ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

P. BOUGHON

Propriétés différentielles des variétés algébriques définies sur un corps de caractéristiques $P > 0$

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série, tome 21 (1957), p. 185-253

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1957_4_21__185_0>

PROPRIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES DES VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES DÉFINIES SUR UN CORPS DE CARACTÉRISTIQUE P>0

par P. BOUGHON

RÉSUMÉ

On sait qu'il n'existe aucune surface (absolument irréductible) définie sur le corps des nombres complexes et qui admette ∞^3 sections planes décomposées.

On connaît également le théorème de KRONECKER-CASTELNUOVO (1) qui caractérise les surfaces admettant ∞^2 sections planes décomposées : ces sections planes sont celles des plans tangents à la surface qui est, soit une réglée non développable, soit une surface de Steiner.

La question de savoir si le théorème de KRONECKEN-CASTELNUOVO s'étendait aux surfaces définies sur un corps de caractéristique $p > 0$ m'a été posée par M. SAMUEL; elle est à l'origine du présent travail.

La démonstration, dans la cas de caractéristique nulle de ce théorème fait appel aux propriétés infinitésimales des surfaces et à la théorie des enveloppes.

Les énoncés les plus simples de ces théories sont faux lorsque la caractéristique du corps de définition n'est pas nulle :

Signalons, par exemple, l'existence de surfaces qui ne sont pas des cônes et dont tous les plans tangents passent par un même point, celles des surfaces ayant ∞^1 plans tangents et qui ne sont pas réglées, celles des surfaces ayant avec leur plan tangent générique un contact d'ordre > 2, etc...

Mais le phénomène le plus décevant est sans doute le divorce entre la notion d'élément caractéristique et celle d'enveloppe : il existe, par exemple, des surfaces qui ne sont pas lieu du point caractéristique de leur plan tangent et d'ailleurs toute famille de surfaces a une infinité d'enveloppes.

De tels phénomènes ne sont nullement le fait de surfaces exceptionnelles : leur origine algébrique est facile à déceler; c'est l'existence de polynomes non constants à dérivées nulles ou ce qui revient au même de l'inséparabilité.

(1) KRONECKER-CASTELNUOVO. Rendic. Acad. Lincei. 1894.

Le présent travail est un premier pas vers la construction d'une théorie infinitésimale des variétés définies sur un corps de caractéristique p quelconque.

Les propriétés démontrées dans les quatre premiers chapitres trouvent généralement leur utilité dans le chapitre V où l'on étudie les extensions possibles du théorème de Kronecker-Castelnuovo.

Chapitre I.

1° En généralisant une méthode utilisée par M. Dieudonné dans le cas d'un polynome à une variable, on établit une « Formule de Taylor » pour un polynome f à n variables appartenant à un anneau A[X] de caractéristique $p > 0$.

Ecrivons :

$$f(X_1 + Y_1, \ldots, X_n + Y_n) = \sum_{m=0}^{m=+\infty} \mathcal{Y}_m (X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n)$$

$$\mathcal{Y}_m (X, Y) = \sum_{a_1+\ldots+a_n=m} Y_1^{a_1} \ldots Y_n^{a_n} \frac{\Delta_m f(X_1, \ldots, X_n)}{\Delta X_1^{a_1} \ldots \Delta X_n^{a_n}}$$

Les $\dfrac{\Delta_m}{\Delta X_1^{a_1} \ldots \Delta X_n^{a_n}}$ sont des endomorphismes de A[X] qui s'étudient facilement (aux complications d'écriture près) et l'on montre qu'ils s'expriment au moyen des semi-dérivations partielles :

$$\frac{\Delta_{p^s}}{\Delta X_i^{p^s}} = \frac{D_s}{DX_i}$$

De façon plus précise l'on a :

$$\frac{\Delta a_i}{\Delta X_i^{a_i}} \frac{\Delta a_j}{\Delta X_j^{a_j}} = \frac{\Delta a_j}{\Delta X_j^{a_j}} \frac{\Delta a_i}{\Delta X_i^{a_i}} = \frac{\Delta a_i + a_j}{\Delta X_i^{a_i} \cdot \Delta X_j^{a_j}} \tag{1}$$

pour $i \neq j$

$$\frac{\Delta a_i}{\Delta X_i^{a_i}} \frac{\Delta b_i}{\Delta X_i^{b_i}} = \frac{\Delta b_i}{\Delta X_i^{b_i}} \frac{\Delta a_i}{\Delta X_i^{a_i}} = \binom{i+j}{i} \frac{\Delta a_i + b_i}{\Delta X_i^{a_i + b_i}} \tag{2}$$

$$\frac{\Delta a_i}{\Delta X_i^{a_i}} = \prod_{s_i=0}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha_{i,\, s_i})!} \left(\frac{Ds_i}{DX_i}\right)^{\alpha_{i,\, s_i}} \tag{3}$$

$\sum_{s_i=0}^{s_i=+\infty} \alpha_{i,\, s_i} p^{s_i}$ étant le développement p-adique de l'entier a_i.

Cette formule de Taylor est peu maniable (notamment lorsque $p = 2$), mais elle permet de construire des classes étendues d'hypersurfaces dont le plan tangent en un point générique a avec l'hypersurface un contact d'ordre ≥ 3.

2° On construit une formule de Taylor pour une *fonction algébrique* d'une variable.

Soit C^1 une variété absolument irréductible de dimension 1 de l'espace affine $A^n(\Omega)$ admettant k pour corps de définition : nous ne faisons, pour l'instant, aucune hypothèse sur la caractéristique p de k.

Soient $P = (x_1, \ldots, x_n) = (x)$ et $P' = (x'_1, \ldots, x'_n) = (x')$ deux points k-génériques, indépendants, de C^1.

$k(x)$ est une extension régulière de type fini de k. Son degré de transcendance est 1 : soit t une base de transcendance séparante de $k(x)$ sur k telle en outre que $k[x]$ soit entier sur $k[t]$.

Soit β le k-isomorphisme de $k(x)$ dans Ω défini par $x_i \to x'_i$. $(1 < i < n)$. Nous écrirons d'une façon générale $\beta(u) = u'$.

Soit y un élément de l'anneau local $\sigma_{k(P)}(P', C^1)$.

Immergeons $\sigma_{k(P)}(P', C^1)$ dans $k(P)((t' - t))$ et soit :

$$y' - y = \sum_{1}^{+\infty} \Delta^j(y)\,(t' - t)^j \tag{4}$$

le développement en série formelle de $y' - y$.

L'étude des Δ^j_t est beaucoup moins simple que celle de leurs homologues dans le cas d'un polynome.

Mais leurs propriétés formelles sont essentiellement les mêmes.

On notera les deux relations :

$$\Delta^i_t \cdot \Delta^j_t = \binom{i+j}{i} \Delta_t^{i+j} \tag{5}$$

$$\Delta_t^m = \prod_{h=0}^{h=+\infty} \frac{1}{(m_h\,!)} (D_h)^{m_h} \tag{6}$$

$\left(\text{où } \sum m_h\, p^h \text{ est le développement } p\text{-adique de l'entier } m \text{ et } D_h = \Delta_t^{p^h}\right)$

$D_o = \Delta^1_t$ est la dérivation de $k(x)$ dans Ω qui prend la valeur 1 en t. La relation 1 montre en particulier que l'on peut calculer tous les Δ^m_t « par dérivation » dès que l'on connaît les D_h.

L'étude des lacunes possibles de la série (4) permet de démontrer que l'ordre de contact d'une hypersurface avec son plan tangent générique est :

$$\left.\begin{array}{l}\text{soit } 2\\ \text{soit une puissance de } p\end{array}\right\} \quad \text{lorsque } p \geq 3.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{soit } 2\\ \text{soit une puissance de } 4.\end{array}\right\} \quad \text{lorsque } p = 2.$$

ce qui est un résultat essentiel pour la suite.

Chapitre II.

La théorie des dérivations dans un corps est bien connue.

Mais en définissant une dérivation comme étant un endomorphisme de la structure additive satisfaisant à la relation :

$$D(yz) = D(y).z + y.D(z)$$

on a supprimé le « passage à la limite ».

Or le problème de spécialisation des cycles, résolu dans le cas de dimension 0 par A. Weil et dans le cas général par P. Samuel, est un problème de passage à la limite et la définition purement opérationnelle de la dérivation est inadaptée à son étude.

Le chapitre II est consacré à relier la notion de dérivation et celle de spécialisation.

Soit k un corps de caractéristique p, *quelconque*, $k(x_1,\ldots,x_n) = k(x)$ une extension régulière de type fini de k.

Soit $(t_1,\ldots, t_d) = (t)$ une base de transcendance séparante de $k(x)$ sur k, telle en outre, que $k[x]$ soit entier sur $k[t]$.

Soit Ω un domaine universel pour k, donc aussi pour $k(x)$.

Soit α un k-isomorphisme de $k(x)$ dans Ω satisfaisant aux conditions suivantes :

$\alpha(t_d) = t'_d$, $t' \varepsilon \Omega$, étant transcendant sur $k(x)$.

$\alpha(t_i) = t_i$, $(i \neq d)$

Nous écrirons d'une façon générale : $\alpha(u) = u'$.

On démontre qu'il existe une place φ de $k(x, x')$ prolongeant la $k(t_1,\ldots, t_{d-1})$-spécialisation $t'_d \to t_d$ telle que $\varphi(y) = y$ et $\varphi(y') = y$ quel que soit $y \varepsilon k(x)$.

Soit alors β l'application k-linéaire de $k[x]$ dans $k(x, x')$ définie par :

$$\beta(y) = \frac{y' - y}{t'_d - t_d}$$

Le résultat fondamental est que $\varphi o \beta$ est la dérivation D_{t_d} de $k(x)$ dans Ω qui prend la valeur 1 en t_d et la valeur 0 en t_j $(j \neq d)$.

Ce résultat peut se généraliser de la façon suivante :

Étant donné une place φ, discrète, de rang 1 de $k(x, x')$, on peut lui associer une dérivation D (également définie comme limite).

Dans un ordre d'idée voisin, à une place φ discrète de rang 1, il est possible d'associer une variété algébroïde de dimension 1, dont les équations constituent une « représentation paramétrique de la place φ » et l'on peut donner un sens précis à la phrase :

« y est la limite de y' lorsque $P' = (x')$ tend vers $P = (x)$ sur une variété de dimension 1. »

Les résultats précédents permettent de définir une dérivée (valeur prise par une dérivation en un point) comme « limite ».

Le reste de ce chapitre est consacré à définir des opérateurs Δ^{j}_{t} qui interviennent dans la formule de Taylor pour une fonction d'une variable et aux valeurs qu'ils prennent comme limite de certains quotients.

On retrouve ainsi des relations bien connues en caractéristique nulle telles que, par exemple, les suivantes :

$$
\begin{array}{lll}
(t' - t) & \to (t', t^0) & \to (t^0, t^0) \\[2ex]
\dfrac{y' - y - \sum\limits_{j=1}^{j=q-1} \Delta_t^j(y)(t'-t)^j}{(t'-t)^q} & \to \dfrac{y' - y_0}{(t'-t_0)^q} & \to \Delta_t^q(y^0) \\[4ex]
\dfrac{y' - y - \sum\limits_{j=1}^{j=q-1} \Delta_t^j(y)(t'-t)^j}{(t'-t)^q} & \to \Delta_t^q(y) & \to \Delta_t^q(y^0) \\[2ex]
(t', t) & \to (t, t) & \to (t^0, t^0)
\end{array}
$$

Chapitre III.

On commence par donner une définition précise de ce que l'on appelle « famille de diviseurs dépendant d'un ou plusieurs paramètres ».

Puis on définit et étudie dans le cas d'un paramètre la notion de cycle caractéristique d'un diviseur générique et d'un diviseur particulier.

Certaines difficultés bien connues sont faciles à éviter, telles par exemple la présence d'éléments « stationnaires ou certaines indétermination dues à la présence de composante excédentaire, et ceci quelle que soit la caractéristique.

Les résultats du chapitre II permettent de démontrer, quelle que soit la caractéristique p, les principaux résultats classiques en caractéristique $p = 0$.

En particulier, le cycle caractéristique d'une hypersurface générique est, moyennant certaines précautions, cycle intersection de l'hypersurface générique d'équation $f = 0$ et du diviseur d'équation $Df = 0$, D étant une dérivation convenablement choisie.

La caractéristique intervient donc peu ici, et c'est assez naturel, puisqu'il s'agit en somme d'un problème d'intersection.

On doit cependant signaler en caractéristique $p > 0$, une singularité directement liée à la forme des développements Tayloriens en ce cas.

Le cycle caractéristique d'un diviseur particulier peut n'être pas spécialisation du cycle caractéristique du diviseur générique.

On donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une telle singularité n'ait pas lieu.

Dans le cas d'une famille de diviseurs dépendant de plusieurs paramètres, on définit un cycle φ-caractéristique (de dimension $n-2$, si n est la dimension de l'espace) associée à une place φ discrète et de rang 1, puis un cycle caractéristique (de dimension 0).

Les deux résultats fondamentaux sont :

d'une part : le support du cycle caractéristique est contenu dans le support de tout cycle φ-caractéristique.

d'autre part : le cycle φ-caractéristique appartient à un système linéaire ayant pour dimension la dimension de la famille de diviseurs.

Chapitre IV.

La théorie des enveloppes qui est étudiée dans ce chapitre est très différente en caractéristique $p > 0$ de la théorie classique.

Une famille de diviseurs dépendant d'un paramètre ou une famille de diviseurs de dimension d, dépendant de d paramètres ont une infinité d'enveloppes (sans que l'on puisse dire en général que l'une d'elles est privilégiée par rapport aux autres).

On donne un procédé permettant de les déterminer toutes.

Certaines difficultés qui, en caractéristique 0, ne se produisent qu'en des points isolés (annulation d'un déterminant fonctionnel par exemple) peuvent et dans des cas simples et importants se présenter partout lorsque la caractéristique p est > 0.

On donne une méthode permettant de les éviter.

Il n'y a en général aucun rapport entre le cycle caractéristique d'un diviseur et le cycle de contact de ce diviseur avec l'une quelconque de ses enveloppes : ils peuvent être confondus, il peuvent être distincts, il peut se faire également qu'il appartienne au cycle intersection du diviseur avec l'une de ses enveloppes sans être le cycle de contact.

Chapitre V.

On étudie la variété (absolument irréductible) de $P^m(\Omega)$ définie sur un corps de caractéristique $p \neq 2$ et admettant ∞^d $(d > 2)$ sections hyperplanes irréductibles.

Les démonstrations font intervenir tous les résultats des chapitres précédents.

On dira que l'hypersurface absolument irréductible U^{m-1} de $P^m(\Omega)$ satisfait à l'hypothèse $\mathcal{R}$ (relativement à une V^d famille d'hyperplans), lorsque :

a) U^{m-1} n'est pas réglée (c.-à-d. n'est pas réunion de droites).

b) H^{m-1} étant un hyperplan générique de la V^d famille, le cycle $C = U^{m-1} \cdot H^{m-1}$ n'est pas irréductible.

On étudie tout d'abord les surfaces de $P^3(\Omega)$ satisfaisant à l'hypothèse $\mathcal{R}$ et l'on montre que le théorème de Kronecker-Castelnuovo est vrai sous la seule hypothèse que la caractéristique p soit différente de 2.

Dans le cas $p = 2$, nous n'avons pu, ni démontrer le théorème ni construire un contre exemple.

Puis on étudie les variétés de $P^m(\Omega)$ qui satisfont à l'hypothèse $\mathcal{R}$ (toujours dans le cas où p est différent de 2).

On obtient alors les résultats suivants :

Soit, dans $P^m(\Omega)$ une variété U^u de dimension $u \geq 3$. Une famille $\mathcal{F}$ d'hyperplans dont l'élément générique H_p^{m-1} est tel que le cycle $U^u . H^{m-1}$ ne soit pas irréductible, est nécessairement de dimension $d \leq m - 2$.

Par conséquent, la situation décrite par le théorème de Kronecker-Castelnuovo ne se généralise pas à des variétés de dimension > 2.

On étudie donc le cas des surfaces de $P^m(\Omega)$ qui satisfait à l'hypothèse $\mathcal{R}$ soit A′ son anneau de coordonnées homogènes.

Il existe une surface de Steiner dont l'anneau de coordonnées A possède la propriété :

$$A \subset A' \subset B$$

Soit U^2 une surface non réglée de l'espace $P^m(\Omega)$ définie sur un corps de caractéristique $p \neq 2$.

La dimension d'une V^d famille d'hyperplans d'élément générique H_p^{m-1}, telle que le cycle $U^2 . H^{m-1}$ soit décomposé lorsque $m \geq 6$, est, nécessairement $\leq m - 2$.

Par conséquent, il suffit d'étudier la situation dans les trois espaces : $P^5(\Omega)$, $P^4(\Omega)$, $P^3(\Omega)$.

Dans l'espace $P^5(\Omega)$, le cycle intersection de la variété de Véronèse de représentation paramétrique :

$$\begin{array}{lll} Y_0 = \beta\gamma, & Y_1 = \gamma\alpha, & Y_2 = \alpha\beta, \\ Y_3 = \alpha^2, & Y_4 = \beta^2, & Y_5 = \gamma^2 \end{array}$$

par l'hyperplan générique de la famille :

$$\sum_{i=0}^{i=5} x_i Y_i = 0, \quad 4 (X_0^2 X_3 + X_1^2 X_4 + X_2^2 X_5) - 16 X_0 X_1 X_2 + X_3 X_4 X_5 = 0$$

est décomposé.

Soit U^2 la surface de $P^3(\Omega)$ dont une représentation paramétrique est :

$$Y_0 = \beta\gamma, \quad Y_1 = \alpha\gamma, \quad Y_2 = \alpha\beta, \quad Y_3 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, \quad Y_4 = \lambda\alpha^2 + \mu\beta^2 + \nu\gamma^2$$
$$\lambda \varepsilon k, \quad \mu \varepsilon k, \quad \nu \varepsilon k \qquad \lambda, \mu, \nu, \text{ non tous égaux.}$$

Il existe une V^3 famille d'hyperplans d'élément générique H_p^3 tel que : le cycle $U^2 . H_p^3$ soit décomposé.

Toute surface non réglée de $P^4(\Omega)$ définie sur un corps de caractéristique $p \neq 2$, possédant la même propriété admet une représentation paramétrique de cette forme.

Il m'est difficile de dire tout ce que ce travail doit à Monsieur Samuel, à son inlassable patience, à son amitié. Sans lui rien n'aurait pu se faire. Qu'il me soit également permis de dire toute ma gratitude à Monsieur Dubreil dont les conseils m'ont été si précieux, à M. Favard qui a bien voulu accepter de présider mon jury, à M. Cartan et à M. Delange, qui ont choisi le second sujet et m'ont aidé à le préparer.

Paris, juin 1955.

CHAPITRE PREMIER

MULTIPLICITÉ DU POINT DE CONTACT D'UNE HYPERSURFACE AVEC SON HYPERPLAN TANGENT EN UN POINT GÉNÉRIQUE

1. — FORMULE DE TAYLOR POUR UN POLYNOME A PLUSIEURS INDÉTERMINÉES SUR UN ANNEAU DE CARACTÉRISTIQUE $p > 0$

Soit A un anneau unitaire, intègre, de caractéristique $p > 0$ et $A[X_1, \ldots, X_n] = A[X]$ l'anneau des polygones à n indéterminées sur A.

Considérons n nouvelles indéterminées sur A, algébriquement indépendantes des X_i, que nous noterons $Y_1, \ldots, Y_n$.

Soit $f \varepsilon A[X]$. On peut écrire :

$$(X_1+Y_1, \ldots, X_n+Y_n) = f(X+Y) = \sum_{0}^{+\infty} \mathcal{Y}_m(X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n) = \sum_{0}^{+\infty} \mathcal{Y}_m(X, Y)$$

$\mathcal{Y}_m$, élément de $A[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n] = A[X, Y]$, étant l'ensemble des de degré (total) m, par rapport aux $\mathcal{Y}_n$.

$$\text{Posons ; } \mathcal{Y}_m(X, Y) = \sum_{a_1+\ldots+a_n=m} Y_1^{a_1} \ldots\ldots Y_1^{a_n} \frac{\Delta_m f(X_1, \ldots, X_n)}{\Delta X_1^{a_1} \ldots\ldots \Delta X_n^{a_n}}$$

THÉORÈME 1. $\dfrac{\Delta_m}{\Delta X_1^{a_1} \ldots \Delta X_n^{a_n}}$ *est un endomorphisme de la structure additive de* A [X].

La vérification est immédiate.

THÉORÈME 2. *L'endomorphisme* $\dfrac{\Delta_{a_i}}{\Delta X_i^{a_i}}$ *est une application* $A[X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots X_n]$ *linéaire de* $A[X_1, \ldots\ldots, \hat{X}^i, \ldots\ldots X_n]$ $[X^i]$ (1) *dans lui-même.*

Considérons le monome : $M = X_1^{b_1} \ldots X_n^{b}$.

Par définition, $\dfrac{\Delta a_i(M)}{\Delta X_i^{a_i}}$ est le coefficient de $Y_i^{a_i}$ dans le développement de : $(X_1 + Y_1)^{b_1} \ldots (X_i + Y_i)^{b_i} \ldots (X_n + Y_n)^{b_n}$.

C'est évidemment le même que le coefficient de $Y_i^{a_i}$ dans le développement de :

$$X_1^{b_1} \ldots (X_i + Y_i)^{b_i} \ldots X_n^{b_n}.$$

(1) $A[X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots\ldots X_n] = A[X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots\ldots, X_n]$

THÉORÈME 3. *Quels que soient les indices i et j, $i \neq j$,* on a :

$$\frac{\Delta a_i}{\Delta X_i^{a_i}} \frac{\Delta a_j}{\Delta X_j^{a_j}} = \frac{\Delta a_i + a_j}{\Delta X_i^{a_i + a_j}}$$

Il suffit d'après ce qui précède de considérer le développement du monome :

$$X_1^{b_1} \dots (X_i + Y_i)^{b_i} \dots (X_j + Y_j)^{b_j} \dots (X_n + Y_n)^{b_n}.$$

Par contre la relation :

$$\frac{\Delta a_i}{\Delta X_i^{a_i}} \frac{\Delta a'_i}{\Delta X_i^{a'_i}} = \frac{\Delta a_i + a'_i}{\Delta X_i^{a_i + a'_i}}$$

est en général *inexacte,* comme le montre l'exemple du développement de $(X_i + Y_i)^p$.

Considérons plus particulièrement les endomorphismes :

$$\frac{\Delta p^f}{\Delta X_i^{pf}} = \frac{D_f}{X_i}$$

Le théorème 3 montre que l'on peut se borner au cas d'une seule indéterminée. On notera cette indéterminée X sans indice, et l'on écrira $\frac{D_f}{DX^{p^f}} = D_f$ lorsque aucune confusion ne sera possible.

