

M. LAUDET

**Contribution à l'étude du calcul numérique des champs et des trajectoires en optique électrique des systèmes cylindriques**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4<sup>e</sup> série*, tome 20 (1956), p. 111-230

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1956\\_4\\_20\\_\\_111\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1956_4_20__111_0)

© Université Paul Sabatier, 1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# CONTRIBUTION A L'ETUDE DU CALCUL NUMERIQUE DES CHAMPS ET DES TRAJECTOIRES EN OPTIQUE ELECTRONIQUE DES SYSTEMES CYLINDRIQUES

---

## INTRODUCTION

Nous avons étudié, dans ce travail, les systèmes électromagnétiques cylindriques présentant un plan de symétrie. On peut distinguer deux grandes parties dans ces recherches. La première concerne le calcul numérique des champs et la deuxième celui des trajectoires.

Les fonctions analytiques qui donnent les champs sont assez souvent connues pour les systèmes cylindriques, grâce à la méthode des transformations conformes; mais les équations auxquelles on aboutit sont généralement très compliquées et leur utilisation est de ce fait difficile. Il en résulte que la « méthode de relaxation », à la fois très simple et très générale, est précieuse dans tous les cas. C'est pourquoi nous avons entrepris une étude systématique destinée à résoudre les nombreuses difficultés qui se rencontrent dans son emploi. Celles-ci tiennent essentiellement à la présence de singularités pour la fonction étudiée et de limites rejetées à l'infini ou possédant des angles vifs. Il était nécessaire, pour pouvoir traiter les problèmes qui se posent en électricité statique, de résoudre ces difficultés dont les théoriciens, qui exposent en quelques pages les principes de la méthode, n'ont pas semblé se préoccuper.

C'est pourquoi, dans la première partie de cette étude, nous examinons des systèmes variés présentant des particularités intéressantes. Dans la plupart des cas, nous disposons de la solution analytique qui nous permet de contrôler d'une manière très précise les solutions obtenues par la méthode de relaxation. Nous sommes ainsi en mesure d'affirmer qu'elle conduit à des résultats satisfaisants.

Dans la deuxième partie, nous donnons d'abord les formules générales qui régissent les trajectoires des particules dans les systèmes électroniques symétriques. La théorie des systèmes déviateurs (antisymétriques) a donné lieu à de nombreuses publications. On ne trouve, par contre, que peu de choses sur les dispositifs symétriques dont les applications au spectrographe de masse laissent prévoir un développement important. Enfin, dans

les derniers chapitres, nous étudions les lentilles électrostatiques à trois fentes. Les calculs ont été conduits jusqu'au bout par les méthodes numériques.

En définitive, la méthode de relaxation dont la mise en œuvre absolument automatique constitue un avantage pratique des plus importants, nous paraît particulièrement adaptée aux exigences de l'optique électronique. Elle permet en particulier le calcul numérique des champs en des points régulièrement espacés comme l'exige le calcul aisé des trajectoires.

---

PREMIÈRE PARTIE

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DE L'INTÉGRATION NUMÉRIQUE  
DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES  
PAR LA MÉTHODE DE RELAXATION

Nous rappellerons brièvement le principe de la méthode utilisée dans le cas d'une fonction satisfaisant à l'équation de Laplace à deux variables. La méthode reste valable pour une équation aux dérivées partielles quelconque.

Considérons, dans le plan  $xoy$ , un domaine (D) tout entier à distance finie. Soit ( $\Sigma$ ) la frontière de (D) (fig. 1). Proposons-nous de déterminer une fonction  $\psi$  satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

dans le domaine (D) et se réduisant à une fonction donnée sur ( $\Sigma$ ).

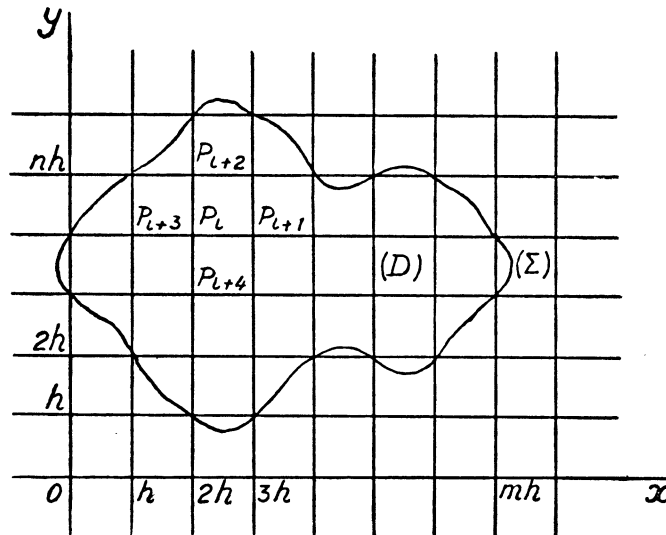


FIG. 1.

Traçons dans le plan  $xoy$  un réseau à mailles carrées obtenu au moyen des droites

$$x = mh \quad y = nh$$

$m$  et  $n$  étant deux entiers quelconques, et  $h$  une longueur fixe. Le problème préliminaire consiste à trouver une fonction :

1. exclusivement définie aux nœuds du réseau précédent,
2. telle qu'en chaque nœud intérieur à (D) elle satisfasse à l'équation aux différences finies

$$4 \psi_{i+1, n} = \psi_{i+2, n} + \psi_{i+2, n} + \psi_{i+3, n} + \psi_{i+4, n}$$

3. prenant des valeurs données aux nœuds périphériques.

C'est un problème linéaire ayant autant d'inconnues que d'équations et l'on démontre qu'il admet une solution et une seule. De plus, quelle que soit la discontinuité des valeurs sur la frontière, lorsque  $h$  tend vers zéro, les valeurs  $\psi_{i,h}$  tendent vers les valeurs correspondantes  $\psi_i$  de la solution de l'équation de LAPLACE [1], [2], [3].

La détermination de  $\psi_{i,h}$  nécessite donc, au préalable, la résolution d'un système linéaire ayant en général un nombre d'inconnues tel que les procédés habituels de résolution ne sont pratiquement pas utilisables. Il est alors nécessaire de faire appel à la méthode dite « de relaxation » qui, par le procédé classique d'itération, permet la détermination aisée de  $\psi_{i,h}$ . Cette méthode a fait l'objet de nombreuses publications <sup>(1)</sup> [4] à [7]. Signalons, tout particulièrement, l'ouvrage de M. E. DURAND, qui consacre un chapitre entier à cette question <sup>(2)</sup>.

La méthode classique consiste à utiliser un réseau (R) à mailles identiques (fig. 2 a). Dans les régions de forts gradients on utilise ensuite un quadrillage plus fin (r) en prenant pour valeur de  $\psi$  sur les nœuds périphériques les valeurs déduites du réseau précédent (fig. 2 b). Pour déterminer les régions où il est nécessaire d'opérer avec un quadrillage plus dense, on applique aux différents nœuds une formule faisant intervenir un plus grand nombre de points, et l'on regarde si le résultat est différent, à la précision que l'on s'est fixée.

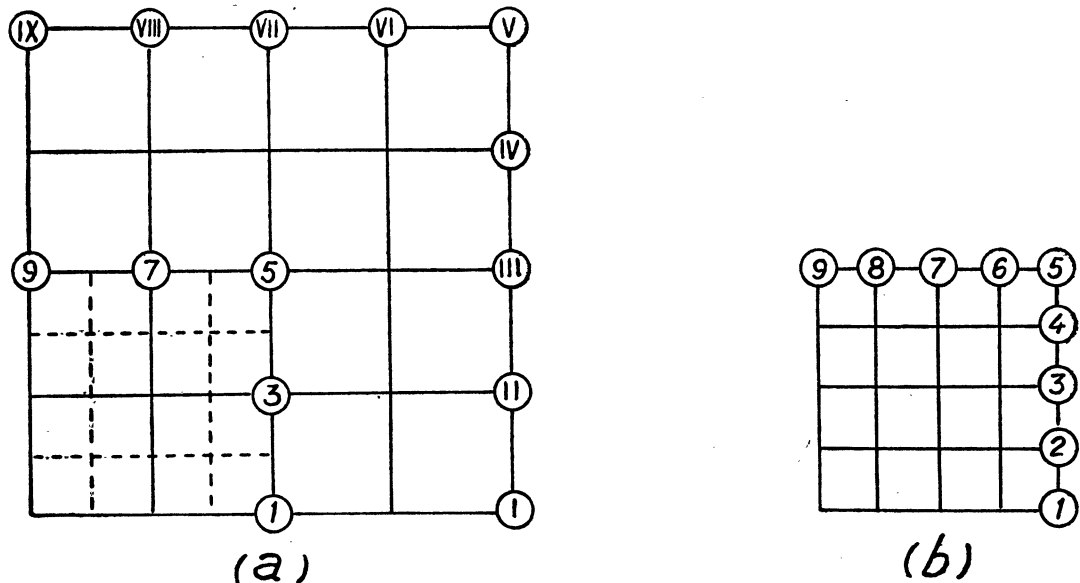


FIG. 2.

1. Une bibliographie sommaire est indiquée à la fin de cette première partie.
2. E. DURAND, Électrostatique et Magnétostatique, Masson, Paris, 1953, chapitre XII.

Si cette façon de procéder permet de délimiter les régions où deux réseaux sont nécessaires, elle ne permet pas de tenir compte des modifications, souvent très importantes de  $\psi$  sur les nœuds périphériques de ( $r$ ), qui résulteraient de l'utilisation du quadrillage le plus fin s'étendant sur tout le domaine ( $D$ ). C'est pourquoi nous avons utilisé des réseaux non homogènes (*fig. 3*) qui permettent, avec le même nombre de nœuds que précédemment, de ne faire appel qu'aux valeurs connues  $\psi_1, \psi_{II} \dots$  de  $\psi$  sur la limite ( $\Sigma$ ) de ( $D$ ) et d'obtenir, par suite, une précision bien meilleure sans pour cela augmenter la durée des calculs.

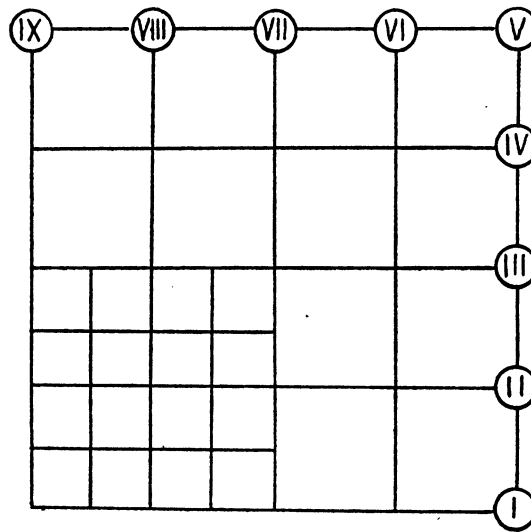


FIG. 3.

RICHARDSON et GAUNT [8] d'abord, HARTREE et WOMERSLEY [9] ensuite, ont montré qu'il était possible, à partir des valeurs relatives à différents réseaux, d'obtenir par extrapolation une solution plus correcte. Cette méthode n'a pourtant pas été pratiquement utilisée jusqu'ici par suite de la difficulté de choisir dans chaque cas particulier la formule à appliquer. Nous avons montré dans le chapitre III comment il convenait de procéder pour déterminer l'indice d'extrapolation de cette méthode. Son emploi systématique permet de diminuer considérablement la durée des calculs et d'avoir une idée très précise de l'erreur commise dans la détermination de  $\psi$ .

La Méthode de Relaxation suppose essentiellement la connaissance de  $\psi$  sur les nœuds périphériques du domaine étudié. C'est pourquoi, à notre connaissance, elle n'a pas été utilisée dans l'étude des systèmes pour lesquels les limites étaient rejetées à l'infini. Nous avons montré, dans le dernier chapitre, comment on pouvait aborder le problème dans les cas les plus fréquents en électricité statique.

Enfin, la présence de points aux voisinages desquels les gradients de  $\psi$  sont trop considérables (sommets de distributions volumiques ou superficielles de charges, de dipôles, de courants, par exemple) exigeaient, avec les formules classiques, l'emploi de réseaux trop denses pour être pratiquement utilisés. Nous avons montré sur différents exemples comment il convenait de procéder dans ces conditions.

---

CHAPITRE PREMIER.

RAPPEL DES FORMULES UTILISÉES

Nous nous sommes limités au cas de l'étude des fonctions potentiel scalaire  $V$  et flux d'induction  $\Phi$ .

Dans le vide et dans le cas des systèmes à deux variables, ces deux fonctions satisfont à l'équation de Laplace

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

Dans le cas des systèmes de révolution d'axe  $oz$ , elles vérifient l'équation

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{K}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} = 0$$

avec  $K = 1$  pour la fonction potentiel  $V$  et  $K = -1$  pour la fonction flux  $\Phi$ .

Nous désignerons par  $\psi_i$  la valeur de  $\psi$  au nœud d'indice  $i$  (fig. 4 par exemple).

1. — SYSTÈMES A DEUX VARIABLES.

1° Réseaux à mailles carrées de côté  $h$ .

Au voisinage du point  $(x_0, y_0)$  la fonction  $\psi$  admet un développement de la forme

$$(3) \quad \psi(x, y) = \psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ (x-x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right\}_n \psi \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$$

Limité au second ordre et appliqué successivement aux quatre points 1, 2, 3, 4 (fig. 4) ce développement permet d'obtenir les relations :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_0 &= \frac{1}{2h} (\psi_1 - \psi_3) & \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_0 &= \frac{1}{2h} (\psi_2 - \psi_4) \\ \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)_0 &= \frac{1}{h^2} (\psi_1 + \psi_3 - 2\psi_0) & \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)_0 &= \frac{1}{h^2} (\psi_2 + \psi_4 - 2\psi_0) \\ \Delta \psi &= \frac{1}{h^2} (\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 - 4\psi_0) \end{aligned}$$

et (1) s'écrit sous forme d'équation aux différences finies

$$(4) \quad 4\psi_0 = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4$$

En appliquant la formule (3) aux quatre points 5, 6, 7, 8, on trouve :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)_0 &= \frac{1}{4h^2} (\psi_5 - \psi_6 + \psi_7 - \psi_8) \\ \Delta \psi &= \frac{1}{2h^2} (\psi_5 + \psi_6 + \psi_7 + \psi_8 - 4\psi_0) \end{aligned}$$



d'où la nouvelle expression de (1) :

$$(5) \quad 4\psi_0 = \psi_5 + \psi_6 + \psi_7 + \psi_8$$

Les formules (4) et (5) sont dites respectivement formules normales et diagonales. Ces relations ne seraient pas modifiées si l'on tenait compte des termes du troisième ordre dans le développement (3); c'est ce que l'on traduit généralement en disant qu'elles correspondent à l'approximation du troisième ordre. Ceci ne doit pas laisser supposer qu'il est indifférent au point de vue de la précision d'utiliser l'une ou l'autre de ces formules. Si la relation (4) correspond bien à des carrés de côté  $h$ , la formule (5) est relative en fait à des carrés de côté  $h\sqrt{2}$ .

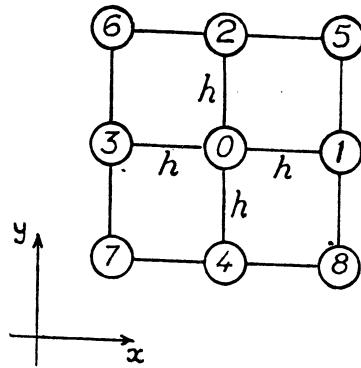


FIG. 4.

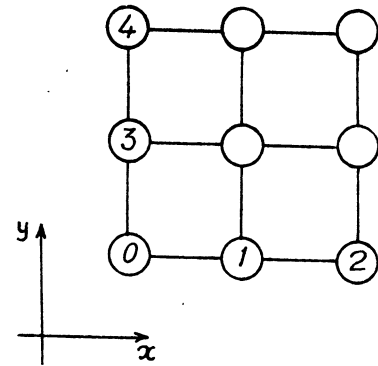


FIG. 5.

On peut encore mettre l'équation (1) sous la forme

$$(6) \quad 20\psi_0 = 4(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4) + (\psi_5 + \psi_6 + \psi_7 + \psi_8)$$

Le premier terme négligé dans le développement (3) est alors du huitième ordre.

Lorsque les dérivées partielles sont discontinues au point 0, il est possible de les exprimer en fonction des valeurs de  $\psi$  en deux points situés d'un même côté de 0 (fig. 5). On obtient :

$$(7) \quad \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_0 = \frac{1}{2h}(-3\psi_0 + 4\psi_1 - \psi_2) \quad \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_0 = \frac{1}{2h}(-3\psi_0 + 4\psi_3 - \psi_4)$$

$$(8) \quad \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{1}{h^2}(\psi_0 - 2\psi_1 + \psi_2) \quad \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)_0 = \frac{1}{h^2}(\psi_0 - 2\psi_3 + \psi_4)$$

## 2° Distance inégale entre les nœuds du réseau utilisé.

On peut également, pour des points disposés comme il est indiqué sur la figure 6, calculer le Laplacien de  $\psi$  et obtenir pour l'équation (1) l'expression

$$(9) \quad \left(\frac{1}{s_1 s_3} + \frac{1}{s_2 s_4}\right)\psi_0 = \frac{1}{s_1 + s_3} \left(\frac{\psi_1}{s_1} + \frac{\psi_3}{s_3}\right) + \frac{1}{s_2 + s_4} \left(\frac{\psi_2}{s_2} + \frac{\psi_4}{s_4}\right)$$

qui se réduit à (4) pour  $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$

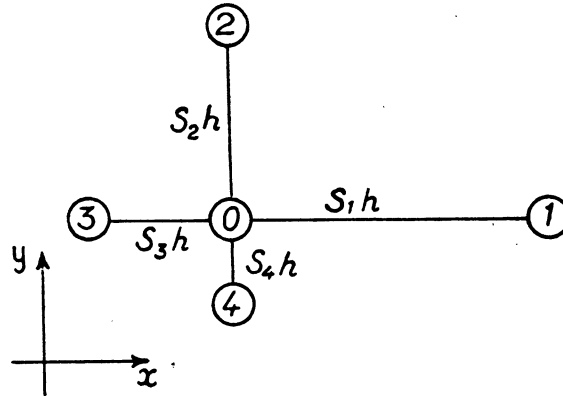


FIG. 6.

2. — SYSTÈMES DE RÉVOLUTION.

Au voisinage d'un point  $(\rho_0, z_0)$ , la fonction  $\psi(\rho, z)$  peut se développer suivant l'expression :

$$\psi(\rho, z) = \psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ (\rho - \rho_0) \frac{\partial}{\partial \rho} + (z - z_0) \frac{\partial}{\partial z} \right\}^n \psi \Big|_{\substack{\rho=\rho_0 \\ z=z_0}}$$

1° Points hors de l'axe (fig. 7).

Appliquée successivement aux points 1, 2, 3, 4, d'une part, 5, 6, 7, 8, d'autre part, la relation précédente, limitée aux termes du second ordre, permet d'écrire l'équation (2) sous les deux formes :

$$8 I \psi_0 = 2 I \psi_1 + (2 I + K) \psi_2 + 2 I \psi_3 + (2 I - K) \psi_4$$

$$8 I \psi_0 = (2 I + K) \psi_5 + (2 I + K) \psi_6 + (2 I - K) \psi_7 + (2 I - K) \psi_8$$

dites respectivement forme normale et forme diagonale.

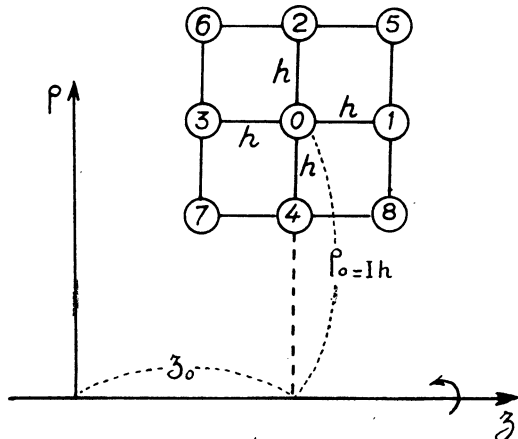


FIG. 7.

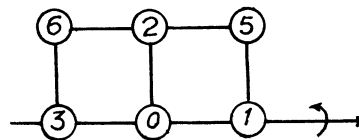


FIG. 8.

Pour  $K = 1$  on obtient l'équation de Laplace à laquelle satisfait dans le vide la fonction potentiel  $V$  :

$$(10) \quad 8 I V_0 = 2 I V_1 + (2 I + 1) V_2 + 2 I V_3 + (2 I - 1) V_4$$

$$(11) \quad 8 I V_0 = (2 I + 1) V_5 + (2 I + 1) V_6 + (2 I - 1) V_7 + (2 I - 1) V_8$$

Pour  $K = -1$  on obtient les équations aux différences finies relatives à la fonction flux  $\Phi$  dans le vide :

$$(12) \quad 8 I \Phi_0 = 2 I \Phi_1 + (2 I - 1) \Phi_2 + 2 I \Phi_3 + (2 I + 1) \Phi_4$$

$$(13) \quad 8 I \Phi_0 = (2 I - 1) \Phi_5 + (2 I - 1) \Phi_6 + (2 I + 1) \Phi_7 + (2 I + 1) \Phi_8$$

2° Points sur l'axe (fig. 8).

