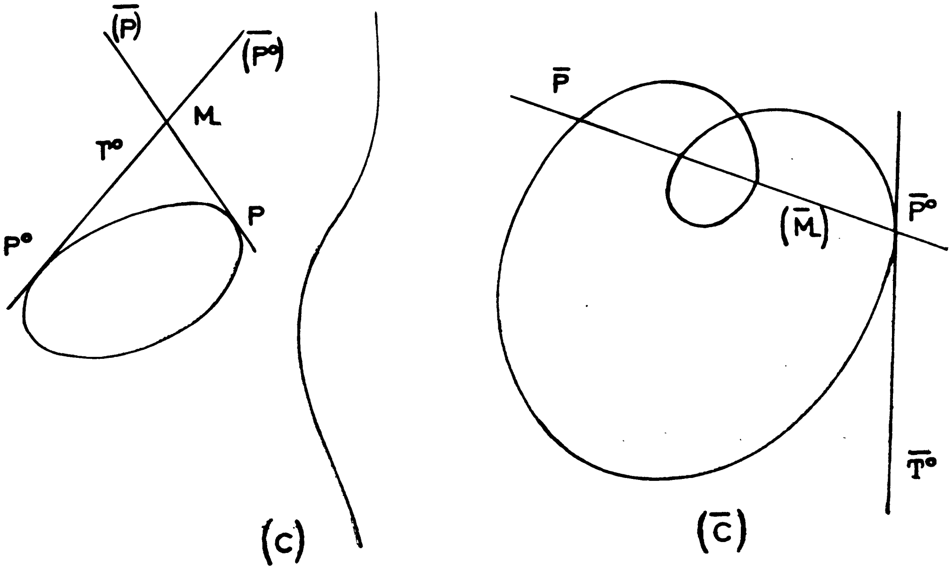
6. On sait seulement que le côté $Z = 0$ coupe la cubique en trois points qui sont points d'inflexion. Nous verrons plus loin que ce sont les seuls.

Soit $\varphi(U, V, W) = 0$ son équation tangentielle.

Soit $P^{\circ} = (x^{\circ}, y^{\circ}, z^{\circ})$ un point simple de C, $\overline{P}^{\circ} = (u^{\circ}, v^{\circ}, w^{\circ})$ la tangente en ce point, $P = (x, y, z)$ un point générique de C et $\overline{P} = (u, v, w)$ la tangente en ce point.

Considérons la $k(P^{\circ})$ — spécialisation $P \to P^{\circ}$. On sait qu'il existe une place unique π de $k(P^{\circ}, P)$ qui la prolonge.

Les éléments $u^{\circ} = f_X(x^{\circ}, y^{\circ}, z^{\circ})$, $v^{\circ} = f_Y(x^{\circ}, y^{\circ}, z^{\circ})$, $w^{\circ} = f_Z(x^{\circ}, y^{\circ}, z^{\circ})$ ne sont pas nuls tous les trois puisque P° est simple sur C. Supposons que w° ne soit pas nul : les quotients u/w, v/w sont dans l'anneau de π et par conséquent $\overline{P}^{\circ}$ est l'image de $\overline{P}$ par π.



Tout point simple $\overline{P}^{\circ}$ de l'ensemble algébrique $\overline{C}$ d'équation $\varphi(U, V, W) = 0$ étant spécialisation du point $\overline{P}$, $\overline{C}$ est une variété.

3,2,5,2. Dans tout ce qui suit nous supposons que la classe de C est > 1, donc que C est une courbe et que ce n'est pas une droite.

A tout point M (resp. droite D) du plan des XYZ faisons correspondre, par dualité, la droite $\overline{M}$ (resp. le point $\overline{D}$).

Soit $M = \overline{P}^{\circ}.\overline{P}$. Son image dans le plan des U, V, W est la droite $\overline{P}^{\circ}\overline{P} = \overline{M}$. (Cf. figures page 51).

Dans la $k(P^{\circ})$ spécialisation $P \to P^{\circ}$, la droite $\overline{P}^{\circ}\overline{P} = \overline{M}$ se spécialise en la tangente $\overline{T}^{\circ}$ en $\overline{P}^{\circ}$ à $\overline{C}$. L'image T° de la droite $\overline{T}^{\circ}$ est le point caractéristique de la tangente $\overline{P}^{\circ}$ à C.

La compatibilité de la spécialisation des cycles et du produit d'intersection montre que le cycle $\overline{M}.\overline{C}$ se spécialise en le cycle $\overline{T^0}.\overline{C}$. Dans ce dernier cycle, le point P^0 apparaît avec un coefficient au moins égal à 2, ce que l'on peut énoncer plus rapidement de la façon suivante :

LEMME. *Soit P^0 un point simple d'une courbe C de classe au moins égale à 2 définie sur un corps de caractéristique quelconque.*

Soit $\overline{P^0}$ la tangente à C en P^0 et soit T^0 son point caractéristique.

La tangente $\overline{P^0}$ compte pour deux dans le faisceau des tangentes à C issues de P^0.

3,2,5,3. Considérons un point P' générique de C. Supposons que le point T' dans la tangente $\overline{P'}$ en P' à C soit tel que, au sens défini dans le paragraphe précédent, la tangente $\overline{P'}$ compte pour au moins deux dans le faisceau des tangentes issues de T'.

Considérons la droite $\overline{T'}$ image dans le plan des UVW du point T'. Le cycle $\overline{C}.\overline{T'}$ est défini est le point $\overline{P'}$ qui appartient à son support est simple sur $\overline{C}$ puisque générique sur $\overline{C}$. Par hypothèse ce point apparaît dans le cycle $\overline{C}.\overline{T'}$ avec une multiplicité au moins égale 2. Par conséquent, $\overline{T'}$ est tangente à $\overline{C}$ en $\overline{P'}$.

Il résulte du lemme démontré au paragraphe précédent et de l'unicité du point caractéristique, que T' est le point caractéristique de la tangente générique $\overline{P'}$.

LEMME. *Soit P' un point générique d'une courbe C de classe au moins égale à 2, définie sur un corps de caractéristique quelconque.*

Soit $\overline{P'}$ la tangente à C en P'.

Si dans le faisceau des tangentes issues d'un point T' de la tangente $\overline{P'}$ à la courbe C, la tangente $\overline{P'}$ compte pour deux le point T' est l'unique point caractéristique de la tangente $\overline{P'}$.

Application aux cubiques non singulières définies sur un corps de caractéristique $p = 2$.

Nous avons démontré que la classe d'une telle cubique est 3.

Soit P un point générique. Considérons le faisceau des tangentes issues de P.

La tangente en P a la multiplicité 1, puisque le point P ne peut pas être le point caractéristique de *cette* tangente.

On peut donc mener deux tangentes distinctes de celle-là. Désignons par Q et R leur point de contact.

Une condition nécessaire et suffisante pour que ces deux tangentes soient confondues est le point P soit le point caractéristique de la tangente en Q.

Nous savons que cela est possible et c'est un problème que nous avons résolu :

THÉORÈME. *Par un point générique de la cubique d'équation*

$$X^3 + Y^3 + gXYZ + Z^3 = 0 \qquad g^3 \neq 1$$

définie sur un corps de caractéristique p = 2, *on peut mener deux tangentes autres que la tangente en P.*

Une condition nécessaire et suffisante pour que ces deux tangentes soient confondues est g = 0.