THÉORÈME 4. *Les endomorphismes* $\frac{D_f}{DX_i^{p^f}}$ *sont des semi-dérivations partielles de hauteur f* (2).

Il suffit de montrer que la restriction de D_f au sous anneau $A\left[X^{p^f}\right]$ est une dérivation.

Or $D_f(X^{m p^f})$ est le coefficient de Y^{p^f} dans le développement de

$$(X + Y)^{mp^f} = (X^{p^f} + Y^{p^f})^m.$$

Par conséquent :

LEMME 1. $D_f(X^{mp^f}) = mX^{(m-1)p^f}$ $(m \varepsilon Z_+)$

En particulier $D_f(X^{p^f}) = 1$

LEMME 2. *Etant donné un monome* $M \subset A[X]$, *la relation* $D_f = 0$ *implique*

$$d^0(M) < p^f \text{ ou } p^{f-1} < d^0(M)$$

THÉORÈME 5. *Quels que soient* $g \varepsilon A[X]$ et $h \varepsilon A\left[X^{p^f}\right]$

$$D_f(.h) = D_f(g).h + g.D_f(h)$$

2. DIEUDONNÉ. Les semi-dérivations dans les extensions radicielles. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 227, pp. 1319-1320, Séance du 20 décembre 1948.

Ce théorème est une conséquence immédiate de la remarque précédente (3). Il permet un calcul relativement simple de $D_f(g)$.

Dans toute la suite de ce paragraphe nous désignerons par $\binom{b}{a}$ le coefficient du monome $X^{b-a}Y^a$ dans le développement de $(X+Y)^b$, et nous écrirons :

$$m_i = \sum_{o}^{+\infty} \rho^{i,s_i} p^{s_i} \quad \text{le développement } p\text{-adique de l'entier } r_i.$$

Théorème 6.

$$\frac{\Delta_{a_i}}{\Delta X_i^{a_i}} = \prod_{s_i=0}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha_{i,}\, s_i)\,!} \left(\frac{Ds_i}{DX_i}\right)^{\alpha_{i,}\, s_i}$$

La démonstration de ce théorème repose sur plusieurs lemmes :

Lemme 1
$$(X+Y)^b = \sum_{a=0}^{a=b} \left[X^{b-a}.\, Y^a \prod_{s=0}^{+\infty} \binom{\beta_s}{\alpha_s}\right]$$

Il suffit d'écrire :

$$(X+Y)^b = \prod_{s=0}^{+\infty} (X^{p^s} + Y^{p^s})^{\beta_s}$$

On remarquera que (4) :

$$\prod_{s=0}^{+\infty} \binom{\beta_s}{\alpha_s} = \frac{b\,!}{a\,!\,(b-a)\,!} \pmod{p}$$

Lemme 2.
$$\left[\prod_{s=0}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha_s)\,!} \left(\frac{D_s}{DX}\right)^{\alpha_s}\right] (X^b) = X^{b-a}.\ \prod_{s=0}^{+\infty} \binom{\beta_s}{\alpha_s}$$

En effet : $X^b = X^{\sum_{s=0}^{+\infty} \beta_s .\, p^s}$ et :

$$\left[\prod_{s=0}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha_s)\,!} \left(\frac{D_s}{DX}\right)^{\alpha_s}\right] (X^{\Sigma \beta_q . p^q}) = \prod_{s=0}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha_s)\,!} \left[\left(\frac{D_s}{DX}\right)^{\alpha_s} X^{\beta_s p^s}\right]$$

(3) Dieudonné. Arckiv der Mathématik, Band 2 1949-50, Heft 5.
(4) E. Lucas. Théorie des nombres. Paris 1891, p. 149.

On peut grouper ces différents résultats et écrire :

THÉORÈME 7.

$$\frac{\Delta_m}{\Delta X_1^{a_1} \ldots \Delta X_n^{a_n}} = \prod_{i=1}^{n} \left[\prod_{s=0}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha_{i,} s_i)\,!} \left(\frac{Ds_i}{DX_i} \right)^{\alpha_{i,} s_i} \right]$$

REMARQUES. Il résulte immédiatement de ce qui précède que, pour $a_i < p$.

$$\frac{\Delta_{ai}}{\Delta X_i^{a_i}} = \frac{\partial^{a_i}}{\partial X_i^{a_i}}$$

et qu'en particulier, quel que soit $p > 0$

$$\frac{\Delta_1}{\Delta X_i^1} = \frac{\partial}{\partial X_i}$$

2. — APPLICATIONS ALGÉBRIQUES

Détermination des polynomes homogènes tels que $\mathcal{Y}_2 = 0$

THÉORÈME 1. *Les polynomes homogènes $f \varepsilon A[X]$ tels que $\mathcal{Y}_2 = 0$ sont :*

1° *lorsque $p > 3$: les polynomes de degré nul*
les polynomes de premier degré
les polynomes éléments de $A[X^p]$.
les polynomes de la forme $\Sigma X_i.U_i (X^p)$
les U_i étant des éléments arbitraires de $A[X]$.

2° *lorsque $p = 2$: les polynomes constants*
les polynomes du premier degré
les polynomes éléments de $A[X^2]$.
les polynomes de la forme $\Sigma X_i.U_i (X^4)$
les U_i étant des éléments arbitraires de $A[X]$.

LEMME 1. *Une condition nécessaire et suffisante pour que $\frac{\Delta_m (f)}{\Delta X_1^{a_1}..\Delta X_n^{a_n}} = 0$ est que quel que soit le monome de M de f, on ait :*

$$\frac{\Delta_m (M)}{\Delta X_1^{a_1} \ldots \Delta X_n^{a_n}} = 0$$

Il suffit de raisonner sur le multi-degré de M.
Pour démontrer le théorème 1, distinguons deux cas :

1° $p \geq 3$. Tous les a_i sont ≤ 2 $\quad a_i = \alpha_{i\,0}$ et :

$$\frac{\Delta_2}{\Delta X_1^{a_1} \ldots \Delta X_n^{a_n}} = \prod_{i=1}^{i=n} \frac{1}{(a_i)\,!} \left(\frac{\Delta_1}{X_i}\right)^{a_i} = \prod_{i=1}^{i=n} \frac{1}{(a_i)\,!} \frac{\partial^{a_i}}{\partial X_i^{a_i}}$$

Les polynomes cherchés sont donc ceux dont toutes les dérivées partielles secondes sont nulles.

Ceux qui sont énumérés dans l'énoncé du théorème 1 répondent à cette condition, montrons que ce sont les seuls.

Considérons donc un monome : $M = X_1^{b_1} \ldots\ldots X_n^{b_n}$ d'un polynome n'appartenant pas à l'une des catégories citées.

Il existe alors un indice i tel que : $b_i \neq 0$ (mod. p) et $b_i \neq 1$ (mod. p)

$$\frac{\partial^2 M}{\partial X_i^2} = \beta_{0,i}.\,(\beta_{0,i} - 1).\, X_i^{b_i - 2}.\, (X_1^{b_1} \ldots \widehat{X_i^{b_i}} \,..\, X_n^{b_n}) \qquad (5)$$

qui n'est pas nulle (5).

2° $p = 2$. La situation n'est pas la même parce que :

$$\frac{\Delta_2}{\Delta X_1^{a} \ \ldots \ \Delta X_n^{a_n}} = \begin{cases} \dfrac{\Delta_1}{\Delta X_i} \dfrac{\Delta_1}{\Delta X_j} & i \neq j \\ \dfrac{\Delta_2}{\Delta X_i^2} & i = j \end{cases}$$

Les polynomes énumérés dans l'énoncé répondent à la question, montrons que ce sont les seuls :

Considérons un monome $M = X_1^{b_1} \,..\, X_n^{b_n}$ d'un polynome n'appartenant pas à une des catégories citées.

Il existe alors un indice i tel que : $b_i \neq 0$ (mod. 2) et $b_i \neq 1$ (mod. 2)

$$\text{Donc : } b_i = 1 + 2 + \gamma.\, 2^2 \ \text{ et } \frac{\Delta_2 X_i^{b_i}}{\Delta X_i^2} = 1$$

Ecartons les cas sans intérêt au point de vue géométrique où le degré du polynome est $\leq p$ et considérons les polynomes de la forme :

$$f(X) = \Sigma\, X_i.U_i(X^p) \ \ (p > 3) \ \text{ et } \ f(X) = \Sigma\, X_i.U_i\,(X^{p2}) \ \ (p = 2)$$

Soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble de ces polynomes.

THÉORÈME 2. *Le premier des* $\mathcal{Y}_m$ $(m > 1)$ *non nul dans le développement du polynome* $f(X + Y)$ *où* $f \varepsilon \mathfrak{M}$ *a pour indice une puissance de* p *lorsque* $p > 3$, *une puissance de* p^2 *lorsque* $p = 2$.

1° $p > 3$. Il suffit de considérer le monome $X_i (X_1^{b_1} \ldots X_n^{b_n})^p$ et le développement de :

$$(X_i + Y_i)\,(X_1 + Y_1)^{b_1} \ldots (X_i + Y_i)^{b_i} \ldots (X_n + Y_n)^{p^f}$$
$$(X_i + Y_i)\,(X_1^{p^f} + Y_1^{p^f})^{b_i} \ldots (X_i^{p^f} + Y_i^{p^f})^{\,b_i} \ldots (X_n^{p^f} + Y_n^{p^f})^{\,b_n})^{b_n}$$

(5) Le signe $\wedge$ figurant sur l'indéterminée X_i signifie qu'il faut la remplacer par 1.

2° $p = 2$. Un raisonnement analogue conduit immédiatement au résultat.

2° *Détermination des polynomes non homogènes tels que :* $\mathcal{Y}_2 = 0$.

THÉORÈME 3. *Soit* $f \varepsilon A[X]$ *un polynome non nécessairement homogène.*

Soit $f = \Sigma f_m$ *sa décomposition en polynomes homogènes* f_m *de degré m. Une condition nécessaire et suffisante pour que* $\mathcal{Y}_2(f) = 0$ *est que :* $f_m \varepsilon \mathfrak{M}$, *quel que soit* $m > 0$.

La condition est évidemment suffisante.

Supposons qu'il existe un f_m tel que $\mathcal{Y}_2(f_m) \neq 0$.

Le degré de $\mathcal{Y}_2(f_m)$ est $m - 2$ et c'est le seul terme de degré $m - 2$ du polynome $\mathcal{Y}_2(f)$.

Celui-ci ne serait donc pas nul.

Nous désignerons par (C) l'ensemble de ces polynomes.

3. — PREMIÈRES APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES

Soit k un corps de caractéristique $p \geqslant 0$, Ω un domaine universel pour k, $A^n(\Omega)$ un espèce affine à n dimensions dans lequel seront plongées toutes les variétés que l'on étudiera (6).

Soit H une hypersurface de A^n, admettant k pour corps de définition, de degrés $s > 2$, d'équation $f(X) = 0$.

Soit (x) un point générique de H et soit L^{n-1} l'hyperplan tangent à H en (x).

Nous allons étudier l'intersection de H avec une droite passant par (x).

ρ étant transcendant sur $k(X, Y)$, considérons l'expression :

$$f(X_1 + \rho.Y_1,\ldots,X^n + \rho.Y_n) = f(X + \rho.Y) = \sum_{m=0} \rho^m.\mathcal{Y}_m(X, Y) \quad (6)$$

Dans l'expression (1), remplaçons (X) par (x) : $\mathcal{Y}_0(x, Y) = f(x) = 0$.

Considérons une copie A'^n de A^n dans laquelle les fonctions coordonnées sont les Y_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$:

$\mathcal{Y}_1(x, Y) = 0$ est l'équation d'une variété linéaire L'^{n-1}. (Si l'on identifie A^n et A'^n c'est la parallèle à L^{n-1} menée par l'origine).

Soit (y) un point générique de L'^{n-1}.

Lemme 1. Une condition nécessaire et suffisante pour que la multiplicité du point (x) *dans le cyle* $H.L^{n-1}$ *soit* > 2 *est que :* $\mathcal{Y}_2(x, y) = 0$.

---

(6) La terminologie et les notations sont celles de : P. Samuel, Méthodes d'Algèbre abstraite en Géométrie Algébrique, Ergebnisse der Mathematik, 1955.

Une condition suffisante pour que $\mathcal{Y}_2(x, y) = 0$ est évidemment que $\mathcal{Y}_2 = 0$.

En particulier, *la multiplicité $n(P, H.L^{n-1})$ du point générique P de l'hypersurface H d'équation $f = 0$, dans le cycle $H.L^{n-1}$ est de > 2 lorsque $f \varepsilon C$.*

Il est alors immédiat que $n(P, H.L^{n-1})$ est alors une puissance de la caractéristique p.

Mais la condition $\mathcal{Y}_2 = 0$ n'est pas nécessaire : Considérons par exemple dans $A_2((\Omega)$ la courbe d'équation (7) :

$$f(X) = X_1^2 + X_2^p = 0$$

$$\text{et} : \mathcal{Y}_0(X, Y) = X \ + X \ , \mathcal{Y}_1(X,Y) = 2X_1Y_1, \mathcal{Y}_2(X, Y) = Y$$

Une équation de L'^1 est donc $Y_1 = 0$ et $\mathcal{Y}_2(x, y) = 0$ bien que $\mathcal{Y}_2$ ne soit pas nul.

Le paragraphe suivant a pour objet de généraliser le résultat trouvé lorsque $f \varepsilon C$ et de montrer que, dans tous les cas, $m(P, H.L^{n-1})$ est égal soit à 2 soit à une puissance de p.

4. — FORMULE DE TAYLOR POUR UNE FONCTION ALGÉBRIQUE D'UNE VARIABLE

1° Soit C^1 une variété absolument irréductible de dimension 1 de l'es pace affine $A^n(\Omega)$ admettant k pour corps de définition : nous ne faisons pour l'instant aucune hypothèse sur la caractéristique p de k.

Soient $P = (x_1, \ldots, x_n) = (x)$ et $P' = (x'_1, \ldots, x'_n) = (x')$ deux points k-génériques, indépendants, de C^1.

$k(x)$ est une extension régulière de type fini de k. Son degré de transcendance est 1 soit : t une base de transcendance séparante de $k(x)$ sur k telle en outre que $k[x]$ soit entier sur $k[t]$. .

Soit β le k-isomorphisme de $k(x)$ dans Ω défini par $x_i \rightarrow x_i'$ $(1 < i < n)$. Nou sécrirons d'une façon générale $\beta(u) = u'$.

Considérons l'anneau local $\sigma_{k(P)}(P', C^1)$: c'est l'anneau d'une valuation v discrète et de rang 1. Soit φ la place de $k(P, P')$ associée à v : elle prolonge la $k(P)$-spécialisation $P' \rightarrow P$. Une uniformisante locale de $\sigma_{k(P)}(P', C^1)$ est de la forme $t' - t$ (8).

Immergeons $\sigma_{k(P)}(P', C^1)$ dans $k(x)$ $((t' - t))$ et soit, pour un élément $y \varepsilon \sigma_k(P, C^1)$:

$$y' - y = \sum_{1}^{+\infty} a_j (t' - t)^j \tag{1}$$

le développement en série formelle de $y' - y$.

---

(7) On remarquera que la tangente au point générique (x_1, x_2) de cette courbe a pour équation $Y_1 - y_1 = 0$. Elle est parallèle à l'axe $X_1 = 0$.

(8) P étant simple sur C^1, l'une au moins des différences $x'_i - x_i$ $(1 < i < n)$ est d'ordre 1 pour v.

Les a_j sont dans $k(x)$ et en posant $a_0 = y$, on a

$$y' = \sum_{0}^{+\infty} a_j(x).(t'-t)^j \tag{2}$$

Les a_j sont déterminés par la seule donnée le y. En effet considérons un troisième point générique $P'' = (x'')$ de C^1 indépendant de P et P'. Puisqu'ils sont indépendants de P, P' et P'' sont génériques de C^1 sur $k(x)$: il existe donc un $k(x)$-isomorphisme de $k(x')$ sur $k(x'')$ et par conséquent, en désignant par y'' (resp. t'') l'image de y' (resp. t') dans cet isomorphisme :

$$y'' = \sum_{0}^{+\infty} a_j(x)(t''-t')^j$$

Nous désignerons par Δ^j l'application k-linéaire de $k(x)$ dans lui-même telle que :

$$\Delta^j(y) = a_j \qquad (0 \leq j) \tag{3}$$

2° Soit $D_{t'}$ la k-dérivation de $k(x')$ dans Ω qui prend la valeur 1 en t'. Elle se prolonge en une $k(x)$-dérivation de $k(x, x')$ puisque les corps $k(x)$ et $k(x')$ sont linéairement disjoints sur k. Nous noterons encore $D_{t'}$ cette $k(x)$-dérivation : elle est définie par les relations :

$$\begin{cases} D_{t'}(t') = 1 & (4) \\ D_{t'}(t) = 0 & (5) \end{cases}$$

En effet $k(x)$ est séparable sur $k(t)$, donc, quel que soit $y \varepsilon k(x)$ la relation (5) implique $D_{t'}(y) = 0$.

Soit $D_{t'-t}$ la $k(x)$-dérivation de $k(x, x')$ définie par :

$$\begin{cases} D_{t'-t}(t'-t) = 1 & (6) \\ D_{t'-t}(\ t\ ) = 0 & (7) \end{cases}$$

$D_{t'-t}(t'-t) = D_{t'-t}(t') - D_{t'-t}(t) = D_{t'-t}(t')$. Par conséquent elle est aussi définie par :

$$\begin{cases} D_{t'-t}(t') = 1 & (4') \\ D_{t'-t}(t) = 0 & (5') \end{cases}$$

La comparaison de (4') et (5') avec (4) et (5) montre que :

LEMME 1. *Les deux $k(x)$-dérivations $D_{t'-t}$ et $D_{t'}$ coïncident dans $k(x, x')$.*

Cette $k(x)$-dérivation se prolonge d'une unique façon à l'anneau de séries formelles $k(x)((t'-t))$

On notera encore ce prolongement $D_{t'-t}$ ou $D_{t'}$. (9)

3° Etudions l'application k-linéaire Δ_j de $\sigma_k(x, C^1)$ dans $k(x)$.

(9) N. BOURBAKI, Algèbre chap. IV § 10 n° 5. Actualités scientifiques et industrielles n° 1103 Hermann. Paris.

En développant $t'^{q+j} - t^{q+j}$ suivant les puissances de $t' - t$, on trouve que :

$$\begin{aligned} &\Delta^j\, t^m = 0 && \text{pour } m < j \\ &\Delta^j\, t^m = \binom{m}{j}\, t^{m-j} && \text{pour } j \leq m \end{aligned} \tag{8}$$

$\binom{m}{j}$ est l'élément de $Z/(p)$, réduction mod. p du coefficient binomial $\dfrac{m\,!}{(m-j)\,!\,j\,!}$ Il en sera de même dans toute la suite de ce chapitre).

Nous écrirons les relations (8) sous la forme :

$$\Delta^j\; t^{q+j} = \binom{q+j}{j}\, t^q \tag{9}$$

avec la convention $\binom{q+j}{j} = 0$ pour $q < 0$.

En particulier :

$$\Delta^1 t = 1 \tag{10}$$

Pour cette raison et par analogie avec (4) nous écrirons

$$\underline{\Delta^j = \Delta^j{}_t}$$

Considérons le k-transport de structure $t' \to t$ et soit $\Delta^j{}_{t'}$ le transporté de $\Delta^j{}_t$.

$\Delta^j{}_{t'}$ est une application k-linéaire de $\theta_k(x,\, C^1)$ dans Ω et bien entendu :

$$\Delta^j{}_{t'}\, t'^{\,q+j} = \binom{q+j}{j}\, t'^{\,q} \tag{11}$$

Prolongeons $\Delta^j{}_{t'}$ en une application $k(x)$-linéaire de $\theta_{k(x)}\,(x',\, C^1)$ dans $k(x, x')$. La possibilité de ce prolongement, unique par construction, résulte encore de ce que $k(x)$ et $k(x')$ sont linéairement disjoints sur k).

Nous désignerons de la même façon $\Delta^j{}_{t'}$ ce prolongement.

Remarquons que $\Delta^j{}_{t'}$ possède la propriété suivante :

$$\Delta_{t'}{}^j\, (t' - t)^{q+j} = \binom{q+j}{j}\, (t' - t)^q \tag{12}$$

Pour (12), on a :

$$(t' - t)^{\,q+j} = \sum_{i=0}^{i=p+j} (-1)^i \binom{q+j}{i}\, t'^{\,q+j-i}\, t^i$$

$$\Delta^j{}_{t'}\, (t' - t)^{\,q+j} = \sum_{i=0}^{i=q+j} (-1)^i \binom{q+j}{i}\, t^i\, \Delta^j{}_{t'}\, (t'^{\,q+j-i})$$

$$= \sum_{i=0}^{i=q} (-1)^i \binom{q+i}{i}\, t^i \binom{q+j-i}{j}\, t'^{\,q-i}$$

Or : $$\binom{q+j}{i}\binom{q+j-i}{j}=\binom{q+j}{j}\binom{q}{i}$$

En effet, en caractéristique 0, on obtient :

$$\frac{(q+j)\,!}{(q+j-i)\,!\,i\,!}\cdot\frac{(q+j-i)\,!}{(q-i)\,!j!}=\frac{(q+j)\,!}{q\,!\,j\,!}\cdot\frac{q\,!}{(q-i)\,!\,i\,!}$$

et la relation voulue s'obtient par réduction mod. p.

La relation (12) définit formellement, pour chaque valeur de j ($o < j$), une application $k(x)$-linéaire dans $k(x)\ [t'-t]$ que nous noterons $\Delta^j_{t'-t}$

Considérons pour une valeur donnée de j les deux applications $k(x)$-linéaires $\Delta^j_{t'}$ et $\Delta^j_{t'-t}$.

$\Delta^j_{t'}$ est définie pour tous les $y' \varepsilon\ \theta_{k(x)}\ (x', \mathrm{C}^1)$: c'est par définition la transportée de Δ^j_t.

Par conséquent :

$$\Delta^j_{t'}\ (y') = (\Delta^j_t\ (y)\ )' \tag{13}$$

$\Delta^j_{t'-t}$ est définie par (12) sur $k(x)\ [t'-t]$ et sur cet anneau $\Delta^j_{t'}$ et $\Delta^j_{t'-t}$ coïncident évidemment.

$\Delta^j_{t'-t}$ se prolonge d'une façon évidente à $k(x)\big[\,[t'-t]\,\big]$: nous noterons encore ce prolongement $\Delta^j_{t'-t}$.

Nous allons montrer que c'est l'unique prolongement de $\Delta^j_{t'}$ à $k(x)\,[\,[t'-t]\,]$.