Les formules précédentes ne sont pas valables pour les points de l'axe. On établit pour ces nœuds les formules suivantes

$$2(K + 2) \psi_0 = \psi_1 + 2(K + 1) \psi_2 + \psi_3$$

$$2(K + 1) \psi_0 = \psi_5 + 2K \psi_2 + \psi_6$$

qui donnent pour le potentiel :

$$(14) \quad 6 V_0 = V_1 + 4 V_2 + V_3$$

$$(15) \quad 4 V_0 = V_5 + 2 V_2 + V_6$$

et pour la fonction flux

$$2 \Phi_0 = \Phi_1 + \Phi_2$$

$$0 = \Phi_5 - 2 \Phi_2 + \Phi_6$$

Signalons enfin la relation

$$(16) \quad \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right\}_{\rho=0} = \frac{2}{h^2} (\psi_2 - \psi_0)$$

qui nous sera utile.

## CHAPITRE II.

### CHOIX DU RÉSEAU

Les réseaux formés de carrés, de triangles équilatéraux ou d'hexagones réguliers sont d'usage courant. Certains auteurs choisissent les uns de préférence aux autres, suivant la forme des limites du domaine étudié ou la discontinuité des valeurs de  $\psi$  sur la frontière.

Nous nous sommes efforcés dans les exemples qui suivent, de montrer que les réseaux à mailles carrées pouvaient être utilisés dans la plupart des cas.

#### 1. — POTENTIEL D'UNE TRIODE PLANE.

Nous donnons à propos de ce dispositif un exemple de détermination du potentiel fait à partir des trois réseaux précédemment indiqués.

Nous étudierons une triode constituée par une plaque et une cathode planes entre lesquelles sont régulièrement disposés les fils de la grille (fig. 9).

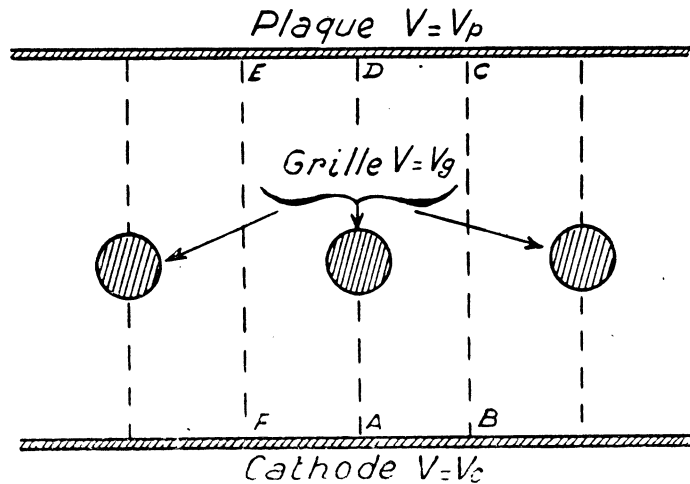


FIG. 9.

Le domaine étudié n'est pas limité, mais par suite de la périodicité, il suffit de considérer l'aire BCEF et même, AD étant un plan de symétrie, de se limiter à l'étude de la surface ABCD.

#### 1° Réseau à mailles carrées.

Nous supposerons que la plaque, la cathode et la grille sont respectivement portées aux potentiels 1000, 0 et  $-250$  (fig. 10).

Nous avons tracé un quadrillage régulier et nous avons appliqué la formule (4) dans tout le domaine. Toutefois, par suite de la symétrie, on doit poser  $V_1 = V_3$  pour les nœuds situés sur la droite BC (fig. 11) et  $V_3 = V_0$  pour les nœuds voisins de AD (fig. 12).

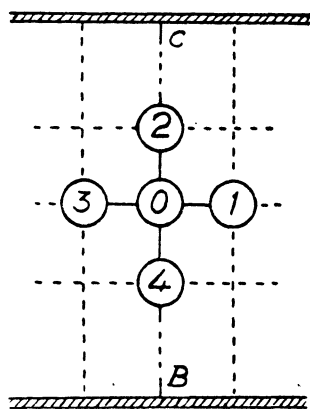


FIG. 11.

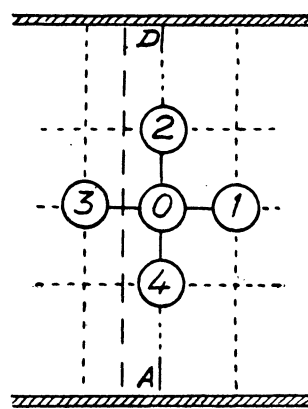


FIG. 12.

En l'absence d'indications précises, on a pris comme fonction de départ les valeurs obtenues en admettant une variation linéaire du potentiel entre la plaque et la grille d'une part, la grille et la cathode d'autre part. De plus, pour ne pas avoir à opérer avec des valeurs positives et négatives, ce qui entraînerait d'inutiles complications, nous avons supposé que les potentiels respectifs de la plaque de la cathode et de la grille étaient 1250, 250 et 0.

Il nous a suffi de retrancher ensuite 250 en chaque nœud pour être ramené au choix initial du potentiel sur les limites du domaine. Les résultats obtenus ont été indiqués sur la figure 10. Quelques équipotentielles ont été également tracées.

## 2° Réseaux à mailles hexagonales et à mailles triangulaires.

Nous avons donné sur les fig. (13) et (14) les résultats relatifs à une triode dont la plaque est au potentiel  $V = 1000$ , la cathode et la grille étant au même potentiel  $V = 0$ . La figure (13) correspond à un réseau hexagonal.

Sous forme d'équation aux différences finies, l'équation (1) s'écrit alors (fig. 15)

$$3 V_0 = V_1 + V_2 + V_3$$

La figure (14) est relative à un réseau de triangles équilatéraux. Dans ce cas, l'équation (1) prend la forme (fig. 16)

$$6 V_0 = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6$$

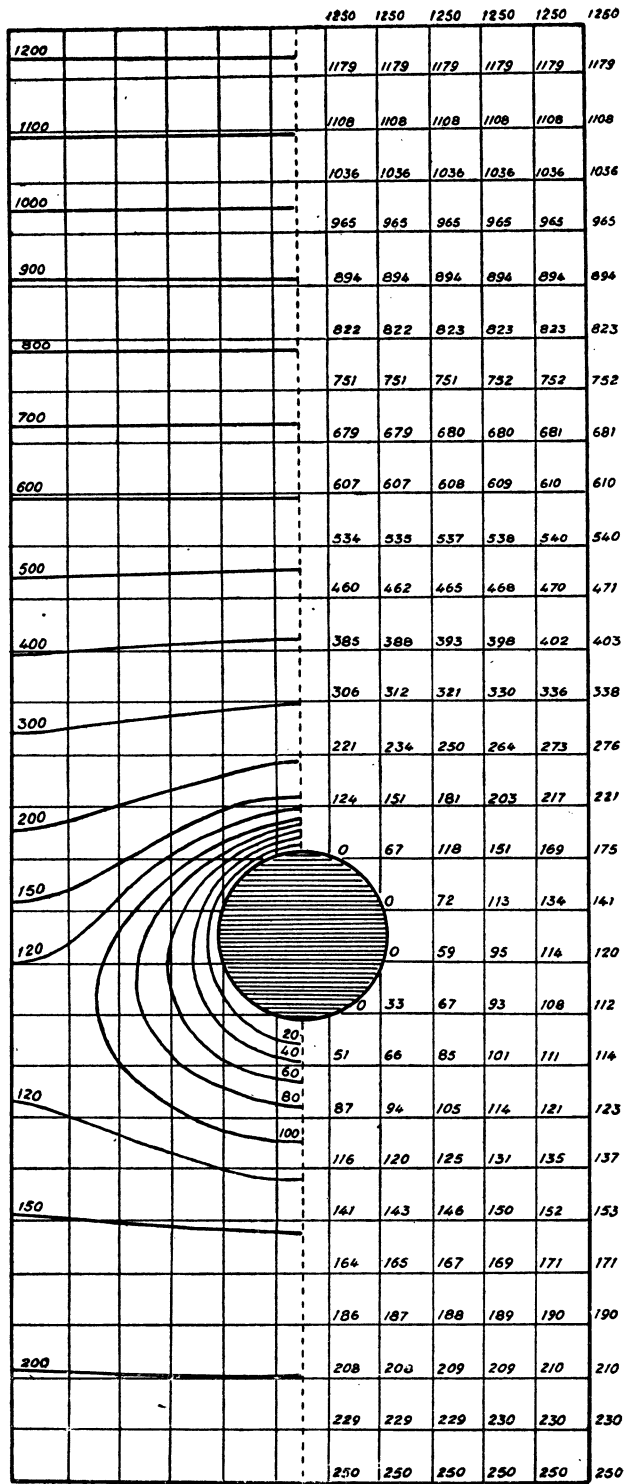


FIG. 10.

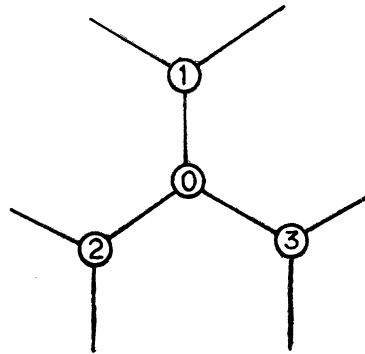


FIG. 15.

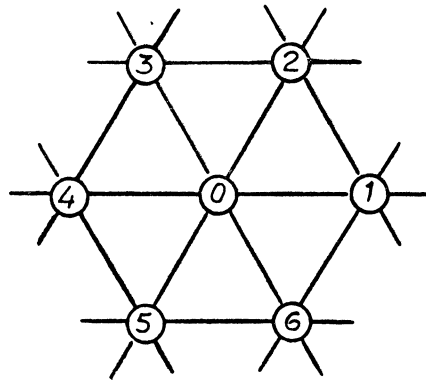


FIG. 16.

Seuls, les points voisins de la plaque ou de la cathode sont obtenus à partir de la relation (fig. 17)

$$V_0 = \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{8} + \frac{4V_5 + 2V_6}{12}$$

qui est un cas particulier d'une formule plus générale dans laquelle le point 0 n'est plus équidistant des six points voisins.

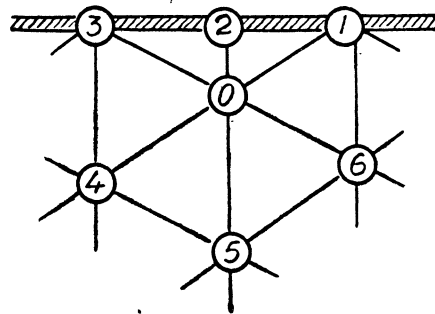


FIG. 17.

Le réseau triangulaire étant plus dense que le réseau hexagonal, la répartition obtenue pour le potentiel est meilleure. L'allure de l'équipotentielle 40 % permet d'apprécier nettement la variation résultant du passage d'un réseau à l'autre.

## 2. — DEMI-CYLINDRE INDÉFINI PORTÉ A UN POTENTIEL DONNÉ.

Lorsque le domaine étudié n'est pas limité par un rectangle, comme c'est le cas dans cet exemple (fig. 18), l'utilisation d'un réseau à mailles carrées nécessite l'application des formules faisant intervenir des distances

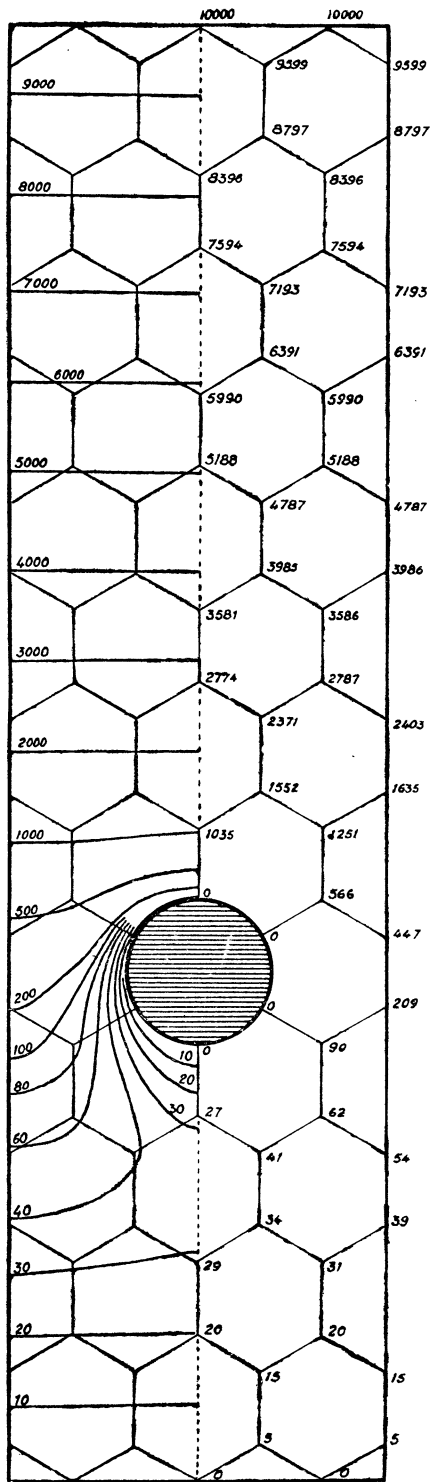


FIG. 13.

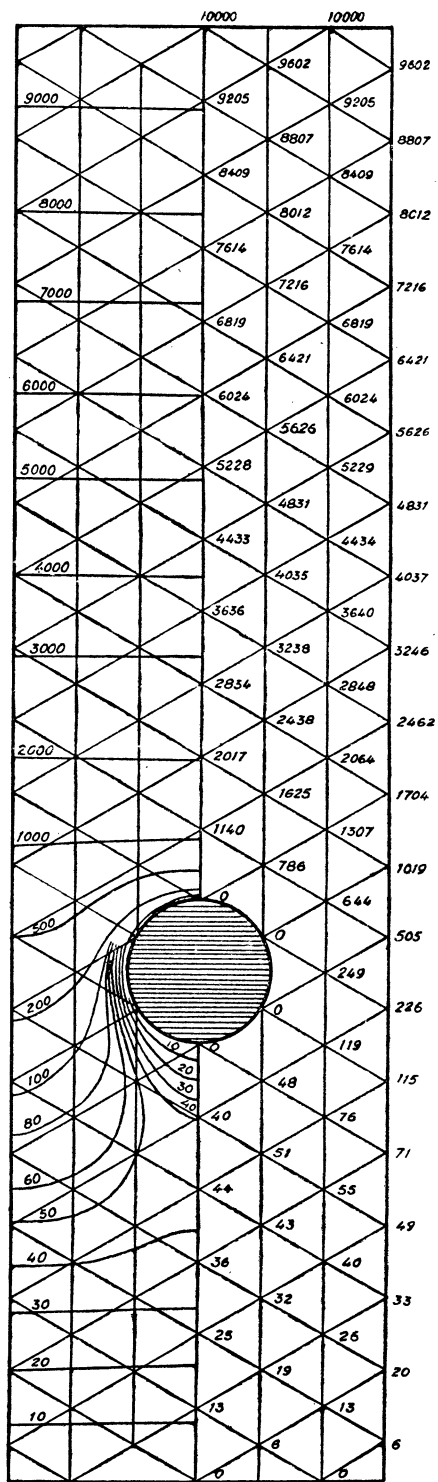


FIG. 14.



inégales entre les points. On aura par exemple, pour un nœud tel que celui de la figure (19)

$$V_0 = \frac{S_1 S_2}{S_1 + S_2} \left\{ \frac{V_1}{S_1(1+S_1)} + \frac{V_2}{S_2(1+S_2)} + \frac{V_3}{1+S_1} + \frac{V_4}{1+S_2} \right\}$$

afin de faciliter les calculs, on aura intérêt à effectuer la somme

$$\frac{V_1}{S_1(1+S_1)} + \frac{V_2}{S_2(1+S_2)}$$

et à écrire sur le réseau l'expression de  $V_0$  au lieu des valeurs de  $V_1$  et  $V_2$  du potentiel sur la frontière. La disposition des calculs et les résultats numériques obtenus, sont indiqués sur la figure (20).

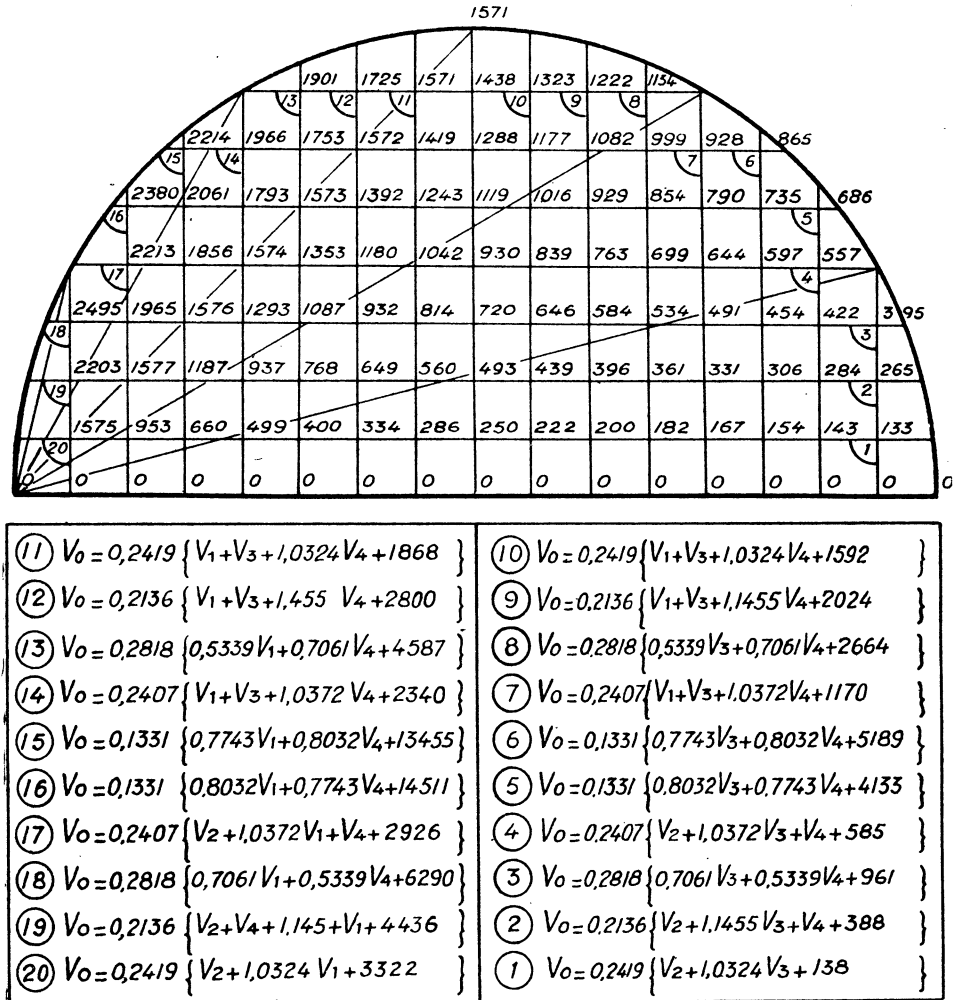


FIG. 20.

Nous avons admis que l'on avait  $V = \theta$  sur la demi circonférence BMA et  $V = 0$  sur le diamètre AB (fig. 18).

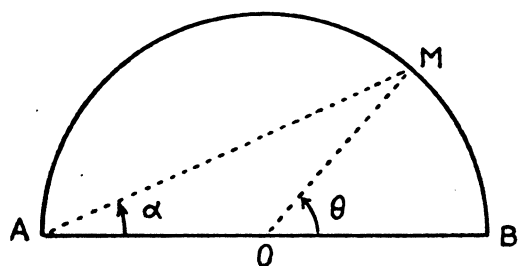


FIG. 18.

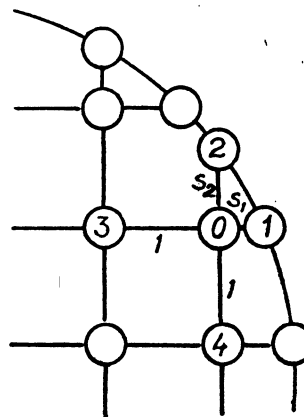


FIG. 19.