Un point d'inflexion de la cubique C est par définition un point confondu avec son tangentiel. Par conséquent :

CORROLAIRE. *Par un point d'inflexion de la cubique d'équation*

$$X^3 + Y^3 + gXYZ + Z^3 = 0 \qquad g^3 \neq 1$$

définie sur un corps de caractéristique p = 2, *on peut mener une seule tangente distincte de la tangente d'inflexion.*

— *Par un point d'inflexion de la cubique d'équation :*

$$X^3 + Y^3 + Z^3 = 0$$

on ne peut mener aucune tangente distincte de la tangente d'inflexion.

3,2,5,4. Nous supposons dans ce qui suit que le corps de définition de la courbe C est de caractéristique $p > 2$.

Soit M = (a, b, c) un point générique du plan de la courbe C. Une condition suffisante pour que la tangente en P = (x, y, z) passe par M est que :

$$af'_X(x, y, z) + bf'_Y(x, y, z) + cf'_Z(x, y, z) = 0$$

Par conséquent les points P de C qui possèdent la propriété que la tangente en P à C passe par M = (a, b, c) appartiennent au support du cycle C.D où est le diviseur d'équation

$$af'_X(X, Y, Z) + bf'_Y(X, Y, Z) + cf'_Z(X, Y, Z) = 0$$

Mais il peut se faire que le diviseur D soit multiple d'un diviseur E. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et suffit que les dérivées partielles f'_X, f'_Y, f'_Z soient des éléments de $k[X^p, Y^p, Z^p]$.

Tel est par exemple le cas de la courbe C d'équation :

$$X^{p+1} + Y^{p+1} + Z^{p+1} = 0$$

Le diviseur D a alors pour équation :

$$a.X^p + b.Y^p + c.Z^p = 0$$

On peut prétendre que la tangente générique à cette courbe C est « multiple d'ordre p » et que par conséquent sa classe est $p(p+1)$. Nous n'adopterons pas ce point de vue et nous dirons que la classe de cette courbe est égale à p, que son équation tangentielle s'écrit :

$$U^{p+1} + V^{p+1} + W^{p+1} = 0$$

est que la tangente générique rencontre la courbe en p points confondus avec le point de contact [7].

Supposons désormais qu'il n'existe pas de diviseur E dont le diviseur D soit multiple et considérons le cycle C.D.

Les points non simples de E appartiennent au support de ce cycle.

Les points non simples de D sont solutions du système :

$$\begin{aligned} a.f''_{X^2}(x,y,z) + b.f''_{XY}(x,y,z) + c.f''_{XZ}(x,y,z) &= 0 \\ a.f''_{XY}(x,y,z) + b.f''_{Y^2}(x,y,z) + c.f''_{YZ}(x,y,z) &= 0 \\ a.f''_{XZ}(x,y,z) + b.f''_{YZ}(x,y,z) + c.f''_{Z^2}(x,y,z) &= 0 \end{aligned}$$

Ce sont donc des points communs à D et à la Messienne de C. Pour que ces points appartiennent au support du cycle C.D, il faudrait que $M = (a, b, c)$ appartienne à une tangente d'inflexion de C, ce qui est impossible puisque M est générique dans le plan, et que l'on vient précisément d'écarter les courbes dont la tangente générique est tangente d'inflexion.

Soit alors P un point simple de C, appartenant au support du cycle C.D dans lequel il figure avec une multiplicité au moins égale à 2 : la courbe C et le diviseur D sont alors tangents et cette condition, compte tenu des restrictions imposées d'une part à la caractéristique, d'autre part à la courbe, est nécessaire et suffisante pour que le point M soit point caractéristique de la tangente en P à C.

3,5,2,5. Cherchons alors dans quelles conditions on peut affirmer qu'un point P générique sur C est point caractéristique de la tangente en P.

L'équation de la tangente à D en $P = (x, y, z)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} & X\,(x.f''_{X}\,(x,y,z) + y.f''_{XY} + f''_{XZ}) \\ + & Y\,(x.f''_{XY}(x,y,z) + y.f''_{Y^2} + f''_{YZ}) \\ & Z\,(x.f''_{XZ}(x,y,z) + y.f''_{YZ} + f''_{Z^2}) = 0 \end{aligned}$$

Nous avons supposé la caractéristique $p > 2$. Par conséquent, nous sommes dans le cas où l'identité d'Euler pour les dérivées secondes ne s'évanouit pas et l'équation de cette tangente peut encore s'écrire :

$$X.f'_X(x,y,z) + Y.f'_Y(x,y,z) + Z.f'_Z(x,y,z) = 0$$

La courbe C et le diviseur D sont tangents en P.

3,2,5,6. *Application aux cubiques de classe* > 2 *définies sur un corps de caractéristique* p > 2.

Soit C une telle cubique : elle satisfait à toutes les conditions imposées à la courbe C dans les paragraphes précédents.

En effet, elle est définie par hypothèse sur un corps de caractéristique $p > 2$ et, comme on l'a précédemment montré, son point générique n'est pas point d'inflexion.

---

7. On remarquera que de telles questions ne se posent pas pour les cubiques définies sur un corps de caractéristique 2 ou plutôt qu'elles sont masquées par la valeur particulière de la caractéristique.

THÉORÈME. *Soit C une cubique, singulière ou non, de classe différente de 1, définie sur un corps de caractéristique* $p > 2$.

Le point caractéristique de la tangente générique est son point de contact.

Les cubiques telles que le point caractéristique de la tangente générique est distinct de son point de contact sont donc :

1° Toutes les cubiques sur un corps de caractéristique $p = 2$,

2° Les cubiques, définies sur un corps de caractéristique $p = 3$, projectivement équivalentes au modèle d'équation :

$$Y^2Z + X^3 = 0$$

3,3. NOMBRE DE POINTS D'INFLEXION D'UNE CUBIQUE NON SINGULIÈRE

3,3,1. La caractéristique $p = 2$.

Nous avons démontré l'existence d'un point di'nflexion et de ce fait nous avons pu ramener l'équation de la cubique à la forme :

$$X^3 + Y^3 + Z^3 + gXYZ = 0$$

Distinguons deux cas :

3,3,1,1. $g = 0$: l'équation de la tangente au point $P = (x, y, z)$ s'écrit : $x^2X + y^2Y + z^2Z = 0$ et le point (x^4, y^4, z^4) est le tangentiel du point (x, y, z).

Une condition nécessaire et suffisante pour que P soit point d'inflexion est qu'il soit confondu avec son tangentiel, donc que :

$$x^4 = x \quad , \quad y^4 = y \quad , \quad z^4 = z$$

Un calcul facile montre que tous les points d'intersection de cette cubique avec les côtés du triangle de référence sont points d'inflexion et que ce sont les seuls.

3,3,1,2. $g \neq 0$: l'application de la méthode précédente est difficile par suite de la longueur des calculs. Il est plus simple d'écrire qu'une condition nécessaire et suffisante pour que le point P soit point d'inflexion est que la tangente en P est élément de décomposition de la seconde polaire de ce point.