Soit $\omega(u)$ l'ordre d'un élément $u \varepsilon k(x)\big[\,[t'-t]\,\big]$.

Lemme 2. *Quel que soit le polynome* $u \varepsilon k(x)\ [t'-t]$ *tel que* $\Delta^j_{t'-t}\,(u) = \Delta^j_{t'}\,(u) \neq 0$, *on a* : $\omega(\Delta^j_{t'-t}\,(u)) = \omega(\Delta^j_{t'}\,(u)) > \omega(u) - j$

C'est une conséquence immédiate de la relation (13)

Lemme 3. *Soient* $y \varepsilon\ \theta_k(x, \mathrm{C}^1)$ *et* $z \varepsilon\ \theta_k(x, \mathrm{C}^1)$.

$$\Delta^s_t\ (yz) = \sum_{q+r=s} \Delta^q_t\ (y) .\ \Delta^r_t\ (z)$$

(Formule de Leibnitz.)

Il suffit d'écrire :

$$y'z' - yz = z(y'-y) + y(z'-z) + (y'-y)\ (z'-z)$$

$$y'\ z' - yz = \Delta^0\ (z) \sum_1^{+\infty} \Delta^q\ (y)\ (t'-t)^q + \Delta^0\ (y) \sum_1^{+\infty} \Delta^m\ (z)\ (t'-t)^r$$

$$+ \sum_1^{+\infty} \Delta^q\ (y)\ (t'-t)^q . \sum_1^{+\infty} \Delta^r\ (z)\ (t'-t)^r$$

Bien entendu, on a l'égalité transportée.

$$\Delta^s_{t'}(y'z') = \sum_{q+r=s} \Delta^q_{t'}(y').\ \Delta^r_{t'}(z') \tag{15}$$

D'autre part, on sait que l'ensemble des éléments de $k(x)$ $[t'-t]$ dont l'ordre est $\geq s$ est un idéal $\mathfrak{A}_s$ de $k(x)$. $[t'-t]$

De plus, $s \leq s'$ implique $\mathfrak{A}_{s'} \subset \mathfrak{A}_s$ et $\bigcap_s \mathfrak{A}_s = (0)$

Les idéaux $\mathfrak{A}_s$ forment un système fondamental de voisinages de 0 dans une topologie $\mathfrak{T}$ de $k(x)$ $\left[[t'-t]\right]$. La topologie est compatible avec la structure d'anneau et $k(x)\left[[t'-t]\right]$ muni de $\mathfrak{T}$ est un espace métrisable, séparé, complet.

Montrons que $\Delta^j_{t'}$ est une application uniformément continue sur $k(x)$ $\left[[t'-t]\right]$

Soit $u_r \varepsilon\, k(x)$ $[t'-t]$ $(j < r)$ l'ensemble des termes de degré $\leq r$ de la série $v \,\varepsilon\, k(x)$ $\left[[t'-t]\right]$

$v - u_r = (t-t')^r.v_r$, avec $v_r \,\varepsilon\,$ $k(x)\,[[t'-t]]$

Or : $$\Delta^j_{t'}(v-u_r) = \Delta^j_{t'}((t-t')^r.\ v_r) = \sum_{i+i'=j} \Delta^i_{t'}(t'-t)^r.\ \Delta^{i'}(v_r)$$

$\omega(\Delta^i_{t'}(t'-t)^r) = r - i$ et par conséquent :

$\omega(\Delta^i_{t'}(t'-t)^r)$ est $> r - j$, donc aussi $\omega(\Delta^j_{t'}(v-u_r))$

En définitive, quel que soit r $(j < r)$, et quelle que soit la série w :

$$\omega\, \Delta^j_{t'}(w) \geq \omega\,(w) - j$$

$\Delta^j_{t'}$ *est donc uniformément continue et coïncide donc avec* $\Delta^j_{t'-t}$

4° Soit :

$$y' - y = \sum_{j=1}^{j=+\infty} a_j(x).\ (t'-t)^j = \sum_{j=1}^{j=+\infty} \Delta_t{}^j(y).\ (t'-t)^j \tag{16}$$

Appliquons l'opération $\Delta^i_{t'} = \Delta^i_{t'-t}$ aux deux membres de (16)

$$\Delta^i_{t'}(y'y) = \Delta^i_{t'}(y') = (\Delta^i_t(t))' = \Delta^i_{t'-t}\left[\sum_{j=1}^{j=+\infty} \Delta_t{}^j(y).\ (t'-t)^j\right]$$

L'uniforme continuité de $\Delta^i_{t'-t}$ permet d'écrire :

$$\Delta^i_{t'-t}\left[\sum_{j=1}^{j=+\infty} \Delta_t{}^j(y).\ (t'-t)^j\right] = \sum_{j=1}^{j=+\infty} \Delta^i_{t'-t}\left[\Delta_t{}^j(y).\ (t'-t)^j\right]$$

$$\Delta^i_{t'-t}\left[\sum_{j=1}^{j=+\infty}\Delta_t^j(y).\ (t'-t)^j\right]$$

$$=\sum_{j=1}^{j=+\infty}\binom{j}{i}.\ \Delta^j_t(y).\ (t'-t)^{j-i} \qquad (^{10})$$

$$=\Delta^i_t(y)+\sum_{q=1}^{q=+\infty}\binom{i+q}{i}\Delta_t^{i+q}(y)\,t'-t)$$

Par conséquent :

$$(\Delta_t^i(y))'-\Delta_t^i(y)=\sum\binom{i+q}{i}\Delta_t^{i+q}(y).\ (t'-t)^q$$

THÉORÈME 1. *Les applications k-linéaires de Δ^i_t et Δ^j_t sont permutables et :*

$$\Delta_t^i.\ \Delta_t^j=\binom{i+j}{i}\Delta_t^{i+j} \qquad (17)$$

On retrouve ainsi la formule du théorème 1, 3, et lorsque $p=0$ la « formule de Taylor » habituelle.

5° Supposons désormais $p>0$. Il résulte immédiatement de la relation (17) que les Δ^i_t sont connus dès que l'on connaît certains d'entre eux, les $\Delta_t^{p^q}$ que nous noterons D_q et que nous appellerons des « semi-dérivées » de hauteur q.

Ce langage est justifié par les relations :

$$D_q(t^{mp^q})=mt^{(m-1)}p^q \qquad m\varepsilon N_+$$

$$D_q(t^n)=0 \qquad \textit{pour } n<p^q$$

Toutes les dérivées et semi-dérivées sont par rapport à t. Nous supprimerons désormais l'indice t dans tous les symbole de dérivation.

THÉORÈME 3. *Soit $m=m_0+m_1p+\ldots.+m_hp^h+\ldots$ le développement p-adique de l'entier m, on a :*

$$\Delta^m=\prod_{h=0}^{h=+\infty}\frac{1}{m_h!}(D_h)^{m_h} \qquad (18)$$

La démonstration est immédiate à partir de (17)

(10) On rappelle la convention déjà faite pour le symbole $\binom{j}{i}\ \varepsilon Z/(p)$: il est nul pour $j<i$.

En particulier, pour $0 \leq m \leq p-1$

$$\Delta^{m} = \frac{1}{m!} D^{m} \tag{19}$$

Quelle que soit la caractéristique nous appellerons « développement de Taylor par rapport à $t'-t$ de y » (avec $y \varepsilon б_{k}(P, C^{1})$), *l'expression*

$$y' - y = \sum_{1}^{+\infty} \Delta^{m}(y)(t'-t)^{m} \tag{20}$$

THÉORÈME 4. *Dans le développement de Taylor de y, le rang du premier terme non nul suivant une lacune est multiple de p.*

Supposons $\Delta^{j}(y) = 0$, $\Delta^{j+1}(y) \neq 0$,

$$\Delta^{j+1} = \frac{1}{j+1} D. \Delta^{j}$$

et par conséquent $\Delta^{j+1}(y) = 0$. En répétant le raisonnement de proche en proche on aboutit au résultat.

THÉORÈME 5. *Le rang du premier terme non nul suivant le terme de rang 1 du développement de Taylor d'un élément y tel que $\Delta^{2}(y) = 0$ est une puissance de p.*

D'après ce théorème 4 ce ne peut être qu'un multiple de p.

a) Ce rang est égal à p, le théorème est vrai.

b) Ce rang est égal à $m_h p^h$.

En appliquant la relation (18) on démontre que

$$\Delta^{p^h}(y) = 0.$$

EN RÉSUMÉ .

a) $p = 0$ $\Delta^{2}_{t}(y) = D^{2}_{t}(y) = 0$ implique : $\Delta^{j}_{t}(y) = D^{j}_{t}(y) = 0$ quel que soit $j \geq 2$: par conséquent y est une fonction linéaire de x.

b) $p > 0$ $\Delta^{2}_{t}(y) = 0$ implique que le développement Taylorien de y est de la forme :

$$p = 2 \qquad y' - y = D_{t}(y).\, t'-t) + \sum_{q=4}^{q=+\infty} \Delta_{t}^{q}(y).\,(t'-t)^{q} \tag{22}$$

$$p > 3 \qquad y' - y = D_{t}(y).\,(t'-t) + \sum_{q=p}^{q=+\infty} \Delta_{t}^{q}(y).\,(t'-t)^{q} \tag{23}$$

THÉORÈME 6. *Quel que soit* $y \varepsilon б_{k}(P, C^{1})$

a) *Si* $p \geq 3$ $\qquad \Delta^{2}_{t}\left[D^{p-2}(y) \right] = 0.$

b) *Si* $p = 2$ $\qquad \Delta^{2}_{t}\left[D_{t}(y) \right] = 0.$

a). est trivial puisque $\Delta^2{}_i = D^2{}_i$ et que $D^p{}_i\,(y)$ quel que soit y.
b). est une conséquence de 23.

5. — APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES

Rappelons les notations du paragraphe III :

H est une hypersurface de $A^n\,(\Omega)$, définie sur un corps k.

$P = (x)$ est un point générique de H sur k.

L^{n-1} est la variété linéaire tangente de H en P.

Considérons la variété linéaire générique de dimension d : L^d passant par P et contenue dans L^{n-1}.

Soit $i(P, H.L^d)$ la multiplicité d'intersection de P sur $H.L^d$ et $m(P, H.L^d)$ la multiplicité de P sur $H.L^d$.

On sait que [11] : $i(P; H.L^1) = m(P; H.L^2) = m(P; H.L.^{n-1})$.

$H.L^2$ est une variété de dimension 1 absolument irréductible.

Soit L^1 une variété linéaire générique de dimension 1, passant par P *et contenue dans* L^2 : donc dans L^{n-1})

$$m(P;\ H.L^2) = i(P;\ (H.L^2).\overline{L^1}).$$

Nous sommes ainsi ramenés à étudier la multiplicité d'intersection $i(P;\ C^1.\overline{L^1})$ du point P dans le cycle intersection d'une variété 1 de dimension 1, par sa variété linéaire tangente L^1 en un point générique $\overline{P}$ de C^1.

THÉORÈME 1. *La multiplicité $m(P;\ H.L^{n-1})$ du point générique P de l'hypersurface H sur le cycle $H.L^{n-1}$, intersection de H par son hyperplan tangent en P est égale :*

1° *à 2 si $p = 0$.*

2° *à 2 ou à une puissance de p si $p > 0$ et $p \neq 2$.*

3° *à 2 ou à une puissance de 4 si $p = 2$.*

THÉORÈME 2. *Une condition nécessaire et suffisante pour que : $m(H;\ P.L^{n-1})$ soit > 2 est que :*

a) *$p > 0$;*

b) *Quel que soit $i\,(1 < i < n)$ on ait $\Delta^2(x_i) = 0$.*

(*Si $p > 3$, la condition* b) *s'écrit* $D^2 x_i = 0$.)

C'est une simple conséquence du Théorème 4 du paragraphe IV, et des relations (21) et (22).

---

(11) P. SAMUEL. Méthodes d'Algèbre abstraite en Géométrie Algébrique. Chap. II, paragraphe 6, n° 2. b). Ergebnisse der Mathematik. Springer Berlin 1955

CHAPITRE II

1. — DÉRIVATIONS ET SPÉCIALISATIONS [1]

Soit k un corps de caractéristique p, *quelconque*, $k(x_1, \ldots x_n) = k(x)$ une extension régulière, de type fini de k.

Soit $(t_1, \ldots, t_d) = (t)$ une base de transcendance séparante de $k(x)$ sur k, telle en outre, que $k[x]$ soit entier sur $k[t]$.

Soit Ω un domaine universel pour k ,donc aussi pour $k(x)$.

Soit α un k-isomorphisme de $k(x)$ dans Ω satisfaisant aux conditions suivantes :

$\alpha(t_d) = t'_d$, $t'_d \varepsilon \Omega$, étant transcendante sur $k(x)$.

$\alpha(t_i) = t_i$, $(i \neq d)$.

Nous écrirons d'une façon générale : $\alpha(u) = u'$.

THÉORÈME 1. *Il existe une place* φ *de* $k(x,x')$ *prolongeant la* $k(t_1, \ldots t_{d-1})$ — *spécialisation* $t'_d \to t_d$ *telle que* $\varphi(y) = y$ *et* $\varphi(y') = y$, *quel que soit* $y \varepsilon k(x)$.

Quelle que soit la place φ de $k(x,x')$ qui prolonge la spécialisation $t'_d \to t_d$, $k[t,t']$ est dans l'anneau de cette place et puisque $k[x,x']$ est entier sur $k[t,t']$, $k[x,x']$ est également dans cet anneau.

Il suffit donc de démontrer qu'il est possible de choisir φ de manière que (y,y) soit spécialisation de (y',y) sur $k(t_1, \ldots t_{d-1})$.

Une condition suffisante pour qu'il en soit ainsi est que $k(x)$ soit extension régulière de $k(t_1, \ldots, t_{d-1})$ [2].

Il est clair que $k(x)$ est une extension séparable de $k(t_1, \ldots, t_{d-1})$.

Considérons en effet la variété (absolue) lieu de (x) sur k.

Sa section par la variété linéaire L^{n-d+1} d'équations : $X_i - t_i = 0$ $(1 \leq i \leq d-1)$, est de dimension 1.

Or, on sait qu'elle est absolument irréductible, ce qui entraîne le résultat en vertu de la séparabilité [3].

Soit β l'application k-linéaire de $k[x]$ dans $k(x,x')$ définie par :

$$\beta(y) = \frac{y' - y}{t'_d - t_d}$$

THÉORÈME 2. *Quel que soit* $y \varepsilon k[x]$, $\beta(y)$ *est dans l'anneau A de la place* φ.

Supposons que $\beta(y) \varepsilon A$. Puisque A est l'anneau d'une place, $1/\beta(y) \varepsilon A$.

---

(1) P. BOUGHON. Dérivations et spécialisations. C. R. Acad. Sci. Paris.

(2) WEIL : Foundations of Algebraic Geometry. II, I, Th. 5.

(3) TERUHISA MATSUSAKA. The theorem of Bertini on linear Systems in Modular fields. Kyoto Mathematical Memoirs, Vol. XXVI, N° 1.

L'identité :

$$\frac{y'^q t'^r_d - y^q t^r_d}{y' - y} = \frac{y'^q - y^q}{y' - y} \cdot t^r_d + \frac{t'^r_d - t^r_d}{y' - y} \cdot y^q + \frac{y'^q - y^q}{y' - y} (t'^r_d - t^r_d) \qquad (1)$$

montre que :

$$\varphi \left(\frac{y'^q t'^r_d - y^q t^r_d}{y' - y} \right) = q.\, y^{q-1}.\, t^r_d + r.\, t^{r-1}_d.\, \varphi \left(\frac{t'_d - t_d}{y' - y} \right) \qquad (2)$$

D'autre part : $\varphi_o\beta$ est un k-endomorphisme de $k[x]$ (non nécessairement partout défini).

Par conséquent, si f est le polynome minimal de y sur : $k(t^1, \ldots, t_{d-1})$ (t_d), le calcul de $\varphi(\beta(f(y)))$ (qui est défini), montre d'après (2) que :

$$\varphi \left(\frac{t'_a - t_d}{y' - y} \right) = \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial t_d}} \qquad (3)$$

Par conséquent, $\varphi(1/\beta(y))$ n'est pas nul (séparabilité) et $\beta(y) \varepsilon A$.

THÉORÈME 3. *Le k-endomorphisme additif $\varphi_o\beta$ de $k[x]$ est la k-dérivation D_d de cet anneau qui prend la valeur 1 en t_d. (Dérivation « par rapport à t_d »).*

Ce qui précède montre que $\varphi_o\beta$ est défini sur $k(x)$. Le résultat est alors une conséquence immédiate de la relation (3). On peut également montrer, en écrivant une relation analogue à la relation (1) que, quels que soient $y \varepsilon k(x)$ et $z \varepsilon k(x)$, on a :

$$D_d(yz) = D_d(y).z + y.D_d(z).$$

Le procédé habituel de prolongement d'une dérivation d'un anneau intègre à son corps des fractions et la relation : $\beta(1/y) = -\beta(y)/yy'$ $(yy' \neq 0)$, montrent que :

THÉORÈME 4. *$\varphi_o\beta$ est définie sur le corps $k(x)$ et n'est autre que la dérivation de ce corps qui prend la valeur 1 en t_d et la valeur 0 en t_i pour $i \neq d$.*

REMARQUE : On sait (lemme de normalisation) que l'on peut choisir pour les t_i $(1 \leqslant i \leqslant d)$ des combinaisons linéaires des x_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ à coefficients dans k (4).

2. — DÉRIVATION TOTALE

Soit γ un isomorphisme de $k(x)$ dans Ω tel que les $\gamma(t_i) = t'_1$ $(1 < i < d)$ soient transcendants sur $k(x)$.

(4) P. SAMUEL. Cours de Cornell University. Ch. IV.

On écrira d'une façon générale $\gamma(u) = u'$.

Considérons une place φ prolongeant la $k(x)$-spécialisation $(x') \to (x)$. Soit A son anneau, v la valuation associée.

On suppose que v est dicrète et de rang 1 et qu'il existe une uniformisante locale de A_φ de la forme $T'_\varphi - T_\varphi$ avec $T_\varphi \varepsilon k(x)$ [5].

Quelle que soit φ, l'anneau A_φ contient $k[t,t']$ et puisque $k[x,x']$ est entier sur $k[t,t']$, il contient aussi $k[x,x']$.

Considérons la variété lieu du point (x) sur k : c'est aussi le lieu de (x') sur k.

La section de cette variété par la variété linéaire L^{n-d+1} d'équation $X_h - t'_h = 0$ $(1 < h < d)$ est irréductible.

Donc, en vertu de la séparabilité (y,y) est spécialisation par φ de (y',y).

Considérons maintenant place ψ_i de $k(x,x')$ prolongeant la $k(t'_1,\dots,t'_{i-1},t_i,\dots,t_d)$-spécialisation $t'_i \to t_i$ et écrivons :

$$\psi_i(y') = y(t_1,\dots,t_i,t'_{i+1},\dots,t'_d).$$

Considérons l'application k-linéaire δ de $k(x,x')$ définie de la façon suivante :

$$\delta\,(y) = \sum_{i=1}^{i=d} \frac{y\,(t_1,\dots,t_{i-1},t'_i,\dots,t'_d) - y\,(t_1,\dots,t_{i-1},t'_i,\dots,t'_d)}{t'_i - t_i}\;\frac{t'_i - t_i}{T'_\varphi - T_\varphi}$$

Un raisonnement analogue à celui fait plus haut montre que le premier terme du produit est dans l'anneau de la place φ.

Le premier est spécialisé en $D_{t_i}(y)$, le second en $D_\varphi(t_i)$.

THÉORÈME 2. *Le k-endomorphisme $\psi_d{}^\circ\delta$ est défini sur $k(x,x')$ et :*

$$\varphi_0\,\delta = \sum_{i=1}^{i=d} D_\varphi\,(t_i).\,D_{t_i}$$

Nous écrirons $\varphi_0\,\delta = D_{T_\varphi} = D_\varphi$ (*dérivation totale par rapport à T_φ, ou dérivation associée à φ, ou φ-dérivation*).

Nous pouvons résumer les résultats obtenus de la façon suivante :

THÉORÈME 3. *Soient : k un corps de caractéristique $p \geq 0$ $k(x_1,\dots,x_n)$ une extension séparable de type fini de k.*

$(t_1,\dots,t_d) = (t)$ une base de transcendance séparable de $k(x)$ sur k, telle en outre que $k[x]$ soit entier sur $k[t]$.

un k-isomorphisme de $k(x)$ dans un domaine universel Ω de $k(x)$, γ tel que $\gamma(t_i) = t_i'$ $(1 \leq i \leq d)$ soit transcendant sur $k(x)$.

φ une place de $\underline{k}(x,x')$ prolongeant la $k(x)$-spécialisation $(x') \to (x)$, et telle que :

(5) Nous reviendrons sur cette hypothèse au paragraphe suivant (3) en étudiant les places φ qui satisfont à ces conditions.

1°) La valuation associée soit discrète et de rang 1.

2°) Il existe une uniformisante de l'anneau A^{φ} de cette place de la forme $T^{\varphi\prime} - T^{\varphi}$, avec $T^{\varphi} \varepsilon k(x)$.

β l'application k-linéaire de $k(x)$ dans Ω définie par :

$$\beta(y) = \frac{\gamma(y) - y}{\gamma(T_{\varphi}) - T_{\varphi}}$$

$\varphi^{\circ}\beta$ est la k-dérivation $D_{T_{\varphi}} = D_{\varphi}$ du corps $k(x)$ qui prend la valeur 1 en T^{φ} et l'on a :

$$D_{\varphi} = \sum_{i=1}^{i=d} D_{\varphi}(t_i) . D_{t_i}$$

3. — VARIÉTÉS ALGÉBROIDES DE DIMENSION 1 ASSOCIÉES A CERTAINES PLACES DISCRÈTES

Nous dirons qu'une place est discrète si la valuation qui lui est associée est discrète et de rang 1.

Les notations sont celles du paragraphe précédent.

Considérons une place discrète φ de $k(x, x')$ prolongeant la $k(x)$-spécialisation $(x') \to (x)$.

Soit v la valuation associée, A son anneau.

Nous supposons en outre qu'il existe une uniformisante locale de A *de la forme* $T' - T$ *avec* $T\, k(x)$.

THÉORÈME 1. *Étant donnée une place* φ, *il existe* n *séries formelles* $s_i \varepsilon k(x)\,((T' - T))$, $(1 \leq i \leq x)$ *telles que l'application* $x_i' \to s_i$ *soit un isomorphisme de* $k(x,x')$ *dans* $k(x)\,((T' - T))$.