Signalons que la solution cherchée n'est autre que

$$V = 2\alpha$$

On sait en effet que  $\alpha$  satisfait à l'équation de Laplace à deux variables, et que sur le cylindre lui-même on a bien

$$V = 0$$

### 3. — TROIS CYLINDRES CONDUCTEURS COAXIAUX DE MÊME DIAMÈTRE ET DE LONGUEUR FINIE.

Nous montrons sur cet exemple comment il convient de procéder lorsque les valeurs de  $\psi$  sont discontinues sur les limites.

Le dispositif étudié (fig. 21) peut, en première approximation, représenter une lentille électrostatique de révolution.

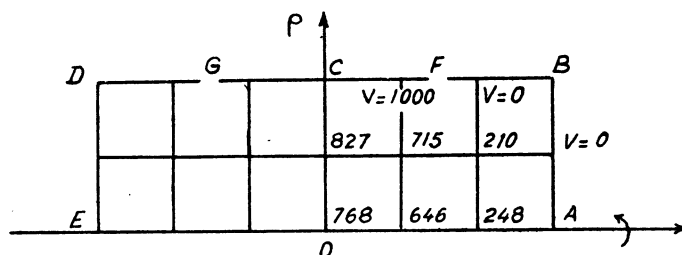


FIG. 21.

Le système étant symétrique par rapport au plan OC, il nous suffit de nous limiter, dans un plan méridien, au domaine ABC. Nous avons tracé un quadrillage régulier disposé de telle sorte qu'un nœud périphérique ne

coïncide pas avec le point singulier F. Pour obtenir rapidement une fonction de départ satisfaisante, nous utiliserons d'abord un réseau ne comprenant que six nœuds (*fig. 21*). On passe ensuite à la fonction de départ

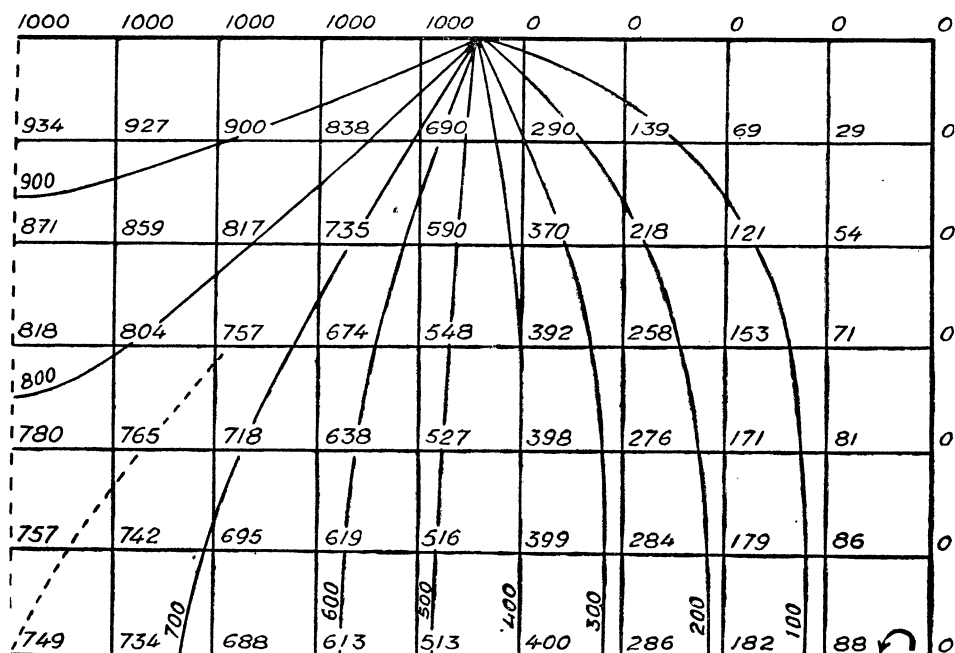


FIG. 22.

relative au réseau définitif, en interpolant à l'aide des formules à branches inégales. La discontinuité du potentiel au point F ne permet pas, en effet, de passer à un réseau formé de carrés de côté  $h/2$ , mais nécessite d'avoir recours à des mailles de côté  $h/3$ .

Les résultats numériques ont été rassemblés sur la figure (22).

#### 4. — LIGNES DE COURANT DANS UN CYLINDRE CONDUCTEUR DE GRANDE RÉSISTIVITÉ ALIMENTÉ PAR L'INTERMÉDIAIRE DE DEUX ANNEAUX INFINIMENT MINCES DE GRANDE CONDUCTIBILITÉ.

Il est possible de simplifier les équations (10) et (12) en posant  $\psi = \rho^{k/2} \psi$  dans l'équation (2). Nous donnons à propos du dispositif étudié un exemple de ce changement de variable.

Le système considéré schématise les résistances blocs (*fig. 23*) constituées par exemple par un bâton de charbon dans lequel l'arrivée et le départ du courant se font par l'intermédiaire de deux colliers en laiton.

Nous admettrons que l'intensité du courant dans le cylindre vérifie la loi d'Ohm

$$\vec{i} = \gamma \vec{E}$$

Les lignes de courant coïncident donc avec les lignes de force du champ, c'est-à-dire avec les méridiennes des surfaces équiflux.

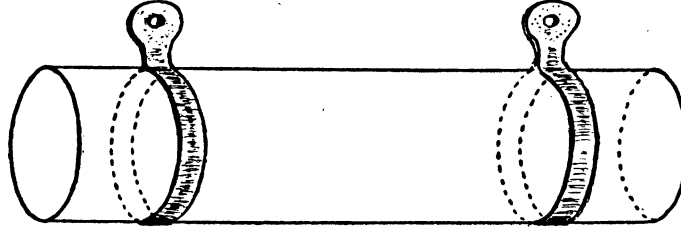


FIG. 23.

Par suite de la symétrie du système, nous nous limiterons à l'étude de la surface OABC (fig. 24).

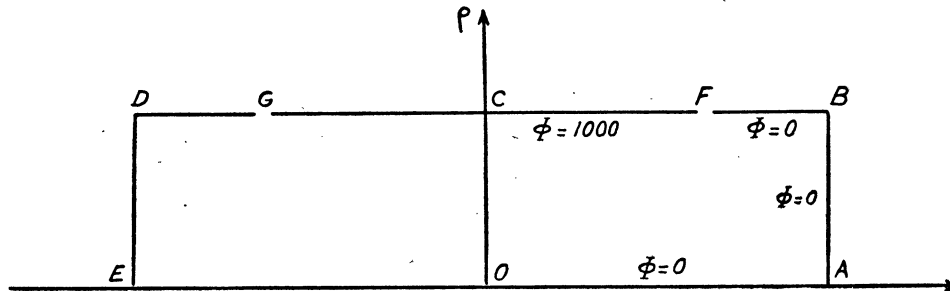


FIG. 24.

Les lignes de courant suivant la surface du conducteur, ainsi d'ailleurs que l'axe du cylindre, nous prendrons pour la fonction flux, la valeur  $\Phi = 1000$  le long de  $CF$ , et  $\Phi = 0$  le long de  $FBAO$ .

On pourrait dans le domaine ainsi limité, appliquer les formules (12) ou (13) et obtenir la répartition cherchée. Mais il est préférable dans le cas présent où la valeur de  $\Phi$  est connue sur l'axe de révolution du système, de poser

$$\Psi = \sigma^{-1} \Phi$$

En faisant  $K = -1$  l'équation (2) s'écrit

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} - \frac{3}{4} \frac{\Psi}{\rho^2} = 0$$

soit, sous forme d'équation aux différences finies

$$\left[ 4 + \frac{3}{4} \left( \frac{h}{\rho_0} \right)^2 \right] \Psi_0 = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 + \Psi_4$$

relation plus simple que (12) mais qui ne peut être utilisée que dans le cas où l'axe de révolution est exclu du domaine étudié, puisque, pour  $\rho = 0$ ,  $\psi$  devient infini.

Les résultats ont été rassemblés sur la figure (25). Dans chaque carré sont inscrites, d'abord les valeurs correspondant à la fonction  $\psi$ , puis au-

dessus, celles de  $\Phi$  déduites de  $\psi$  par la relation

$$\Phi = \psi \sqrt{\rho}$$

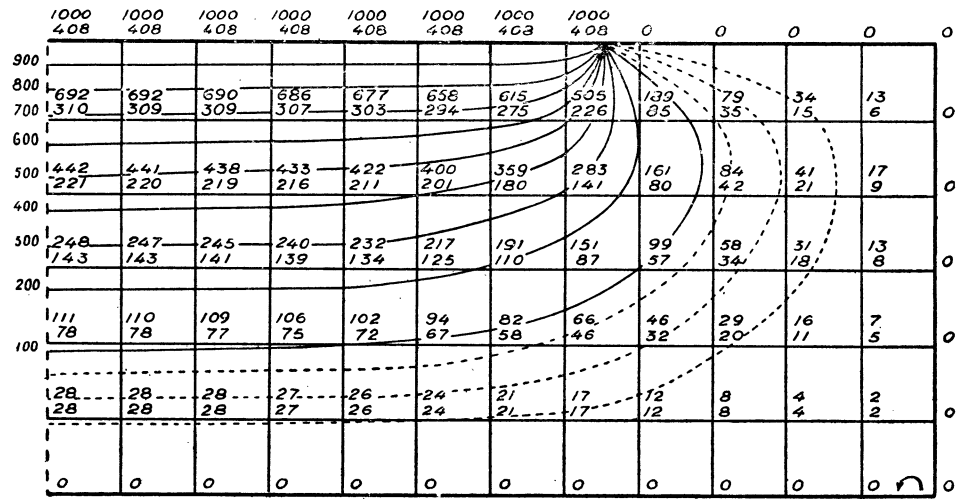


FIG. 25.

Quelques lignes de courant ont été tracées. On voit que d'après l'allure de ces dernières, que l'on peut sans trop modifier la valeur de la résistance, remplacer les crayons pleins par des tubes de section convenable.

### CHAPITRE III.

#### EXTRAPOLATION DES RÉSULTATS RELATIFS A DIFFÉRENTS RÉSEAUX

Il est en général impossible, avec un nombre raisonnable de nœuds, d'obtenir une bonne précision surtout au voisinage des points de discontinuité. Ce n'est que pour des réseaux suffisamment denses que la différence  $\psi_{i,h} - \psi_i$  est pratiquement négligeable. Or, la mise en œuvre rationnelle de la méthode de relaxation, exige l'étude successive pour un même domaine de réseaux de côté  $h, h/2, h/4 \dots$  conduisant en un même point  $P_i$  aux valeurs

$$\psi_{i,h}, \psi_{i,h/2}, \psi_{i,h/4}, \dots$$

Nous allons dans ce chapitre préciser une méthode d'extrapolation qui permet, à partir des différentes valeurs ainsi calculées, d'obtenir une valeur meilleure.

#### 1. — PRINCIPE.

Supposons que, pour un problème bien déterminé, et avec un réseau à mailles carrées de côté  $h$ , on ait obtenu en un certain point  $P$  une valeur  $\psi_h$ . Lorsque  $h$  tend vers zéro,  $\psi_h$  tend vers la valeur exacte  $\psi$  que prend au point  $P$  la fonction cherchée.

L'ensemble des valeurs  $\psi_h$  en ce point, définit une fonction  $\varphi(h)$  telle que

$$\varphi(0) = \psi$$

Nous supposons qu'au voisinage de  $h = 0$ ,  $\varphi(h)$  admet un développement limité généralisé de la forme

$$(17) \quad \varphi(h) = \varphi(0) + e_0 h^k + e_1 h^{k+1} + e_2 h^{k+2} + \dots$$

$e_0, e_1, e_2 \dots$  et  $k$  étant des constantes.

Lorsque  $h = h_1$ ,  $\varphi(h_1) = \psi_{h_1}$  et la relation précédente s'écrit

$$\psi_{h_1} = \psi + e_0 h_1^k + e_1 h_1^{k+1} + e_2 h_1^{k+2} + \dots$$

Désignons par  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$ , les valeurs de  $\psi_h, \psi_{2h}, \psi_{4h}$ , en un même point  $P$ .

La relation (17) limitée aux trois premiers termes donne :

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \psi + e_0 h^k + e_1 h^{k+1} \\ \psi_2 &= \psi + 2^k e_0 h^k + 2^{k+1} e_1 h^{k+1} \\ \psi_3 &= \psi + 2^{2k} e_0 h^k + 2^{2(k+1)} e_1 h^{k+1} \end{aligned}$$

En éliminant  $e_0 h^k$  et  $e_1 h^{k+1}$  entre ces trois équations, on obtient :

$$(18) \quad \psi = \psi_1 + \frac{1}{2^k - 1} (\psi_1 - \psi_2) + \frac{1}{(2^k - 1)(2^{k+1} - 1)} \left\{ 2^k (\psi_1 - \psi_2) - (\psi_2 - \psi_3) \right\}$$

La considération de deux valeurs  $\psi_1$  et  $\psi_2$  conduirait aux deux premiers termes-seulement.

En un point donnée P, la constante  $k$  dépend de la fonction  $\varphi$  qui, pour une équation aux dérivées partielles donnée, est liée à l'équation aux différences finies utilisée, et aux conditions aux limites imposées à  $\psi$ . La détermination a priori de  $k$  n'est pas toujours facile. Par contre, elle peut être faite aisément dès que l'on dispose des trois valeurs  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$ .

On a, en effet, en limitant le développement (17) aux deux premiers termes

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \psi + e_0 h^k \\ \psi_2 &= \psi + 2^k e_0 h^k \\ \psi_3 &= \psi + 2^{2k} e_0 h^k\end{aligned}$$

En éliminant  $\psi$  et  $e_0 h^k$  entre ces trois équations, on obtient

$$(19) \quad 2^k = \frac{\psi_3 - \psi_2}{\psi_2 - \psi_1}$$

relation permettant de déterminer  $k$ .

Enfin, la constante  $k$  dépend du point P. Toutefois, on a constaté sur de nombreux exemples, que les valeurs  $k$  correspondant aux différents points P, du domaine étudié, oscillaient autour d'une valeur moyenne  $k_m$  voisine de 1 ou de 2. La valeur entière de  $k$  la plus voisine de  $k_m$  est appelée « indice » d'extrapolation de la méthode.

Nous obtiendrons une solution meilleure que celle relative au réseau le plus dense, en prenant pour  $\psi$  l'expression (18) après avoir remplacé  $k$  par l'« indice » correspondant.

La relation (18) donne :

$$(20) \quad \psi = \psi_1 + (\psi_2 - \psi_1) + \frac{1}{3} [2(\psi_3 - \psi_2) - (\psi_2 - \psi_1)] \text{ pour } k = 1$$

$$(21) \quad \psi = \psi_1 + \frac{1}{3}(\psi_2 - \psi_1) + \frac{1}{21} [4(\psi_3 - \psi_2) - (\psi_2 - \psi_1)] \text{ pour } k = 2$$

Outre l'intérêt qu'elle présente pour l'amélioration des résultats, cette méthode d'extrapolation permet, par la considération des termes correctifs successifs, d'avoir une idée très nette de la précision avec laquelle est déterminée en chaque nœud la fonction  $\psi$ . On peut ainsi limiter aisément les régions où il est nécessaire de faire appel à un quadrillage plus fin.

## 2. — ÉTUDE DE QUELQUES EXEMPLES.

### 1° Potentiel à l'intérieur d'un carré.

Nous avons choisi cet exemple parce que les conditions aux limites étaient particulièrement simples et que la solution était connue. Nous nous sommes attachés à mettre en évidence l'intérêt considérable de l'extrapolation sous le double rapport de la précision et de la durée des calculs.

Le potentiel  $V(x, y)$  en un point P intérieur à un carré (fig. 26) dont

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1083	1078	1063	1037	1002	957	903	840	769	690	605	514	417	317	213	107	0				
2176	2166	2135	2084	2013	1923	1814	1688	1545	1388	1216	1033	839	637	428	215	0				
3290	3275	3228	3151	3044	2908	2743	2552	2337	2098	1859	1562	1269	963	647	325	0				
4435	4414	4352	4248	4104	3920	3699	3442	3151	2830	2480	2106	1711	1299	873	439	0				
5622	5596	5517	5385	5202	4970	4690	4365	3997	3589	3146	2672	2171	1648	1108	557	0				
6862	6830	6734	6573	6351	6068	5727	5330	4881	4384	3844	3265	2653	2014	1354	681	0				
8167	8129	8014	7824	7560	7224	6819	6347	5814	5223	4580	3890	3162	2400	1614	811	0				
9548	9504	9370	9149	8841	8450	7977	7427	6804	6114	5362	4556	3703	2812	1891	950	0				
11018	10967	10814	10560	10206	9756	9212	8579	7862	7066	6199	5268	4282	3252	2188	1100	0				
12591	12533	12359	12070	11668	11156	10537	9816	8998	8090	7099	6035	4907	3727	2508	1261	0				
14280	14214	14018	13583	13240	12663	11964	11150	10224	9196	8073	6865	5584	4242	2855	1435	0				
16099	16026	15807	15444	14937	14291	13508	12593	11554	10396	9131	7768	6321	4804	3233	1626	0				
18064	17983	17741	17337	16774	16055	15183	14162	13000	11705	10286	8755	7128	5419	3648	1835	0				
20192	20103	19835	19390	18768	17972	17006	15873	14581	13137	11552	9840	8015	6097	4106	2066	0				
22498	22400	22107	21618	20935	20060	18995	17744	16313	14710	12946	11036	8996	6847	4614	2322	0				
25000	24894	24574	24041	23295	22338	21169	19794	18216	16444	14487	12362	10086	7682	5179	2607	0				
27713	27600	27254	26677	25867	24826	23552	22047	20314	18361	16197	13838	11303	8617	5814	2928	0				
30661	30557	30166	29545	28672	27546	26164	24526	22653	20489	18103	15490	12669	9671	6530	3291	0				
33855	33725	33327	32664	31730	30522	29033	27261	25203	22860	20237	17348	14214	10866	7346	3704	0				
37312	37173	36754	36053	35063	33777	32186	30282	28058	25509	22637	19451	15973	12234	8283	4181	0				
41047	40902	40465	39732	38693	37338	35653	33624	31237	28481	25350	21848	17991	13815	9371	4736	0				
45072	44923	44473	43715	42639	41228	39463	37323	34785	31828	28434	24599	20330	15661	10652	5392	0				
49395	49244	48788	48018	46919	45471	43649	41421	38753	35611	31961	27782	23070	17848	12182	6181	0				
54021	53871	53417	52649	51549	50090	48241	45959	43196	39900	36017	31499	26318	20480	14047	7151	0				
58947	58801	58361	57613	56536	55100	53264	50977	48172	44777	40707	35879	30223	23707	16374	8377	0				
64164	64027	63612	62905	61883	60510	58741	56511	53740	50329	46156	41088	34987	27751	19365	9983	0				
69655	69531	69155	68513	67579	66318	64677	62586	59949	56641	52501	47328	40887	32945	23350	12190	0				
75394	75288	74965	74411	73604	72505	71064	69206	66828	63786	59880	54835	48289	39793	28901	15428	0				
81346	81261	81005	80564	79919	79036	77869	76347	74372	71795	68396	63845	57639	49037	37033	20621	0				
87466	87407	87229	86922	86471	85851	85027	83943	82517	80624	78063	74509	69387	61683	49572	30021	0				
93703	93673	93581	93424	93192	92872	92444	91879	91129	90121	88731	86739	83716	78738	69551	49893	0				
100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000

FIG. 27.



l'un des côtés est au potentiel  $V = 10^n$ , les trois autres côtés étant au potentiel zéro, a pour expression (1)

$$V(x, y) = 10^n \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1} \sin \{ (2n+1) \pi x \} \frac{\operatorname{sh} \{ (2n+1) \pi (1-y) \}}{\operatorname{sh} \{ (2n+1) \pi \}}$$

avec 
$$A_{2n+1} = \frac{4}{\pi} \frac{1}{2h+1}$$

On en déduit les valeurs exactes du potentiel aux points

$$P_1 \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right), \quad P_2 \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \quad P_3 \left( \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right)$$

$$V_1 = 0,54054 \cdot 10^n \quad V_2 = 0,25000 \cdot 10^n \quad V_3 = 0,09541 \cdot 10^n$$

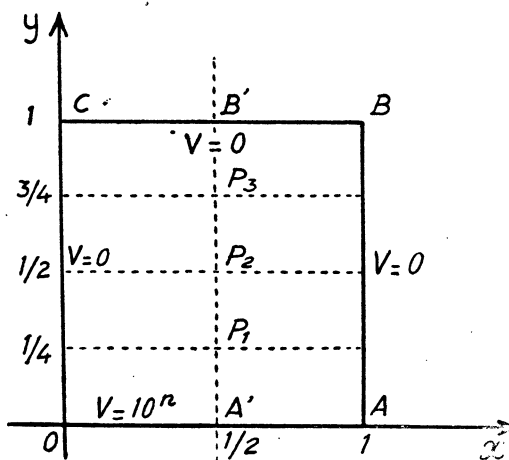


FIG. 26.