L'équation de la seconde polaire du point $P = (x, y, z)$ s'écrit :

$$xX^2 + yY^2 + zZ^2 + g(xYZ + yZX + zXY) = 0$$

et celle de la tangente :

$$(x^2 + gyz)\,X + (y^2 + gzx)\,Y + (z^2 + gxy)\,Z = 0$$

Les points d'inflexion sont les points d'intersection de la cubique est du diviseur d'équation :

$$XY\,(X^3 + Y^3 + gXYZ + g^3Z^3) = 0$$

On trouve ainsi 9 points d'intersection distincts.

THÉORÈME. *Une cubique non singulière, définie sur un corps de caractéristique* p = 2, *a 9 points d'inflexion.*

REMARQUE. La méthode que nous avons utilisée dans le second cas s'applique également au premier. On vérifie facilement la concordance des résultats.

3,3,2. La caractéristique p = 3.

En supposant l'existence d'un point d'inflexion, nous avons ramené l'équation de la courbe à la forme :

$$Y^2Z + X^3 + g_1X^2Z + g_2XZ^2 = 0$$

et nous avons montré que le nombre de points d'inflexion était $\leqslant 9$. Nous allons montrer qu'il est, en fait, égal à trois.

L'équation de la seconde polaire du point $P = (x, y, z)$ s'écrit :

$$g_1zX^2 + zY^2 + g_2xZ^2 + 2\,yYZ + 2\,(g_1x + g_2z)\,XZ = 0$$

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit décomposée, donc pour que le point $P = (x, y, z)$ soit point d'inflexion de la cubique est qu'il appartienne au diviseur d'équation :

$$Z\,(g^2{}_1X^2 + g_1Y^2 + g^2{}_2Z^2 + g_1g_2XZ) = 0$$

La droite $Z = 0$ est la tangente d'inflexion de la cubique au point (0, 1, 0). Quant à la conique seconde composante de ce diviseur, elle coupe la cubique en deux points distincts seulement situés sur la droite d'équation :

$$g_1X^3 - g^2{}_2Z^3 = 0$$

Ces deux points sont donc alignés avec le point (0, 1, 0).

THÉORÈME. *Une cubique non singulière, définie sur un corps de caractéristique* p = 3 *a trois points d'inflexion.*

3,3,3. La caractéristique p est > 3 :

$$Y^2Z + X^3 + g_2XZ^2 + g_3Z^3 = 0$$

Les calculs et raisonnements sont les mêmes qu'en caractéristique nulle :

THÉORÈME. *Une cubique non singulière définie sur un corps de caractéristique* p > 3 *a neuf points d'inflexion.*

CHAPITRE IV.

GÉOMÉTRIE SUR UNE CUBIQUE NON SINGULIÈRE

4,1. PRÉLIMINAIRES

Soit C une cubique non singulière [1] définie sur un corps de caractéristique $p > 0$. On sait [2] que son genre est égal à 1 et que les séries linéaires complètes de degré n sont de dimension n-1 donc, avec des notations classiques sont des g^{n-1}_{n}.

On sait également que le système des courbes de degré m découpe sur C une série complète qui est, par conséquent, une $g^{3m-1}_{m.}$

Nous noterons : x l'addition des diviseurs toutes les fois qu'une confusion pourrait se produire avec l' « addition des points » sur la cubique.

Pour simplifier l'écriture, l'équivalence de deux diviseurs sera notée : $=$.

Il est classique de présenter la géométrie sur une cubique au moyen de l'addition des points, qui n'est pas essentiellement différente de la théorie de l'équivalence des diviseurs.

4,2. ADDITION DES POINTS SUR UNE CUBIQUE

Soient P et Q deux points quelconques de la cubique C. La droite PQ lorsque les points P et Q sont distincts, la tangente en P lorsqu'ils sont confondus, rencontre la courbe C en un troisième point généralement distinct de P et Q et qui est le *résiduel* de P et Q.

Soit F ce point.

Par définition, le résiduel de E et F est un point que l'on note $F' = P + Q$ (*fig.* p. 218).

Cette construction géométrique définit une loi de composition interne partout définie sur l'ensemble des points de la cubique.

THÉORÈME. *L'addition des points sur une cubique est une loi de groupe abélien.*

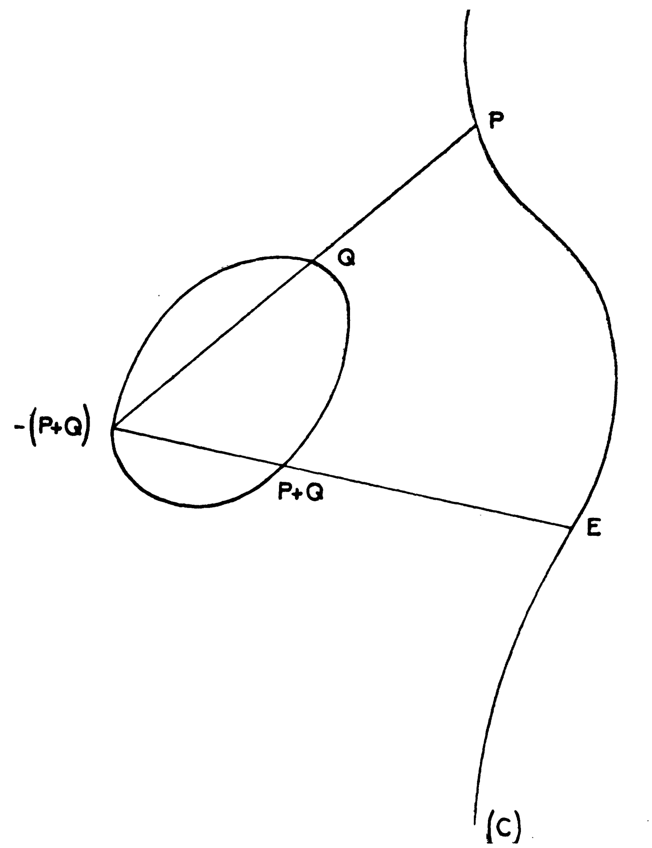
1° *Commutativité.* La définition de $P + Q$ ne fait intervenir que la droite PQ et fait donc jouer un rôle symétrique aux points P et Q.

2° *Associativité.* Soient P, Q et R trois points quelconques de la cubique C (cf. p. 219).

---

1. Une cubique singulière étant unicursale aucune question de ce genre ne se pose à son sujet.

2. La démonstration du thèorème de Riemann-Roch pour les corps de fonctions algèbriques de caractéristiques $p > 0$ se trouve dans : Chevalley, Introduction to the theory of Algebraic Functions of one variable. Math. Surweys, N° VI, 1951.
On pourra également consulter : P. Samuel : Singularités des variétés algèbriques. Bull. Soc. Math. France, 1952.
La démonstration du théorème de Brill-Noether a été donnée au chapitre 1.



Définition de l'addition des points sur une cubique.

Désignons par : F le résiduel de P et Q,
F′ le résiduel de E et F,
G le résiduel de Q et R,
G′ le résiduel de E et G.