Montrons d'abord qu'il existe un entier $q > 0$ et un élément $a_{i,q} \varepsilon k(x)$ tels que :

$$v(x_i' - x_i - a_{i,q}(T' - T)^q) > v(x_i' - x_i)$$

Il suffit de prendre : $\left\{ \begin{array}{l} q = v(x'_i - x_i) \\ \qquad \text{et} \\ a_{i,q} = \varphi \dfrac{x'_i - x_i}{(T' - T)^q} \end{array} \right.$

Ce choix est d'ailleurs unique.

Dans ces conditions : $v\left(\dfrac{x'_i - x_i}{(T' - T)^q} - a_{i,q}\right)$ est > 1, puisque la valuation v est discrète.

$$\text{Or} . \; v\left(\frac{x'_i - x_i}{(T' - T)^q} - a_{i,q}\right) = v\left(x'_i - x_i - a_{i,q}\,(T' - T)^q\right) - q$$

En raisonnant de la même façon avec l'élément :

$$x_i' - x_i - a_{i,q}\,(T' - T)^q$$

on définit une suite de coefficients $(a_{i,r})$ et nous écrirons :

$$s_i = \sum_1^n a_{i,r} . (T' - T)^r$$

avec :

$$a_{i,\,r+1} = \varphi\,\frac{x'_i - x_i - \sum\limits_1^r a_{i,j}\,(T' - T)^j}{(T' - T)^{r+1}}$$

Immergeons $k(x, x')$ dans $k((x, x'))$ et considérons la topologie définie par la valeur absolue associée à v.

On peut alors identifier classiquement $x_i' - x_i$ et s_i, ce que nous ferons désormais.

La place φ est donc la restriction à $k(x, x')$ de la place $T' \to T$ de $k(x)((T' - T))$.

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE.

Considérons une variété V^d de l'espace affine $A^n(\Omega)$ admettant k pour corps de définition et dont un point générique P est (x). (x') est alors un point générique de V^d sur $k(x)$.

A la place φ est associée une sous variété algébroïde en P W^1_φ dont un système d'équations est :

$$X_i = x_i + s_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

L'hypothèse : « il existe une uniformisante locale de A de la forme $T' - T$ avec $T \varepsilon k(x)$ », hypothèse qui intervient dans les deux derniers paragraphes, est en particulier réalisée dans le cas suivant :

Considérons dans $A^n(\Omega)$ la variété G des variétés linéaires de dimension $n\text{-}d + 1$ qui passent par P et P'. G est définie sur $k(P, P')$. Soit L^{n-d+1} un élément générique de G sur $k(P, P')$: montrons que L^{n-d+1} est élément générique sur k des variétés linéaires de cette dimension dans $A^n(\Omega)$.

Soient (Q_i), $3 \leq i \leq n\text{-}d$, $n\text{-}d\text{-}2$ points de L^{n-d+1} qui avec P et P' forment un système de $n\text{-}d$ points de L^{n-d+1} projectivement indépendants.

Soit L^{n-d+1} une variété linéaire générique sur k de $A^n(\Omega)$. Elle coupe V^d suivant un cycle $\bar{C}^1$. Sur $\bar{C}^1$ prenons deux points $\bar{P}$ et $\bar{P}'$, et dans L^{n-d+1}, $n\text{-}d\text{-}2$ points $\bar{Q}_i$ $(3 \leq i \leq n\text{-}d)$ tels que les $n\text{-}d$ points $\bar{P}, \bar{P}', \bar{Q}_3, \ldots, \bar{Q}_{n-d}$ soient projectivement indépendants.

P et P' étant génériques et indépendants sur V^d, il existe une k-spécialisation qui les transforme en $\bar{P}$ et $\bar{P}'$. Il existe également une k-spécialisation qui transforme Q_i en $\bar{Q}_i$ $(3 \leq i \leq n\text{-}d)$.

Les deux extensions $k(P, P')$ et $k(Q_3, \ldots, Q_{n-d})$ étant linéairement disjointes, il existe une k-spécialisation qui transforme $(P, P', Q_3, \ldots, Q_{n-d})$ en $(\bar{P}, \bar{P}', \bar{Q}_3, \ldots, \bar{Q}_{n-d})$ et L^{n-d+1} en $\bar{L}^{n-d+1}$.

Une $\bar{L}^{n-d+1}$ quelconque de $A^n(\Omega)$ étant k-spécialisation de L^{n-d+1}, L^{n-d+1} est générique *sur k* des variétés linéaires de cette dimension dans $A^n(\Omega)$.

On sait alors que : $V^d . L^{n-d+1} = C^1$ et que C^1 est absolument irréductible [6].

Soit $\sigma_{k(P)}(P', V^d)$ l'anneau local de P' sur V^d, $\mathfrak{M}$ son idéal maximal. P' étant simple sur V^d, $\sigma_{k(P)}(P', V^d)$ est régulier.

Soit $U_i(X) = 0$, $(1 \leq i \leq d)$ un système d'équations de L^{n-d+1}.

Soient u_i, $(1 \leq i \leq d)$ les images canoniques des U_i dans $\sigma_{k(P)}(P', V^d)$.

Les U_i s'annulant en P', $u_i \varepsilon \mathfrak{M}$.

L^{n-d+1} et V^d étant transversales en P', les u_i sont linéairement indépendants mod. $\mathfrak{M}^2$

Il est alors connu [7] que l'idéal (u) de $\sigma_{k(P)}(P', V^d)$ engendré par les u_i, $1 \leq i \leq d$ est premier et que l'anneau local $\sigma_{k(P)}(P'\, C^1) = \sigma_{k(P)}(P', V^d)/(u)$ est régulier. P' est donc simple sur C^1, donne aussi P (par transport de structure).

L'une au moins des différences $x_i' - x_i$ est donc uniformisante locale puisque dans le cas contraire P serait non simple sur C^1.

Dans le cas où les conditions imposées à φ sont réalisées, nous écrirons que : « $\varphi(y)$ *est la limite de y lorsque* P' *tend vers* P *sur une variété de dimension 1* ».

Les relations $X_i = x_i + s_i$ qui définissent cette variété constituent ce que nous appelerons une « *représentation paramétrique de la spécialisation* ».

4. — LA NOTION DE DÉRIVÉE DANS UN CORPS

Ce qui précède montre que l'on peut, en ce qui concerne les dérivations se restreindre au cas « d'une variable ».

Nous simplifierons donc un peu nos notations en posant :

K = clôture algébrique de $k(t_1, \ldots, t_{d-1})$

$t_d = t$.

On remarquera que D_t est une K-dérivation de $K(x)$.

Soit t_0 un élément quelconque de K.

Considérons une K-spécialisation φ_0 (à valeurs dans K_0) prolongeant la K-spécialisation : $t \to t_0$.

Nous noterons d'une façon générale : $\varphi_0(y) = y_0$.

---

(6) A. SEIDENBERG. The hyperplane Sections of Normal Varietes Transactions of the American Mathematical Society. Vol. 69, N° 2, pp. 357-386 September, 1950.

(7) P. SAMUEL. Algèbre locale. Memorial des Sciences Mathématiques, Fascicule CXXIII. chap. II, n° 5, C.

THÉORÈME 1. *Quel que soit $y \varepsilon k(x)$ tel que $\varphi_0(y) = y_0$ soit fini, on a :*

$$\varphi_0\left(\frac{y-y_0}{t-t_0}\right) = \varphi_0(\mathrm{D}_t(y))$$

Considérons l'identité :

$$\frac{y^q t^r - y'^q t'^r}{t-t'} = (\sum_1 t^{r-i}\, t'^{\,i-1})\,(y^q - y'^q) +$$

$$(\Sigma\, t^{r+i}\, t'^{\,i-1}).\, y'^{\,q} + (\Sigma\, y^{q-i}\, y'^{\,i-1}).\ \frac{y-y'}{t-t'} \qquad (1)$$

et l'identité analogue obtenue en y remplaçant t' par t_0 et y' par y_0 :

$$\frac{y^q t^r - y_0^{\,q}\, t_0^{\,r}}{t-t_0} = (\Sigma t^{r-i}\, t_0^{\,i-1})\,(y^q - y_0^{\,q} +$$

$$(\sum_1 t^{r-1}\, t_0^{\,i-1}).\, y_0^{\,q} + (\sum_1 y^{q+i}\, y_0^{\,i-1}).\ \frac{y-y_0}{t-t_0} \qquad (2)$$

Nous avons :

$$\varphi\left(\frac{y^q t^r - y'^{\,q}\, t'^{\,r}}{t-t'}\right) = r.\, t^{r-1}.\, y^q + q y^{q-1}.\ t^r.\ \varphi\ \left(\frac{y-y'}{t-t'}\right) \qquad (1')$$

$$\varphi\left(\frac{y^q t^r - y_0^{\,q}\, t_0^{\,r}}{t-t_0}\right) = r.\ t_0^{\,r-1}.\ y_0^{\,q} + q.\ y_0^{\,q-1}.\ t_0^{\,r}.\ \varphi\left(\frac{y-y_0}{t-t_0}\right) \qquad (2')$$

Soit f le polynome minimal de y sur $K(t)$.

Les identités (1′) et (2′) montrent que l'on a :

$$\frac{\partial f}{\partial y}\,\varphi\left(\frac{y'-y}{t'-t}\right) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

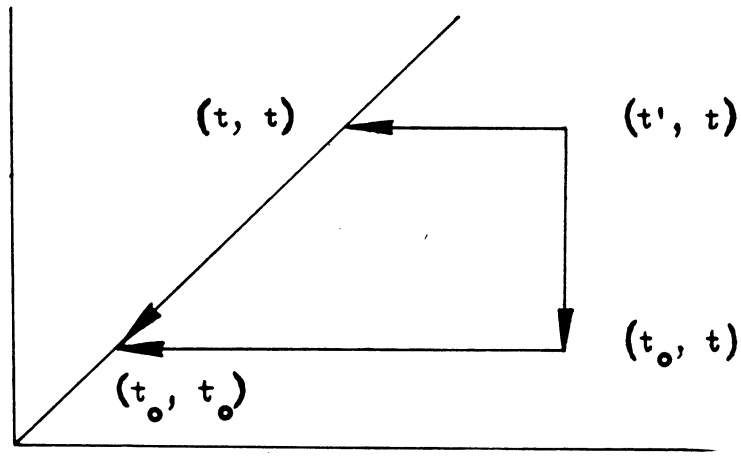
$$\varphi\ \frac{\partial f}{\partial y}\ \varphi_0\left(\frac{y-y_0}{t-t_0}\right) + \varphi_0\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = 0$$

ce qui démontre le théorème 1.

Nous noterons $\varphi_0(\mathrm{D}_t(y)) = \mathrm{D}_t(y_0)$ et l'on dira que $\mathrm{D}_t(y_0)$ est la dérivée (par rapport à t) de y.

REMARQUE. Le résultat que l'on vient d'obtenir peut s'exprimer d'une façon plus frappante.

Nous avons en fait, démontré que pour certains éléments de $\mathrm{K}(x, x')$ en particulier ceux qui sont de la forme $\dfrac{y'-y}{t'-t}$ l'on a le diagramme de compatibilité suivant :



Considérons en effet un élément arbitraire de $k(t, t')$ et ses images dans les deux spécialisations (I) et (II) indiquées sur le graphique ci-dessus : ses images sont en général distinctes comme il est facile de le constater sur un exemple (considérer le quotient de deux polynomes homogènes de même degré).

Une telle éventualité ne se produit pas pour les éléments de la forme :

$$\frac{y' - y}{t' - t}$$

2° Considérons une variété V^1 de dimension 1, définie sur k, de l'espace $A^n(\Omega)$. $P = (x)$ et $P' = (x')$ en sont deux points génériques indépendants, $P^0 = (x^0)$ en est un point *simple* distinct de P et P'.

On peut toujours supposer que la variété linéaire tangente L^1 à V^1 en P_n' est parallèle à aucun des axes.

Dans ces conditions les développements Tayloriens des x_1, $(1 \leq i \leq n)$ montrent que *toutes* les différences $x_i' - x_i$ sont des uniformisantes locales de $\sigma_{k(P)}$ (P', V_1).

D'autre part, l'une au moins des différences $x_i' - x_i^0$ $(1 \leq i \leq n)$ est uniformisante locale de $\sigma_{k(P)}$ (P', V^1).

Autrement dit, il existe un i au moins $(1 \leq i \leq n)$ tel que $x_i' - x_i$ soit uniformisante locale de $\sigma_{k(P)}$ (P', V^1) et $x_i' - x^0$ une uniformisante locale de $\sigma_{k(P_0)}$ (P', V^1).

Nous noterons ces deux uniformisantes $t' - t$ et $t' - t^0$ respectivement pour simplifier l'écriture.

Soit φ_0 l'unique place de k (P^0, P, P') qui prolonge la k (P^0, P')-spécialisation $P \to P^0$. Soit V_0 la valuation discrète de rang 1 associée à φ_0.

LEMME 1. *Soit* $y \varepsilon \sigma_{k(P_0)}$ (P, V^1) *et soit* q *son ordre pour* V_0. *Quel que soit* j $(1 \leq j)$, Δ_t^j $(y) \varepsilon \sigma_{k(P_0)}$ (P, V^1) et son ordre est $q - j$ ou $q - j + 1$.

On sait qu'il existe des $a_i \varepsilon k(P^0)$ $(1 \leq i)$ tels que :

$$y - y_0 = \sum_{i=1}^{i=+\infty} a_i (x^0).(t - t^0)^i \tag{1}$$

et que :

$$\Delta^j{}_t (y - y^0) = \Delta^j{}_t (y) = \sum_{i=j+1}^{i=+\infty} a_i (x^0) \binom{i}{j} (t - t^0)^{i-j} \tag{2}$$

ce qui démontre le lemme.

En particulier : $\varphi_0(\Delta_t{}^j (y) = \Delta_t{}^j (y^0) = 0$ pour $i \leq j \leq q - 1$

Soit :

$$y' - y = \sum_{j=1}^{j=+\infty} \Delta^j{}_t (y) (t' - t)^j \tag{3}$$

le développement Taylorien de y.

Soit $\bar{\varphi}_0$ le $k(P^0, V^1)$-homomorphisme (d'anneau) défini formellement sur $\sigma_{k(P0,\,P')}$ (P, V^1) $[[t' - t]]$ par :

$$\bar{\varphi}_0 \sum_{j=1}^{j=+\infty} b_j (x) (t' - t)^j = \sum_{j=1}^{j=+\infty} \varphi_0 (b_j (x)).(t' - t^0)^j$$

$$\sum_{p=1}^{p=+\infty} \quad = \sum b_j (x^0).(t' - t^0)^j$$

avec $\bar{\varphi}_0(b^j(x) = b^j(x^0)$.

$\bar{\varphi}_0$ et φ_0 coïncident sur $\sigma_{k(P',\,P0)}$ (P, C^1) $[t' - t]$ et $\bar{\varphi}^0$ est donc un prolongement de la restriction de φ_0 à $\sigma_{k(P',\,P0)}$ (P, C^1) $[t' - t]$.

On démontre comme on l'a fait au chapitre I pour les $\Delta_t{}^j$ que φ_0 étant une application uniformément continue, on a $\varphi_0 = \bar{\varphi}_0$ partout où elles sont toutes deux définies (8).

---

(8) C'est ici un problème plus facile parce que φ endomorphisme *d'anneau* ne peut qu'élever l'ordre d'une série formelle alors que pour démontrer que $\Delta^j{}_t$ ne l'abaissait pas trop il a falu construire la formule de Leibnitz.

9. Bien entendu une telle relation peut ne pas être exacte si toutes les conditions de l'énoncé ne sont pas satisfaites.

Par exemple en caractéristique $p = 0$.

$$\sqrt{t'} - \sqrt{t} = \frac{1}{2\sqrt{t}} (t' - t) - \frac{1}{4t\sqrt{t}} (t' - t)^2 + \ldots$$

Mais $\sqrt{t'}$ n'est pas développable en série entière en t'.

Or d'après le lemme 1, $\Delta_{t'}^{j}(y)\,\varepsilon\sigma_{k(P_0,\,P')}(P, V^1)$ quel que soit j. Par conséquent : (2)

$$y' - y_0 = \sum_{j=1}^{j=+\infty} \Delta^j_t(y^0)(t - t^0)^j \tag{4}$$

Soit φ_0' la place de $k(P^0, P, P')$ prolongeant la $k(P^0, P)$-spécialisation $P' \to P^0$

La formule 4 montre que :

$$\varphi'_0 \frac{y' - y_0}{(t' - t^0)^q} = \varphi_0 \Delta^q_t(y)$$

(q est l'ordre de $y - y^0$ pour y_0 associée à φ_0)

Considérons le $k(P^0)$ transport de structure $P' \to P$

$$\varphi'_0 \frac{y' - y_0}{(t' - t^0)^q} = \varphi_0 \frac{y - y_0}{(t - t^0)^q}$$

THÉORÈME 1. P *étant un point générique et* P^0 *un point simple de* V^1 *y étant un élément de* $\sigma_k(P^0, V^1)$ *d'ordre q pour la valuation associée à la place prolongeant la* $k(P^0)$*-spécialisation* $P \to P^0$, *$t' - t$ étant une uniformisante locale de* $\sigma_{k(P)}(P', V^1)$ et $t - t^0$ *une uniformisante locale de* $\sigma_{k(P_0)}(P, V^1)$:

$$\varphi_0 \frac{y - y_0}{(t - t^0)^q} = \varphi_0 \Delta^q_t(y) = \Delta^q_t(y^0)$$

Le théorème 1 s'interprète encore comme un théorème de permutation des spécialisations :

$$\begin{array}{lll}
(t', t) & \to (t', t^0) & \to (t^0, t^0) \\[2ex]
\dfrac{y' - y - \sum_{j=1}^{j=q-1} \Delta^j_t(y)(t' - t)^j}{(t' - t)^q} \longrightarrow & \dfrac{y' - y_0}{(t' - t^0)^q} & \to \Delta^q_t(y^0) \\[4ex]
\dfrac{y' - y - \sum_{j=1}^{j=q-1} \Delta^j_t(y).(t' - t)^j}{(t' - t)^q} \longrightarrow & & \Delta^q_t(y) \to \Delta^q_t(y^0) \\[2ex]
(t', t) & \to (t, t) & \to (t^0, t^0)
\end{array}$$

CHAPITRE III.

CYCLE CARACTÉRISTIQUE D'UNE FAMILLE DE DIVISEURS

1. — FAMILLE DE DIVISEURS DÉPENDANT D'UN OU PLUSIEURS PARAMÈTRES

1° Soit k un corps de caractéristique $p > 0$, Ω un domaine universel pour k.

Soit V^d une variété de dimension d de l'espace projectif à n dimensions $P^n(\Omega)$, admettant k pour corps de définition.

Soit P un point générique de V^d.

Soit S^{m+d-1} un cycle homogène de dimension $m + d - 1$, de l'espace $V^d x P^m(\Omega)$.

On suppose que toutes les composantes de S^{m+d-1} admettent k pour corps de définition.

DÉFINITIONS. 1° Le couple (V^d, S^{m+d-1}) est une V^d-famille de diviseurs. Soit $\mathcal{F}$ ou $\mathcal{F}^d$ cette famille.

2° Le diviseur générique D_p de la famille $\mathcal{F}$ est :

$$Pr_p{}^m(\Omega)\,[S^{m+d-1}.\ (P \times P^m\ (\Omega))]$$

3° Un diviseur $D_{p0} \varepsilon\ \mathcal{F}$ est obtenu en spécialisant $P^0 \in V^d$.

2° Soit $f(x_0, \ldots, x_n, Y_0, \ldots, Y_m) = f(x, Y) = 0$ l'équation du diviseur générique D_p de $\mathcal{F}$.

Pour certains points $(P^0) = (x^0)\,\varepsilon V^d$ il peut se faire que l'équation $f(x^0, Y)$ se réduise à $0 = 0$. Le diviseur D_{p0} peut alors dépendre du prolongement considéré de la $k(P^0)$ spécialisation.

L'ensemble des points P^0 en lesquels une telle circonstance est possible est un sous ensemble algébrique de V^d. *Nous l'appelerons l'ensemble singulier de la famille $\mathcal{F}$.*

On remarquera que par contre, le diviseur D_{p0} associé à un point P^0 singulier sur V^d est en général bien déterminé.

3° Soit $W^{d'}$ une variété de $P^{n'}(\Omega)$ telle que $Pr_{P^n(\Omega)}\, W^{d'} = V^d$.

L'application $pr_{p^n}(\Omega)$ s'étend en une projection f de $W^{d'} \times P^m(\Omega)$ dans $V^d \times P^m(\Omega)$. Soit Γ le graphe de f. Γ est dans :
$(W^{d'} \times P^m(\Omega) \times (V^d \times P^m(\Omega)$ et :

$$f^{-1}\left(S^{m+d-1}\right) = pr_{W^{d'} \times P^m(\Omega)}\left[(W^{d'} \times P^m\ (\Omega) \times S^{m+}{}_p{}^{-1}\right].\ \Gamma$$

$\overset{-1}{_j}\,(S^{m+d-1})$ est un cycle de $W^{d'} \times P^n(\Omega)$, dont toutes les composantes sont de dimension $m + d - 1$ (1).

Par conséquent, *la* V^d *famille* $\mathcal{F}$ *est aussi une* $W^{d'}$ *famille.*

On voit qu'il est possible de remplacer une variété de paramètres par une infinité d'autres. En particulier :

On sait qu'il existe un modèle normal de V^d dont V^d est la projection sur $P^n(\Omega)$. On peut donc toujours supposer qu'une *famille* $\mathcal{F}$ *est définie à partir d'une variété* V^d *normale.*

2. — LINÉARISATION D'UNE FAMILLE $\mathcal{F}^d$. DIMENSION D'UNE FAMILLE DE DIVISEURS

Soit r le degré de V^d, s celui du diviseur D_p.

Considérons l'hyperplan H(P) d'un espace projectif à $\frac{s(s+3)}{2} - 1$ dimensions, hyperplan correspondant au diviseur D_p dans le plongement s-uple de l'espace projectif : $P^m(\Omega)$.

Soient (Z_i) $\left(0 \leq i \leq \frac{s(s+3)}{2} - 1\right)$ les fonctions coordonnées homogènes de cet espace dans $P^{\frac{s(s+3)}{2}}(\Omega)$. L'équation de H(P) s'écrit :

$$\sum_{i=0}^{i=\frac{s(s+3)}{2}-1} u_i Z_i = 0$$

Soit $(u_0, \ldots, u_{\frac{s(s+3)}{2}-1}) = (u)$. Comme $k(u)$ est une sous extension de $k(x)$, c'est une extension régulière de k et par conséquent le lieu de (u) sur k est une variété U^e et la famille des hyperplans H(P) est une U^e famille.

Par conséquent, la V^d famille des diviseurs D_p est une U^e famille.

Nous appellerons la famille (U^e, H(P)) *la famille linéarisée de la famille* $\mathcal{F} = (V^d, S^{m+d-1})$

U^e est la variété de Chow de la famille de diviseurs.