La médiane  $A'B'$  étant un axe de symétrie, il nous suffit, pour la détermination de  $V$  par la méthode de relaxation, de considérer le domaine  $A'ABB'$ . Nous avons utilisé la formule (4).

Signalons qu'au voisinage du point singulier  $A$ , les formules (5) et (6) qui font intervenir le potentiel de ce point ne peuvent pas être appliquées. Nous avons utilisé successivement des réseaux de côté  $4h$ ,  $2h$ , et  $h$ . Les résultats relatifs à ce dernier quadrillage sont indiqués sur la figure 27.

Nous avons déterminé les valeurs de  $k$  en chaque nœud comme aux réseaux (fig. 28 a). Nous avons obtenu la valeur moyenne

$$k_m = 1,9.$$

L'indice est donc égal à 2.

La figure 28 (b) est relative à la répartition obtenue après extrapolation.

Nous avons calculé ensuite le potentiel aux points  $P_1$  et  $P_3$  à partir de la formule (21).

Les résultats sont rassemblés dans le tableau I. Nous avons désigné par  $V_{i,j}$  les valeurs extrapolées à partir de  $V_i, V_j, \dots$

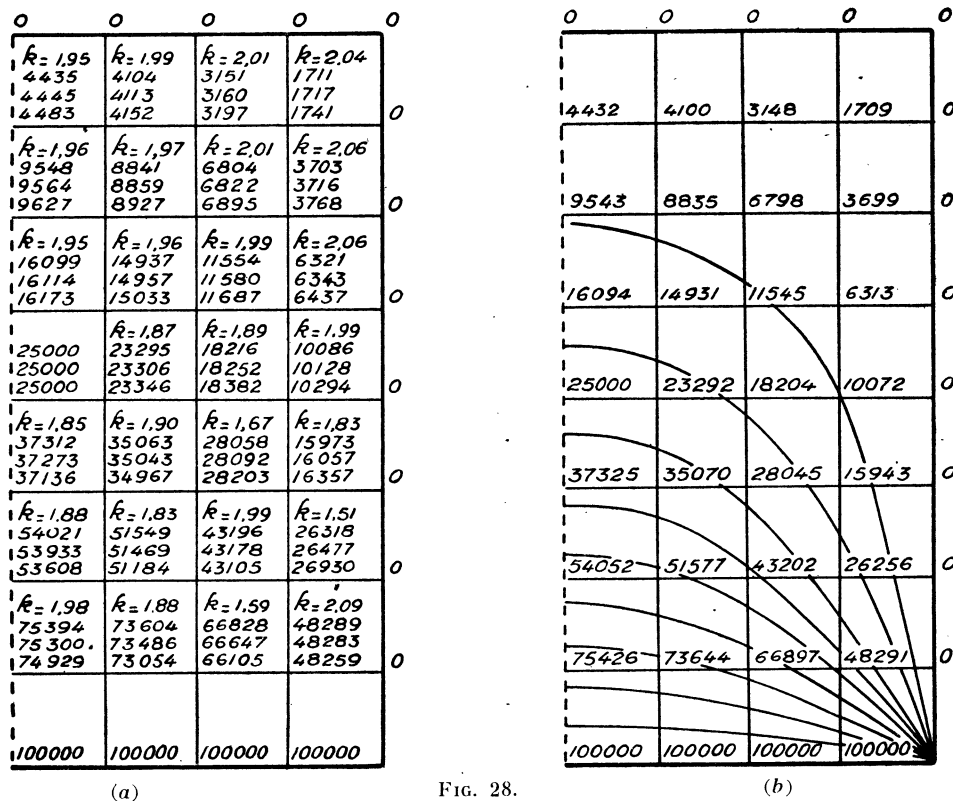


FIG. 28.

	$P_1$		$P_3$	
	V	$\Delta V$	V	$\Delta V$
$V_{exact}$	54054	0	9541	0
$V_{123}$	54052	-2	9543	+2
$V_{23}$	54041	-13	9543	+2
$V_1$	54021	-33	9548	+7
$V_2$	53933	-121	9564	+23
$V_3$	53608	-446	9627	+86

TABLEAU I

On constate en particulier que les valeurs  $V_{23}$  conduisent à une répartition du potentiel comparable, au point de la précision, à celle que l'on obtiendrait avec un réseau de côté  $h/2$ . Mais, tandis qu'un tel réseau conduirait dans l'exemple traité à 2016 nœuds, le calcul de  $V_2$  et  $V_3$  n'exige respectivement que 120 et 28 points.

### 2° Plan conducteur percé d'une fente.

Cet exemple permet de mettre en évidence la difficulté de déterminer a priori l'indice d'extrapolation de la méthode. Alors que dans le cas précédent il était égal à 2, il est ici, pour la même équation aux dérivées partielles, égal à 1, que l'on utilise la formule (4) ou la formule (6).

Le potentiel créé en un point P ( $x, y$ ) par un plan conducteur (fig. 29) porté au potentiel  $V$  et percé d'une fente de largeur  $a$ , a pour expression <sup>(2)</sup> :

$$V(x, y) = V_0 - \frac{1}{2}(E_1 + E_2)y + \frac{1}{2\sqrt{2}}(E_1 - E_2)a \left\{ \left[ 1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 \right] + \sqrt{\left[ 1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 \right]^2 + 4 \left(\frac{x}{a}\right)^2 \left(\frac{y}{a}\right)^2} \right\}^{1/2}$$

dans laquelle  $E_1$  et  $E_2$  sont les champs pour  $y = -\infty$  et  $y = +\infty$ . Nous étudierons le cas particulier où

$$E_1 = -E_2 = E$$

et nous poserons  $V_0 = 0$   $aE = \sqrt{2}$ .

On obtient ainsi :

$$V = \left\{ \left[ 1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 \right] + \sqrt{\left[ 1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 \right]^2 + 4 \left(\frac{x}{a}\right)^2 \left(\frac{y}{a}\right)^2} \right\}^{1/2}$$

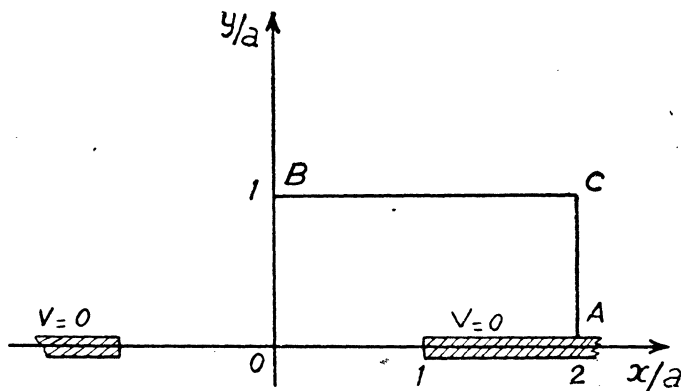


FIG. 29.

Pour pouvoir appliquer la méthode de relaxation, nous avons calculé, par cette formule, les valeurs du potentiel sur le contour ACB. Nous avons ensuite utilisé successivement les formules (4) et (6) au domaine ainsi borné, et nous avons dans les deux cas, déterminé  $k$  aux nœuds communs

2. E. DURAND, p. 318.

aux trois réseaux successivement utilisés. Les résultats sont indiqués sur les figures (30) et (31).

Nous avons obtenu ainsi

$$k_m = 1,01 \text{ pour la formule (4) — (fig. 30)}$$

et

$$k_m = 1,04 \text{ pour la formule (6) — (fig. 30 et 31).}$$

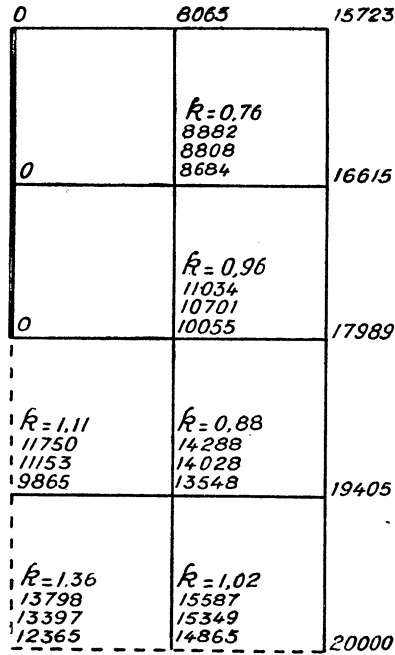


FIG. 30.

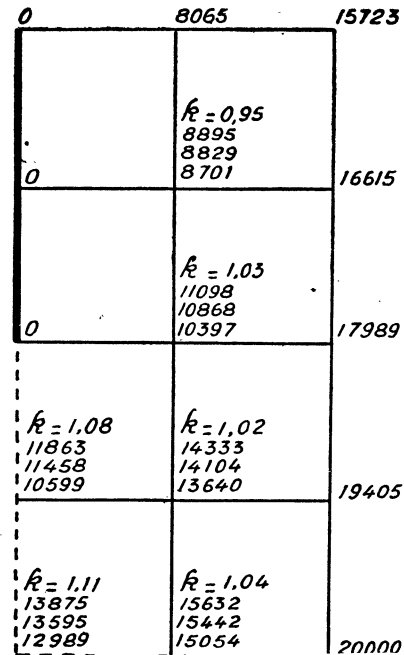


FIG. 31.

L'indice d'extrapolation est donc égal à 1 dans les deux cas. Il ne dépend pas de l'équation aux différences finies utilisée.

Nous avons calculé les potentiels aux points  $P_1 (0, 0)$ ,  $P_2 (1/2, 0)$ ,  $P_3 (0, 1/2)$  à partir de la formule (20). Les résultats ont été rassemblés dans les tableaux II et III.

	$P_1$		$P_2$		$P_3$	
	V	$\Delta V$	V	$\Delta V$	V	$\Delta V$
$V_{exact}$	14142	0	15811	0	12248	0
$V_{123}$	14123	-19	15824	+13	12315	+67
$V_{12}$	14200	+58	15826	+15	12347	+99
$V_1$	13798	-344	15587	-224	11750	-498
$V_2$	13397	-745	15349	-462	11153	-1095
$V_3$	12365	-1777	14865	-946	9865	-2383

*Formule (4)*

TABEAU II

	$P_1$		$P_2$		$P_3$	
	V	$\Delta V$	V	$\Delta V$	V	$\Delta V$
$V_{exact}$	14142	0	15811	0	12248	0
$V_{123}$	14139	-3	15817	+6	12253	+6
$V_{12}$	14154	+12	15821	+9	12269	+21
$V_1$	13875	-268	15632	-180	11863	-384
$V_2$	13595	-547	15442	-369	11458	-790
$V_3$	12989	-1153	15054	-757	10599	-1649

*Formule (6)*

TABEAU III

Comme on pouvait le prévoir, les valeurs obtenues à partir de la formule (6) valable au sixième ordre, sont nettement meilleures que celles relatives à (4) valable au second ordre seulement. Dans les deux cas, l'extrapolation permet d'améliorer considérablement la précision des calculs.

### 3° Plaque conductrice percée d'un trou circulaire.

La simple considération de la différence  $\psi_2 - \psi_1$  permet de délimiter aisément les régions où il est nécessaire de passer à un réseau plus fin. Nous montrons sur cet exemple comment il convient de procéder.

Un tel dispositif constitue la plus simple des lentilles électrostatiques de révolution (fig. 32). Nous étudierons la distribution du potentiel au voisinage de la plaque dans le cas où celle-ci est portée au potentiel  $V = 0$ , et où le champ devient uniforme à l'infini. Nous supposerons de plus, que le système admet la plaque comme plan de symétrie.

En un point P ( $\rho, z$ ) le potentiel a pour expression (3) :

$$(23) \quad V = -\frac{2 a E \xi}{\pi} (1 + \tau_1 \text{Arc tg } \tau_1)$$

avec

$$z = a \xi n \quad \rho^2 = a^2 (1 - \xi^2) (1 + n^2).$$

Le long de l'axe de la lentille on a :

$$(24) \quad V(o, z) = -\frac{2 a E}{\pi} \left\{ 1 + \frac{z}{a} \text{Arc tg } \frac{z}{a} \right\}$$

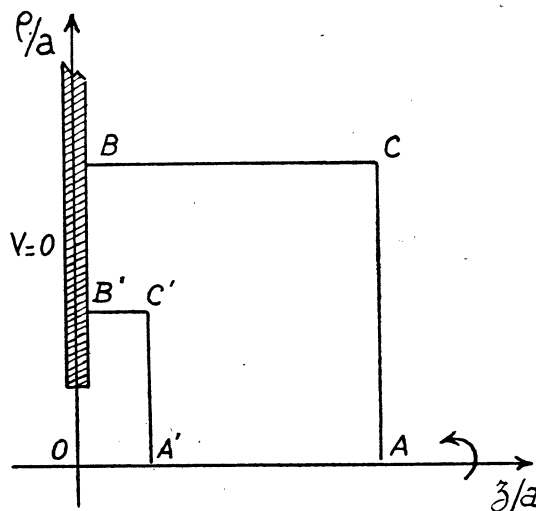


FIG. 32.

0	788	1576	2363	3150	3935	4721	5506	6291	0	405	807	1206	1602
	789	1577	2365	3151	3937	4723	5508			412	819	1219	
0	789	1577	2365	3151	3937	4723	5508	6293	0	411	818	1218	1614
	789	1577	2364	3151	3937	4722	5508			411	817	1217	
0	791	1581	2369	3155	3941	4725	5510	6295	0	428	842	1241	
	791	1580	2368	3154	3940	4725	5510			425	838	1238	1631
0	790	1579	2366	3153	3939	4724	5510	6295	0	422	833	1235	
	796	1588	2376	3161	3945	4729	5512	6297		469	884	1241	1656
	794	1585	2373	3159	3943	4728	5512			458	874	1238	
0	792	1582	2370	3156	3942	4727	5512	6297	0	447	863	1263	
	807	1602	2388	3169	3951	4733	5516	6300		591	962	1322	1688
	802	1596	2382	3165	3948	4731	5515			551	940	1313	
0	798	1589	2376	3161	3945	4730	5514	6300	0	511	919	1304	
	840	1631	2407	3181	3958	4738	5519	6303		785	1057	1376	1719
	826	1617	2397	3174	3954	4735	5518			749	1036	1367	
0	812	1603	2386	3168	3950	4733	5517	6303	0	713	1016	1357	
	956	1688	2433	3195	3965	4742	5522	6305		943	1147	1427	1747
	906	1661	2418	3186	3960	4739	5521			906	1126	1418	
0	856	1633	2403	3177	3955	4736	5520	6305	0	869	1105	1408	
	1139	1747	2457	3206	3971	4745	5524	6307		1032	1207	1463	1770
1676	1088	1719	2441	3196	3965	4742	5523			996	1185	1453	
1749	1036	1691	2424	3186	3959	4739	5522	6307	0	961	1163	1443	
1622													
	1231	1781	2469	3211	3973	4746	5526	6308		1060	1228	1477	1781
984	1164	1746	2450	3200	3967	4743	5524			1026	1205	1466	
907	1097	1711	2431	3189	3961	4740	5522	6308	0	991	1183	1453	
1829													

FIG. 35.

FIG. 33.

Pour obtenir un domaine limité, nous avons calculé les valeurs du potentiel aux nœuds périphériques du réseau utilisé à partir de la formule (23) dans laquelle nous avons posé

$$-\frac{2aE}{\pi} = 1$$

Nous avons ensuite appliqué le processus habituel de relaxation à partir de la formule (10). Les résultats sont rassemblés sur la figure (33). Dans chaque carré nous donnons les valeurs  $V_1$  et  $V_2$  relatives aux deux réseaux utilisés, et la valeur extrapolée avec l'indice 1. La figure (34) a trait à la comparaison des valeurs calculées sur l'axe par la méthode de relaxation à celles déduites de (24). La courbe (1) est relative aux valeurs obtenues directement à partir du réseau le plus dense, et la courbe (2) aux valeurs extrapolées.

On voit ainsi la valeur considérable que présente l'extrapolation des résultats. Toutefois, l'erreur demeure sensible au voisinage de la plaque où les gradients sont importants. Il est donc nécessaire d'utiliser dans cette région un quadrillage plus fin. Nous nous sommes limités au domaine  $A' C' B'$  (fig. 32). Les valeurs relatives aux nœuds périphériques sont celles obtenues précédemment après l'extrapolation. Les résultats sont indiqués sur la figure (35). L'erreur  $\Delta V$  relative à cette nouvelle répartition est indiquée en pointillé sur la figure (34).

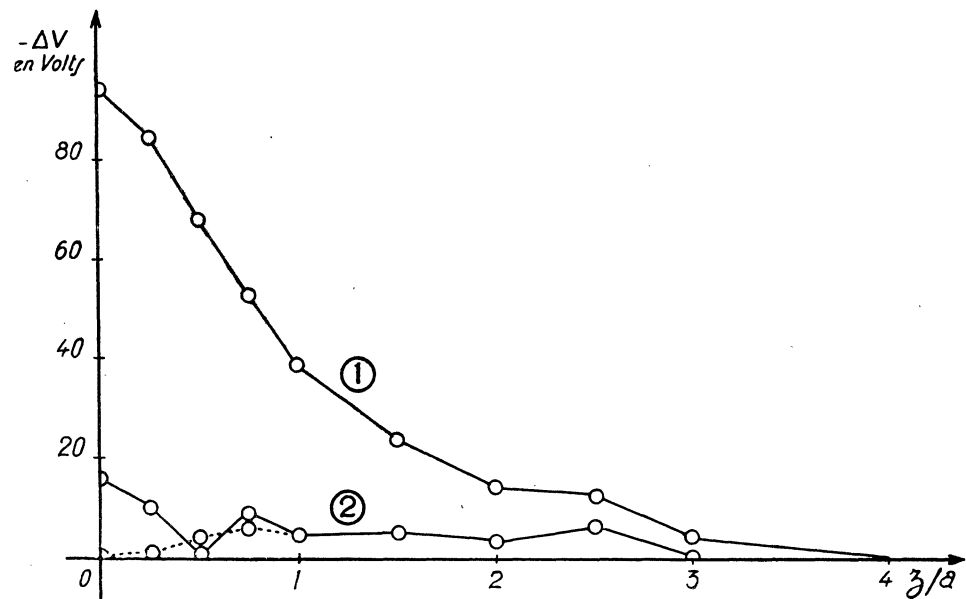


FIG. 34.

## CHAPITRE IV.

### EXEMPLES DANS LESQUELS LE DOMAINE D'INTÉGRATION N'EST PAS LIMITÉ

L'application de la méthode de relaxation nécessite la connaissance de la fonction sur la frontière du domaine étudié. Or, pour la plupart des systèmes couramment utilisés en électricité statique (distributions de charges, de courants...), les fonctions potentiel ou flux ne sont pas connues, et il n'est pas possible, comme dans les exemples précédents, de calculer les valeurs de ces fonctions à partir de leur expression analytique. Il est alors nécessaire de faire appel à des développements limités. Nous traiterons dans ce chapitre un certain nombre d'exemples en nous attachant à varier les méthodes qui permettent d'obtenir des domaines bornés.

#### 1. — DISQUE UNIFORMÉMENT CHARGÉ.

Nous nous sommes efforcés dans cet exemple de montrer comment, pour une distribution superficielle donnée de charges, on peut, soit limiter complètement le domaine et faire ensuite appel au processus habituel de relaxation, soit, en tenant compte des discontinuités relatives aux dérivées partielles du potentiel, obtenir des équations aux différences finies valables sur la distribution elle-même.

Le disque de rayon  $a$  et d'axe  $oz$  est représenté par un trait épais sur la figure (36). Nous désignerons par  $\sigma$  la densité superficielle de charges, par  $Q$  la charge totale, et par  $V_0 = \frac{\sigma a}{2\epsilon_0}$  le potentiel au centre du disque (1).

##### 1° Étude du potentiel.

A grande distance de l'origine, le potentiel peut se développer suivant l'expression (2)

$$V(R, \theta) = V_0 \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{a}{R}\right) P_0(\cos \theta) - \frac{1}{8} \left(\frac{a}{R}\right)^3 P_2(\cos \theta) + \frac{1}{16} \left(\frac{a}{R}\right)^5 P_4(\cos \theta) - \frac{5}{128} \left(\frac{a}{R}\right)^7 P_6(\cos \theta) + \dots \right\}$$

$P_n(u)$  étant le polynôme de Legendre d'ordre  $n$ .

C'est à partir de ce développement limité aux trois premiers termes, que nous avons calculé les valeurs de  $V$  sur le contour ACB. Nous nous sommes assurés que les valeurs ainsi obtenues pour le terme suivant étaient suffisamment approchées, en vérifiant que le terme suivant du développement était négligeable. Avec  $V_0 = 1000$  par exemple pour  $\theta = 0$  et  $R/a = 2,4$  le premier terme négligé est égal à 0,085.

1. E. DURAND, p. 394.

2. E. DURAND, p. 394.



Si l'on désirait une précision meilleure, on pourrait soit éloigner les limites du domaine étudié, soit conserver un plus grand nombre de termes dans le développement (25).