Deux droites quelconques du plan coupent la cubique suivant deux cycles équivalents. Nous avons donc les égalités suivantes *entre cycles,* X désignant le résiduel de F′ et R et Y celui de P et G′ :

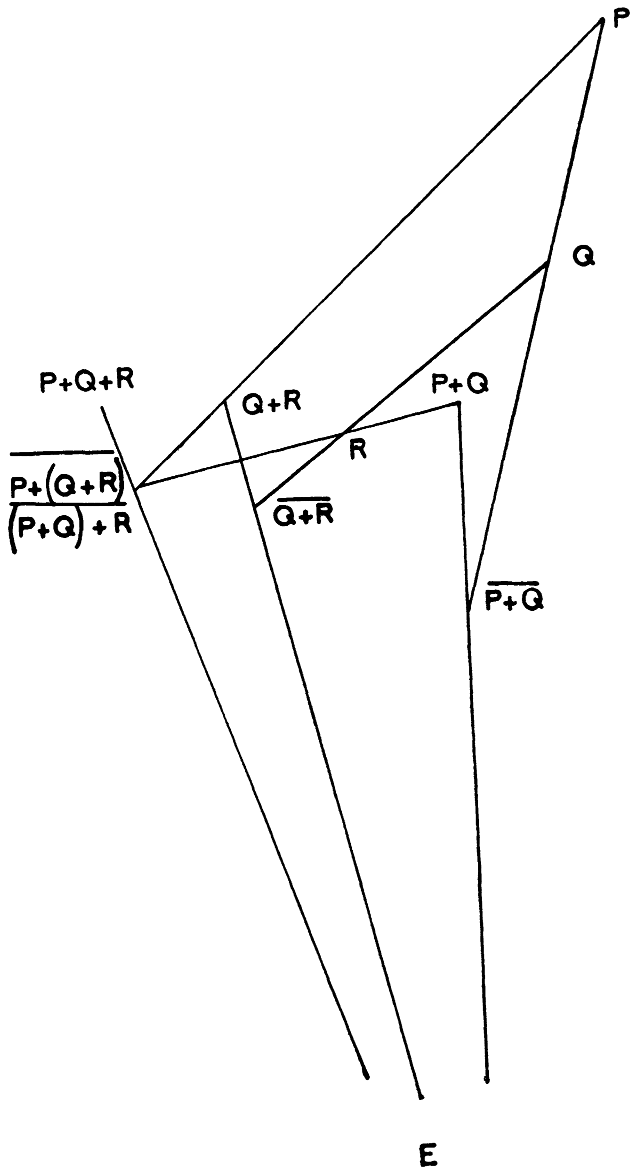
$$\begin{aligned} & P \times Q \times F = E \times F \times F' = F' \times R \times X \\ & = Q \times R \times G = E \times G \times G' = P \times G' \times Y \end{aligned}$$

Ces équivalences impliquent l'équivalence X = Y entre les *diviseurs* X et Y et, par conséquent, puisqu'il s'agit de diviseurs réduits à un point affecté du coefficient 1, ces points sont confondus, ce qui démontre l'associativité.

3° *Existence d'un élément neutre.* Le point d'inflexion E est élément neutre [1].

1. Nous ne noterons pas cet élément neutre 0 (zéro), contrairement à la coutume.

4° *Tout élément admet un opposé.* L'opposé du point P est le résiduel de P et de F.



4,3. APPLICATION DE L'ADDITION DES POINTS SUR UNE CUBIQUE

La plupart des applications de l'addition des points sur une cubique sont des conséquences du théorème suivant :

THÉORÈME FONDAMENTAL. *Une condition nécessaire et suffisante pour que le diviseur positif :*

$$D = \sum_i v(P_i) . P_i$$

de degré 3 n, *soit le cycle intersection de la cubique C et d'une courbe de degré* n, *est que :*

$$\sum_i v(P_i) . P_i = E$$

La démonstration de ce théorème repose sur le lemme suivant :

LEMME. *Les points* P_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *de la cubique C étant distincts ou non, les deux relations suivantes sont équivalentes :*

$$Q = P_1 + P_2 + \ldots + P_n$$
$$Q \times (n - 1)\, E = P_1 \times P_2 \times \ldots P_n$$

La démonstration se fait par récurrence à partir de $n = 2$.

Pour démontrer le théorème, il suffit alors de remarquer que le cycle $3\,n . E$ est le cycle intersection de la cubique avec le diviseur T^n, T étant la tangente d'inflexiono en E, et que la relation :

$$\sum_i v(P_i) . P_i = E$$

peut encore s'écrire : $\sum_i v(P_i) . P_i = 3\,n . E$ et que par conséquent elle est équivalente à la même relation écrite entre cycles, laquelle est vraie puisque chacun des cycles qui figure au premier et au second membre sont les cycles intersection de la cubique C avec deux diviseurs de degré n.

De très nombreuses propriétés des cubiques trouvent une démonstration facile grâce à l'addition des points : bornons-nous aux exemples suivants :

4,3,1. Soit O un point fixe d'une cubique C. Une sécante issue de O coupe C en P et Q. Soit A un second point fixe de C et P′ (resp. Q′) le résiduel de A et P (resp. A et Q).

Le résiduel O′ de P′ et Q′ est fixe.

Soit O′ le résiduel *d'un* couple P′, Q′. Un calcul facile montre que :

$$O' = 2\,A - 0.$$

Le point O′ est donc indépendant du couple P′, Q′ particulier choisi pour le définir.

4,3,2. Points d'inflexion d'une cubique.

THÉORÈME. *Une condition nécessaire et suffisante pour que le point X soit point d'inflexion est que 3.X + E.*

La condition est nécessaire : soit X un point d'inflexion de la cubique C.

Si X = E, c'est évident,

Si $X \neq E$, le résiduel de X et X est X est le point 2.X est le résiduel de E et X. e résiduel des points 2.X et X est le point E et puisque le résiduel des points E et E est encore E, 3.X = E.

La condition est suffisante : soit X un point de la cubique C tel que $3.X = E$.

La relation $3.X = E$ peut encore s'écrire : $-2.X = X$. Le point X est alors confondu avec son tangentiel et puisque la cubique est non singulière, X est point d'inflexion.

Soient F et G deux points d'inflexion d'une cubique. Le résiduel des points F et G est le point $-(F+G)$ et c'est par conséquent un point d'inflexion.

On retrouve ainsi le théorème déjà démontré :

THÉORÈME. *Le résiduel de deux points d'inflexion est un point d'inflexion.*

Plaçons-nous dans le cas d'une cubique non singulière définie sur un corps de caractéristique $p \geqslant 3$: nous savons qu'elle a 9 points d'inflexion, alignés trois par trois.

Soient E, F, G trois points d'inflexion non alignés. Les 9 points d'inflexion figurent dans le tableau suivant [2] :

E	F	$-F$
G	$G+F$	$G-F$
$-G$	$-G+F$	$-G-F$

4,4. L'INVARIANT PROJECTIF D'UNE CUBIQUE NON SINGULIÈRE

Soit C une cubique non singulière. Soient A et B deux points distincts de C. La droite AB rencontre à nouveau la cubique C au point $-(A+B)$.

Soit U un point quelconque de C distinct de A et B. Une sécante quelconque issue de A rencontre à nouveau la cubique au points P et $-(A+P)$. Le résiduel des points U et P (resp. U et $-(A+P)$) est le point $-(U+P)$ (resp. $A+P-U$) (cf. *fig.* p. 222).