L'ensemble singulier de la famille (U^e, $H(P)$) *est vide.*

D'autre part quelle que soit la variété V^d, qui entre dans la définition de la V^d famille $\mathcal{F}$ on a : $e \leq d$.

(1) P. Samuel. Méthodes d'Algèbre abstraite en Géométrie Algébrique Ergebnisse der Mathematik Springer Berlin 1955. Chap. II, § 6, n° 9.

Définition. La dimension e de la variété de Chow U^e de la V^d famille $\mathcal{F}$ est appelée dimension de la famille $\mathcal{F}$.

3. — LES COMPOSANTES « FIXES » DU DIVISEUR GÉNÉRIQUE

DÉFINITION. *Une composante* V_i *du diviseur générique est dite fixe si elle est algébrique sur k.*

Autrement dit déf(V_i) $\subset k$

Considérons un système complet V_i^σ de conjugués de V_i sur k et le diviseur :

$$X = \sum_\sigma n_{i,\sigma} \quad V_i^\sigma$$

$n_{i,\sigma}$ étant le coefficient avec lequel V_i^σ figure dans D_p. .

Nous allons montrer que X est rationnel sur k :

1° Il est par construction identique à tous ses conjugués sur k.

2° Désignons d'une façon générale par K(V_i) le corps des fractions rationnelles sur V_i à coefficients dans K.

Comme k(P) est extension régulière de k, on a (2)

$$[k(V_i^\sigma): \quad k]_i = [k(P)(V_i^\sigma): \quad k(P)]_i$$

Donc l'ordre d'inséparabilité de V_i sur k est le même que sur k(P). Or ce dernier divise n_i puisque D_p est rationnel sur k(P).

Donc $n_i \sum V_i^\sigma$ est rationnel sur k. Puisque c'est un diviseur il a une équation à coefficients dans k.

La présence de composantes fixes parmi les composantes du diviseur générique entraîne donc la décomposition du polynome f(X) en un produit $f_1 f_2$ avec $f_1 \varepsilon k[X]$ et $f_2 = k(x)$ [X].

Nous supposerons donc dans tout ce qui suit que le diviseur générique D_p *est dépourvu de composantes fixes.* .

4. — FAMILLE DE DIVISEURS DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE

1° V^1 est une courbe de $A^n(\Omega)$.

Nous pouvons donc la supposer non singulière, puisque le modèle normal V^1 est non singulier.

Dans ces conditions à tout point $P^o \varepsilon V^1$ est associé un unique diviseur D_{P_o}

Considérons en effet les coordonnées de Chow du diviseur générique D_p (ou les coefficients de sa forme associée) : ce sont des éléments de $k(x)$.

---

(2) A. WEIL. Foundations of Algebraic Geometry. Chap. I, n° 8, proposition 26, p. 23.

Considérons d'autre part, l'anneau local $\sigma_k(P^\circ, V^1)$ de P° sur V^1.

Il est intégralement clos et de dimension 1, c'est donc l'anneau d'une valuation discrète σ de rang 1, associée à l'unique place φ de $k(x)$ prolongeant la $k(P^\circ)$-spécialisation prolongeant $P \to P^\circ$

Les rapports des coordonnées de Chow à celle d'entre elles dont l'ordre pour v est minimum, sont alors dans l'anneau de la place φ.

2° *Définition du cycle caractéristique d'un diviseur* D_p.

Considérons un point quelconque $P^\circ \varepsilon V^1$ et le diviseur D_{P_0} qui lui est associé.

Soit $C^\star_{pp_0} = D_p.D_{p_0}$.

Le raisonnement fait au paragraphe précédent montre qu'un système de coordonnées de Chow de ce cycle est dans l'anneau de la place unique φ prolongeant la $k(P_o)$-spécialisation $P \to P_o$.

Par conséquent, la spécialisation $P \to P_o$ se prolonge en une unique spécialisation du cycle C_{PP_0}.

Soit P' un point générique de V, indépendant de P. Il existe un $k(P_o)$-automorphisme de $k(P)$ qui transforme P' en P. Par conséquent, les cycles C_{PP_0} et $C_{P'P_0}$ ont, dans les $k(P^\circ)$-spécialisations $P \to P^\circ$, $P' \to P^\circ$ respectivement, même spécialisation.

Définition. P° étant un point quelconque de V^1, P étant un point générique de V^1, on appelle cycle caractéristique du diviseur D_p *l'unique $k(P^\circ)$-spécialisation du cycle* $C^\star_{PP_0} = D_P.D_{P_0}$ *prolongeant $P \to P^\circ$.*

Ce cycle ne dépend que de la famille $\mathcal{F}$ et du diviseur D_{P_0}.

Nous le noterons C_{P_0}

3° *Détermination du cycle caractéristique du diviseur générique.*

Nous supposons désormais que la famille $\mathcal{F}$ a été linéarisée.

Soit $f(x_1, \ldots, x^n, Y_o, \ldots, Y_m) = f(x, Y) = 0$ l'équation du diviseur générique D_P.

Nous désignons par D_1 la k-dérivation de $k(x)$ qui prend la valeur 1 en x_1 (on suppose $k(x)$ séparable sur $k(x_1)$, ce qui est loisible).

THÉORÈME 1. *Le cycle intersection des diviseurs d'équations :*

$$f(x, Y) = 0 \ , \ D_1 f(x, Y) = 0$$

lorsqu'il est défini, est le cycle caractéristique du diviseur générique D_P.

Le cycle $C_{PP'}$ est en effet le cycle intersection des diviseurs d'équations :

$$f(x, Y) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{f(x'. Y) - f(x, Y)}{x'_1 - x_1} = 0$$

Nous avons démontré au chapitre 2 que, si l'on désigne par φ la place (unique) de $k(', x)$ qui prolonge la $k(x)$-spécialisation $x'_1 \to x_1$, on a quel que soit x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, $\varphi\left(\dfrac{x'_i - X_i}{x'_1 - x_1}\right) = D_1(x_i)$

On peut alors prolonger simultanément φ et D_1 en une $k(Y_0 \ldots, Y_m)$-dérivation de l'anneau $k(x)$ $[Y_0, \ldots, Y_m]$.

Le résultat est alors une conséquence de la comptabilité de la spécialisation et du produit d'intersection.

Dans le cas d'une famille à un paramètre *d'hypersurfaces* on peut préciser le théorème précédent de la façon suivante:

THÉORÈME 2. *Le cycle intersection des hypersurfaces d'équation*

$$f(x, Y) = 0 \ , \ D_1 f(x, Y) = 0$$

est défini et c'est le cycle caractéristique de l'hypersurface générique D_P.

$$\text{Soit } f(x, Y) = \sum_1^n x_i.M_i(Y) \ , D_1 f(x, Y) = \sum_2^n D_1(x_i).M_i$$

4° *Détermination du cycle caractéristique d'un diviseur* D_{P_0}.

Nous désignerons par (x_0) un système de coordonnées de P_0.

Nous avons démontré au chapitre 2 que, si l'on désigne par φ^0 l'unique prolongement (non nécessairement fini) à $k(x)$ de la $k(x_0)$-spécialisation : $(x) \to (x^0)$, on avait :

$$\varphi_0\left(\frac{x_i - x_i^0}{x_1 - x_1^0}\right) = \varphi_0(D_1(x_i))$$

Supposons en outre que $x_1 - x^0_1$ est une uniformisante locale de l'anneau de la place de $k(x)$ prolongeant la $k(x^0)$-spécialisation : $(x) \to (x^0)$.

Dans ces conditions :

Le cycle intersection des diviseurs d'équations :

$$f(x^0, Y) = 0 \text{ et } D_1 f(x^0, Y) = 0$$

lorsqu'il est défini, est le cycle caractéristique du diviseur D_{P_0}

5° Le cycle caractéristique C_{P_0} du diviseur D_{P_0} *(P^0 étant un point simple de V^1) n'est pas nécessairement* spécialisation (dans $P \to P^0$) du cycle caractéristique C_P du diviseur générique D_P.

Bien entendu une telle situation ne peut se produire que lorsque le cycle intersection des diviseurs d'équation :

$$f(x^0, Y) \text{ et } D_1 f(x^0, Y) = 0$$

n'est pas défini.

Considérons par exemple dans $P^2(\Omega)$ la famille de droites d'équation

$$(1 + t)Y_0 + (1 + t + t^p)Y_1 + (1 + t + at^{p+1})Y_2 = 0$$

(a est un élément de k)

Le point $P(x_o = 1 + t, x_1 = 1 + t + t^p, x_2 = 1 + t + at^{p+1})$ est générique sur V^1 et $k(x)$ est extension transcendante pure de k

Le point P^o (1, 1, 1) de paramètre o est simple sur V^1. On remarquera que la tangente en P^o à V^1 la coupe en p points confondus avec P^o.

Si P' est un point générique indépendant de P, $t' - t$ (resp. $t - 0$) est une uniformisante locale de $0_{k(P)}(P', V^1)$ (resp. $0_k(P, V^1)$).

Le point caractéristique de la droite D_{P_o} est $(-1, 0, 1)$ alors que le point caractéristique de la droite générique se spécialise en $(-a-1, a, 1)$.

Cherchons à quelle condition $\varphi_o(C_P) = C_{P_o}$ c'est-à-dire à quelle condition on a le diagramme de compatibilité suivant :

$$\begin{tikzcd}
C_{PP'} \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & C_{PP_o} \arrow[r] & D_{P_o} \arrow[d, leftrightarrow] \\
C_{PP} \arrow[r] & D_P \arrow[r] & D_{P_o}
\end{tikzcd}$$

A tout diviseur D_P est associé biunivoquement l'hyperplan $H(P)$ d'équation :

$$\sum_{i=o}^{i=N} x_i . Z_i = 0$$

A la variété linéaire : $L^*_{PP'} = h(P).H(P')$ correspond biunivoquement le cycle $C^*_{PP'}$.

En effet, $L^*_{PP'}$ définit un faisceau linéaire d'hyperplans, donc un faisceau linéaire de diviseurs D_p, donc un unique cycle $C^*_{PP'}$.

Soit (l) l'ensemble des coordonnées pluckériennes de $L^*_{PP'}$. Il existe dans le faisceau défini par $L^*_{PP'}$ des hyperplans rationnels sur $k(l)$. Par conséquent, le cycle $C_{PP'}$ que l'on peut définir à partir des diviseurs associés à ces hyperplans, est algébrique et purement inséparable sur $k(l)$. (1)

Soit (c) un système de coordonnées de Chow du cycle $C_{PP'}$. Il existe un entier $q > 0$ et des polynomes (a) à coefficients dans k, tels que :

$$c^{p^q} = a\,(l)$$

Il s'agit donc de montrer l'unicité de la spécialisation d'un système de coordonnées pluckériennes (P) de $L^*_{PP'}$.

Soit $t' - t$ une uniformisante locale de l'anneau $\sigma_{k(P)}(p', V^1)$ telle que $t - t^o$ soit uniformisante locale de l'anneau $\sigma_{k(Po)}(P, V^1)$, t^p étant l'image de t dans la $k(P^o)$-spécialisation $P \to P^o$.

On sait (1) qu'on peut faire en sorte qu'il existe de telles uniformisantes. Un système de coordonnées pluckériennes de $L^{\star}_{pp'}$ s'écrit

$$l^{\star}_{ij} = x_i x'_j - x_j x'_i = x_i(x'_j - x_j) - x_j(x'_i - x_i) \qquad o \leq i \leq N$$

Considérons le système $\dfrac{l_{ij}}{t'-t}$ et la place φ de $k(P, P')$ prolongeant la $k(P)$-spécialisation $P' \to P$:

$$\varphi \frac{l_{ij}}{t'-t} = x_i D_t x_j - x_j D_t x_i = x_i^2 D_t\left(\frac{x_j}{x_i}\right) = \lambda_{ij} \quad (o \leq i \leq j \leq N)$$

On peut choisir les x_i de manière que les λ_{ij} ne sont pas tous nuls. Un système de coordonnées non homogènes de P est en effet $(1, x_1, \ldots, x_N)$ et parmi les λ_{ij} figurent les $D_t x_i$ $(1 \leq i \leq N)$. Or on peut faire en sorte que la variété linéaire tangente L′ en P à V^1 ne soit parallèle à aucun des axes : *ce que nous supposerons désormais.*

Par conséquent $\lambda_{ij} = x_i D_t(x^j) - x^j D_t(x^i)$ $(0 < i < j < N)$ est un système de coordonnées de l'image du cycle caractéristique C_P du diviseur générique D_P.

Les x_i $(0 \leq i \leq N)$ étant dans $\sigma_{k(P_0)}(P, V^1)$ il en est de même de leurs dérivées $D_t x_i$ (3) donc des $x_i D_t x_j - x_j D_t x_i$ $(0 \leq i \leq j \leq N)$

Et l'on peut écrire :

$$x_i = x_i^0 + \sum_{q=+1}^{q=+\infty} \Delta_t^q (x_i^0)\,(t - t^0)^q$$

$$D_t x_i = \sum_{q=+1}^{q=+\infty} (q+1)\,\Delta_t^{q-1}(x_i^0)\,(t - t^0)^q$$

Considérons maintenant le cycle $C^{\star}_{PP_0} = D_P . D_{P_0}$ et son image L_{PP_0}. un système de coordonnées de $L^{\star}_{PP_0}$ est :

$$m_{ij} = x^0_i(x_j - x^0_j) - x^0_j(x_i - x^0_i) \qquad (0 \leq i \leq j \leq N)$$

Rappelons que φ_0 est la place unique de $k(P^0, P)$ prolongeant la $k(P^0)$-spécialisation $P \to P^0$

Les indices i et j étant fixés cherchons s'il existe une quantité proportionnelle à C_{ij} et une quantité proportionnelle au m_{ij} qui ont même image par φ_0.

---

(3) Cf. chapitre II, paragraphe 4.

Considérons le développement en série formelle de :

$$m_{ij} = \sum_{q=1}^{+\infty} [x_i^0 \Delta_t^q (x_j^0) - \Delta_t^q (x_i^0)] (t - t^0)^q$$

Soit s le rang du premier terme non nul de ce développement.

$$\varphi_0 \frac{m_{ij}}{(t-t^0)^s} = x_i^0 \Delta_t^s (x_j^0) - x_j^0 \Delta_t^s (x_i^0)$$

Considérons maintenant le développement en série formelle de λ_{ij}. en tenant compte du résultat trouvé pour m_{ij} :

$$\lambda_{ij} = \sum_{q=s}^{q=+\infty} q [x_i^0 \Delta_t^q (x_j^0) - x_j^0 \Delta_t^q (x_i^0)] (t - t^0)^{q-1}$$

$$+ \sum_{q=2}^{q=+\infty} \Bigg[\sum_{\substack{r+r'=q \\ 1 \leq r,\ 1 \leq r'}} A_{r,r'} \Bigg] (t - t^0)^q$$

avec :

$$A_{r,r'} = (r' + 1) [\Delta_t^r (x_i^0) . \Delta_t^{r-1} (x_j^0) - \Delta_t^{r+1} (x_j^0) . \Delta_t^{r'} (x_i^0)]$$

Les termes de degré $\leq s-1$ du développement de m_{ij} étant nul :

$$x^0_i . \Delta^r_t(x^0_j) - x^0_j \Delta^r_t(x^0_i) = 0 \qquad 0 \leq r \leq s-1$$

$$x^0_i \Delta_t^{r'+1} (x^0_j) - x^0_j \Delta_t^{r'+1} (x^0_i) = 0 \qquad 0 \leq r' + 1 \leq s-1$$

Or x^0_i et x^0_j ne sont pas tous nuls (sinon $\varphi_0 \dfrac{m_{ij}}{(t - t^0)^s}$ serait nul)

Par conséquent :

$$\Delta^r_t(x^0_j) . \Delta_t^{r'+1} (x^0_i) - \Delta^r_t(x^0_i) \Delta_t^{r'+1} (x^0_j) = 0$$

pour $0 \leq r \leq s-1$ *et* $0 \leq r' \leq s-2$.

Par conséquent, le terme de :

$$\sum_{q=r}^{q=+\infty} \Bigg[\sum_{\substack{r+r'=q \\ 1 \leq r,\ 1 \leq r'}} A_{r,r'} \Bigg] (t - t^0)^q$$

qui n'est pas nécessairement nul est de degré s.

Le terme de degré s est :

$$s[\Delta^s_t(x^0_i) . \Delta^1_t(x^0_j) - \Delta^s_t(x^0_j) . \Delta^1_t(x^0_i)] \; [t - t^0]s$$

Distinguons deux cas :

1° $s \neq 0$ (mod. p) : λ_{ij} est d'ordre $\geq s$

$$\varphi_0 \frac{\lambda_{ij}}{(t-t^0)^{s-1}} = s\,[x_i^0\, \Delta_t^s(x_j^0) - x_j^0\, \Delta_t^s(x_i^0)]$$

2° $s = 0$ (mod. p) : λ_{ij} est d'ordre $\geqslant s$. S'il est d'ordre $s \neq$ Q (mod. p)

$$\varphi_0 \frac{\lambda_{ij}}{(t-t^0)^{s}} = x_i^0\, \Delta_t^{s+1}(x_j^0) - x_j^0\, \Delta_t^{s+1}(x_i^0).$$

Soit v_0 la valuation associée à φ_0

THÉORÈME 3. *Une condition suffisante pour que le cycle caractéristique* C_{P_0} *du diviseur* D_{P_0} *soit spécialisation* (dans φ_0) *du cycle caractéristique* C_P *du diviseur générique* C_P *est que :*

$$\min_{o \leq i \leq j \leq N} v_0 \quad [x^\circ_i(x_j - x^\circ_j) - x^\circ_j(x_i - x^\circ_i)]$$

soit $\neq 0$ *(mod. p.).*

On peut exprimer cette condition autrement :

THÉORÈME 4. *Une condition suffisante pour que le cycle caractéristique* C_{P_0} *du diviseur* D_{P_0} *soit spécialisation* (dans φ_0) *du cycle caractéristique* C_P *du diviseur générique* D_P *est que :*

$$\min_{o \leq i \leq j^0 \leq N} v_0 \quad [x_i D_t x_j - x_j D_t x_i] = s'$$

soit $\neq 1$ *(mod. p.)*

Partie parasite du support du cycle caractéristique C_P *du diviseur générique* D_p.

1° *Faisceau linéaire tangent en un point d'une famille* $\mathcal{F}$

Nous supposons que la famille $\mathcal{F}$ a été linéarisée. Soient $P = (x)$ et $P' = (x')$ deux points génériques indépendants de V^1.

Soit $t' - t$ une uniformisante locale de $\mathfrak{o}_{k(P)}(P', V^1)$ et

$$x'_i - x_i = \sum_{q=1}^{q=+\infty} \Delta_t^q(x_i)\,(t'-t)^q$$

le développement Taylorien de x_i.

Nous supposons en outre que $k(x)$ est une extension régulière de $k(t)$ et que $k[x]$ est entier sur $k[t]$.

Le cycle caractéristique C_p est le cycle intersection des diviseurs d'équation

$$f(x, Y) = \sum_{i=o}^{i=n} x_i . M_i = 0 \qquad (D_p)$$

$$\sum_{i=0}^{i=n} D_t(x_i).\ M_i = 0 \qquad (E_p)$$

C'est donc le cycle de base du faisceau liénaire défini par D_p et E_p que l'on appelera « *le faisceau linéaire tangent à* $\mathcal{F}$ *en* P ».

On remarquera que ρ étant transcendant sur $k(x)$, le point $(x + \rho D_t(x))$ est générique de la variété linéaire tangente à V^1 en P. Il suffit de connaître cette variété linéaire tangente pour connaître C_p.

2° Cherchons une condition pour qu'un point non simple de D_p appartienne au support de C_p.

THÉORÈME. *Soit* (t) *une base de transcendance séparante de* $k(P)$ *sur* k. *Soit* $\bar{Q} = \bar{y}$ *un point non simple du diviseur générique* D_p, *tel qu'il existe une base de transcendance séparante de* $k(P, \bar{Q})$ *sur* k *de la forme* $(t, u_2, \ldots, u_s)$

(1) *Le point* $\bar{Q}$ *appartient au support du cycle caractéristique du diviseur générique* D_p.

La dérivation D_t de $k(P)$ se prolonge — *grâce à la séparabilité* — en une dérivation $\bar{D}_t$ de $k(P, \bar{Q})$ définie par les conditions :

$$\bar{D}_t(u_i) = 0 \quad \text{pour} \quad r \leq i \leq s\ (4)$$

Le point $\bar{Q}$ étant non simple sur D_p d'équation $f(x, Y) = 0$

$$\bar{D}_t f(x, \bar{y}) = (D_t f(x, Y)) \quad Y = \bar{y} = 0$$

$\bar{Q}$ *appartient donc au support du cycle caractéristique.*

En particulier :

THÉORÈME. *En caractéristique* $p = 0$, *tout point* $\bar{Q}$ *non simple du diviseur générique* D_p *appartient au cycle caractéristique de* D_p.

5. — FAMILLE DE DIVISEURS DÉPENDANT DE d PARAMÈTRES

Soient $P = (x)$ un point générique et $P_o = (x^o)$ un point simple de la variété V^d.

Soit φ une place de $k(P, P^o)$ prolongeant la $k(P_o)$-spécialisation $P \to P_o$, *et telle, en outre, que la valuation associée soit discrète et de rang 1.*

Nous désignerons par D_φ la dérivation associée à φ.

---

(4) Cette condition est essentielle. Si elle n'est pas satisfaite Q peut fort bien ne pas appartenir au support de C_p. Il en est ainsi par exemple du point non simple $y_0 = 1$, $y_1 = t^{2/p}$, $y_2 = t$, de la courbe générique du faisceau d'équation :

$$Y^p_1 + Y^2_2 - 2tY_2Y_0 = 0$$

Cf. Oscan Zariski. The Theorem of Bertini on the variable singular Points of a linear system of varieties. Transaction of the American Mathematical Society Vol 56, N° 1, 130-140. July 1941.

On sait (cf. chap. II) que :

$$D_\varphi = \sum_{i=d}^{i=d} D_\varphi(t_i).\, Dt_i \tag{1}$$

$(t) = (t_1, \ldots, t_d)$ étant une base de transcendance séparante de $k(x)$ sur k telle que $k[x]$ soit entier sur $k[t]$.

Définition. On appelle cycle φ-caractéristique $C^\varphi_{P_O}$ *du diviseur* D_{P_0} *l'unique spécialisation du cycle* $C_{PP_0} = D_P.D_{P_0}$ *dans la place* φ *prolongeant la* $k(P_o)$*-spécialisation* $P \to P_o$.

Cette définition se justifie comme précédemment et tous les théorèmes démontrés dans le cas d'un seul paramètre sont vrais pour un cycle φ-caractéristique.