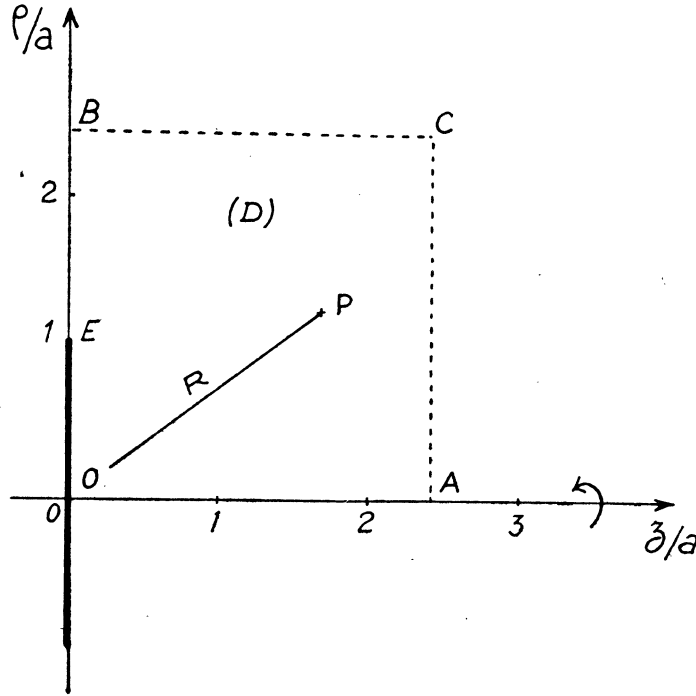


FIG. 36.

On obtient ainsi un domaine borné auquel la méthode de relaxation est applicable. En un point quelconque, on utiliserait la relation (10) par exemple. Sur EB qui est un axe de symétrie, il suffirait de faire  $V_1 = V_3$  dans cette formule. Sur l'axe de révolution on ferait appel à la formule (14). Enfin, pour les points du disque lui-même, il est possible d'obtenir une équation aux différences finies analogue à (10).

Les points 0, 2, 4, étant considérés comme extérieurs à la distribution (fig. 37), les dérivées partielles du potentiel au point 0 s'écrivent :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial \rho}\right)_0 &= \frac{1}{2h} (V_2 - V_4) & \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0 &= \frac{1}{2h} (-3V_0 + 4V_1 - V_3) \\ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2}\right)_0 &= \frac{1}{h^2} (V_2 + V_4 - 2V_0) & \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)_0 &= \frac{1}{h^2} (V_0 + V_3 - 2V_1) \end{aligned}$$

En portant ces valeurs dans l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques, on trouve :

$$(26) \quad 2IV_0 = 4IV_1 + (2I + 1)V_2 + (2I - 1)V_4 + 2IV_3.$$

Compte tenu de la symétrie, la discontinuité  $\sigma/\epsilon_0$  de la composante normale du champ à la traversée du disque se traduit par la relation :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0 = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

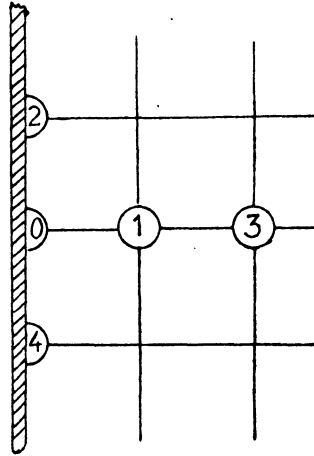


FIG. 37.

qui s'écrit sous forme d'équation aux différences finies :

$$(27) \quad 3 V_0 - 4 V_1 + V_3 = \frac{\sigma h}{3}$$

En éliminant V entre les équations (26) et (27), nous obtenons

$$8 IV_0 = 4 I V_1 + (2I + 1) V_2 + (2I - 1) V_3 + 4 V_0 \left(\frac{h}{a}\right) I$$

Dans ce cas on peut également calculer V sur tout le contour du domaine OACBO.

Sur l'axe, le potentiel a pour valeur

$$V = V_0 \left\{ \sqrt{1 + (z/a)^2} - |z/a| \right\}$$

Au voisinage de l'axe il peut se développer suivant l'expression <sup>(3)</sup>

$$V(\rho, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{\rho}{2} \frac{d}{dz}\right)^{2n} V(0, z)$$

soit

$$(28) \quad V(\rho, z) = V_0 \left\{ [1 + (z/a)^2]^{1/2} - (z/a) - \frac{\rho^2}{4} [1 + (z/a)^2]^{-3/2} + \frac{3\rho^4}{64} [1 + (z/a)^2]^{-7/2} [4(z/a)^2 - 1] \dots \right\}$$

3. E. DURAND, pp. 382 à 384.

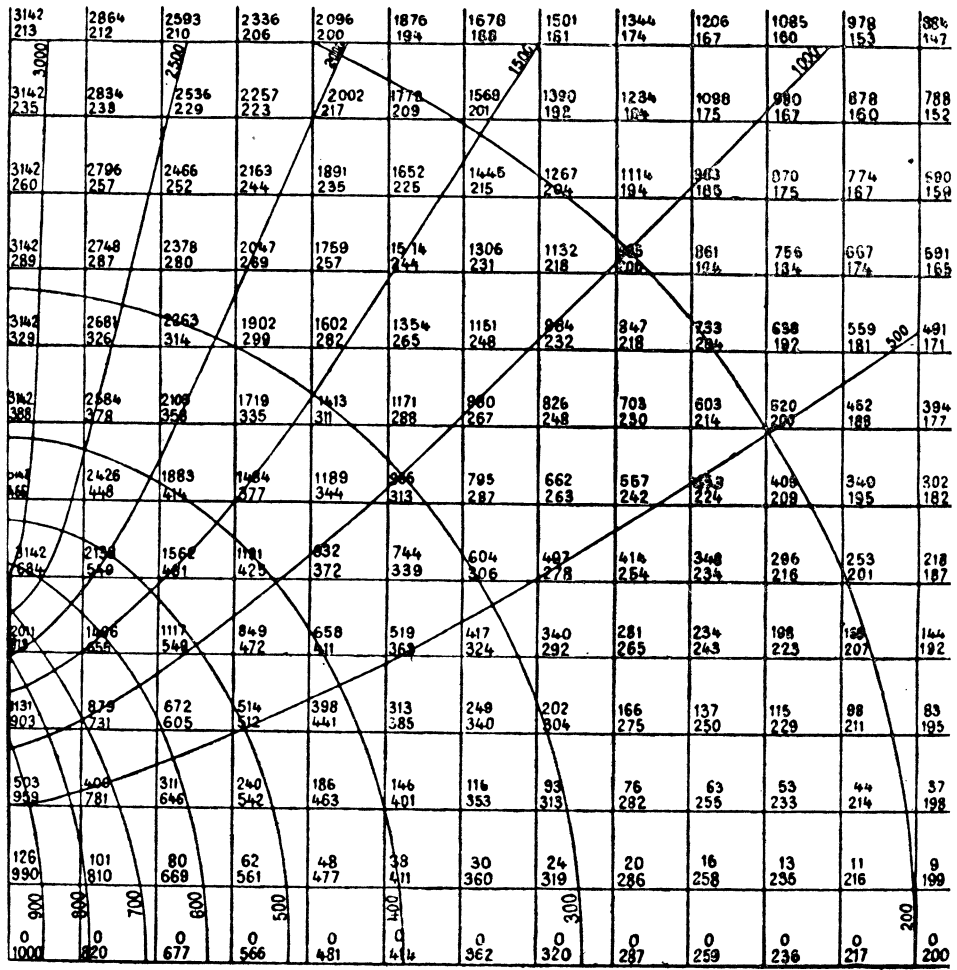


Fig. 3B

Ce développement a été utilisé pour calculer  $V$  dans le plan du disque ( $z = 0$ ) pour  $\rho/a$  égal à 0,2 à 0,4 et à 0,6.

Au voisinage des bords du disque, les calculs précis de  $V$  à partir des développements (25) et (28) exigerait un trop grand nombre de termes. Il est préférable d'utiliser l'expression intégrale (4)

$$V(\rho, z) = V_0 \int_0^\infty j_0(m\rho) j_1(ma) e^{-m|z|} \frac{dm}{m}$$

qui pour  $z = 0$  se réduit à

$$V(\rho, 0) = V_0 \int_0^\infty j_0(m\rho) j_1(ma) \frac{dm}{m}$$

$J_n$  étant la fonction de Bessel de première espèce d'ordre  $n$ .

Les valeurs du potentiel dans le plan du disque pour  $0,6 < \rho/a < 2,4$  ont été calculées à partir de cette expression.

Nous avons ensuite appliqué la méthode de relaxation au domaine ainsi limité.

Les résultats numériques obtenus sont rassemblés sur la figure (38).

## 2° Étude de la fonction flux.

Dans le cas des systèmes de révolution, les fonctions  $V$  et  $\Phi$  satisfont aux relations

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\Phi}{\varepsilon_0} \right) = -2\pi\rho \frac{\partial V}{\partial z} \quad \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\Phi}{\varepsilon_0} \right) = 2\pi\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}$$

qui s'écrivent sous forme d'équation aux différences finies

$$\begin{aligned} (\Phi/\varepsilon_0)_2 - (\Phi/\varepsilon_0)_4 &= -2\pi h I (V_1 - V_3) \\ (\Phi/\varepsilon_0)_1 - (\Phi/\varepsilon_0)_3 &= 2\pi h I (V_2 - V_4). \end{aligned}$$

Ces relations permettraient de déduire  $(\Phi/\varepsilon_0)$  de la répartition obtenue pour  $V$ .

Mais les valeurs de  $\Phi$  sur les nœuds périphériques étant particulièrement faciles à déterminer, nous avons préféré recommencer le calcul direct de  $\Phi$  par la méthode de relaxation.

Dans le plan du disque, les valeurs de  $\Phi$  se déduisent aisément du théorème de Gauss. On obtient, en partant de la valeur 0 sur l'axe :

$$\begin{aligned} (\Phi/\varepsilon_0) &= \pi \frac{V_0}{a} \rho^2 \quad \text{pour} \quad 0 \leq \rho \leq a \\ (\Phi/\varepsilon_0) &= \pi V_0 a \quad \text{pour} \quad \rho \geq a. \end{aligned}$$

Le développement en série de  $\Phi$  limité au terme quadrupolaire.

$$(\Phi/\varepsilon_0) = \pi V_0 a \left\{ 1 - \frac{z}{R} - \frac{3}{8} z \left( \frac{1}{R^3} - \frac{z^2}{R^5} \right) \right\}$$

permet de calculer  $\Phi$  le long du contour ACB. Les calculs ont été effectués à partir de la relation (12). Les résultats sont indiqués sur la figure (38). Dans chaque carré, on a inscrit d'abord la valeur du potentiel, puis celle du flux. Quelques équipotentielles et quelques équiflux ont été également tracés.

## 2. — DISQUE DE ROWLAND.

Nous avons montré sur cet exemple, comment la connaissance de la fonction  $\psi$  en des nœuds au voisinage desquels les gradients ont des valeurs notables, permet d'obtenir une bonne précision avec un très petit nombre de points. Nous avons utilisé un réseau non homogène formé de carrés de dimensions différentes.

On fait tourner, avec une vitesse angulaire constante  $\omega$  un disque de rayon  $a$  portant une densité superficielle uniforme  $\sigma$  de charges électriques (fig. 39).

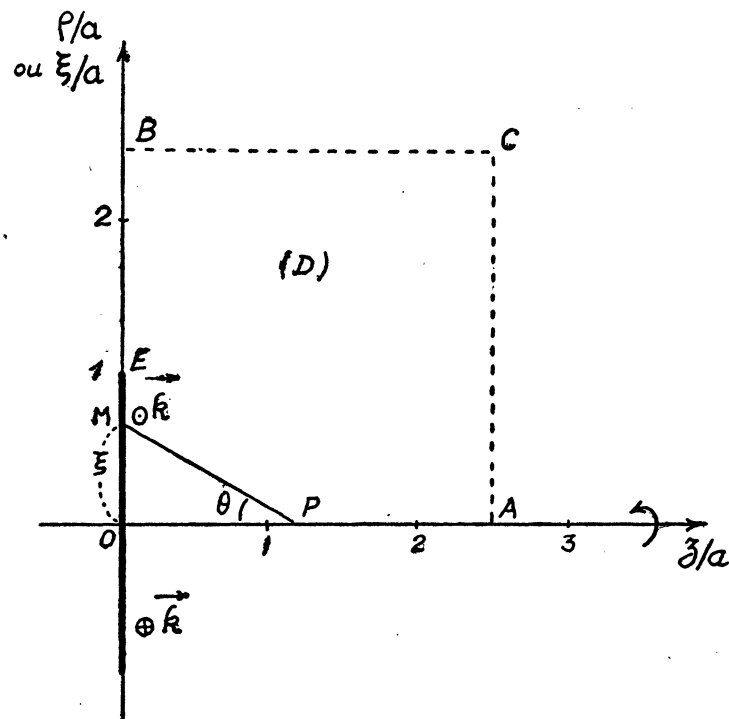


FIG. 39.

On se propose de déterminer la fonction flux d'induction magnétique en un point quelconque de l'espace.

La densité superficielle  $k$  de courant en un point M du disque a pour expression (5)

$$k = v\sigma = \omega \sigma \xi$$

et l'induction B en un point de l'axe a pour valeur

$$B(o, z) = \mu_0 \int_0^a \frac{\sin^3 \theta}{2 \xi} k d \xi = \frac{\mu_0 \omega \sigma}{2} \left\{ \frac{2z^2 + a^2}{\sqrt{z^2 + a^2}} - 2z \right\}$$

Soit, en désignant par  $B_0 = \frac{\mu_0 \omega \sigma}{2}$  l'induction au centre du disque :

$$(29) \quad B(o, z) = B_0 \left\{ \frac{2(z/a)^2 + 1}{\sqrt{(z/a)^2 + 1}} - 2(z/a) \right\}$$

La fonction flux d'induction définie par

$$(30) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = 2 \pi \rho B_z \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -2 \pi \rho B_\rho$$

satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = -2 \pi \mu_0 i_\rho$$

qui, en dehors des courants ( $i_\rho = 0$ ), est identique à l'équation de la fonction flux électrostatique.

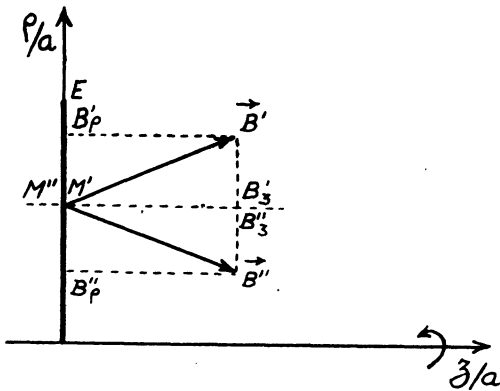


FIG. 40.

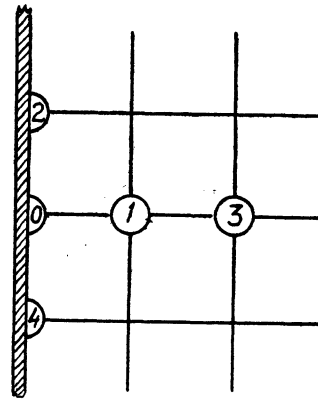


FIG. 41.

Au voisinage du disque, B satisfait aux conditions (fig. 40)

$$B'_z = B''_z \quad B'_\rho - B''_\rho = \mu_0 k.$$

En remplaçant  $B_z$  et  $B_\rho$  par leurs expressions (30), et en tenant compte de la symétrie, on obtient :

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{z=0} = -\pi \mu_0 \xi k = -2 \frac{B_0}{a} \pi \xi^2$$

Soit, sous forme d'équation aux différences finies (fig. 41)

$$8 I \Phi_0 = 4 I \Phi_1 + (2 I - 1) \Phi_2 + (2 I + 1) \Phi_3 + 8 \pi B_0 a^2 \left(\frac{h I}{a}\right)^2$$

Dans le cas des systèmes de révolution  $\Phi$  se déduit de la composante  $A_\varphi$  du potentiel vecteur par la relation

$$\Phi = 2 \pi \rho A_\varphi.$$

De l'expression classique (6)

$$d A_\varphi = \frac{\mu_0 k db}{2 \pi} \int_0^\pi \frac{b \cos \varphi}{r} d \varphi$$

du potentiel vecteur d'une spire de rayon  $b$ , parcourue par un courant d'intensité  $kdb$ , on obtient par intégration

$$(31) \quad A_\varphi = \frac{\mu_0 \omega \sigma}{2 \pi} \int_0^a b db \int_0^\pi \frac{b \cos \varphi}{r} d \varphi$$

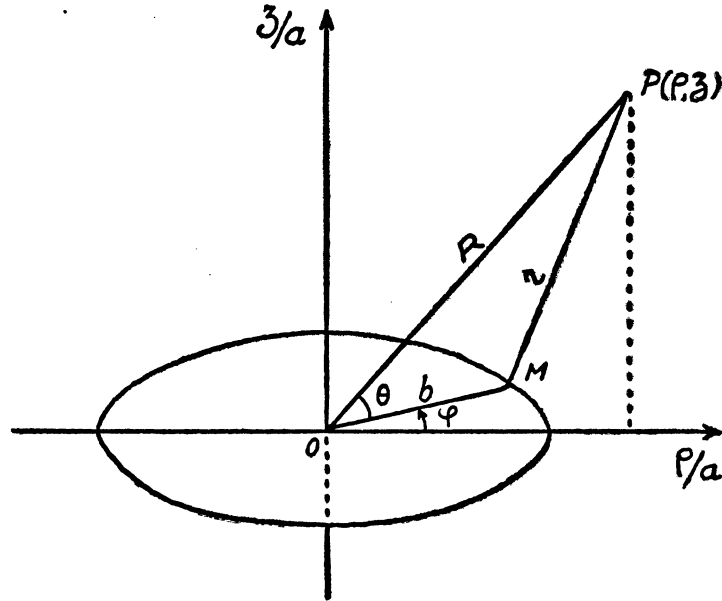


FIG. 42.

Soit, en remarquant que l'on a (fig. 42)

$$R \cos \theta = \rho \cos \varphi$$

et en remplaçant  $\frac{1}{r}$  par son développement en série de polynomes de Legendre :

$$A_\varphi = \frac{B_0}{\pi a} \int_0^\pi \cos \varphi d \varphi \int_0^a \left\{ P_0(\cos \theta) + \left(\frac{b}{R}\right) P_1(\cos \theta) + \left(\frac{b}{R}\right)^2 P_2(\cos \theta) + \dots \right\} \frac{b^2}{R} db$$

d'où

$$\Phi = \frac{\pi}{4} a^2 B_0 \frac{1}{R/a} \left(\frac{\rho}{R}\right)^2 \left\{ 1 + \frac{1}{(R/a)^2} \left[ \frac{5}{4} \left(\frac{\rho}{R}\right)^2 - 1 \right] + \dots \right\}$$

C'est l'expression à partir de laquelle ont été calculées les valeurs de  $\Phi$  sur le contour ACB. On a posé  $\frac{\pi}{4} a^2 B_0 = 1$ . Le sommet du disque étant un point au voisinage duquel les gradients ont une valeur notable, la connaissance de  $\Phi$  en ce point permet d'obtenir une bonne précision dans la détermination de la fonction flux avec un réseau n'ayant qu'un petit nombre de nœuds.

Posons  $\varphi = \pi + 2\psi$   $\sin^2 \alpha = \frac{4ab}{(a+b)^2}$

l'intégrale (31) devient

$$A_2 = \frac{4aB_0}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \alpha} \left\{ \frac{1 + \cos^2 \alpha}{2} \mathfrak{J}_1 - \mathfrak{J}_2 \right\} d\alpha$$

avec

$$\mathfrak{J}_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \psi}} \quad \mathfrak{J}_2 = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \psi} d\psi$$

On en déduit

$$\Phi = 8 B_0 a^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \alpha} \left\{ \frac{1 + \cos^2 \alpha}{2} \mathfrak{J}_1 - \mathfrak{J}_2 \right\} d\alpha$$

Le calcul approché de cette intégrale a été effectué à partir de la formule de Simpson pour  $0 < \alpha < 89^\circ$  puis, en substituant à  $\mathfrak{J}_1$  qui devient infini pour  $\alpha = \pi/2$  sa formule asymptotique :

$$\mathfrak{J}_1 = \left| \operatorname{Log} \frac{4}{\cos \alpha} \right|$$

La variation brusque des gradients à proximité du disque nécessite dans cette région l'emploi d'un quadrillage plus fin qu'au voisinage des nœuds périphériques. Nous avons tracé un réseau non homogène constitué par des mailles de côté  $h$  et  $2h$  disposé comme il est indiqué sur la figure (43). Les calculs ont été effectués à partir de la formule (12). Seuls, les points mitoyens aux deux quadrillages, ont été calculés en appliquant alternativement les formules normales et diagonales.