Une condition nécessaire et suffisante pour que ces deux résiduels soient alignés avec le point B est que :

$$B + (A + P - U) + (-(U + P)) = E$$

ou encore : $A + B = 2\,U$ *donc que le point U soit l'un des tangentiels du point* $-(A+B)$.

Dans tout ce qui suit, nous supposerons le point U choisi de cette façon.

THÉORÈME. *Les droites joignant les points :*

A et P d'une part , B et $-(U+P)$ *d'autre part,*

se correspondent dans une homographie.

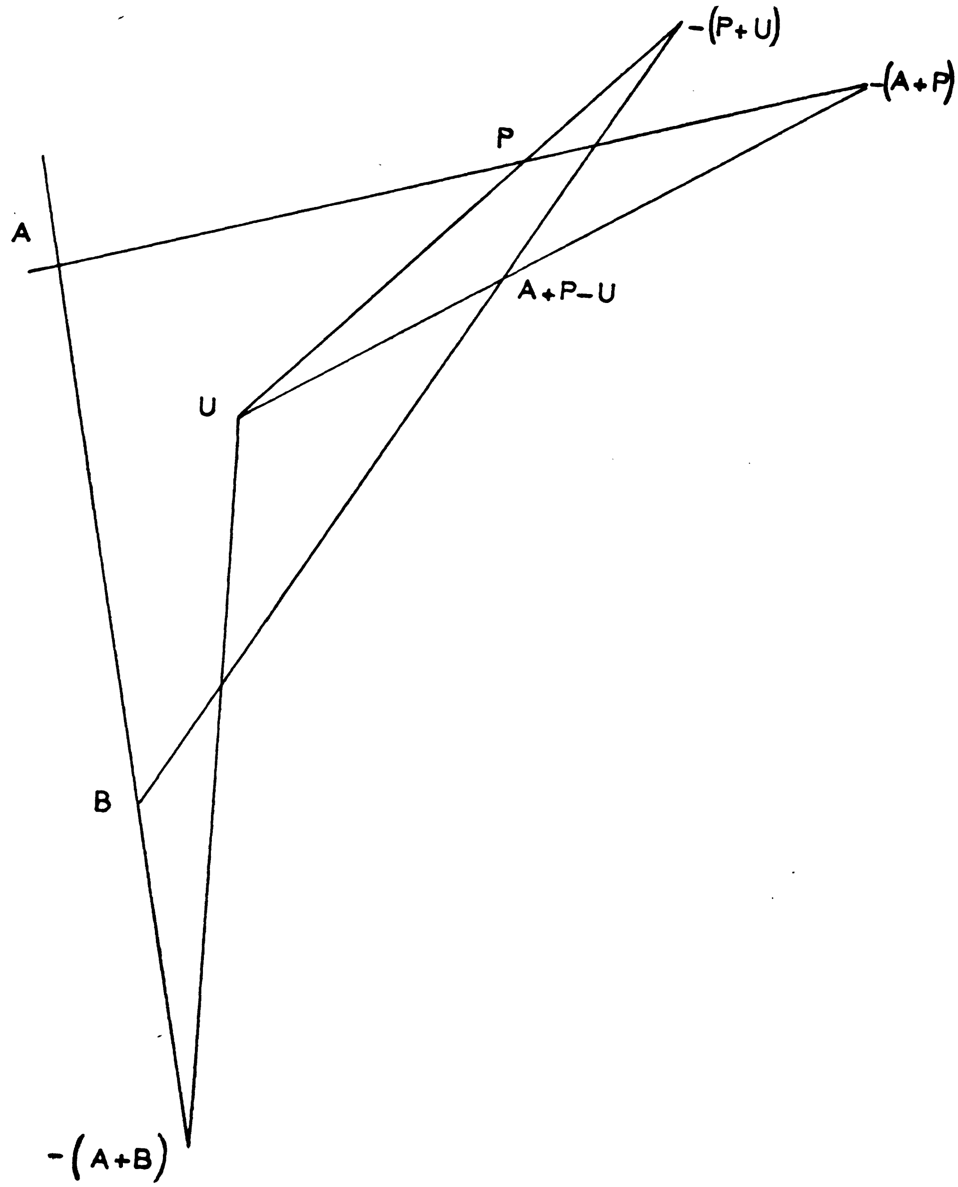
THÉORÈME. *Une tangente à la cubique issue de A a pour homologue dans cette homographie une tangente issue de B.*

La démonstration de ces deux théorèmes est immédiate.

2. Le résultat est le même pour une cubique non singulière définie sur un corps de caractéristique nulle. On sait dans ce cas que trois seulement des points peuvent être réels. On ne peut donc pas représenter l'ensemble de ces 9 points.

4,4,1. Le théorème de Salmon. (Caractéristique $p > 2$).

Supposons que la classe de la cubique C soit six, donc que la caractéristique de son corps de définition est > 2. Par un point générique de C on peut mener quatre tangentes distinctes de la tangente en P.



Soient P et P′ deux points distincts de la cubique C.

D'après ce qui précède, il existe une homographie qui transforme le faisceau des quatre tangentes issues de P en le faisceau des quatre tangentes issues de P′.

Désignons par $\delta(P)$ la valeur de l'invariant anharmonique pour le birapport des quatre tangentes en P [3].

THÉORÈME DE SALMON. *$\delta(P)$ est indépendant du point P. Il ne dépend que de la cubique C. Nous le noterons $\delta(C)$.*

4,4,1,1. *La caractéristique* p = 3.

Considérons deux cubiques non singulières C et C′. Nous avons montrer que l'on pouvait, par des transformations homographiques, ramener leur équation à la forme :

$$Y^2Z + X^3 + g_1 X^2Z + g_2 XZ^2 = 0 \quad \text{pour } C,$$
$$Y^2Z + X^3 + g'_1X^2Z + g'_2XZ^2 = 0 \quad \text{pour } C'.$$

Une condition nécessaire pour qu'il existe une homographie qui transforme C en C′ est que $\delta(C) = \delta(C')$.

Un calcul facile fait à partir du faisceau des tangentes issues du point (0, 1, 0) montre que :

$$\delta(C) = \frac{\alpha^3}{\alpha - 1} \quad \text{avec } \alpha = \frac{g_2^2}{g_3}$$

Réciproquement, considérons deux cubiques non singulières C et C′ telles que $\delta(C) = \delta(C')$.

On peut toujours supposer que leurs équations sont celles écrites plus haut. Par hypothèse, il existe une homographie qui transforme le faisceau des tangentes à C issues de (0, 1, 0) en le faisceau des tangentes à C′ issues du même point.

$$X^3 + g_1X^2Z + g_2XZ^2 \qquad \text{et} \qquad X^3 + g'_1X^2Z + g'_2XZ^2$$

sont donc homologues (à un facteur constant près) dans cette homographie et un choix convenable du point unitaire permet de rendre ce facteur égal à l'unité.