La raison en est qu'une fois la place φ déterminée, on est ramené au cas d'un seul paramètre par la considération de l'uniformisante locale $T - T_\varphi - T^0_\varphi$. Cf. Chap. II (représentation paramétrique d'une place).

En particulier, le cycle φ-caractéristique générique est le cycle intersection des diviseurs d'équation :

$$f(x, Y) = 0 \quad (D_p) \qquad , \qquad D_\varphi f(x, Y) = 0 \quad (E^\varphi{}_p) \qquad (2)$$

Désignons par φ_i la place — discrète et de rang 1 — à laquelle est associée la dérivation D_{t_i}.

THÉORÈME 1. *Le cycle φ-caractéristique* $C^\varphi{}_P$ *du diviseur générique* D_P *est élément générique d'un système linéaire* C_P *de dimension d égale à celle de* $\mathfrak{F}$

Les cycles φ_i*-caractéristiques* $C^\varphi{}_P$ *constituent une base de ce système linéaire* $|C_P|$.

Ce théorème est une conséquence immédiate de l'égalité (1) et du fait que la $k(P)$-dérivation D_φ est déterminée par les valeurs (*arbitraires*) choisies pour les $D_\varphi(t_i)$.

Une conséquence importante de ce théorème est que *tout point de* D_P *appartient au support de* ω^{d-1} *cycles φ-caractéristiques.*

Considérons maintenant le cas particulier $d = n - 1$. Les points supports du cycle :

$$D_p. \prod_{i=1}^{i=n-1} C_p^{\varphi_i}$$

appartiennent au support de n'importe quel cycle ρ-caractéristique.

DÉFINITION. *Lorsque* $d = n - 1$ *le cycle* $D_p . \prod_{i=n-1}^{i=1} C_p^{\varphi_i}$ *est appelé cycle caractéristique du diviseur générique.*
(on se rappelera qu'un cycle φ-caractéristique est de dimension $n - 2$ et le cycle caractéristique de dimension 0).

REMARQUES.

Il est des cas où l'on peut préciser certains de ces résultats (5).

Considérons par exemple dans le plan A^2 (Ω) une famille à un para mètre de droites.

Nous supposons que la famille a été linéarisée : elle est définie par les équations :

$$1 + x_1 Y_1 + x_2 Y_2 = 0 \qquad D_P$$
$$\varphi(X_1, X_2) = 0.$$

Supposons qu'il existe sur la droite D_P un point $C_P = y_1, y_2)$ tel que $k(x_1, x_2)$ soit une extension algébrique inséparable de $k(y_1, y_2)$.

Il existe alors une k-dérivation non nulle D de $k(x_1, x_2)$ nulle sur $k(y_1, y_2)$.

Par application de D à la relation :

$$1 + x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0$$

on obtient :

$$y_1 D(x_1) + y_2 D(x_2) = 0.$$

Le point (y_1, y_2) *est donc caractéristique de la droite* D_P.

(5) Cf. dans le cas de caractéristique $p = 2$, P. BOUGHON, Mlle J. NATHAN et P. SAMUEL, Courbes planes en caractéristique 2. Bulletin de la Société Mathématique de France 1955.

Chapitre IV.

ENVELOPPES D'UNE FAMILLE DE VARIÉTÉS

1. — DÉFINITION D'UNE ENVELOPPE

Nous considérons ici une famille d'hypersurfaces (donc de diviseurs irréductibles) $\mathcal{F}$ de dimension d.

Il faut entendre par là que l'élément générique D_P de la famille $\mathcal{F}$ tel qu'il a été défini dans e chapitre précédent, est une variété, mais bien entendu certains éléments de $\mathcal{F}$ peuvent ne pas être absolument irréductibles.

Autrement dit, si $f(x, Y) = 0$ est l'équation de la variété générique D_p, f est irréductible sur $\overline{k(x)}$.

On a donc : $f\, k[x, Y^p]$.

Par contre, f peut appartenir à $k[(x^p), Y]$.

Définition : *On appelle enveloppe $\mathcal{E}$ de la famille de variétés $\mathcal{F}$* [6] *tout diviseur rationnel sur k, dont toute composante absolument irréductible E possède la propriété suivante :*

Posons : $E.D_p = \sum_{1}^{q} a_{\bar{1}} . Y_i$ *;il existe un Y_1, au moins, tel que* E et D_p *soient tangents en un point générique de Y_1 sur $\overline{k(x)}$.*

Cette définition appelle quelques remarques, en particulier :

Une enveloppe est un *diviseur* donc a même dimension que D_p. Par exemple, si une sous-variété propre de D_p est fixe, celle-ci n'est pas une composante de l'enveloppe. Bien entendu il peut se faire qu'elle soit une sous-variété (propre) d'une composante de l'enveloppe.

Lorsque k n'est pas de caractéristique nulle, l'exemple très simple des droites de $P^2(\Omega)$ qui passent par le point $(0, 0, 1)$ et qui sont les tangentes aux courbes planes dont une équation est de la forme

$$f(Y_o, Y_1, Y^p_2) = 0$$

montre l'existence d'une *infinité* d'enveloppes.

De même, considérons en caractéristiques $p = 2$, la famille des droites :

$$(x^2_o.Y_o + x^2_1.Y_1 + x^2_2.Y_2 = 0 \quad , \quad X^3_o + X^3_1 + X^3_2 = 0)$$

---

(6) P. Boughon. Enveloppes d'une famille à un paramètre de variétés de dimension m-1 dans un espace de dimension m. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 238, p. 641-644, séance du 8 février 1954.

Enveloppes d'une famille à m-1 paramètres de variétés de dimension m. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 239, p. 23-25, séance du 5 juillet 1954.

(on notera que nous ne supposons plus qu'il s'agit de familles rationnelles de variétés.)

qui est la famille des tangentes à la courbe d'équation :

$$Y^3_o + Y^3_1 + Y^3_2 = 0.$$

Il est facile de montrer en s'appuyant sur les résultats du chapitre précédent que le point caractéristique de la tangente au point (x_o, x_1, x_2) est le point (x^4_o, x^4_1, x^4_2) qui est le *tangentiel du premier.*

2. — RECHERCHE DES ENVELOPPES D'UNE FAMILLE D'HYPERSURFACES

Nous aurons surtout à étudier le comportement de différentes variétés en un point générique d'une composante de leur cycle d'intersection. Nous nous placerons désormais dans l'espace $A^m(\Omega) x A^n(\Omega)$. Nous appelerons $A^m(\Omega)$ (resp. $A^n(\Omega)$) le facteur horizontal (resp. vertical) du produit.

Désignons par Y_j $(1 \leq j \leq m)$ les fonctions coordonnées dans $A^m(\Omega)$, par X_i $(1 \leq i \leq n)$ les fonctions coordonnées dans $A^n(\Omega)$.

Rappelons que P désignant un point générique de la variété de paramètres V^d, on définit l'hypersurface générique D_P de la famille $\mathcal{F}$ par :

$$D_p = \text{proj.}_{A^m(\Omega)} [S^{m+d-1} . (P^m(\Omega) \times P.)]$$

S^{m+d-1} étant ici une hypersurface de l'espace $P^m(\Omega) \times V^d$.

Immergeons tous les ensembles algrébriques considérés dans :

$$A^m(\Omega) \times A^n(\Omega).$$

Soit $f_\alpha(X) = 0$ un système d'équations de V^d. Un système d'équations de S^{m+d-1} s'écrit : $f(X, Y) = 0$, $f_\alpha(X) = 0$.

Considérons d diviseurs W^{m+n-1} $(1 \leq r \leq d)$ définis sur k et soit $f_r(X, Y) = 0$ l'équation du diviseur W_r^{m+n-1}.

Nous supposons que les W_r^{m+n-1} $(1 \leq r \leq d)$ sont choisis de manière que le cycle :

$$\overline{\mathcal{E}} = S^{m+d-1} . \prod_1^d W_r^{m+n-1}$$

soit défini, et que chacune de ses composantes y figure avec le coefficient 1.

Soit $\overline{Q} = (x, y)$ un point générique de l'une de ces composantes $\overline{E}$.

Désignons par :

H_r^{m+n-1} $1 \leq r \leq d$ l'hyperplan tangent en $\overline{Q}$ à W^{m+n-1}. Soit $T_r(X, Y) = 0$ son équation.

H^{m+n-} l'hyperplan tangent en $\overline{Q}$ à l'hypersurface d'équation $f(X, Y) = 0$. Soit $T(X, Y)$ son équation.

H_r^{m+n-1} $d + 1 \leq r \leq n$ l'hyperplan tangent en Q à l'hypersurface d'équation $f_r(X) = 0$, les f

étant choisis parmi les f de manière que le cycle :

$$H^{m+n-1} . \prod_{r=d+1}^{n} H_r^{m+n-1}$$

soit défini. C'est alors la variété linéaire Λ^{m+d-1} tangente en $\overline{Q}$ à S^{m+d-1}.

Soit $T_r(X) = 0$ une équation de H_r^{m+n-1} $(d + 1 \leq r \geq n)$.

Considérons la variété linéaire tangente $L^{m-1}(\overline{E})$ en $\overline{Q}$ à $\overline{E}$.

Un système d'équations de L^{m-1} s'écrit :

$$L^{m-1}(\overline{E}) \left\{ \begin{array}{lll} T(X_1,\ldots,X_n,\ Y_1,\ldots,Y_m) = T(X,\ Y) = 0 & & (H^{m+n-1}) \\ T_1(X_1,\ldots,X_n,\ Y_1,\ldots,Y_m) = T_1(X,\ Y) = 0 & & (H_1^{m+n-1}) \\ T_d(X_1,\ldots,X_n,\ Y_1,\ldots,Y_m) = T_d(X, Y) = 0 & & (H_d^{m+n-1}) \\ T_{d+1}(X_1,\ldots,X_n) = T_{d+1}(X) = 0 & & (H_{d+1}^{m+n-1}) \\ T_n(X_1,\ldots,X_n) = T_n(X) = 0 & & (H_n^{m+n-1}) \end{array} \right.$$

Considérons également la variété linéaire $L^{m-1}(\overline{D})$ tangente en $\overline{Q}$ à la variété :

$$\overline{D}_P = S^{m+d-1} . [P^m(\Omega) \times P]$$

Un système d'équations de $L^{m-1}(\overline{D})$ s'écrit :

$$L^{m-1}(\overline{D}) \left\{ \begin{array}{ll} T(X, Y) = 0 & (H^{m+n-1}) \\ X_1 - x_1 = 0 & \\ & \\ X_n - x_n = 0 & \end{array} \right.$$

Chaque polynome T ou T_r $(1 \leq r \leq n)$ est défini sur $k(x, y)$.

Remarquons que bien que les polynomes f et f_r $(d + 1 \leq r \leq n)$ sont déterminés, *tous* les polynomes T ou T_r $(1 \leq r \leq n)$ dépendent du choix que l'on fait des diviseurs W_r^{m+n-1} $(1 \leq r \leq d)$.

C'est évident pour les T_r tels que $1 \leq r \leq d$. Pour les autres cela provient de ce que le point $Q = (x, y)$ dépend du choix des W_r.

Nous nous proposons de chercher s'il est possible de choisir les diviseurs W_r^{m+n-1} $(1 \leq r \leq d)$ de manière que $L^{m-1}(\overline{E})$ et $L^{m-1}(\overline{D})$ *aient même projection sur* $A^m(\Omega)$. (*projection horizontale*).

Les équations de la projection de $L^{m-1}(\overline{D})$ sur $A^m(\Omega)$ sont :

$$X_i = 0 \quad (1 \leq i \leq n), \quad T(x, Y) = 0$$

Le problème revient donc à choisir les f_r $(1 \leq r \leq d)$ de manière que l'hyperplan L^{m+n-1}, d'équation : $T(x, Y) = 0$, contienne la variété linéaire : $L^{m-1}(\bar{E})$.

Désignons par Λ^{m+d-1} la variété linéaire dont un système d'équations est :

$$T(X, Y) = 0, \quad T_r(X) = 0 \quad (d + 1 \leq r \leq n)$$

a) Supposons que les W_r^{m+n-1} puissent être choisis de manière que l'hyperplan H^{m+n-1} (d'équations $T(X, Y) = 0$) soit vertical $L^{m-1}(\bar{E})$ et $L^{m-1}(\bar{D})$ ont alors même projection horizontale puisque l'une et l'autre sont contenues dans cet hyperplan.

THÉORÈME 1. *Une condition suffisante pour que :* $L^{m-1}(\bar{E})$ *et* $L^{m-1}(\bar{D})$ *aient même projection horizontale est que les* W_r^{m+n-1} *puissent être choisis de manière que l'hyperplan* H^{m+n-1} *(d'équation* $T(X, Y) = 0$*) soit vertical.*

b) *Soit g,* $(1 \leq g \leq d)$ *un entier déterminé.*

Nous faisons l'hypothèse que les diviseurs W_r^{m+n-1} $(1 \leq r \leq g < d)$ *ont été choisis de manière que* H^{m+d-1} *soit parallèle à ceux des axes* X_i *tels que :* $1 \leq g \leq d$.

Soit :

$$(\Lambda^{m+d-1}) \left[\begin{array}{ll} \sum_{1}^{n} a_i (X_i - x_i) + \sum_{j=1}^{j=m} b_j (Y_j - y_j) = 0 & T \\ T_r(X) = 0 \qquad d + 1 \leq r \leq n. & (H_r^{m+n-1}) \end{array}\right.$$

un système d'équations de Λ^{m+d-1}.

Un système d'équations de : proj. $_{A^m(\Omega)}$ $L^{m-1}(D)$ est donc :

$$(L^{m-1}(\bar{D})) \left[\begin{array}{l} \sum_{j=1}^{j=m} b_j (Y_j - y_j) = 0 \\ X_i = 0 \qquad 1 \leq i \leq n \end{array}\right.$$

2° Rappelons à nouveau que la définition de D_p est :

$$D_p = \text{proj.}_{A^m(\Omega)} [S^{m+d-1}. (A^m(\Omega) \times P)]$$

Mais ici S^{m+d-1} est une variété (au lieu d'un cycle).

Immergeons S^{m+d-1} dans $A^m(\Omega) \times A^n(\Omega)$.

Supposons qu'il existe une sous variété *simple* E^{m-1} de S^{m+d-1} dont la projection E sur $P^m(\Omega)$ soit une composante E d'une enveloppe ε, projection du cycle $\bar{\varepsilon}$ de S^{m+d-1}.

Soit $D^{m-1} = S^{m+d-1}. A^m(\Omega)xP$ (qui est absolument irréductible puisque D_p l'est) et Q un point générique d'une composante du cycle $Y = E^{m-1}.D^{m-1}$ (intersection prise sur S^{m+d-1}). Le point Q est simple sur S^{m+d-1}.

Désignons par :

$L^{m+d-1}(S)$	la variété linéaire tangente à S^{m+d-1}	en $\overline{Q}$.
$L^{m-1}(\overline{D})$	la variété linéaire tangente à D_p^{m-1}	en $\overline{Q}$.
$L^{m-1}(\overline{E})$	la variété linéaire tangente à E^{m-1}	en $\overline{Q}$.

Toutes ces variétés sont également immergées dans $A^m(\Omega) \times A^n(\Omega)$.

Par hypothèse les variétés $L^{m-1}(D)$ et $L^{m-1}(E)$ ont même projection sur $P^m(\Omega)$, donc sont contenues dans une même variété linéaire $L^{m+d-1}(D)$ parallèle à $A^n(\Omega)$ et que nous dirons verticale.

La trace $A^m(\Omega).L^{m+d-1}(D)$ de $L^{m+d-1}(D)$ sur $A^m(\Omega)$ est la variété linéaire tangente à D_p en Q, projection verticale de $\overline{Q}$, et point générique de E.

Soit $Y = E.D_p$; soit w_r^1 un diviseur, algébrique sur $k(P)$, contenant Y et par ailleurs *soumis à la condition d'être non tangent à* D_p *en presque tout point de chaque composante de Y.* Le diviseur w_r^1 peut ne pas être rationnel sur $k(P)$; mais le diviseur $w_r = \sum_i W_i^r$, les w_r^i formant un système complet de conjugués de w^{r1}, est rationnel sur $k(P)$, donc a une équation à coefficients dans $k(P)$.

D'autre part, on sait (7) qu'il existe un diviseur w^r de $A^m(\Omega) \times A^n(\Omega)$ défini sur k et tel que :

$$w_r = \text{proj.}_{A^m(\Omega)} [W_r.\ A^m(\Omega)\times P]$$

Etant donné le cycle $\bar{\varepsilon}$, il existe d diviseurs positifs w_r, $(1 \leq r \leq d)$ du type ci-dessus tels que :

$$S^{m+d-1}. \prod_{r=1}^{r=d} W_r^{m+n-1}$$

soit défini et contienne chaque composante $\overline{E}$ *de* $\bar{\varepsilon}$ *avec le coefficient 1.* On suppose de plus ces diviseurs soumis aux conditions suivantes :

A) *Pour toute composante irréductible* D^m *du cycle* $C = W_1 \ldots W_d$ *on a :*

$$\text{proj.}_{A^m(\Omega)} D^m = A^m(\Omega)$$

B) *Les diviseurs* D_p *et* w_r *(de* $P^m(\Omega)$ *) sont tangents en presque tout point de leur cycle d'intersection.*

(7) Weil. Foundations of Algebraic Geometry. Chap. VII, Théorème 12.

Dans ces conditions on a :

$$L^{m-1}(\bar{E}) = L^{m+d-1}(S). \prod_{r=1}^{r=d} L^{m+n-1}(W_r)$$

en désignant par $L^{m+n-1}(W_r)$ la variété linéaire tangente à W_r^{m+n-1} en Q.

3° Etudions tout d'abord le cas d'une famille d'hypersurfaces à un paramètre ($d = 1$).

Soit $f(x, Y) = 0$ $f_\alpha(X) = 0$ un système d'équations de S^m dans $A^m(\Omega) x A^n(\Omega)$.

Soit $\varphi_1(X, Y) = 0$ l'équation d'un diviseur W_1^{m+n-1}.

Soient : $\bar{\varepsilon} = S^m . W_1^{m+n-1}$,

$\bar{E}$ l'une des composantes de ce cycle,

$\bar{Q} = (x, Y)$ un point générique de E.

Nous supposons qu'au point $\bar{Q}$ les variétés linéaires tangentes à S^m et W_1^{m+n-1} existent et sont transversales.

Dans ces conditions un système d'équations de $L^{m-1}(D)$, variété linéaire tangente à $\bar{E}$ en $\bar{Q}$ s'écrit :

(les notations sont en correspondance avec celles des paragraphes n° 1 et 2), et les f_r $(2 \leq r \leq n)$ sont choisis parmi les f_α.

$$L^{m-1}(E) \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} H^{m+n-1}\, T(X, Y) = \sum_{i=1}^{i=n} (X_i - x_i) \dfrac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{j=m} (Y_j - y_j) \dfrac{\partial f}{\partial y_j} \\ H_r^{m+n-1}\, T_r(X, Y) = \sum_{i=1}^{i=n} (X_i - x_i) \dfrac{\partial f_r}{\partial x_i} = 0 \quad (2 \leq r \leq n) \end{array} \right\} A^m \\ H_1^{m+n-1}\, T_1(X, Y) = \sum_{i=1}^{i=n} (X_i - x_i) \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{j=m} (Y_j - y_j) \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y_j} \end{array} \right.$$

Cherchons s'il est possible de choisir W_1^{m+n-1}, c'est-à-dire $\varphi_1 \varepsilon k[X, Y]$ de manière que $D = \text{proj.}_{A^m(\Omega)} \bar{D}$ soit composante d'une enveloppe ε.

Nous savons qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que

$$\text{proj.}_{A^m(\Omega)} L^{m-1}(E) = L^{m-1}(D_p)$$

Or l'équation, dans $A^m(\Omega)$, de $L^{m-1}(D_p)$ est :

$$\sum_{j=1}^{j=m} (Y_j - y_j) \frac{\partial f}{\partial y_j} = 0$$

a) Cherchons s'il est possible de choisir $Q = (x, Y)$ de manière qu'en Q, Λ^m soit « vertical ». Pour qu'il en soit ainsi, il faut et suffit que $Q = (x, y)$ soit choisi de manière que l'hyperplan d'équation :

$$\sum_{i=1}^{i=n} (X_i - x_i) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

appartienne au système linéaire défini par les hyperplans : H_r^{m+n-1} $(2 \leq r \leq n)$

Il faut et suffit donc que (x, y) appartienne au diviseur d'équation :

$$\frac{D(f, f_2, \ldots, f_n)}{D(X_1, \ldots, X_n)} = 0$$

donc en désignant par $\overline{I(E)}$ l'idéal (de k X, Y) de la variété $\overline{E}$.

$$\frac{D(f, f_2, \ldots, f_n)}{D(X_1, \ldots\ldots, X_n)} \in I(\overline{E})$$

Désignons d'une façon générale par (u, v, w) l'idéal de $k[X, Y]$ engendré par les éléments u, v, w, de cet anneau.

On a :

$$(f, (f_r), \varphi_1) \subset I(\overline{E})$$

Une condition suffisante pour que $\frac{D(f, f_2, \ldots f_n)}{D(X_1, \ldots, X_n)} \in i(E)$ est donc,

$$\frac{D(f, f_2 \ldots, f_n)}{D(X_1, \ldots, X_n)} \in (f, (f_r), \varphi_1)$$

et à son tour une condition suffisante pour qu'il en soit ainsi est de choisir :

$$\varphi_1 = \frac{D(f, f_2, \ldots, f_n)}{D(X_1, \ldots\ldots, X_n)}$$

Cette condition n'est, bien entendu, *nullement nécessaire*.

On retrouve des équations connues. Un point $\overline{Q} = (x, y)$ où Λ^m est vertical appartient au contour apparent vertical de S.

Parmi les nombreuses singularités qui peuvent se produire signalons la suivante qui ne peut avoir lieu qu'en caractéristique $p > 0$:

Le polynome φ_1 appartient à l'idéal de S^m : en particulier il peut se faire qu'il soit nul.

L'hyperplan H^{m+n-1} est alors vertical en un point générique de S^m. (ce cas se présente en particulier toutes les fois que l'on cherche les enveloppes de la famille des tangentes aux courbes planes dont une équation dans $A^r(\Omega)$ est de la forme :

$$f_1(Y) = Y_1U_1(Y^p{}_1, Y^p{}_2) + Y_2U_2 \ (Y^p{}_1, Y^p{}_2) + 1)$$

On peut, pour éviter cette difficulté suivre une méthode analogue à celle du chapitre III.