L'induction sur l'axe du disque peut se déduire des résultats relatifs à la fonction flux. On a, en effet, d'après (30)

$$B(o, z) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right)_o$$

qui s'écrit en tenant compte de (16)

$$B_o(o, z) = \frac{\Phi_o}{\pi h^2}$$



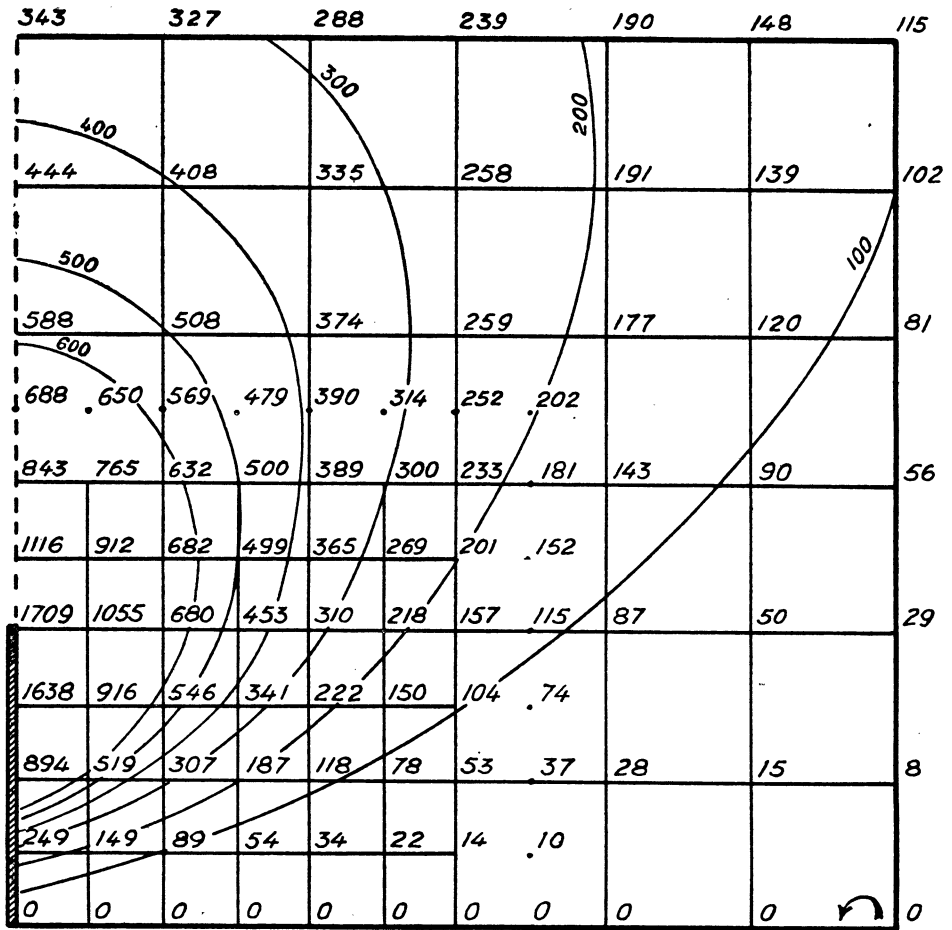


FIG. 43.

Nous avons rassemblé dans le tableau IV les valeurs ainsi obtenues pour  $B$  et celles calculées à partir de la formule (29).

L'erreur relative  $\Delta B/B_0$  est inférieure à 0,02.

$\xi/a$	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	2,00	2,50	3,00
$B_{exact}$	1273	753	435	255	154	98	65	32	18	11
$B_{relax.}$	1268	759	453	275	173	112	71	36	19	10
$\Delta B$	- 5	+ 6	+ 18	+ 20	+ 19	+ 14	+ 6	+ 4	+ 1	- 1

TABLEAU IV

3. — BANDE DE LARGEUR FINIE UNIFORMÉMENT CHARGÉE.

Lorsque la fonction  $\psi$  n'est pas aisément calculable en un point où les gradients sont forts, comme au sommet d'une distribution de charges ou de dipôles, il est nécessaire d'appliquer en ce point une formule faisant intervenir un grand nombre de nœuds. Nous montrerons à propos de cet

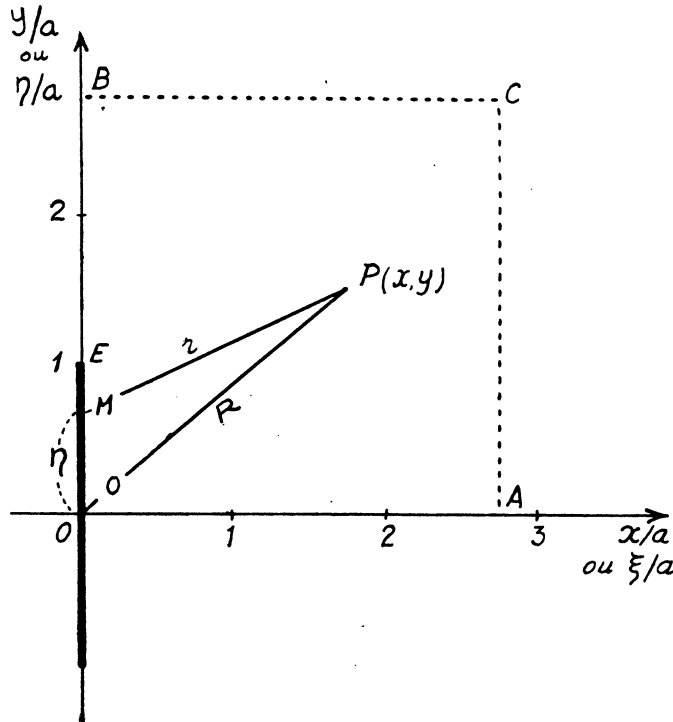


FIG. 44.

exemple, comment il convient de procéder dans le cas d'une distribution superficielle de charges.

La bande, de largeur  $2a$ , est représentée par un trait épais sur la figure (44). Nous désignerons par  $\sigma$  la densité superficielle de charge, et par  $Q$  la charge totale par unité de longueur.

1° Étude du potentiel.

Le potentiel d'une distribution cylindrique de charges peut se développer suivant l'expression (7)

$$(32) \quad V = - \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left\{ Q \text{Log } R - \frac{p_u x^u}{R^2} + \frac{1}{2} \frac{p_{uv}}{R^2} \left( \delta^{uv} - \frac{r}{R^2} x^u x^v \right) + \dots \right\}$$

dans laquelle on a posé

$$Q = \int \sigma ds, \quad p_u = \int \sigma \xi_u ds, \quad p_{uv} = \int \sigma \xi_u \xi_v ds$$

et la somme sur l'indice  $n$  allant de 1 à 2 seulement. Dans le cas étudié, et en se limitant au terme quadrupolaire, la relation (32) se réduit à :

$$(33) \quad V = - \frac{Q}{2\pi r_0} \left\{ \text{Log } R + \frac{a^2}{6 R^2} \left[ 1 - 2 \frac{y^2}{R^2} \right] \right\}$$

C'est à partir de cette expression de  $V$ , dans laquelle nous avons posé

$$- \frac{Q}{2\pi r_0} = 1$$

que nous avons calculé les valeurs du potentiel sur le contour ACB.

Dans le domaine ainsi borné, nous avons tracé un réseau semblable à celui utilisé dans l'exemple précédent.

Les calculs ont été effectués à partir de l'équation (4). Sur la bande elle-même, nous avons établi la relation (fig. 45)

$$(34) \quad 4 V_0 = 2 V_1 + V_2 + V_4 + \frac{Q h}{2a r_0}$$

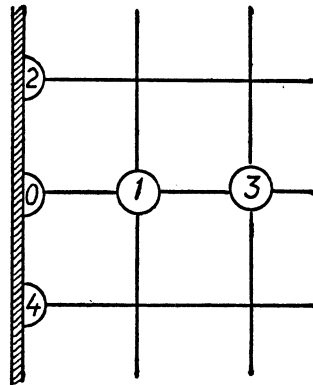


FIG. 45.

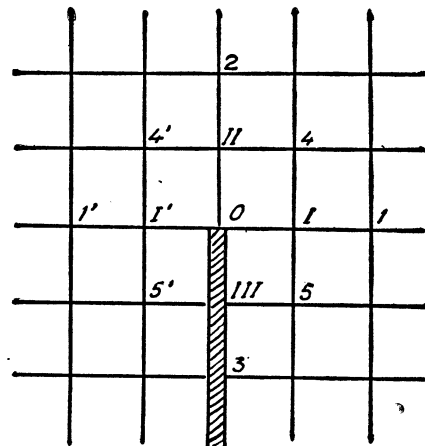


FIG. 46.

Le sommet E de la distribution étant un point essentiel pour la rapidité de convergence de la méthode, nous avons adopté pour ce point, une formule faisant intervenir les valeurs du potentiel en un plus grand nombre de nœuds. La formule (4) appliquée successivement aux points I, II, I' permet d'écrire (fig. 46)

$$\begin{aligned} V_0 &= 4 V_I - (V_1 + V_4 + V_5) \\ V_0 &= 4 V_{II} - (V_2 + V_4 + V_4) \\ V_0 &= 4 V_{I'} - (V_{1'} + V_{4'} + V_{5'}). \end{aligned}$$

Au point III la relation (34) donne :

$$V_0 = 4 V_{III} - (V_3 + 2 V_3) - \frac{Q h}{2a r_3}$$

Soit, en prenant pour  $V_0$  la moyenne arithmétique de ces quatre valeurs, et en tenant compte de la symétrie :

$$V_0 = 2 V_I + V_{II} + V_{III} - \left\{ \frac{V_1}{2} + \frac{V_2 + V_3}{4} + V_4 + V_5 \right\} - \frac{Qh}{2a \epsilon_0}$$

Les résultats numériques obtenus sont indiqués sur la figure (47). Dans chaque carré se trouve d'abord la valeur de  $V$  correspondant au réseau tracé sur la figure elle-même, au-dessus les valeurs relatives au quadrillage de côté moitié, enfin les valeurs extrapolées avec l'indice 2.

$x/a$	0,00	0,50	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00
$V_{exact}$	-1000	-334	132	732	1117	1397	1616
$V_{relax.}$	-1002	-336	130	731	1116	1397	1616
$\Delta V$	-2	-2	-2	-1	-1	0	0
$\frac{V}{\Phi}$	-982	-322	138	734	1117	1397	1616
$\Delta V$	18	12	6	2	0	0	0

TABLEAU V

Les tableaux V et VI ont trait à la comparaison des résultats obtenus pour le potentiel sur les axes de symétrie  $ox$  et  $oy$  de la bande. Les valeurs exactes de  $V$  ont été calculées à partir de l'expression (fig. 48) :

$$(35) \quad V = -\frac{Q}{2\pi r_0} \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{y}{a} - 1 \right) \text{Log} \frac{R_1}{a} - \left( \frac{y}{a} + 1 \right) \text{Log} \frac{R_2}{a} + \frac{x}{a} (\alpha_1 - \alpha_2) \right\}$$

		1603	1623	1680	1761	1856	1956
		1376	1408	1493	1607	1733	
		1375	1408	1494	1608	1733	
		1373	1408	1495	1610	1734	1858
		1080	1138	1278	1445	1611	
		1078	1138	1279	1447	1612	
		1073	1139	1284	1450	1613	1766
		648	686	785	1041	1288	1503
		646	687	787	1043	1289	1503
		641	690	793	1050	1293	1505
		1317	403	573			
		1312	406	577			
		299	414	586			
		-307	54	358	825	1164	1425
		-298	61	362	826	1165	1425
		-271	80	376	831	1166	1425
		-969	-235	192			
		-851	-226	197			
		-795	-199	213			
		-1002	-336	130	731	1116	1397
		-986	-326	136	732	1116	1396
		-938	-296	154	733	1115	1395
							1616

FIG. 47

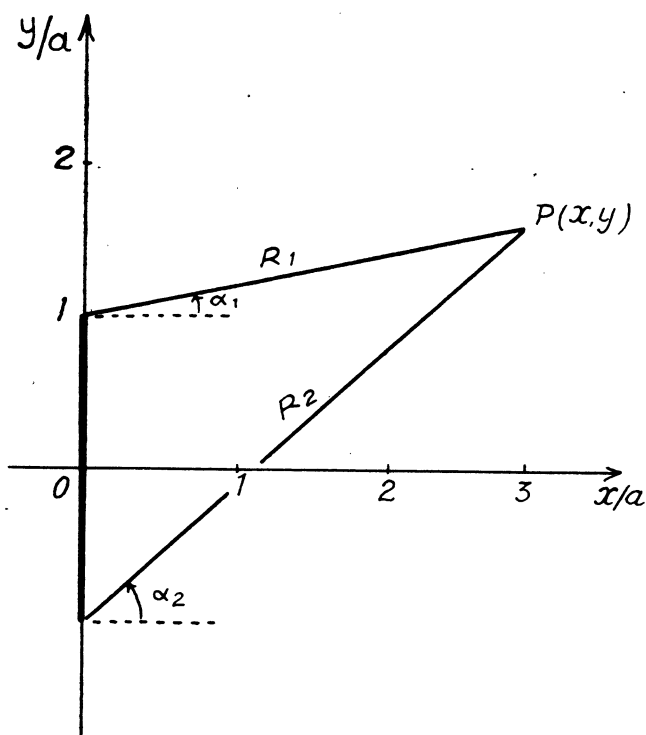


FIG. 48.

$y/a$	0.00	0.50	1.00	1.50	2.00	3.00	4.00	5.00
$V_{exact}$	-1000	-869	-307	318	648	1080	1376	1603
$V_{relax.}$	-1002	-869	-307	317	648	1080	1376	1603
$\Delta V$	-2	0	0	-1	0	0	0	0
$V_{deduit de \Phi}$	-982	-846	-305	301	639	1078	1377	1603
$\Delta V$	18	23	2	-17	-9	-2	+1	0

TABEAU VI

2° Étude de la fonction flux.

Les fonctions  $V(x, y)$  et  $\Phi(x, y)$  étant conjuguées et  $V(x, 0)$  étant réelle et paire,  $\Phi$  peut être obtenu sans quadrature, en prenant la partie imaginaire

du potentiel complexe :

$$V(x + iy, 0)$$

	1571	1470	1371	1276	1186	1103	1026	956	892	834	782
	1458	1349	1245	1148	1059	978	905	840	781		
	1458	1349	1245	1148	1059	978	905	840	781		
1571	1458	1349	1245	1148	1059	978	905	840	781		729
	1444	1321	1206	1101	1006	922	847	781	722		
	1444	1321	1206	1101	1006	922	847	781	722		
1571	1444	1321	1206	1101	1006	922	847	781	722		671
	1425	1286	1158	1044	943	855	779	714	656		
	1425	1286	1158	1044	943	855	779	714	656		
1571	1425	1286	1158	1044	943	855	779	714	656		607
	1400	1240	1096	972	867	777	702	638	583		
	1400	1240	1096	972	867	777	702	638	583		
1571	1400	1239	1096	973	867	778	702	638	583		536
	1363	1175	1014	882	774	685	613	553	502		
	1363	1175	1014	882	774	686	613	553	502		
1571	1363	1175	1015	883	775	687	614	553	503		459
	1305	1080	903	766	661	578	512	458	414		
	1305	1081	904	767	661	578	512	458	414		
1571	1306	1083	907	770	664	580	513	459	414		377
	1201	934	750	620	525	453	398	353	318		
	1203	936	752	622	526	454	398	354	318		
1571	1209	944	759	626	529	456	399	355	318		288
	974	705	545	440	366	313	273	241	216		
	984	711	548	442	368	314	273	241	216		
1571	1014	727	557	447	371	316	274	242	216		195
	540	383	289	229	189	160	139	122	109		
	542	385	291	230	189	160	139	122	109		
785	548	393	296	234	192	162	140	123	109		98
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

FIG. 49.

On obtient ainsi, à partir de (33) et de (35) le développement de  $\phi$  limité au terme quadrupolaire

$$(36) \quad (\Phi/\varepsilon_0) = -\frac{Q}{2\pi r_0} \left\{ \text{Arc tg } \frac{y}{x} - \frac{xy}{3R^3} \right\}$$

et son expression analytique exacte :

$$(37) \quad (\Phi/\varepsilon_0) = -\frac{Q}{2\pi r_0} \frac{1}{2} \left\{ \frac{x}{a} \text{Log } \frac{R_1}{R_2} + \frac{y}{a} (z_2 - z_1) + (z_2 + z_1) \right\}$$

Nous sommes partis de la valeur zéro du flux sur l'axe  $ox$ . Les valeurs du flux sur le contour ACB ont été calculées à partir de (36). Enfin, le théorème de Gauss permet de déterminer  $\phi/\varepsilon_0$  dans le plan de la bande. On obtient :

$$\Phi/\varepsilon_0 = -\frac{Q}{2\pi r_0} \frac{\pi}{2} y \quad \text{pour } 0 \leq y \leq a$$

$$\Phi/\varepsilon_0 = -\frac{Q}{2\pi r_0} \frac{\pi}{2} y \quad \text{pour } y \geq a$$

Nous avons effectué les calculs à partir de la relation (4). Les résultats numériques ont été rassemblés sur la figure (49). Nous avons indiqué dans chaque carré les valeurs relatives aux deux réseaux successivement utilisés, ainsi que les valeurs extrapolées avec l'indice 2. Nous donnons dans le tableau VII les résultats de la comparaison des valeurs obtenues par cette méthode sur la diagonale OC aux valeurs exactes de  $\Phi$  calculées à partir de (37).

$d/a$	0	1	2	3	4	5
$\Phi_{exact}$	0	705	765	776	780	782
$\Phi_{relax}$	0	705	766	777	781	782
$\Delta\Phi$	0	0	1	1	1	0

TABLEAU VII

### 3° Fonction potentiel déduite de la fonction flux.

Les relations  $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial (\Phi/\epsilon_0)}{\partial y}$  et  $\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial (\Phi/\epsilon_0)}{\partial x}$  préalablement transfor-

mées en équation aux différences finies, permettent de déterminer l'une des fonctions à partir de l'autre. Dans l'exemple traité, la fonction  $\phi/\epsilon_0$  étant connue sur tout le contour OACBO, il est préférable de déduire V de  $\phi$ . Les résultats ainsi obtenus sont indiqués sur la figure (50). Dans chaque carré se trouve la valeur de  $\phi/\epsilon_0$ , et au-dessus celle de V. Quelques équiflux et quelques équipotentiels ont été tracés. Les valeurs de V ainsi obtenues sont toutefois moins bonnes que celles résultant de la détermination directe du potentiel (tableaux V et VI).

#### Remarque.

Le problème ainsi résolu en électrostatique permet de passer immédiatement à celui de la détermination des lignes d'induction d'une nappe de courant de largeur finie plane et uniforme, les lignes de courant étant normales au plan  $xy$ . On sait, en effet, que les fonctions  $A_z$  et V d'une part,  $V^*$  et  $\phi$  d'autre part, se correspondent. On a, en particulier, dans ce cas

$$\frac{A_z}{I\mu_0} = \frac{\epsilon_0 V}{Q}$$



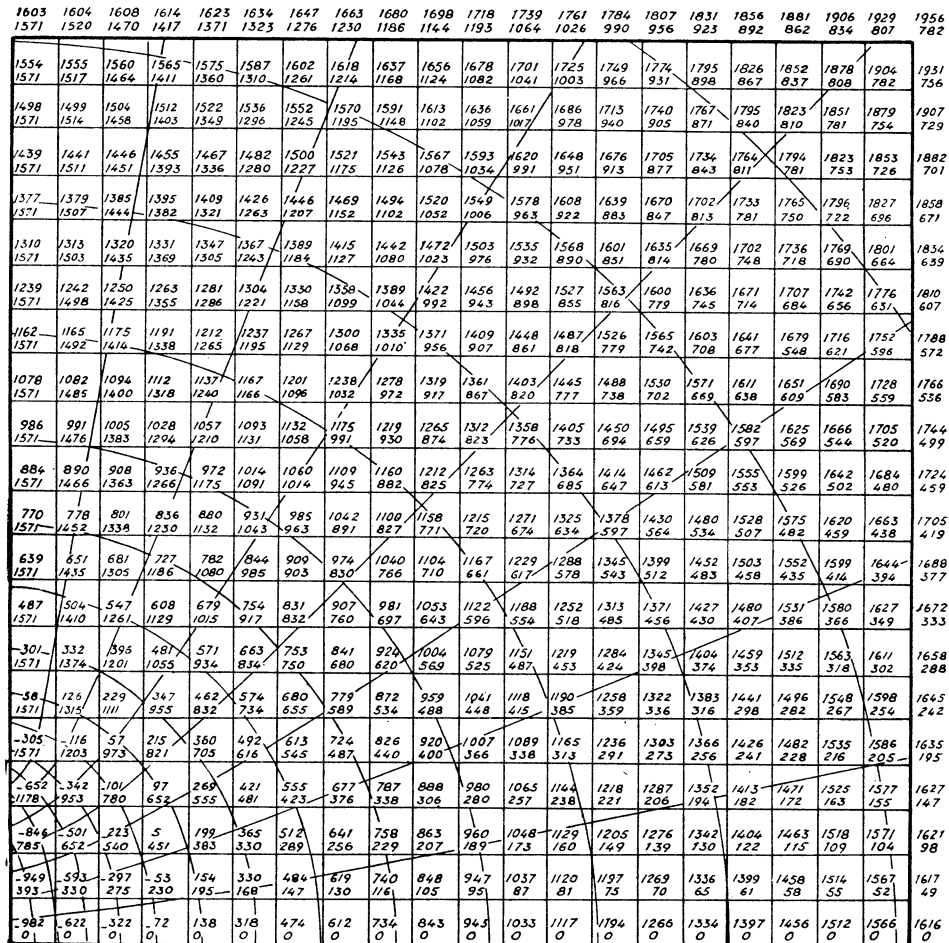


FIG. 50.