THÉORÈME. *Une condition nécessaire et suffisante pour que deux cubiques non singulières, C et C′, définies sur un corps de caractéristique* p = 3 *soient projectivement équivalente est que :*

$$\frac{\alpha^3}{\alpha - 1} = \frac{\alpha'^3}{\alpha' - 1}$$

3. $\delta\varepsilon k(X)$ est le générateur du corps des invariants du groupe anharmonique. On sait que :

$$\delta = \frac{(X^2 - X + 1)^3}{X^2(X - 1)^2}$$

On remarquera que la donnée de δ détermine *trois* valeurs de α toujours distinctes donc trois cubiques projectivement équivalentes.

Nous allons montrer que les trois équations obtenues sont celles d'une même cubique rapportée successivent aux trois triangles construits comme il a été indiqué au chapitre 2 à partir de chacun des trois points d'inflexion de la cubique.

Par rapport à chacun de ces triangles la cubique C a une équation de la forme écrite plus haut. Cette équation est entièrement déterminée par la valeur du rapport $\alpha = g^2_1/g_2$.

D'autre part chacune de ces valeurs du rapport α est racine de l'équation :

$$\frac{\alpha^3}{\alpha - 1} = \delta\,(C)$$

Il reste à montrer que les trois valeurs de α qui figure dans les trois équations sont distinctes lorsque $\delta\,(C)$ est $\neq 0$.

Il suffit évidemment de montrer que deux d'entre elles sont distinctes.

On le vérifie aisément en écrivant l'équation de la cubique par rapport à un triangle de référence dont deux sommets sont des points d'inflexion.

Notons le cas particulier $\delta\,(C) = 0$. La cubique C a dans ce cas la *même équation* qui peut s'écrire :

$$Y^2Z + X^3 + XZ^2 = 0 \qquad \text{(cubique équiharmonique)}$$

par rapport à trois triangles distincts.

4,4,1,2. *La caractéristique est* > 3.

Les raisonnements et les calculs sont les mêmes qu'en caractéristique nulle.

On trouve :

$$\delta\,(C) = \frac{-9}{4\,\beta + 27} \qquad \text{avec } \beta = g_1^3 \,/\, g_2^2$$

On remarquera qu'au contraire du cas $p = 3$, $\delta\,(C)$ est une fonction homographique de β et que par conséquent la donnée de $\delta\,(C)$ détermine complètement la cubique C une fois le triangle de référence choisi.

La cubique C ayant 9 points d'inflexion et à chacun d'entre eux étant associé un triangle par rapport auquel son équation prend la forme réduite :

$$Y^2Z + X^3 + g_2XZ^2 + g_3Z^3 = 0$$

il existe 9 triangles de référence par rapport auxquels la cubique C a même équation.

THÉORÈME. *Une condition nécessaire et suffisante pour que deux cubiques non singulières C et C′ définies sur un corps de caractéristique* $p \neq 2$, *soient projectivement équivalentes est que* $\delta\,(C) = \delta\,(C')$.

Par rapport à un triangle de référence déterminé, il y a, lorsque $p = 3$, *trois cubiques pour lesquelles* $\delta(C)$ *a une valeur donnée, et une seule cubique lorsque* p *est* > 3.

4,4,2. Invariant projectif d'une cubique non singulière définie sur un corps de caractéristique p = 2.

Soit $X^3 + Y^3 + Z^3 + gXYZ = 0$ l'équation d'une cubique non singulière rapportée à un triangle de référence dont chaque côté porte trois points d'inflexion.

Désignons par : 1, α, α^2 les racines cubiques de l'unité.

Les neufs points d'inflexion ont pour coordonnées :

$$\begin{array}{lll} A = (1,1,0) & D = (1,0,1) & G = (0,1,1) \\ B = (\alpha, \alpha^2, 0) & E = (\alpha, 0, \alpha^2) & H = (0, \alpha, \alpha^2) \\ C = (\alpha^2, \alpha, 0) & F = (\alpha^2, 0, \alpha) & I = (0, \alpha^2, \alpha) \end{array}$$

Ces points sont alignés suivant 18 droites formant 4 triangles dont aucun sommet n'est point d'inflexion et par rapport auxquels la cubique aura une équation de la forme écrite plus haut. De plus ces triangles sont les seuls par rapport auxquels la cubique peut avoir une équation de cette forme.

Pour obtenir commodement les côtés de ces triangles, construisons le tableau suivant :

A	B	C	A	B	C
D	E	F	D	E	F
G	H	I	G	H	I
A	B	C	A	B	C
D	E	F	D	E	F
G	H	I	G	H	I

Trois points quelconques alignés dans ce tableau sont des points d'inflexion alignés.

Les équations des côtés de ces triangles sont écrites dans le tableau ci-dessous :

ABC	$Z = 0$	
FED	$Y = 0$	triangle T_1
IGH	$X = 0$	
AFI	$X + Y + \alpha Z = 0$	
BEG	$\alpha X + Y + Z = 0$	triangle T_2
CDH	$X + \alpha Y + Z = 0$	

AEH	$\alpha X + \alpha Y + Z = 0$	
BDI	$\alpha X + Y + \alpha Z = 0$	triangle T_3
CFG	$X + \alpha Y + \alpha Z = 0$	
CEI	$\alpha^2 X + Y + \alpha Z = 0$	
DGA	$X + Y + Z = 0$	triangle T_4
HFB	$\alpha X + Y + \alpha^2 Z = 0$	

Il existe donc quatre triangles par rapport auxquels une cubique non singulière donnée, définie sur un corps de caractéristique 2 a une équation de la forme : $X^3 + Y^3 + Z^3 + gXYZ = 0$.

L'équation de la cubique par rapport à chacun de ces triangles peut être mise, par un choix convenable du point unité sous la forme :

$$X^3 + Y^3 + Z^3 + gXYZ = 0$$

Un calcul très simple montre que l'on peut obtenir *trois équations distinctes seulement* qui sont :

$$X^3 + Y^3 + Z^3 + gXYZ = 0$$
$$X^3 + Y^3 + Z^3 + g\alpha XYZ = 0$$
$$X^3 + Y^3 + Z^3 + g\alpha^2 XYZ = 0$$

THÉORÈME. *Une condition nécessaire et suffisante pour que deux cubiques non singulières définies sur un corps de caractéristique* p = 2, *rapportées à des triangles par rapport auxquels leur équation s'écrit :*

$$X^3 + Y^3 + Z^3 + gXYZ = 0 \qquad X^3 + Y^3 + Z^3 + g'XYZ = 0$$

soient projectivement équivalentes, est que :

$$\underline{g^3 = g'^3}$$

On remarquera que les trois équations sont les mêmes dans le seul cas où $g = 0$.

Nous avons démontré que, dans ce cas, le point caractéristique de la tangente en un point générique était le tangentiel de ce point.

C'est aussi le cas où par un point générique P de la cubique on ne peut mener qu'une tangente distincte de la tangente en P et où la tangente d'inflexion est la seule tangente issue d'un point d'inflexio.

Nous nous proposons maintenant de trouver la signification géométrique de l'invariant projectif g^3.

Considérons une cubique d'équation :

$$X^3 + Y^3 + Z^3 + gXYZ = 0$$

et posons : $g = q^2$.

Le faisceau des tangentes issues du sommet (0, 0, 1) a pour équation : $X^3 + Y^3 = 0$. Par conséquent, chacune de ces tangentes passe par un point d'inflexion situé sur le côté opposé.