Soit s le degré de V^1. Plongeons $A^n(\Omega)$ dans son modèle $\frac{(s+1)\ (s+2)}{2}$ -uple. L'image de V^1 dans ce plongement est une variété de dimension 1 et si $T_i \left(1 \leq i \leq \frac{(s+1)\,(s+2)}{2}\right)$ sont les fonctions coordonnées dans $A^{\frac{(s+1)\,(s+2)}{2}}(\Omega)$, le polynome f s'écrit linéairement par rapport aux T_i.

Pratiquement, il n'est pas toujours indispensable de « linéariser V^1 ». Considérons par exemple la famille suivante de droites de $A^r(\Omega)$; la caractéristique étant égale à 2.

$$f(X, Y) = x_1{}^2Y_1 + x_2{}^2Y_2 + 1 = 0 \qquad (D_p)$$
$$f_1(X) = X_1{}^3 + X_2{}^3 + 1 = 0 \qquad (V^1)$$

Posons : $u = x_1{}^2$, $v = x_2{}^2$. Le lieu du point (u, v) est la même courbe V^1 (circonstance sans importance ici).

Cette famille de droites peut être définie par :

$$F(U, Y) = U_1Y_1 + U_2Y_2 + 1 = 0$$
$$f_1(U) = U^3{}_1 + U^3{}_2 + 1 = 0$$

On a alors :

$$\frac{D\,(F, f_1)}{D\,(U_1, U_2)} = U_2^2\,Y_1 + U_1^2\,Y_2$$

En éliminant U_1 et U_2 entre :

$$F\,(X, Y) \equiv 0,\ f_1\,(U) = 0,\ \frac{D\,(F, f_1)}{D\,(U_1, U_2)} = 0$$

on obtient une équation de l'enveloppe :

$$Y^3{}_1 + Y^3{}_2 + 1 = 0$$

Il est clair que l'on obient alors une enveloppe $\mathcal{E}$ en choisissant pour φ_1 un polynome arbitraire de $k[X, Y]$ *satisfaisant aux conditions A, B, C et D. On ne peut en particulier choisir* φ *dans* $k[Y]$ (*condition C*).

Plaçons nous dans le cas où le polynome $\frac{D\,(f, f_2 \ldots f_n)}{D(X_1, \ldots, X_n)} = 0$

On voit ainsi apparaître pour la première fois, lorsque la caractéristique est > 0, *une infinité d'enveloppes.*

b) Montrons qu'il existe toujours lorsque $p > 0$, une infinité d'autres enveloppes.

THÉORÈME 2. *Soit* $\overline{\mathcal{E}}$ *un cycle de la forme* $\overline{\mathcal{E}} = S^m.W_1{}^{m+n-1}$ où W_1 *un diviseur dont l'équation* $\varphi_1 = 0$ *est telle que :*

$$1° \quad \varphi_1(X, Y) \varepsilon k\, X, Y^p$$

$$2°) \quad \frac{D(\varphi_1, f_2 \ldots f_n)}{D(X_1, \ldots, X_n)} \neq 0$$

en un point générique d'une composante quelconque $\bar{E}$ *de* $\overline{\mathcal{E}}$ *alors* $\overline{\mathcal{E}}$ *se projette sur* $A^m(\Omega)$ *suivant une enveloppe.*

La première condition imposée au diviseur $W_1{}^{m+n-1}$ implique que la variété linéaire tangente en l'un de ses points génériques est parallèle à

$$A^n(\Omega) \qquad \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial Y_j} = 0,\ 1 \leq j \leq m\right)$$

La deuxième condition implique la transversalité des hyperplans $H_1{}^{m+n-1}$, $H_r{}^{m+n-1}$ $(2 \leq r \leq n)$. Un système d'équations de la variété linéaire qu'ils définissent est donc $X_i - x_i = 0$ $(1 \leq i \leq n)$ ce qui entraîne le résultat.

L'existence de ces enveloppes est donc une conséquence directe de l'existence sur S^m *de variétés non situées dans des variétés linéaires horizontales et dont la variété linéaire tangente au point générique est horizontale.*

THÉORÈME 3. *Etant donnée une famille d'hypersurfaces dépendant d'un seul paramètre, il n'y a pas d'autres enveloppes que celles trouvées en a et b.*

Soit ε un cycle de S^m tel que : proj. $_{A^m(\Omega)}\ \overline{\mathcal{E}} = \overline{\mathcal{E}}$ soit une enveloppe et soit $\bar{Q}$ un point générique d'une composante $\bar{D}$ de .

Un système d'équations de la variété linéaire tangente Λ^m à S^m en $\bar{Q}$ s'écrit :

$$\Lambda^m \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} (X_i - x_i)\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad \sum_{j=1}^{j=m} (Y_j - y_j)\frac{\partial f}{\partial y_j} = 0 \\ \displaystyle T_r(X, Y) = \sum_{i=1}^{i=n} (X_i - x_i)\frac{\partial f_r}{\partial x_i} = 0 \qquad 2 \leq r \leq n \end{cases}$$

Procédons par disjonction des cas :

a′) $\dfrac{D(f, f_2, \ldots, f_r)}{D(X_1, \ldots, X_n)} \neq 0 <$ en $\overline{Q}$. Montrons que l'on est dans le cas *b*.

Un système d'équations de Λ^m déduit du précédent est :

$$\Lambda^m : X_i - x_i = 0 \; (1 \leq i \leq n), \quad \sum_{j=1}^{j=m} (Y_j - y_j) \frac{\partial f}{\partial y_j} = 0$$

Un système d'équations de $L^{m-1}(\overline{E})$ est donc :

$$L^{m-1}(E) : X_i - x_i = 0 \quad (1 \leq i \leq n), \; \sum_{j=1}^{j=m} (Y_j - y_j) \frac{\partial f}{\partial y_j} = 0$$

$$\sum_{j=1}^{j=m} (Y_j - y_j) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_j} = 0$$

α) Les deux hyperplans d'équations :

$$\sum_{j=1}^{j=m} (Y_j - y_j) \frac{\partial f}{\partial y_j} = 0 \text{ et } \sum_{j=1}^{j=m} (Y_j - y_j) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_j} = 0$$

sont confondus.

Les variétés linéaires tangentes à D_p^{m-1} et w_1^{m+n-1} en Q ne sont pas transversales contrairement aux hypothèses.

β) Les deux hyperplans définis en ne sont pas confondus

$$\operatorname{proj}_{A^m(\Omega)} L^{m-1}_{\overline{E}} \neq \operatorname{proj.}_{A^m(\Omega)} L^{m-1}_{\overline{D}}$$

ce qui est absurde.

C'est donc que $\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y_j} = 0$ pour $1 \leq j \leq m$.

Supposons que $\varphi_1 \, k[X, Y^p]$.

Considérons alors $W_1 = \operatorname{proj.}_{A^m(\Omega)} W_1 \, P \times A^m(\Omega)$.

Le point $Q = \operatorname{proj.}_{A^m(\Omega)} \overline{Q}$ $(Q = (y)$ est non simple sur W_1 et la variété linéaire tangente en Q à W_1 n'existe pas contrairement aux hypothèses. Donc $\varphi_1 \varepsilon k[X, Y^p]$ et l'on est bien dans le cas *b*.

4° Etudions maintenant le cas d'une famille d'hypersurfaces dépendant de *d* paramètres $d \leq 2$.

Soit $f(x, Y) = 0$, $f_\alpha(X) = 0$, un système d'équations de S^{m+d-1} dans $A^m(\Omega) \times A^n(\Omega)$.

Soit $\varphi_r(X, Y) = 0$, l'équation du diviseur W_r^{m+n-1} $(1 \leq r \leq d)$

Soient :
$$\mathcal{E} = S^{m+d-1} \prod_{r=1}^{r=d} W_r^{m+n-1}$$

$\bar{E}$ l'une des composantes de ce cycle.
$\bar{Q} = (x, y)$ un point générique de $\bar{E}$.

Nous supposons qu'au point $\bar{Q}$ les variétés linéaires tangentes à S^{m+d-1}, W_r^{m+n-1} $(1 \leq r \leq d)$ existent et sont transversales.

Dans ces conditions un système d'équations de $L^{m-1}(\bar{E})$ variété linéaire tangente à $\bar{E}$ en $\bar{Q}$ s'écrit :

(les notations sont en correspondance avec celles des paragraphes n° 1, 2, 3 et les f_r $(d + 1 \leq r \leq n)$ sont choisis parmi les f_a)

$$L^{m-1}(\bar{E}) \begin{cases} \Lambda^{m+d-1} \begin{cases} H^{m+n-1} \; T(X, Y) = \sum\limits_{i=1}^{i=n} (X_i - x_i) \dfrac{\partial f}{\partial x_i} + \sum\limits_{j=1}^{j=m} (Y_j - y_j) \dfrac{\partial f}{\partial y_j} = \\ H_r^{m+n-1} \; T_r(X, Y) = \sum\limits_{i=1}^{i=n} (X_i - x_i) \dfrac{\partial f_r}{\partial x_i} = 0 \; (d + 1 \leq r \leq n) \end{cases} \\ H_r^{m+n-1} \; T_r(X, Y) = \sum\limits_{i=1}^{i=n} (X_i - x_i) \dfrac{\partial \varphi_r}{\partial x_i} + \sum\limits_{j=1}^{j=m} (Y_j - y_j) \dfrac{\partial \varphi_r}{\partial y_j} = \\ \hfill (1 \leq r \leq d) \end{cases}$$

Cherchons comme précédemment s'il est possible de choisir les W_r^{m+n-1} $(1 \leq r \leq d)$ c'est-à-dire $\varphi_r \varepsilon k[X, Y]$ de manière que :

$$E = \text{proj}_{A^m(\Omega)} \bar{E}$$

soit composante d'une enveloppe

Nous savons qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que : $\quad \text{proj.}_{A^m(\Omega)} L^{m-1}(\bar{E}) = L^{m-1}(D_P)$

L'équation dans $A^m(\Omega)$ de $L^{m-1}(D_P)$ s'écrit :

$$\sum_{j=1}^{j=m} (Y_j - y_j) \frac{\partial f}{\partial y_j} = 0$$

a) Cherchons s'il est possible de choisir $\bar{Q} = (x, y)$ de manière qu'en $\bar{Q}$, Λ^{m+d-1} soit « vertical ». Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que

$\overline{Q} = (x, y)$ soit choisi de manière que l'hyperplan d'équation :

$$\sum_{i=1}^{i=n} (X_i - x_i) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

appartienne au système linéaire défini par les hyperplans H_r^{m+n-1} $(d \leq r \leq n)$

Un raisonnement tout à fait analogue à celui fait dans le cas d'une variable permet d'obtenir le résultat suivant :

THÉORÈME *1. Il suffit pour qu'en* $\overline{Q} = (x, y)$ *la variété* Λ^{m+d-1} *soit verticale de choisir pour diviseur* W_r^{m+n-1} *les diviseurs d'équation :*

$$W_r^{m+n-1} \quad \varphi_r = \frac{D(f, f_{d+1}, \ldots, f_n)}{D(X_r, X_{d+1}, \ldots, X_n)} \quad 1 \leq r \leq d$$

Bien entendu une telle condition n'est nullement nécessaire. Les singularités qui proviennent de cette situation sont du même type que dans le cas d'un seul paramètre : on les évite facilement par des procédés analogues.

b) Montrons qu'il existe toujours lorsque p est > 0, une infinité d'autres enveloppes.

LEMME *1. Etant donné un nombre* g $(1 \leq g \leq d)$, *il est possible de choisir les diviseurs* W_r^{m+n-1} $(1 \leq r \leq g)$ *de manière qu'en un point générique M d'une composante du cycle :*

$$S^{m+d-1} . \prod_{r=1}^{r=g} W_r^{m+n-1}$$

la variété linéaire Λ^{m+d-1} *soit contenue dans un hyperplan parallèle aux axes* X_i $(1 \leq i \leq g)$

Il suffit évidemment pour cela de choisir :

$$\varphi_r = \frac{D(f, f_{d+1}, \ldots, f_n)}{D(X_r, X_{d+1}, \ldots, X_n} \quad 1 \leq r \leq g$$

THÉORÈME *2. Soit un entier* g $(1 \leq g < d)$ *et les diviseurs* W_r^{m+n-1} $(1 \leq r \leq d)$ *choisis de manière que :*

1° *En un point M générique d'une composante du cycle :*

$$S^{m+d-1} . \prod_{r=1}^{r=g} W_r^{m+n-1}$$

la variété linéaire tangente est contenue dans un hyperplan « vertical ».

2° *Les équations* f_r *les diviseurs* W_r^{m+n-1} $(g\, 1 \leq r \leq d)$ *sont telles que :*

$$f_r \varepsilon k\,[\hat{X}_1, \ldots, \hat{X}_g, X_{g+1}, \ldots, X_n, Y]$$

3° *Les diviseurs* W_r $(1 \leq r \leq d)$ *satisfont aux conditions énoncées plus haut.*

Alors $\mathcal{E}$ *se projette sur* $A^m(\Omega)$ *suivant une enveloppe* $\mathcal{E}$.

Ecrivons les équations des différentes variétés linéaires tangentes :

$$\Lambda^{m+d-1}\left\{\begin{array}{ll} H^{m+n-1} \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} a_i (X_i - x_i) + \sum_{j=1}^{j=m} b_j (Y_j - y_j) = 0 & \\ H_r^{m+n-1} \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} c_{i,r} (Y_i - x_i) = 0 & d+1 \leq r \leq n \end{array}\right.$$

$$H_r^{m+n-1} \sum_{i=1}^{i=n} c_{i,r} (X_i - x_i) + \sum_{j=1}^{j=m} d_{j,}r (Y_j - y_j) = 0 \quad 1 \leq r \leq g$$

$$H_r^{m+n-1} \sum_{i=g+1}^{i=n} c_{i,r} (X_i - x_i) = 0 \qquad g+1 \leq r \leq d$$

Par hypothèse Λ^{m+d-1} est contenue dans un hyperplan parallèle aux X_i tels que $1 \leq i \leq g$

Par conséquent un système d'équations de ${}^{m+d-1}$ est :

$$\Lambda^{m+n-1}\left\{\begin{array}{l} H^{m+n-1} \displaystyle\sum_{j=1}^{j=m} b_j (Y_j - y_j) = 0 \\ H_r^{m+n-1} \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} c_{i,r} (X_i - x_i) = 0 \end{array}\right.$$

Le théorème en résulte immédiatement :

THÉORÈME 3. *Etant donnée une famille de surfaces dépendant de d paramètres, il n'y a pas d'autres enveloppes que celles trouvées en a et b.*

La démonstration se calque sur celle donnée dans le cas d'un seul p paramètre.

Remarque. L'importance de la condition A pages 86 est soulignée par l'exemple suivant :

Considérons la famille de plans de l'espace $A^3(\Omega)$:

$$f(x, Y) = x_1 Y_1 + x_2 Y_2 + Y_3 = 0$$

(famille de *tous* les plans passant par l'origine).

La famille des plans : $Y_2^{p+1} + Y_3 = 0$ n'est pas une enveloppe de cette famille. Elle est obtenue par élimination de X_1 et X_2 entre les équations :

$$f(X, Y) = X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + Y_3 = 0$$

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial X_i} = Y_i = 0$$

La famille des plans : $Y_2 x_2 + Y_3 = 0$ sous famille de la précédente est la famille des plans tangents à la surface d'équation :

$$Y_2^{p+1} + Y_3 = 0$$

CHAPITRE V.

HYPERSURFACES ADMETTANT ∞^d SECTIONS HYPERPLANES DÉCOMPOSÉES LE THÉORÈME DE KRONECKER CASTELNOVO

I. — 1° Tous les ensembles algébriques introduits dans ce chapitre sont définis sur un corps k de caractéristique p quelconque. Ils sont plongés dans l'espace $P^m(\Omega)$.

Considérons une hypersurface U^{m-1}, et une V^d famille $\mathfrak{F}$ d'hyperplans H^{m-1}.

La famille $\mathfrak{F}$ est évidemment linéarisée, V^d est une variété de $P^m(\Omega)$ et sa dimension d est $\leq m$.

Nous désignerons comme précédemment par P un point générique de V^d sur k, par H_p^{m-1} l'hyperplan associé à P.

Nous aurons à considérer l'ensemble des hyperplans appartenant à $\mathfrak{F}$ et soumis à la condition supplémentaire de passer par un point donné M.

Soit, avec les notations déjà utilisées $f(x, Y) = x_0Y_0 + \ldots + x_mY_m$ l'équation de l'hyperplan générique H_P^{m-1}. Une condition nécessaire et suffisante pour que H_P^{m-1} passe par $M = (y)$ est que P appartienne à l'hyperplan L^{m-1} d'équation :

$$X_0y_0 + \ldots + X_my_m = 0$$

Le cycle $V^d.L^{m-1}$ est *equidimensionnel* de dimension d — auquel cas l'hyperplan générique H_P^{m-1} passe par M — ou $d - 1$

On peut donc énoncer le lemme :

LEMME 1. *M étant un point donné de $P^m(\Omega)$, l'ensemble algébrique des hyperplans de $\mathfrak{F}$ qui passent par M est, soit la famille $\mathfrak{F}$ soit réunion de sous famille G_j de dimension $d - 1$.*

La famille G_j admet pour variété des paramètres l'une des composantes du cycle :

$$V^d.L^{m-1}$$

Le cycle : $C = U^{m-1}.\ H_P^{m-1} = \sum_{i=1}^{i=s} a_i\, C_i$ est équidimentionnel de dimension $m - 2$

DÉFINITION. *On dira que l'hypersurface U^{m-1} satisfait à l'hypothèse $\mathcal{R}$, (relativement à la V^d famille), lorsque :*

a) U^{m-1} n'est pas réglée (c.-à-d. *n'est pas réunion de droites*).

b) Le cycle C n'est pas irréductible.

2° Nous nous plaçons dans l'espace à trois dimensions $P^3(\Omega)$.

LEMME 2. *L'hypothèse $\mathcal{R}$ étant satisfaite, si l'un des a_i est > 2 V^d est de dimension $d = 1$.*

Supposons $\mathcal{R}$ satisfaite, $a_1 \geq 2$ et $d \geq 2$.
Considérons un point P′ de V^d, générique et indépendant du point P.
Posons :

$$U^2 . H^2_{P'} = C' = \sum_{i=1}^{i=s'} a'_i . C'_i$$

La considération du k-transport de structure $P \to P'$, montre que :

$$C' = \sum_{i=1}^{i=s} a_i . C'_i$$

a) Supposons que C_1 est une droite. La composante C'_1 est aussi une droite. Comme U^2 n'est pas réglée, on a :

$$C_1 = C'_1 = H^2_P . H^2_{P'}$$

Cette droite « fixe » appartient au plan générique H^2_P ce qui est impossible si d est ≥ 2.

b) Supposons que C_1 n'est pas une droite : son lieu sur k est alors la surface U^2. Supposons, en effet que ce soit une sous variété propre U' de U^2. La sous variété U' serait contenue dans tout plan générique H^2_P, donc dans H^2_P et dans $H^2_{P'}$, donc serait une droite.

Le lieu de C_1 sur k est donc U^2. Par conséquent C_1 n'est pas une composante de l'ensemble singulier de U^2.

L'hypothèse $a_1 > 2$ implique donc que H^2_P est tangent à U^2 en presque tout point de C_1 et en particulier en un point générique de C_1 sur $k(P)$. Donc U n'admet que ∞^1 plans tangents, et par conséquent $d = 1$.

Soit M un point générique de C_1 sur $k(P)$: le point M est point générique de U^2 sur k.

Par conséquent M est simple sur U^2.

En définitive, l'hypothèse $\mathcal{R}$ étant satisfaite, on a :

$$C = \sum_{i=1}^{i=s} C_i \quad \text{(les } C_i \text{ étant distincts)}$$

REMARQUE. En caractéristique $p > 0$ il existe des surfaces non réglées dont la famille des plans tangents est de dimension 1.

Telles sont par exemple toutes les surfaces dont l'équation est de la forme :

$$Y_o^{p-1}Y_1 + \varphi^p(Y_2, Y_3) = 0$$

La courbe d'équation $\varphi(Y_2, Y_3) = 0$ n'étant pas une droite.

LEMME *3. On suppose que l'hypothèse $\mathcal{R}$ est satisfaite pour la surface U^2 et que la dimension d de $\mathcal{F}$ est ≥ 2.*

Soit M un point générique de U^2.

Il est possible de choisir $P^o \varepsilon V^d$ de manière que par M passent au moins deux composantes $C_i(P^o)$ et $C_j(P^o)$ $i \neq j$ du cycle :

$$C(P^o) = U^2.H^2_{P_o}$$

Soit $\mathcal{G}$ la famille des plans de $\mathcal{F}$ qui passent par M. Soient W_1 la variété des paramètres d'une composante de G.

Nous avons démontré que la dimension de W_1 est d ou $d-1$ suivant que le plan générique H^2_P passe ou ne passe pas par M. Puisque M est générique sur U^2, H_P ne passe pas par M, sinon U^2 serait confondue avec H_P ce qui est contraire à l'hypothèse $\mathcal{R}$. Par conséquent : dimension $W_1 = d - 1$

Soit $\bar{P}$ un point générique de W_1 sur $k(M)$. Supposons que $C_i(\bar{P})$ passe par M et que $C_j(\bar{P})$ ne passe pas par M.

Nous avons démontré que : le lieu de $C_j(\bar{P})$ sur $k(M)$ est U^2 (2°, b). Il existe donc un point $P^o \varepsilon W_1$ tel que $C_j(P^o)$ passe par M.

On peut exprimer ce résultat autrement :

LEMME *4. Les hypothèses étant celles du lemme 2, parmi les points communs aux courbes C_i et C_j les C_i étant les composantes du cycle $U^2.H_P$, l'un au moins est simple sur U^2.*

En effet l'un d'eux se spécialise en un point générique de U^2.

Ce lemme est fondamental. En voici deux conséquences :

THÉORÈME *1. L'hypothèse $\mathcal{R}$ étant satisfaite, pour la surface U^2, l'hyperplan H_P générique de la famille $\mathcal{F}$ est tangent à la surface U^2.*

L'un des points du cycle $\sum_{1 \leq i \leq j \leq s} C_i(P).C_j(P)$ est simple sur U^2 et n'est pas simple dans $U^2.H^2_P$. Donc H^2_P est tangent à U^2 en ce point.

THÉORÈME *2. L'hypothèse $\mathcal{R}$ étant satisfaite pour la surface U^2 la dimension de la famille $\mathcal{F}$ est $d \leq 3$.*

Supposons que $d = 3$. La surface U^2 admettrait ∞^3 plans tangents ce qui est impossible.

3° Nous nous plaçons désormais *dans le cas ou $d = 2$.*

L'hypothèse $\mathcal{R}$ étant satisfaite, H^2_P est tangent à U^2.

LEMME 5. *La famille $\mathcal{F}$ est la famille des plans tangents à U^2.*

Nous savons seulement que $\mathcal{F}$ est une composante de l'ensemble des plans tangents à U^2. Montrons que cet ensemble est irréductible.