Les lignes d'induction magnétique qui correspondent aux équipotentielles, changent brusquement de direction à la traversée de la nappe de courant (fig. 50).

#### 4. — DISTRIBUTION UNIFORME DE CHARGES DANS UN CYLINDRE INDÉFINI DE SECTION RECTANGULAIRE.

Cet exemple est relatif à la résolution numérique de l'équation de Poisson. Il nous permet également de préciser la méthode pour obtenir des formules satisfaisantes sur la surface et aux sommets d'une distribution volumique de charges.

La distribution est représentée en grisé sur la figure (51). Nous désignerons par  $\rho$  la densité volumique de charge et par  $Q$  la charge totale par unité de longueur.

Limité au terme quadrupolaire, le développement (32) s'écrit dans ce cas

$$V = - \frac{Q}{2\pi r_0} \left\{ \text{Log } R + \frac{a^2}{2R^2} \left( 1 - 2 \frac{x^2}{R^2} \right) \right\}$$

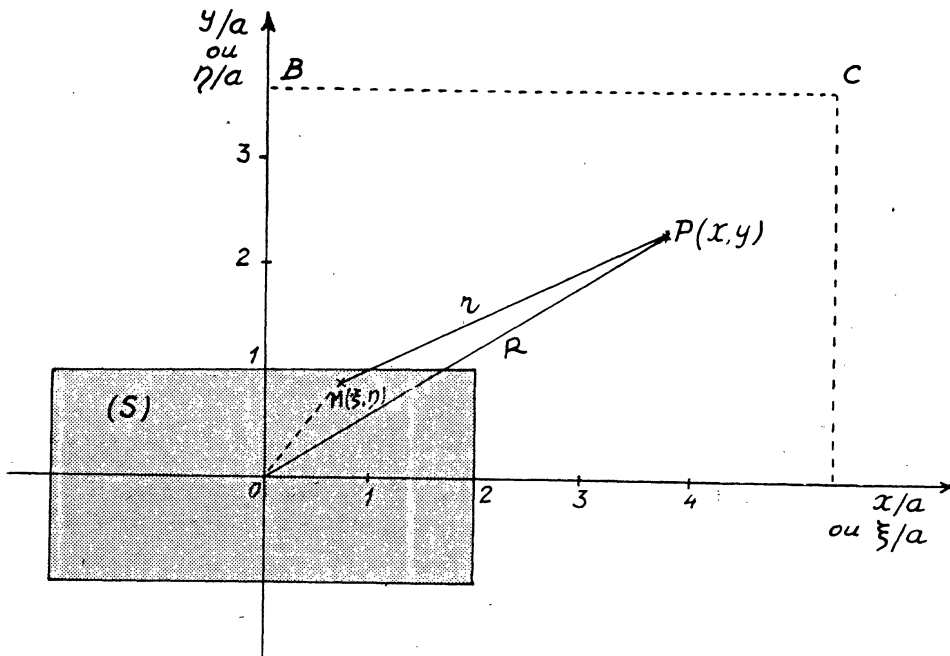


FIG. 51.

C'est à partir de cette expression dans laquelle nous avons posé

$$-\frac{\rho}{\epsilon_0} = 1 \quad \text{et} \quad a = 1$$

que nous avons déterminé les valeurs de  $V$  sur le contour ACB.

A l'extérieur de la distribution, nous avons effectué les calculs à partir de la relation (4).

A l'intérieur, le potentiel satisfait à l'équation de Poisson

$$(38) \quad \Delta V = - \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

que nous avons traduite sous forme d'équation aux différences finies par l'expression :

$$4 V_0 = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + \frac{\rho}{\epsilon_0} h^2$$

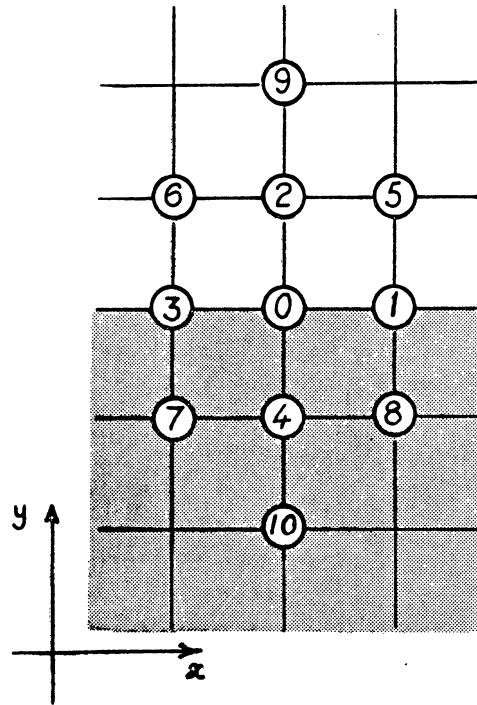


FIG. 52.

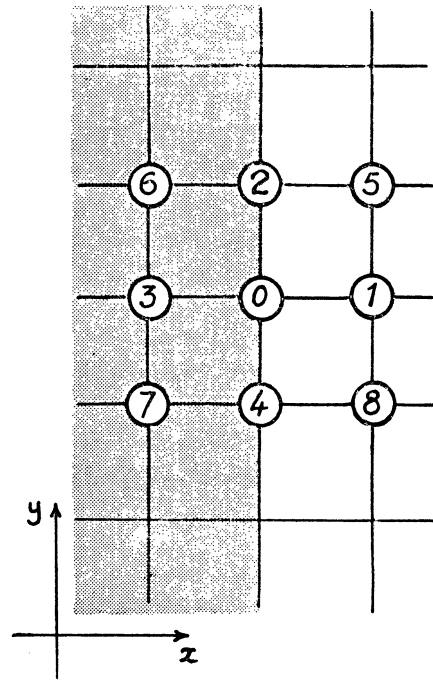


FIG. 53.

Sur la surface elle-même, la discontinuité des dérivées secondes nécessite l'établissement d'une nouvelle formule. Supposons d'abord que la surface soit parallèle au plan  $xoz$  (fig. 52). Les points 1, 0, 3, étant considérés comme extérieurs à la distribution, nous avons

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{1}{h^2} \{ V_1 + V_3 - 2V_0 \}$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_0 = \frac{1}{h^2} \{ V_2 + V_8 - 2V_0 \}$$

et l'équation de Laplace s'écrit :

$$V_0 \text{ ext} = V_1 + V_3 + V_2 - 2V_0$$

Les points 1, 0, 3 étant considérés comme faisant partie de la distribution, il vient

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{1}{h^2} \{ V_1 + V_3 - 2V_0 \}$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_0 = \frac{1}{h^2} \{ V_2 + V_8 - 2V_0 \}$$

D'où, en portant dans (38)

$$V_0 \text{ int} = V_1 + V_3 + V_2 - 2V_0 + \frac{\rho}{\epsilon}$$

2299		2361		2520		2723		2930		3125		3304
1801		1925		2205		2510		2784		3022		3224
1793		1918		2201		2507		2782		3021		
1770		1896		2189		2498		2776		3018		
1019	1100	1324	1611	1885		2333		2677		2950		3177
1011	1090	1309	1598	1874		2326		2672		2948		
988	1060	1265	1560	1842		2305		2659		2942		
1412	536	930	1408	1765								3160
1410	528	905	1389	1751								
1405	505	831	1333	1709								
133	203	718	1319	1719		2267		2636		2924		3160
148	193	691	1298	1703		2251		2630		2922		
134	164	610	1233	1656		2220		2613		2914		

Fig. 55.

Pour les nœuds situés sur la surface, on pourrait utiliser l'une ou l'autre de ces expressions de  $V_0$ . Mais il est préférable de faire appel à une formule faisant intervenir simultanément les valeurs du potentiel en des points situés de part et d'autre de la surface. Nous avons adopté pour  $V_0$  l'expression :

$$V_0 = \frac{1}{2} \{ V_{\text{ext.}} + V_{\text{int.}} \}$$

soit :

$$2 V_0 = 2 (V_1 + V_3) + (V_9 + V_{10}) - 2 (V_2 + V_4) + \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Comme d'autre part on a :

$$V_9 = 4 V_2 - V_0 - V_5 - V_6$$

$$V_{10} = 4 V_4 - V_0 - V_7 - V_8 - \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

en éliminant  $V_9$  et  $V_{10}$  entre ces trois dernières équations, on obtient :

$$(39) \quad 4 V_0 = 2 (V_1 + V_2 + V_3 + V_4) - (V_5 + V_6 + V_7 + V_8)$$

La même formule est applicable dans le cas où la surface de la distribution est parallèle au plan  $yo z$  (fig. 53).

Enfin, pour le sommet lui-même, nous avons établi une formule particulière. Les notations étant celles de la figure (54), les relations (4) et (39) appliquées aux nœuds I, I', II, II' donnent :

$$V_0 = 4 V_I - V_1 - V_2 - V_A$$

$$V_0 = 4 V_{I'} - V_{1'} - V_{2'} - V_A$$

$$V_0 = \frac{1}{2} \{ V_I + 4 V_{II} + 4 V_{II'} + V_A + V_A - 2 V_1 - 2 V_2 - 2 V_B \}$$

$$V_0 = \{ V_{I'} + 4 V_{II'} + V_{II} + V_{1'} + V_{1'} - 2 V_{1'} - 2 V_{2'} - 2 V_B \}$$

En prenant pour valeur du potentiel au point 0 la moyenne arithmétique de ces quatre expressions, on obtient :

$$8 V_0 = 9 (V_I + V_{I'}) + 5 (V_{II} + V_{II'}) + (V_4 + V_{4'}) + (V_5 + V_{5'}) - 4 (V_A + V_B) - 2 (V_1 + V_{1'}) - 4 (V_2 + V_{2'}) - 2 (V_3 + V_{3'})$$

$x/a$	0	1	2	3	4	6	8	10	12
$V_{exact}$	57	209	729	1326	1724	2263	2638	2925	3159
$V_{relax.}$	53	203	718	1319	1719	2261	2636	2925	3159
$\Delta V$	-4	-6	-11	-7	-5	-2	-2	0	0

TABLEAU VIII

Les résultats numériques ont été rassemblés dans les figures (55) et (56). La disposition des nombres est la même que dans l'exemple précédent. Le tableau VIII est relatif à la comparaison des valeurs obtenues ainsi pour le potentiel sur l'axe  $ox$  aux valeurs calculées à partir de l'expression (fig. 51)

$$V = - \frac{\rho}{2\pi \epsilon^0} \int_s \text{Log } r \, ds .$$

##### 5. — LENTILLE ÉLECTROSTATIQUE SYMÉTRIQUE DE RÉVOLUTION.

Lorsqu'on ne peut pas limiter le domaine étudié par des développements en série, on peut toujours admettre que les conditions aux limites à l'infini sont valables à l'approximation désirée à une distance suffisante mais finie du système.

On vérifie à posteriori que le contour  $\Sigma$  de la région considérée est assez éloigné en constatant que les conditions aux limites sont réalisées avant d'atteindre  $\Sigma$ . Les gradients sont alors nuls sur la frontière et la répartition obtenue ne serait pas modifiée par la considération d'un domaine plus étendu.

Nous avons appliqué cette méthode à la détermination du potentiel dans le cas d'une lentille symétrique constituée par trois électrodes planes parallèles infiniment minces percées de trous circulaires coaxiaux (fig. 57).

Les calculs ont été effectués en supposant que l'électrode centrale était portée au potentiel  $V = 1000$ , tandis que les diaphragmes extérieurs étaient au potentiel  $V = 0$ . Le domaine a été limité en admettant que  $V$  était nul à

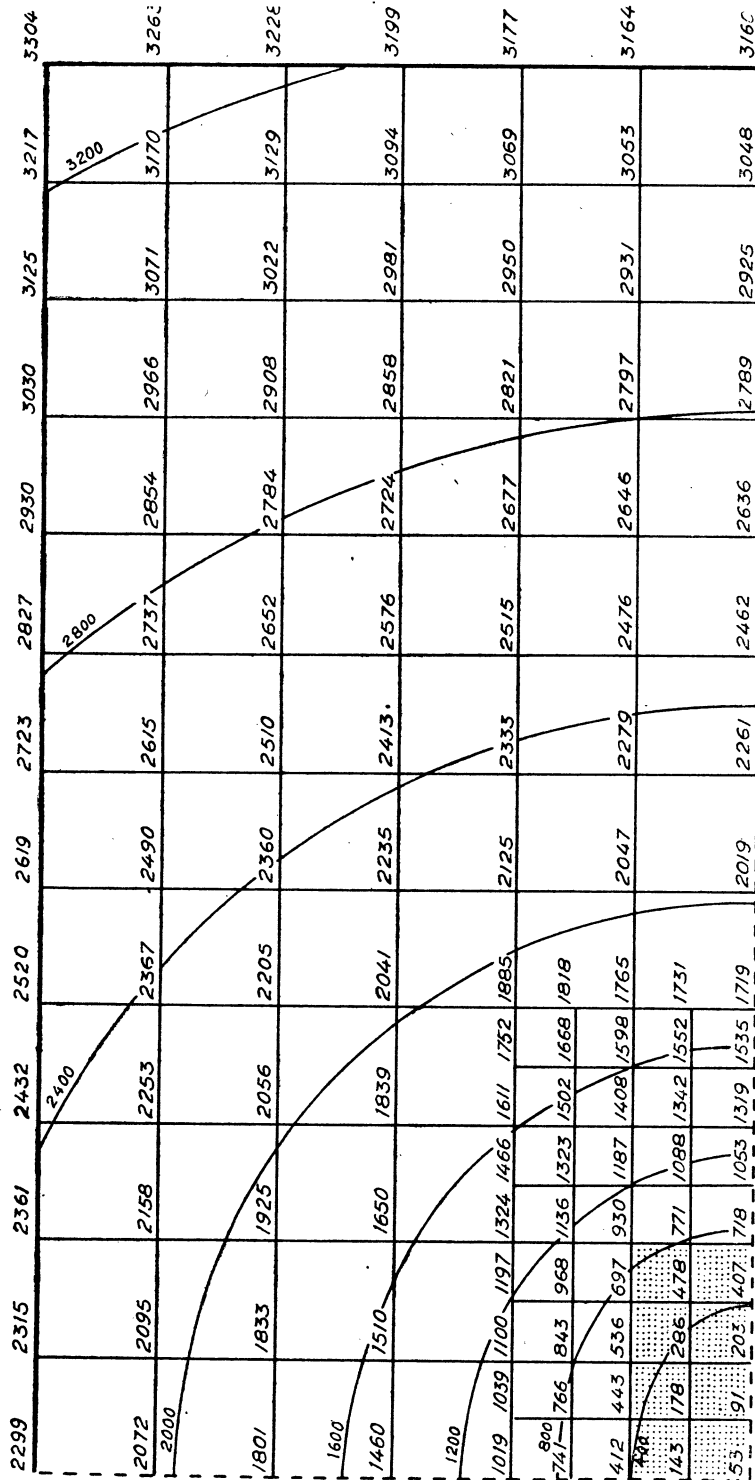


Fig. 56.

1000	875	750	625	500	375	250	125	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1000	874	749	624	500	375	250	125	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1000	937	874	811	748	686	623	561	499	437	375	312	250	188	125	63	0	0	1	1	1
1000	936	872	809	747	684	622	561	499	437	375	313	251	188	126	63	0	1	2	2	2
1000	934	870	807	745	621	560	498	498	437	375	313	251	190	126	64	0	2	3	3	2
1000	930	865	803	742	681	620	559	498	437	375	314	253	191	129	66	0	4	5	4	4
1000	920	864	797	742	678	620	558	498	437	376	315	253	194	130	71	0	9	8	6	4
920	889	842	789	733	676	617	557	497	437	377	316	257	198	141	86	40	24	17	12	9
882	828	782	729	673	615	556	497	497	437	377	318	257	202	144	98	59	36	23	11	6
902	865	836	782	733	673	617	556	497	437	376	318	257	202	144	98	49	36	20	17	9
863	851	820	776	726	671	614	556	496	437	377	318	260	204	152	105	68	43	28	19	13
857	817	785	725	671	614	556	497	497	437	378	319	259	205	148	108	71	46	29	13	6
869	846	827	774	729	671	616	556	497	437	377	319	259	205	148	108	65	46	24	19	11

FIG. 58.

l'extérieur des diaphragmes, et qu'il variait linéairement entre les électrodes. Nous avons ensuite appliqué la méthode de relaxation à partir des

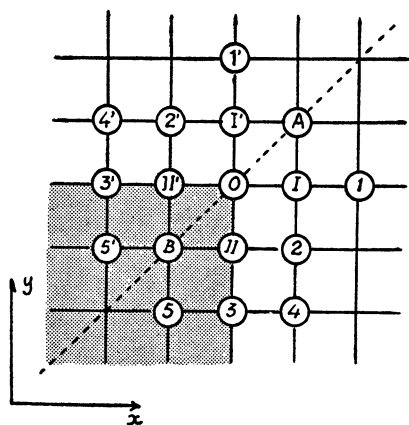


FIG. 54.

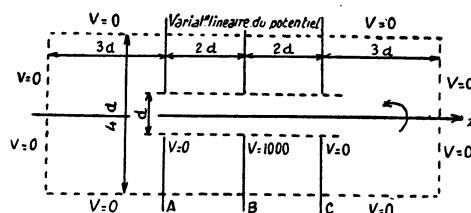


FIG. 57.

formules (10) et (14). Les valeurs relatives aux deux réseaux successivement utilisés sont indiqués sur la figure (58). La solution analytique n'étant pas connue, nous avons comparé les valeurs obtenues après extrapolation linéaire, à un relevé fait à la cuve rhéographique<sup>(8)</sup> (fig. 59). Les valeurs indiquées entre parenthèses ont été relevées à la cuve rhéographique. Les autres ont été obtenues par le calcul après extrapolation. Les résultats donnés par ces deux méthodes concordent à moins de 1/100 de la différence de potentiel établie entre les diaphragmes.

La considération d'électrodes épaisses compliquerait la réalisation des maquettes utilisées pour les relevés à la cuve rhéographique<sup>(9)</sup>. Elle conduirait au contraire à des calculs plus rapides. Les valeurs plus faibles des gradients au voisinage des diaphragmes permettrait, en effet, d'utiliser des réseaux moins denses.

#### 6. — LIGNE BIFILAIRE DANS UNE CAVITÉ CYLINDRIQUE CREUSÉE DANS UN MILIEU MAGNÉTIQUE DE PERMÉABILITÉ INFINIE.

Nous donnons à propos de cet exemple le principe du calcul de l'induction produite par des courants en présence de l'aimantation induite.

Le dispositif étudié est représenté sur la figure 60. Les deux courants A et B sont linéaires et parcourus en sens inverses par la même intensité I. L'induction  $\vec{B}$  dans la cavité est la résultante de l'induction  $\vec{B}_0$  produite par les courants et de l'induction  $\vec{B}_i$ , due à l'aimantation induite.