Voici les points de contact des tangentes issues des différents sommets :

Sommet :	$(0, 0, 1)$	$(1, 1, q)$,	(α, α^2, q),	(α^2, α, q)
Sommet :	$(0, 1, 0)$	$(1, q, 1)$,	(α, q, α^2),	(α^2, q, α)
Sommet :	$(1, 0, 0)$	$(q, 1, 1)$,	$(q, \alpha\, \alpha^2)$,,	(q, α^2, α)

La connaissance de l'un quelconque de ces neuf points entraîne celle de q^3.

Considérons un sommet quelconque du triangle de référence (0, 0, 1) par exemple. Les trois tangentes menées de ce sommet à la cubique ont pour équation :

$$Y = X \quad , \quad Y = \alpha X \quad , \quad Y = \alpha^2 X$$

Considérons l'une quelconque des six droites issues du même sommet (0, 0, 1) et passant par un point de contact d'une tangente issue d'un autre sommet.

On obtient ainsi 6 faisceaux de quatre droites, soit 36 birapports. Il est facile de voir qu'en fait six au plus de ces birapports sont distincts et que ce sont les six birapports du faisceau de l'un quelconque des six faisceaux.

Un calcul facile montre que la valeur prise par l'invariant anharmonique est :

$$\frac{q^3}{q^6 + 1}$$

Ce nombre ne change pas, ainsi qu'il est évident par construction, lorsque l'on effectue sur q les substitutions suivantes :

$$q \to \propto q \quad , \quad q \to \propto^2 q \quad , \quad q \to 1/q$$

Par conséquent, la connaissance de ce nombre ne détermine pas la cubique à une homographie près. Il détermine six cubiques que l'on peut séparer en deux groupes de trois cubiques projectivement équivalentes.

DÉFINITIONS. Nous appellerons module d'une cubique non singulière définie sur un corps de caractéristique 2, le nombre q^3. Nous appellerons semi-module le nombre $q^3/1 + q^6$ dont la signification géométrique vient d'être précisée.

THÉORÈME. *Une condition nécessaire et suffisante pour que deux cubiques non singulières définies sur un corps de caractéristique* $p = 2$ *soit projectivement équivalentes et qu'elles aient même module.*

THÉORÈME. *Une condition nécessaire pour que deux cubiques non singulières définies sur un corps de caractéristique* $p = 2$ *soient projectivement équivalentes et qu'elles aient même semi-module.*

Cette condition n'est pas suffisante : lorsqu'elle est remplie et que les cubiques ne sont pas projectivement équivalentes, il existe un triangle par rapport auquel l'équation des cubiques s'écrit :

$$X^3 + Y^3 + Z^3 + gXYZ = 0$$

$$X^3 + Y^3 + Z^3 + \frac{1}{g} XYZ = 0$$

CHAPITRE V

TRANSFORMATION BIRATIONNELLES D'UNE CUBIQUE

5,1. TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES SUR UNE CUBIQUE

THÉORÈME. *Toute cubique non singulière* [1] *définie sur un corps de caractéristique* p *quelconque est invariante dans une infinité de transformations birationnelles.*

Soit A un point quelconque de la cubique non singulière C.

Soit S_A l'application de C sur elle-même définie par :

$$S_A(P) = A - P$$

Les points P et $S_A(P)$ étant alignés avec le point fixe A, S_A est une transformation birationnelle de C en elle-même.

Soit T_A l'application de C sur elle-même définie par :

$$T_A(P) = A + P$$

Les points A, P, — (A + P) sont alignés et A + P est le résiduel des points E et A + P.

T_A est donc également une transformation birationnelle de la cubique C en elle-même.

On démontre facilement les relations suivantes :

$S_A . S_B = T_{A-B}$ $\quad$ $S_A . T_B = S_{A-B}$ $\quad$ $T_A . S_B = S_{A+B}$

$T_A . T_B = T_{A+B} = T_B . T_A$

$T_A . (T_B . T_C) = T_{A+B+C} = (T_A . T_B) . T_C$

$T_F . T_A = T_A$ quelque soit le point d'inflexion F de C [2]

$T_A . T_{-A} = T_F$

Par conséquent :

THÉORÈME. *L'ensemble des transformations S_A et T_A où A parcourt C est un groupe G.*

THÉORÈME. *L'ensemble des transformations T_A où A parcourt C est un sous-groupe distingué du précédent.*

On remarquera, par contre, que l'ensemble de S_A n'est pas un sous-groupe de G.

THÉORÈME. *Une condition nécessaire et suffisante pour que S_X appartienne au centre du groupe G est que X soit le tangentiel de celui des points d'inflexion qui a servi à définir l'addition des points sur la cubique.*

---

1. Une cubique singulière étant unicursale est invariante dans ∞^3 transformations birationnelles qui sont bien connues.
2. Une loi de groupe ayant un seul élément neutre, si E et F sont deux points d'inflexion de la cubique, on a nécessairement $T_E = {}_F$.

En effet : $S_{A-B} = S_{A+B}$ implique $2B = E$ et réciproquement.

L'équation $P = A + P$ n'a pas de solution lorsque A est distinct de E. Lorsque A est en E tout point P est solution.

L'équation $P = A - P$ a pour solution les tangentiels de $-A$, par conséquent, elle a toujours des solutions.

THÉORÈME. *Une transformation S_A a toujours des points doubles. Ce sont les tangentiels du point $-A$.*

Une transformation T_A, distincte de la transformation identique ($A = E$), n'a pas de point double.

5,2. LES TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES DE C ET LES SÉRIES LINÉAIRES

Considérons une série linéaire g^1_2 sur C. Elle est extraite d'une g^1_{3n} obtenue en complétant la g^1_2 avec des points fixes.

Par conséquent si (P. Q) est un couple de points générique de la g^1_2 considéré, on a : $P + Q = A$, A étant une « constante » c'est-à-dire un point fixe de C.

Réciproquement, il est clair que les points P et Q de C qui satisfont à l'égalité : $P + Q = A$ varient dans une g^1_2 de C. Par conséquent :

THÉORÈME. *La droite, que joint un couple de points qui varie dans une g^1_2 de C, passe par un point fixe de C.*

En effet cette droite passe par le point $-A$. En particulier, une g^1_2 est entièrement déterminée par la connaissance de ses éléments doubles.

THÉORÈME. *Étant données deux séries linéaires g^1_2 et g'^1_2 sur C, il existe une transformation T et une transformation S qui transforme g^1_2 en g'^1_2.*

Supposons que g^1_2 (resp. g'^1_2) soit découpée sur C par les droites issues de R (resp. R′) il suffit de prendre :

$S = S_{R'+R}$ et $T = T_{R'-R}$

On sait, d'autre part, qu'une transformation birationnelle quelconque d'une courbe C en une courbe C′ transforme toute g^1_n de C en une g^1_n de C′.

Prenons le sommet (0, 1, 0) du triangle de référence en un point de cubique, la tangente en ce point étant le côté $Z = 0$. L'équation non homogène de la cubique s'écrit :

$$Y^2\varphi_1(X) + Y\varphi_2(X) + \varphi_3(X) = 0$$

Nous avons démontré que cette équation pouvait se réduire, *dans le cas où la caractéristique* p *est* > 2, à la forme :

$$Y^2 = \psi_3(X)$$

où ψ_3 est un polynome du troisième degré dont nous avons donné la forme. La cubique est alors rationnellement représentée sur la droite double $Y^2 = 0$, qui porte trois des quatre points du groupe Jacobien de la $g^1{}_2$.