Soient T^2_M le plan tangent à U^2 au point générique M, $T^2_{M_0}$ le plan tangent à U^2 en M^0. Par hypothèse le point M^0 est simple sur U^2. Par conséquent, si $F(Y) = 0$ est l'équation de U^2, les dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial Y_i}(1 \leq i \leq m)$ ne sont pas nulles en M^0. La k-spécialisation $M \rightarrow M^0$ transforme donc T_M en T_{M_0}. L'élément T_M est donc générique dans l'ensemble algébrique des plans tangents à U^2. Celui-ci est donc une variété et elle coïncide avec $\mathcal{F}$.

Il n'y a aucun inconvénient à modifier un peu nos notations.

V^2 est une image rationnelle de U^2 qui nous servira désormais de variétés des paramètres de la famille $\mathcal{F}$. L'élément générique de celle-ci est donc le plan tangent H^2_P tangent à U^2 au point générique P de U^2.

THÉORÈME 3. *Soit U^2 une surface admettant ∞^2 plans tangents. On ne suppose pas l'hypothèse $\mathcal{R}$ satisfaite par la surface U^2. Soient P et P′ deux points génériques indépendants de U^2. Soient φ une place de $k(P, P')$ discrète et de rang 1, prolongeant la $k(P)$-spécialisation $P \rightarrow P'$.*

On peut choisir φ de manière que la droite φ-caractéristique L_P *de* H_P *soit une droite quelconque de* H_P *passant par le point caractéristique de* H_P.

Soit maintenant U^2 une surface satisfaisant à l'hypothèse $\mathcal{R}$ et admettant ∞^2 plans tangents.

P et P′ sont deux points génériques indépendants de U^2. Considérons les cycles :

$$C_P = U^2 . H^2_P = \sum_{i=1}^{i=s} C_i, \quad C_{P'} = U^2 . H^2_{P'} = \sum_{i=1}^{i=s} C'_i$$

$$L^*_{PP'} = H^2_P . H^2_{P'}$$

$$Z^*_{U^2} = [C'_1 . (C_2 + \dots + C_s)]_{U^2}, \quad Z_{H_P} = [C_1 . (C_2 + \dots + C_s)]\, H_P$$

a) Le cycle Z^*U^2 *est défini.* En effet, tous les points de son support sont sur la droite $L^*_{PP'}$, laquelle est générique dans le plan H_P.

Donc elle ne rencontre pas l'ensemble singulier de la surface U^2.

b) Chaque point de $Z^* U^2$ *a la multiplicité 1.* Soit A^*_q un point de $Z^* U^2$. Sa multiplicité dans $Z^* U^2$ est égale à sa multiplicité dans $U^2.L^*_{PP'}$. Si elle était > 1, $L^*_{PP'}$ serait tangente à U^2 en A^*_q, donc à la section de $\mathbf{L}^*_{PP'}$ par U^2.

Une composante du cycle C_P serait donc tangente à toutes les droites du plan H_P ce qui est impossible.

On peut donc écrire :

$$Z^*_{U^2} = [C'_1 . (C_2 + \dots + C_s)]_{U_2} = A^*_1 + \dots + A^*_r$$

tous les A_i $1 \leq i \leq r$ *étant distincts.*

c) Le cycle $[C_1(C_2 + \dots + C_s)]_{U_2}$ *n'est pas en général défini* car il peut contenir certains points non simples de U^2.

d) Le cycle $[C_1(C_2 + \dots + C_s)]_{Hp}$ *est évidemment défini.*

Considérons maintenant la composante C_i du cycle $U^2.H_P$. Soit Γ^2_i un cône contenant C_i et dont le sommet est générique dans $P^3(\Omega)$.

Posons :

$$U^2.\Gamma^2_i = C_i + C_i$$

avec coefficients 1 puisque Γ^2_i est transversal à U^2.

Supposons que $P \varepsilon$ supp. C_i. Alors $P \varepsilon$ supp. $\overline{C^i}$. .

En effet la direction des génératrices de Γ^2_i étant générique, Γ^2_i n'est pas tangent à U^2 au point générique P de U^2. Par conséquent P est de multiplicité 1 dans le cycle $C_i.\overline{C}_i$. Donc il n'appartient pas à supp.$\overline{C}_i$

Nous supposons maintenant, ce qui est possible par permutation des indices, que : Pεsupp.C_1

Considérons le cycle : $C'_1.(\Gamma^2_2 + \dots + \Gamma^2_s)$. Il est défini et on sait que (1) :

$$C'_1 . (\Gamma^2_2 + \dots + \Gamma^2_s) = [C'_1 (C_2 + \dots + C_s)]_{U^2} + [C'_1 (\overline{C}_2 + \dots + \overline{C}_s)]_{U^2}$$

Considérons maintenant une place φ, discrète et de rang 1, prolongeant la $k(P)$-spécialisation $P' \to P$

Le théorème de compatibilité de la spécialisation des cycles et du produit d'intersection montre que :

$$\varphi [C'_1 (\Gamma^2_2 + \dots + \Gamma^2_s)] = C_1 (\Gamma^2_2 + \dots + \Gamma^2_s)$$

Posons :

$$\varphi [C'_1 (C_2 + \dots + C_s)]_{U^2} = \varphi [A^*_1 + \dots + A^*_r] = X_1 = A_1 + \dots + A_r$$

avec $\varphi(A^*_i) = A_i$ $(1 \leq i \leq r)$

$$\varphi[C'_1 (\overline{C}_2 + \dots + \overline{C}_8)] = \overline{X}_1$$

(1) P. Samuel. Méthodes d'Algèbre abstraite en Géométrie Algébbrique, Chap. II, paragraphe 5. Springer Berlin 1955.

Par conséquent :

$$C_1 . (\Gamma_2^2 + \dots + \Gamma_s^2) = X_1 + \overline{X}_1$$

Considérons le cycle intersection excédentaire :

$$C_1 \perp (C_2 + \dots + C_s) = C_1 \perp \left(\sum_{q=2}^{q=s} C_q \right) = \sum_j i\,(B_{1,q,j}, C_1 . C_q)\, B_{1,q,j}$$

$B_{1,qj}$ étant un point du support du cycle $C_1.C_q$.

On sait que :

$$C_1 \quad (C_2 + \dots + C_s) = [C_1.(C_2 + \dots + C_s)]\, H_E$$
$$= C_1.(\Gamma^2{}_2 + \dots + \Gamma^2{}_s)$$

(puisque les courbes C_1 et C_j $(1 \neq j)$ sont dans un même plan).

Par conséquent :

$$\left[C_1 . (C_2 + \dots + C_s) \right]_{H^2_P} = X_1 + \overline{X}_1$$

$$\left[C_1 . (C_2 + \dots + C_s) \right]_{H^2_P} = A_1 + \dots + A_2 + \overline{X}_1$$

Par hypothèse $P \varepsilon \operatorname{supp} [C_1(C_2 + \dots + C_s)]_{H_P^2}$.

Or $\overline{X}_1$ est porté par $\overline{C}_2 + \dots \overline{C}_s$ et P supp.$(\overline{C}_2 + \dots + \overline{C}_s)$

Par conséquent $P \varepsilon \operatorname{supp}.X_1$

Or supp $[C'_1.(C_2 + \dots + C_s)]$ est porté par la droite : $L^*_{PP'} = H^2_P.H^2_{P'}$.

Par conséquent, le point $P \varepsilon \varphi(L^*_{PP'}) = L^{\varphi}_P$

Théorème 4. *L'hypothèse $\mathcal{R}$ étant satisfaite par la surface U^2 qui a ∞^2 plans tangents, la droite φ-caractéristique L^{φ}_P du plan tangent générique H_P au point générique P, passe par le point P.*

Donc, d'après le théorème 3 :

Théorème 5. *L'hypothèse $\mathcal{R}$ étant satisfaite par la surface U^2 qui a ∞^2 plans tangents, le point caractéristique du plan tangent générique H_P au point générique P de U^2 est le point P.*

Par conséquent tous les A_i $(1 \leq i \leq r)$ sont confondus avec P.

Considérons maintenant le cycle :

$$Y_{PP'} = \left[\sum_{\substack{i \neq j \\ 1 \leq i \leq s}} C_i' . C_j \right]_{U^2} = \left[\sum_{1 \leq i \leq j \leq s} (C'_i . C_j + C'_j . C_i) \right]_{U^2}$$

son degré est pair.

Nous avons démontré que quelle que soit la place φ discrète et de rang 1, prolongean la $k(\mathrm{P})$-spécialisation $\mathrm{P}' \to \mathrm{P}$, le support de $\varphi(\mathrm{Y}_{\mathrm{PP}'})$ contient le point P.

Le coefficient ω de P dans $\varphi(\mathrm{Y}_{\mathrm{PP}'})$ est alors pair et > 0.

Considérons d'autre part le cycle $\mathrm{Y}_{\mathrm{PP}'} = \left[\sum_{i=1}^{i=s} \mathrm{C}'_i . \mathrm{C}_i\right]_{\mathrm{U}^2}$

qui est porté par $\mathrm{L}^*_{\mathrm{PP}'} = \mathrm{H}^2_{\mathrm{P}}.\mathrm{H}^2_{\mathrm{P}'}$.

Soit $\mathrm{A}''_{i,j}$ un point du support de $\mathrm{C}'_i.\mathrm{C}_i$. Supposons qu'il existe j tel que :

$$\varphi(\mathrm{A}'^*_{i,j} = \mathrm{A}'_{i,j} = \mathrm{P}.$$

La droite $\mathrm{L}^{\varphi}_{\mathrm{P}} = \varphi(\mathrm{L}^*_{\mathrm{PP}'})$ couperait C_i en deux points au moins confondus avec P :

Tous les $\mathrm{A}_i = \varphi(\mathrm{A}^*_i)$ sont déjà en effet en P : $\mathrm{L}^{\varphi}_{\mathrm{P}}$ serait donc tangente en P à C_i.

On peut choisir φ pour qu'il n'en soit pas ainsi : il suffit de choisir pour φ une place telle que $\mathrm{L}^{\varphi}_{\mathrm{P}}$ soit non tangente en P à C_i.

En définitive :

THÉORÈME 6. *L'hypothèse $\mathcal{R}$ étant satisfaite par la surface U^2 qui admet ∞^2 plans tangents :*

Il existe une place φ discrète et de rang 1 et un entier ω pair et > 0, un cycle $\overline{\mathrm{X}}_{\mathrm{U}}2$, tels que :

$$\varphi\left[\sum_{\substack{1 \leq i \leq s \\ 1 \leq j \leq s}} \mathrm{C}'_i . (\mathrm{C}_j + \overline{\mathrm{C}}_j)\right]_{\mathrm{U}^2} = \omega . \mathrm{P} + \sum_{i,j} \mathrm{A}'_{i,j} + \overline{\mathrm{X}}_{\mathrm{U}^2}$$

Le point P n'appartient ni à supp. $\sum_{i,j} \mathrm{A}'_{i,j}$, ni à supp. X

$$\left(\text{Le cycle } \overline{\mathrm{X}}_{\mathrm{U}^2} = \varphi\left[\sum_{\substack{i \leq i \leq s \\ 1 \leq j \leq s}} \mathrm{C}'_i . \overline{\mathrm{C}}_j\right]\right)$$

Considérons alors le cycle $\left[\sum_{\substack{1 \leq i \leq s \\ 1 \leq j \leq s}} \mathrm{C}'_i . \mathrm{C}_j\right]_{\mathrm{U}^2}$. Il est porté par $\mathrm{L}^*_{\mathrm{PP}'} = \mathrm{H}^2_{\mathrm{P}}.\mathrm{H}^2_{\mathrm{P}'}$.

La droite $L^*_{PP'}$ est générique dans le plan tangent H^2_P : elle est donc transversale aux C'_i et C_i ($1 \leq i \leq s$) et par conséquent :

$$\left[\sum_{\substack{1 \leq i \leq s \\ 1 \leq j \leq s}} C'_i . C_j \right]_{U^2} = U^2 . L^*_{PP'}$$

Le nombre ω est donc le coefficient de P dans $\varphi(U^2.L^*_{PP'}) = U^2.L^{\mp}_P$.

Mais nous avons démontré (théorème 2) que L_P était élément générique de l'ensemble des droites de H^2_P passant par P.

Par conséquent :

$$\omega = m(P;\ U^2.H^2_P)$$

4° Or nous avons montré (Chap. I, Th. 1) que $m(P;\ U^2.H^2_P)$ était égal :

à 2 si la caractéristique $p = 0$;

à 2 ou L^q si la caractéristique p est égale à 2.

à 2 ou p^q si la caractéristique p est ≥ 3.

Nous supposons dans tout ce qui suit que l'on a $p \neq 2$.

Par conséquent $\omega = m(P;\ U^2.H^2_P) = 2$.

Considérons à nouveau l'égalité :

$$[C'_1 . (C_2 + \ldots + C_s)]_{U^2} = A^*_1 + \ldots + A^*_q$$

Le degré q de ce cycle est $\geq s - 1$. Or s est $\leq \omega = 2$.

Par conséquent $s = 2$ et les cycles $[C'_1.C_2]_{U^2}$ et $[C_1.C'_2]_{U^2}$ sont de degré 1.

Il en est de même du cycle $[C'_1.C_1]_{U^2}$. Supposons en effet qu'il soit de degré $s \leq 2$. Son support se composerait d'au moins deux points I et J.

Considérons la courbe C_2. et son lieu sur k (1).

Un raisonnement analogue à celui du n° 2 montre que son lieu est la surface U^2. Il existe donc un plan $H_{2P''}$ tel que la courbe C''_2 passe par I et J. Cette courbe n'est pas coplanaire à la fois à C_1 et C'_1 et l'on a :

$$d^\circ\, [C_1 . C''_2]_{U^2} \geq 2 \qquad , \qquad d^\circ\, [C'_1 . C''_2]_{U^2} \geq 2$$

ce qui est impossible.

La surface U^2 est donc de degré 4. Sa section par un plan tangent générique a quatre points doubles.

Son ensemble singulier (I) est de degré 3.

a) I n'est pas contenu dans un plan car la section de U^2 par le plan contenant I serait de degré 2×3;

(2) SEIDENBERG. The hyperplane sections of anormal variety. Transactions American Mathematical Society. 69, 357-386, 1950.

b) I n'admet pas de sécante double issue d'un point simple de U^2.

Une telle sécante couperait U^2 en cinq points, serait donc tracée sur U^2 qui serait réglée.

I est donc la réunion de trois droites concourantes.

Par conséquent U^2 est une surface de Steiner.

Son équation peut s'écrire, en prenant les droites doubles pour axes :

$$Y_1^2Y_2^2 + Y_2^2Y_3^2 + Y_3^2Y_1^2 - Y_0Y_1Y_2Y_3 = 0 \qquad (U^2)$$

Cette surface est unicursale. Elle admet pour représentation paramétrique :

$$Y_0 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, \ Y_1 = \beta\gamma \ , \ Y_2 = \gamma\alpha \ , \ Y_3 = \alpha\beta \qquad (U^2)$$

L'équation de la famille $\mathcal{F}$ de ses plans tangents est :

$$x_0Y_0 + x_1Y_1 + x_2Y_2 + x_3Y_3 = 0.$$

$$8X_0^3 - 2X_0(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) + 2X_1X_2X_3 = 0. \qquad (\mathcal{F})$$

-II- Plaçons-nous maintenant dans l'espace projectif $P^m(\Omega)$ avec $m \geq 3$.

THÉORÈME 1. *Soit, dans $P^m(\Omega)$ de dimension* $u \geq 3$. *Une famille $\mathcal{F}$ d'hyperplans dont l'élément générique* $H^m{}_P{}^{-1}$ *est tel que le cycle $U^u.H^{m-1}$ ne soit pas irréductible est nécessairement de dimension* $d \leq m - 2$.

Supposons le contraire.

Considérons la trace sur un hyperplan $H^m{}_g{}^{-1}$ générique de $P^m(\Omega)$ de H_P^{m-1} : c'est une variété linéaire L_g^{m-2} qui est générique dans H_g^{m-1} et donc dans $P^m(\Omega)$.

Le cycle : $L_g^{m-2}.U.^u = H^m{}_g{}^{-1}.(H_P.U^u)$ n'est pas irréductible.

Or on sait que ceci est impossible (2) dès que :

$$\dim(L^{m-2}.U^u) \geq 1 \qquad \text{c.-à-d.} \qquad u \geq 3.$$

La situation du théorème de Kronecker-Castelnuovo ne se généralise donc pas si l'on considère des variétés de dimension > 2.

Considérons donc une surface U'^2 de l'espace projectif $P^m(\Omega)$ et supposons qu'il existe une V'^{m-1} famille $\mathcal{F}$ d'hyperplans dont l'élément générique $H_P'^{m-1}$ est tel que le cycle $U'^2.H'_P$ n'est pas irréductible.

Soit f une projection de $P^m(\Omega)$ sur $P^3(\Omega)$ dont le centre est une $L'^{m-}{}_0$ générique dans $P^m(\Omega)$.

U'^2 ne rencontre pas le centre L'^{m-4} de projection : $f(U'^2)$ est donc une surface U^2 de $P^3(\Omega)$.

L'ensemble $\mathcal{D}$ des hyperplans de $P^m(\Omega)$ qui sont de la forme $f(H^2)$ (où H^2 est un plan de P^3, est de dimension 3. Donc $\mathcal{F} \supset \mathcal{D}$ est au moins de dimension 2.

(3) A. NÉRON et P. SAMUEL. La variété de Picard d'une variété normale. Paragraphe 4. Corollaire du lemme 1. Annales de l'Institut Fourrier IV 1952.

Pour tout H^2 tel que $f(H^2) \varepsilon \mathfrak{F}' \cap \mathfrak{D}$, le cycle $f(H^2).U'^2$ est irréductible, donc aussi $H^2.U^2$.

Par conséquent, la surface U^2 possède la propriété qu'il existe une V^2 famille $\mathfrak{F}$ de plans tels que le cycle intersection de U^2 avec le plan générique de $\mathfrak{F}$ ne soit pas irréductible.

Ecartons le cas où U^2 est réglée, U'^2 l'est aussi et examinons le cas où U'^2 est une surface de Steiner.

On sait (4) que l'anneau de coordonnées homogènes de U'^2 est entier sur celui de U^2 et que les deux anneaux ont même corps des fractions.

Soit A l'anneau de coordonnées homogènes d'une surface de Steiner, B sa clôture intégrale.

THÉORÈME 1. *Soit U'^2 une surface de $P^m(\Omega)$ qui satisfait l'hypothèse $\mathcal{R}$, soit A′ son anneau de coordonnées homogènes.*

Il existe une surface de Steiner dont l'anneau de coordonnées A possède la propriété :

$$A \subset A' \subset B$$

α, β, γ étant trois indéterminées sur k, on peut écrire :

$$A = k[\beta\gamma,\ \gamma\alpha,\ \alpha\beta,\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2].$$

La clôture intégrale B de A est :

$$B = k[\beta\gamma,\ \gamma\alpha,\ \alpha\beta,\ \alpha^2,\ \beta^2,\ \gamma^2].$$

En effet B est contenue dans le corps des fractions de A, car

$$\alpha^2 = \frac{\gamma\alpha.\ \alpha\beta}{\beta\gamma}\ ,\quad \beta^2 = \frac{\alpha\beta\ \beta\gamma}{\gamma\alpha}\ ,\quad \gamma^2 = \frac{\beta\gamma.\ \gamma\alpha}{\alpha\beta}$$

D'autre part α^2 est entier sur A, car :

$$\alpha^4 - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\alpha^2 + [(\alpha\beta)^2 + (\alpha\gamma)^2] = 0.$$

L'anneau :

$$B = k[\beta\gamma,\ \gamma\alpha,\ \alpha\beta,\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2]$$

est l'anneau de coordonnées homogènes de la surface de Véronèse de $P^5(\Omega)$.

THÉORÈME 2. *Soit U^2 une surface non réglée de l'espace $P^m(\Omega)$ définie sur un corps de caractéristique $p \neq 2$.*

La dimension d'une V^d famille d'hyperplans d'élément générique H^{m-1}_{P}, *telle que le cycle* $U^2\, H^{m-1}_{P}$ *soit décomposé lorsque* $m \geq 6$, ***est nécessairement*** $\leq m - 2$.

THÉORÈME 3. *Dans l'espace $P^5(\Omega)$, le cycle intersection de la variété de Véronèse de représentation paramétrique :*

$$Y_3 = \alpha^2,\ ,\ Y_4 = \beta^2\ ,\ Y_5 = \gamma^2\ Y_0 = \beta\gamma\ ,\ Y_1 = \gamma\alpha\ ,\ Y_2 = \alpha\beta\ ,$$

(4) P. SAMUEL. Méthodes d'Algèbre abstraite en Géométrie Algébrique. Chap. I, paragraphe 6, d. Springer Berlin 1955.

par l'hyperplan générique de la famille :

$$\sum_{i=0}^{i=5} x_i Y_i = 0, \; 4(X_0^2 X_3 + X_1^2 X_4 + X_2^2 X_5) - 16 X_0 X_1 X_2 + X_3 X_4 X_5 = 0$$

est décomposé.

On voit facilement que l'anneau A′ peut se mettre sous la forme :

$$A' = k[\beta\gamma, \; \gamma\alpha, \; \alpha\beta, \; \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, \; \lambda\alpha^2 + \mu\beta^2 + \nu\gamma^2]$$

λ, μ, ν étant des éléments de k, non tous égaux.

Considérons la surface dont une représentation paramétrique est :

$$Y_0 = \beta\gamma \;, \; Y_1 = \gamma\alpha, \; Y_2 = \alpha\beta, \; Y_3 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \;, \; Y_4 = \lambda\alpha^2 + \mu\beta^2 + \nu\gamma^2.$$

Elle n'est pas réglée, sinon la variété de Véronèse dont elle est projection le serait.

THÉORÈME 4. *Soit U^2 la surface de $P^3(\Omega)$ dont une représentation paramétrique est :*

$$Y_0 = \beta\gamma, \; Y_1 = \gamma\alpha, \; Y_2 = \alpha\beta, \; Y_3 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, \; Y_4 = \lambda\alpha^2 + \mu\beta^2 + \nu\gamma^2$$
$$\lambda \varepsilon k \;, \; \mu \varepsilon k \;, \; \nu \varepsilon k \qquad \lambda, \mu, \nu \text{ non tous égaux.}$$

Il existe une V^3 famille d'hyperplans d'élément générique H^2_P tel que : le cycle $U^2.H^3_P$ soit décomposé.

Toute surface non réglée de $P^4(\Omega)$ définie sur un corps de caractéristique $p \neq 2$, possédant la même propriété admet une représentation paramétrique de cette forme.