Soit C une cubique non singulière, D la droite double sur laquelle elle peut être représentée rationnellement. Soit π une transformation birationnelle qui transforme C en une cubique non singulière C′ qui peut être représentée sur la droite double D′.

La transformation π induit d'une façon évidente une transformation de D en D′. Cette transformation est une homographie.

Une cubique non singulière, définie sur un corps de caractéristique $p = 2$ ne peut pas être représentée rationnellement sur une droite double : en effet, son équation pourrait s'écrire :

$$Y^2 = \psi_3(X)$$

Or, la classe d'une telle cubique est 1 : elle est donc singulière.

5,3,1. Cubiques birationnellement équivalentes définies sur un corps de caractéristique p > 3 (3).

Soit C une cubique non singulière définie sur un corps de caractéristique $p > 2$. Son équation peut se mettre sous la forme :

$$Y^2 = \psi_3(X)$$

La cubique C′ est la transformée de C par π. Il en existe un modèle projectif $\overline{C'}$ dont l'équation est de la même forme :

$$Y^2 = \overline{\psi_3}(X)$$

Considérons la $g^1{}_2$ découpée sur C par les parallèles à l'axe des Y : son image sur C′ et par conséquent sur $\overline{C'}$ est une certaine $g^1{}_2$. Il existe une transformation birationnelle de $\overline{C'}$ qui la transforme en la $g^1{}_2$ découpée sur $\overline{C'}$ par les parallèles à l'axe des Y.

Ces deux séries linéaires découpées par les parallèles aux Y sur les courbes C et $\overline{C'}$ étant confondues, ont même groupe jacobien, les deux polynomes ψ_3 et $\overline{\psi_3}$ ont donc les mêmes racines.

Réciproquement, soient deux cubiques non singulières C et C′ telles qu'une transformation homographique amène la seconde à avoir même équation que la première, il est clair qu'elles sont birationnellement équivalentes.

THÉORÈME. *Une condition nécessaire et suffisante pour que deux cubiques non singulières définies sur un corps de caractéristique* $p > 2$ *soient*

3. Tous les raisonnements de ce paragraphe sont valables pour des cubiques non singulières définies sur un corps caractéristique nulle.

birationnellement équivalentes et qu'elles soient projectivement équivalentes.

Cherchons donc à quelle condition deux cubiques non singulières...

5,3,1. Cubiques non singulières birationnellement équivalentes.

Considérons deux cubiques C et C′. Supposons qu'il existe une transformation birationnelle π qui transforme C en C′.

Supposons que (resp. C′) soit rapportée à un triangle de référence choisi de manière que l'équation de C (resp. C′) ait la forme canonique.

L'équation, non homogène, de C est donc :

$$XY(X + Y) + g_1XY + 1 = 0 \qquad \text{si } p = 2$$
$$Y^2 + X^3 + g_1X^2 + g_3X = 0 \qquad \text{si } p = 3$$
$$Y^2 + X^3 + g_2X + g_3 = 0 \qquad \text{si } p > 3$$

L'équation de C′ se déduit de l'équation correspondante de C en y remplaçant g_i par g'_i.

Considérons sur C la g^1_2 découpée par les parallèles à l'axe des Y.

Son groupe Jacobien est l'ensemble des points suivants :

$p = 2$: point à l'infini des Y $(1/g_1, 1/g_1)$

$p = 3$: point à l'infini des Y, points de l'axe des X d'abscisse racines du polynome : $X^3 + g_1X^2 + g_2X$

$p > 3$: point à l'infini des Y, points de l'axe des X d'abscisse racines du polynome : $X^3 + g_2X + g_3$.

Par conséquent, la connaissance du groupe Jacobien de cette g^1_2 entraîne la connaissance de chacun des coefficients de l'équation de la cubique.

L'image par π de cette g^1_2 de C est une g^1_2 de C′ dont on sait qu'on peut par une transformation birationnelle qui laisse C′ globalement invariante, la transformer en la g^1_2 découpée sur C′ par les parallèles à l'axe des Y du système d'axes par rapport auquel son équation est écrite.

De plus, le groupe Jacobien de la g^1_2 de C est transformé en le groupe Jacobien de la g^1_2 de C′.

5,3,1,1. La caractéristique p est > 2.

Nous avons vu que la cubique C était rationnellement équivalente à une droite double D et la cubique C′ à une droite double D′ et qu'à la transformation π était associée une homographie qui transformait D en D′ et le groupe Jacobien de C en celui de C′. Les deux cubiques C et C′ sont donc projectivement équivalentes.

La réciproque est évidente.

THÉORÈME. *Une condition nécessaire et suffisante pour que deux cubiques non singulières, définies sur un corps de caractéristique* $p \neq 2$, *soient birationnellement équivalentes et qu'elles soient projectivement équivalentes.*

5,3,1,2. La caractéristique p = 2

Nous avons remarqué que la cubique était entièrement déterminée par la donnée de deux points d'inflexion, des tangentes d'inflexion et du tangentiel de l'un d'entre eux.

La démonstration est alors la même que la précédente.

THÉORÈME. *Une condition nécessaire et suffisante pour que deux cubiques non singulières, définies sur un corps de caractéristique* p = 2, *soient birationnellement équivalentes et qu'elles soient projectivement équivalentes.*

BIBLIOGRAPHIE

1. Boughon (P.). Thèse, Paris, 1955. *Exemplaire polycopié.*

2. Boughon (P.), Nathan (J.), Samuel (P.). Courbes planes en caractéristique 2. *Bulletin de la Société Mathématique de France,* 83, 1955, p. 275 à 278.

3. Chewalley (C.). Introduction to the theory of Algebraic Functions of one variable. *Mathematical Surveys Number,* VI, New-York, 1951.

4. Enriques (F.) et Xhisini (O.). Courbes et fonctions algébriques d'une variable. Gauthier-Villars, Paris, 1926.

5. Salmon (G.). Traité de Géométrie analytique. Traduction O. Chemin. Gauthier-Villars, Paris, 1884.

6. Sample (J. G.) and Roth (L.). Introduction to the algebraic Geometry. Oxford Press, 1949.

7. Samuel (P.). Cours de Cornell. *Exemplaire polycopié,* 1952.

8. Samuel (P.). Singularités des variétés algébriques. *Bulletin de la Société Mathématique de France,* 1952.

9. Samuel (P.). Méthodes d'Algèbre abstraite en Géométrie algébrique. *Ergebnisse der Mathematik. Springer.* Berlin, 1955.

10. Severi (F.). Vorlesungen über Algebraische Geometrie. *Traduction de E. Loffler.* Teubner, Leipzig-Berlin, 1921.

11. Severi (F.). Trattato di Geometria Algebrica. Volume-Parte 1. *Geometria delle serie lineari.* Nicola Zanichelli, Bologna.

12. Walker (R.). Algebraic Curves. Princeton University Press, 1950.

13. Van der Warden (B. L.). Einführung in die Algebraische Geometrie. New-York, *Dover Publications,* 1945.