8. M. LAUDET et P. PILLOD, *J. Phys. Rad.*, t. 14, mai 1953, pp. 323-328.

9. P. PILLOD et R. SAPORTE, Congrès de microscopie électronique, Édition de la *Revue d'Optique*, Paris, 1952.



	(866)	(744)	(617)	(494)	(371)	(249)	(123)	0	0	0	0	1	2	3	4	5	6	7
1000	874	749	624	500	375	250	125	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1000 937	(865) 801 (873) 811	(741) 748 (748) 748	(616) 623 (616) 623	(494) 493 (494) 499	(371) 309 (375) 312	(249) 188 (250) 250	(125) 60 (125) 63	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1000 935	(863) 799 (871) 808	(739) 746 (746) 746	(615) 622 (615) 622	(493) 499 (493) 499	(371) 313 (375) 313	(250) 189 (251) 189	(126) 62 (126) 63	0	0	0	0	1	2	2	2	2	2	2
1000 933	(860) 797 (868) 805	(737) 743 (743) 743	(614) 621 (614) 621	(492) 498 (492) 498	(371) 311 (375) 314	(251) 188 (252) 190	(127) 62 (128) 65	0	0	0	0	3	4	4	4	4	4	3
1000 926	(853) 792 (861) 800	(734) 739 (739) 739	(613) 619 (613) 619	(492) 498 (492) 498	(372) 315 (376) 315	(253) 193 (254) 193	(131) 65 (131) 68	0	0	0	0	(11) 6 (11) 6	(12) 6 (12) 6	(11) 6 (11) 6	(13) 7 (13) 7	(14) 7 (14) 7	(15) 7 (15) 7	(16) 7 (16) 7
1000 914	(843) 786 (850) 792	(729) 734 (734) 734	(611) 617 (611) 617	(491) 497 (491) 497	(373) 316 (377) 316	(256) 197 (256) 197	(138) 78 (138) 78	0	0	0	0	(20) 12 (20) 12	(18) 14 (18) 14	(16) 10 (16) 10	(17) 10 (17) 10	(18) 10 (18) 10	(19) 10 (19) 10	(20) 10 (20) 10
(894) 873	(828) 776 (833) 783	(724) 729 (729) 729	(610) 615 (610) 615	(491) 497 (491) 497	(73) 318 (377) 318	(258) 201 (259) 201	(146) 95 (145) 95	(55) 46 (55) 46	(55) 46 (55) 46	(55) 46 (55) 46	(55) 46 (55) 46	(55) 46 (55) 46	(55) 46 (55) 46	(55) 46 (55) 46	(55) 46 (55) 46	(55) 46 (55) 46	(55) 46 (55) 46	(55) 46 (55) 46
907	(862) 814 (862) 850	(769) 725 (725) 725	(609) 613 (609) 613	(491) 496 (491) 496	(374) 319 (378) 319	(260) 205 (261) 205	(152) 106 (152) 106	(70) 69 (70) 69	(70) 69 (70) 69	(70) 69 (70) 69	(70) 69 (70) 69	(70) 69 (70) 69	(70) 69 (70) 69	(70) 69 (70) 69	(70) 69 (70) 69	(70) 69 (70) 69	(70) 69 (70) 69	(70) 69 (70) 69
(846) 835	(805) 764 (811) 770	(716) 722 (722) 722	(608) 612 (608) 612	(491) 496 (491) 496	(375) 317 (378) 317	(262) 208 (262) 208	(157) 112 (157) 112	(78) 76 (78) 76	(78) 76 (78) 76	(78) 76 (78) 76	(78) 76 (78) 76	(78) 76 (78) 76	(78) 76 (78) 76	(78) 76 (78) 76	(78) 76 (78) 76	(78) 76 (78) 76	(78) 76 (78) 76	(78) 76 (78) 76
848	(841) 831 (845) 834	(715) 720 (720) 720	(608) 612 (608) 612	(491) 496 (491) 496	(375) 317 (378) 317	(263) 209 (263) 209	(158) 113 (158) 113	(80) 77 (80) 77	(80) 77 (80) 77	(80) 77 (80) 77	(80) 77 (80) 77	(80) 77 (80) 77	(80) 77 (80) 77	(80) 77 (80) 77	(80) 77 (80) 77	(80) 77 (80) 77	(80) 77 (80) 77	(80) 77 (80) 77

FIG. 59.

La perméabilité étant infinie, les lignes de forces du champ résultant aboutissent normalement à la surface  $S$  de la cavité, qui est par suite une équipotentielle magnétique <sup>(10)</sup>.

Le plus simple est donc de faire appel au potentiel scalaire magnétique  $V$  <sup>(10)</sup>.

Nous prendrons  $V_S^* = 0$  car ceci donne une masse magnétique totale nulle sur  $S$ , par raison de symétrie.

Le champ magnétique  $\vec{B}_0/\mu_0$  produit par les courants est le même que le champ magnétique  $\vec{H}_0$  du feuillet équivalent (*fig. 60*). Le potentiel scalaire  $V_0^*$  correspondant a pour valeur <sup>(11)</sup>

$$V_0^* = -\frac{I}{2\pi} \varphi$$

Nous prendrons pour les calculs  $1 = -2$ . On a par suite  $V_0^* = \pm 1$  de part et d'autre de  $AB$  et  $V_0^* = 0$  sur  $oy$  à l'extérieur de  $AB$  (*fig. 61 a*).

On peut donc calculer aisément le potentiel scalaire  $V_i^*$  dû aux masses magnétiques induites. Il suffit, en effet, de prendre la valeur  $(V_i^*) = -(V_0^*)$  sur la surface et  $(V_i^*) = 0$  le long de l'axe  $oy$ , puis de chercher par relaxation le potentiel  $V_i^*$  en un point quelconque intérieur à la cavité (*fig. 61 b*).

En l'ajoutant ensuite au potentiel magnétique influençant  $V_0^*$ , on obtient le potentiel résultant  $V^*$ . On voit en définitive que ce dernier satisfait aux conditions aux limites indiquées sur la figure 61 *c*.

On peut donc calculer directement le potentiel résultant par la méthode de relaxation. C'est d'ailleurs plus simple que de décomposer  $V^*$  en  $V_0^*$  et  $V_i^*$ . Cependant la connaissance de ce dernier donne des indications utiles sur la distribution du magnétisme induit qui apparaît sur  $S$  et c'est pourquoi nous l'avons également déterminé. Nous avons effectué les calculs à partir de la formule (4). Au point  $A$ , nous avons pris la valeur  $V = 1/2$ . On sait, en effet, que l'équation  $1/2$  aboutit normalement en ce point. Les résultats sont rassemblés sur la figure 62.

Nous avons indiqué, à gauche, la répartition correspondant au potentiel  $V_i^*$  et, à droite, celle relative à  $V^*$ . Afin de déterminer plus aisément les lignes de forces du champ nous avons également calculé la fonction flux  $\phi/\mu_0$  qui est la fonction conjuguée de  $V^*$ . Nous sommes partis de la valeur 0 sur l'axe  $ox$  et nous avons calculé  $\phi/\mu_0$  de proche en proche à partir des relations

$$\begin{aligned} \phi_2/\mu_0 - \phi_4/\mu_0 &= V_1 - V_3 \\ \phi_1/\mu_0 - \phi_3/\mu_0 &= -(V_2 - V_4) \end{aligned}$$

10. E. DURAND, p. 536.

11. E. DURAND, p. 306.

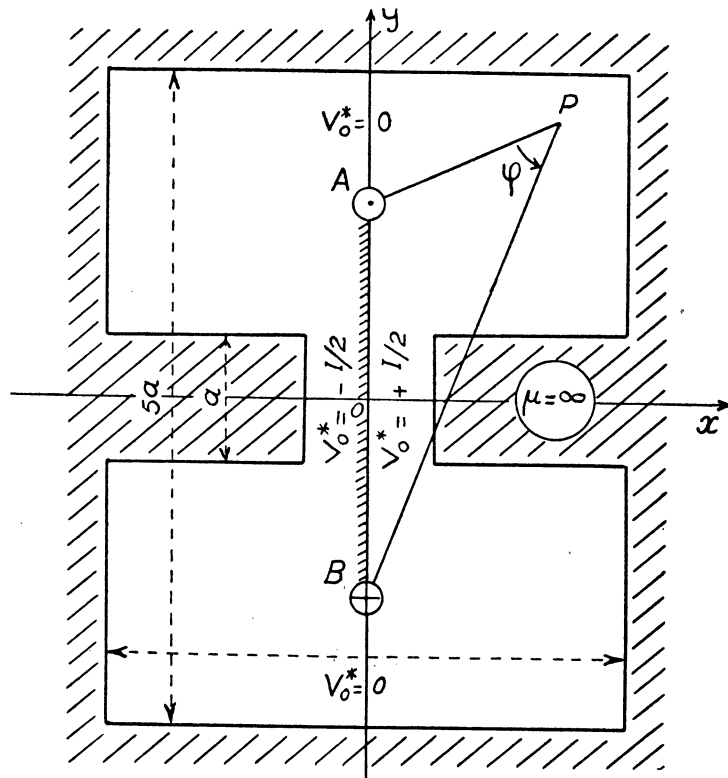


Fig. 60

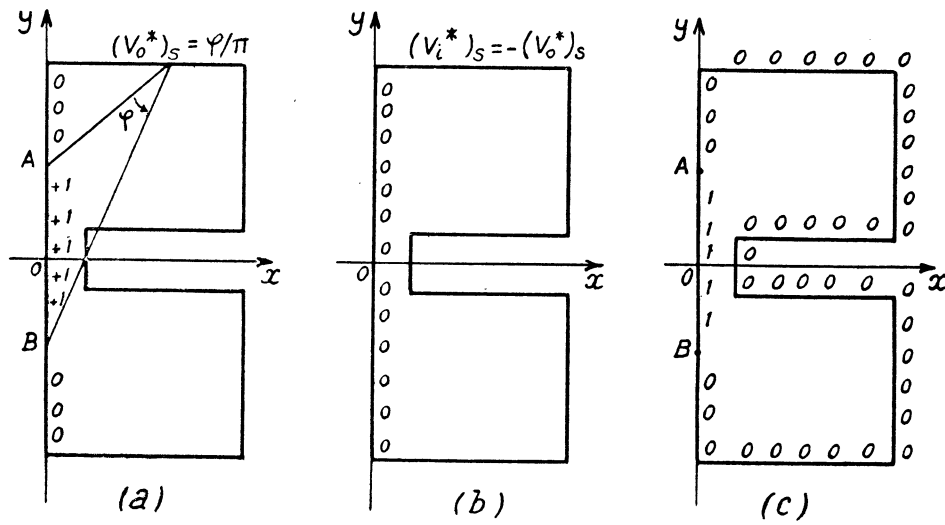


Fig. 61.

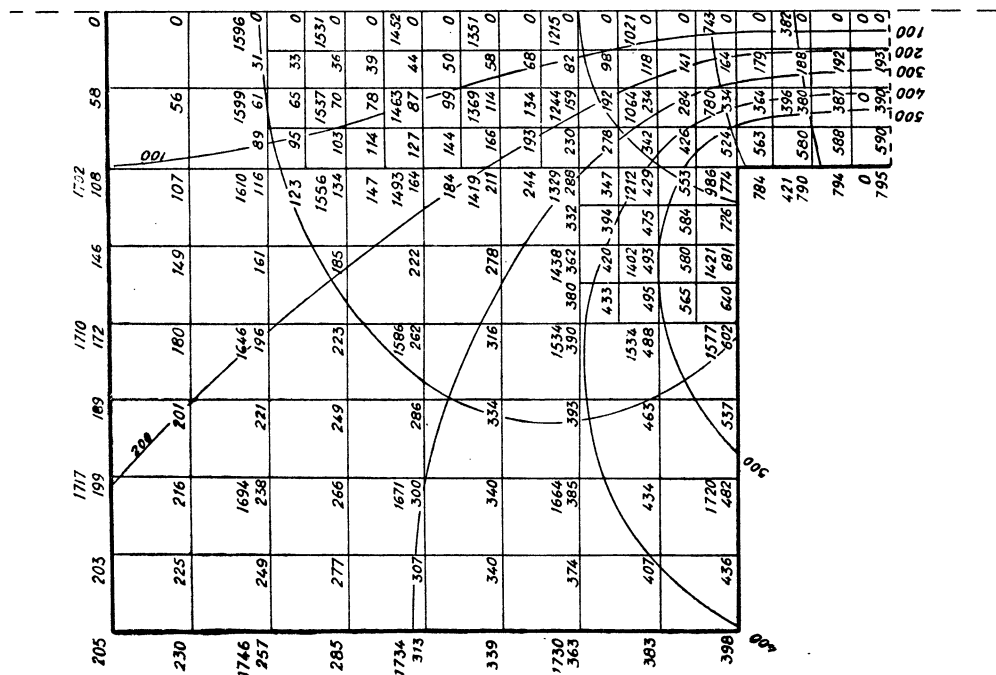
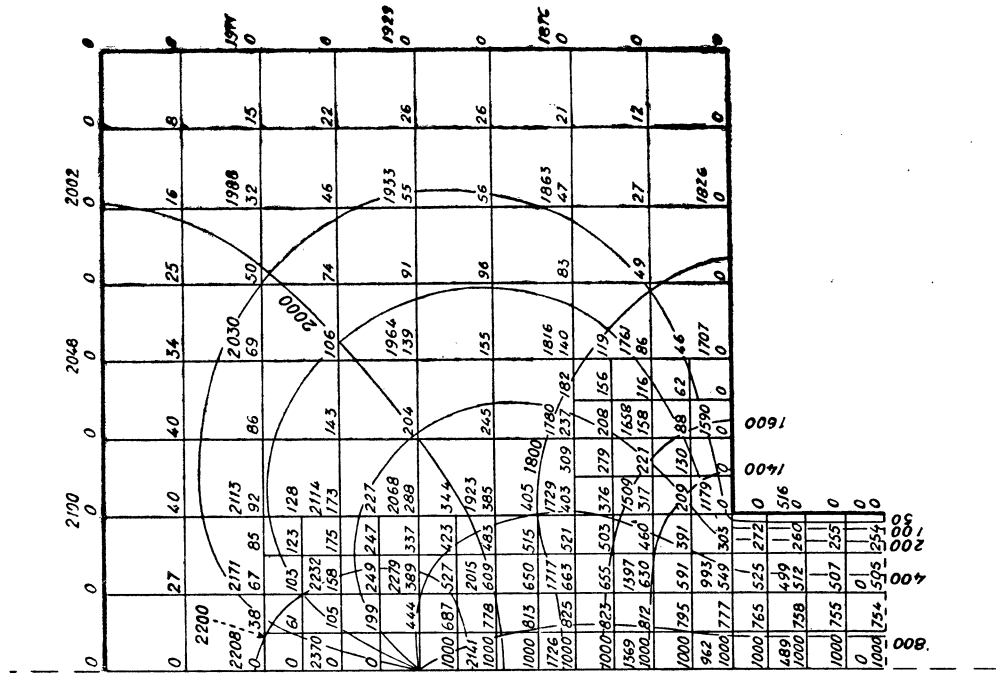


FIG. 62.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. LE ROUX. — Sur le problème de Dirichlet. (*Journ. Math. pures et appl.*, t. 10, 1914, pp. 189-230.)
  - [2] H. B. PHILIPP et N. WIENER. — Nets and the Dirichlet's problem. (*Journal of Math. and Phys.*, t. 2, 1923, pp. 105-124.)
  - [3] G. BOULIGAND. — Fonctions harmoniques. Principes de Picard et de Dirichlet. (*Mémorial des sciences mathématiques*, fasc. XI, 1926.)
  - [4] E. DURAND. — Électrostatique et Magnétostatique. Masson, Paris, 1953.
  - [5] R. W. SOUTHWELL. — Relaxation Methods in theoretical physics. Clarendon Press, Oxford, 1952.
  - [6] F. S. SHAW. — An Introduction to Relaxation Methods. Lovelace Publ., 1953.
  - [7] G. ALLEN. — Relaxation Methods. Mc Graw-Hill, 1954.
  - [8] L. F. RICHARDSON et J. A. GAUNT. — The Deferred Approach to the Limit. (*Phil. Trans.*, 1927, série A, vol. 226, pp. 299 à 361.)
  - [9] D. R. HARTREE et J. R. WOMERSLEY. — A Method for the Numerical or Mechanical Solution of Certain Types of Partial Differential Equations. (1937, *Proc. Roy. Soc.*, A, 161, 353.)
-

## DEUXIÈME PARTIE

### OPTIQUE ÉLECTRONIQUE DES SYSTÈMES CYLINDRIQUES PRÉSENTANT UN PLAN DE SYMÉTRIE

De très nombreux travaux ont été consacrés à l'étude des lentilles électroniques électromagnétiques à symétrie axiale [1], [2].

Les systèmes cylindriques ont été moins étudiés, peut-être à cause de la correspondance point-droite qui, aux débuts de l'optique électronique, les rendait inutilisables en microscopie.

Leur intérêt est allé en croissant avec l'importance du spectrographe de masse d'abord [3], [4], avec leur emploi pour la correction du stigmatisme et de l'aberration sphérique et chromatique des lentilles de révolution ensuite [5], [6], enfin avec leur utilisation comme filtres de vitesse [7], [8].

Toutefois, à notre connaissance, aucune théorie d'ensemble de ces systèmes n'a été donnée. Nous nous proposons dans cette deuxième partie, d'étudier le cas des systèmes possédant un plan de symétrie.

Nous déterminons d'abord le trajet des particules dans le cas de l'approximation du premier ordre, puis nous calculons les aberrations suivant le schéma méthodique d'approximations successives proposé par M. E. DURAND pour les systèmes de révolution <sup>(1)</sup>.

Nous étudions ensuite plus particulièrement les lentilles électrostatiques à trois fentes. Nous établissons les expressions analytiques du potentiel et du champ par la méthode des transformations conformes, puis nous calculons numériquement les trajectoires et les aberrations dans le cas d'une lentille symétrique.

---

1. E. DURAND, Revue d'optique théorique et instrumentale, t. 33, n° 12, 1954.

## CHAPITRE I.

### L'APPROXIMATION DU PREMIER ORDRE

Un champ électromagnétique est dit cylindrique ou à deux variables lorsque le vecteur qui le définit est en tout point parallèle à un certain plan (P), et demeure équipollent à lui-même lorsqu'on se déplace sur une perpendiculaire à (P).

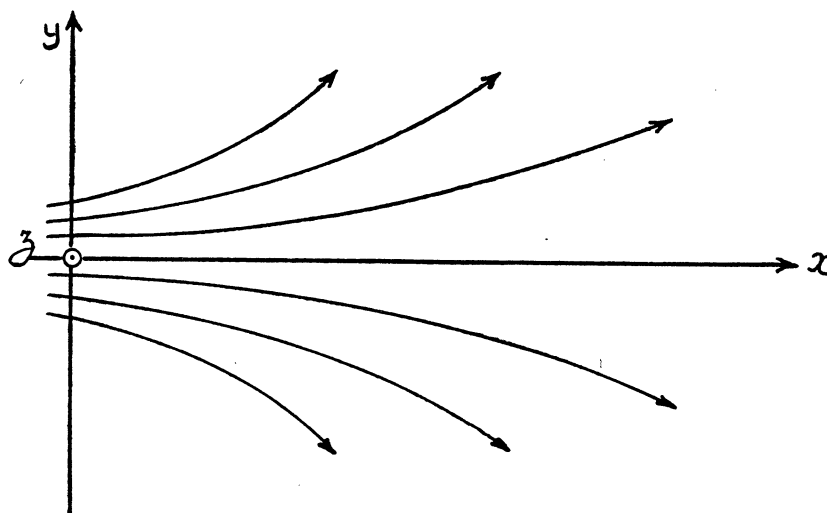


FIG. 1.

En prenant le plan  $xoy$  parallèle à (P) on peut définir le champ par deux composantes  $X(x, y)$  et  $Y(x, y)$  seulement. Nous nous limiterons dans cette seconde partie au cas où le champ possède un plan de symétrie que nous prendrons pour plan de coordonnées  $xoz$  (fig. 1).

#### I. — ÉQUATIONS GÉNÉRALES DES TRAJECTOIRES ET DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE DU LAGRANGIEN.

##### 1° Équations générales des trajectoires.

Le lagrangien des systèmes à deux variables a pour expression

$$F(x, y, y' z') = \sqrt{(V + \varepsilon) + \alpha(V + \varepsilon)^2} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} \pm \gamma z' Az$$

avec

$$\gamma = \sqrt{\frac{|q|}{2 m_0}} \quad , \quad \alpha = \frac{|q|}{2 m_0 c^2} \quad ;$$

$(V + \varepsilon)$  est le potentiel scalaire et  $\vec{A}$  le potentiel vecteur du champ magnétique.  $\varepsilon$  est la tension d'accélération de la particule,  $q$  sa charge,  $m_0$  sa « masse propre » et  $c$  la vitesse de la lumière dans le vide. Les signes (+) et (—) correspondent respectivement à des charges positives et négatives et les accents désignent les dérivés par rapport à la variable  $x$ .

F peut s'écrire encore

$$(1) \quad F = (V + \varepsilon)^{1/2} \{ 1 + \alpha (V + \varepsilon) \}^{1/2} (1 + y'^2 + z'^2)^{1/2} \pm \gamma z' A_z$$

le terme correctif

$$\{ 1 + \alpha (V + \varepsilon) \}^{1/2}$$

est dû à la relativité. L'approximation newtonienne est obtenue en négligeant les termes en  $\alpha$ .

Les équations rigoureuses de la trajectoire s'écrivent :

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y'} \right\} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad \frac{d}{dx} \left\{ \frac{\partial F}{\partial z'} \right\} = 0$$

Ces relations sont trop compliquées pour être utilisées sous cette forme à partir de l'expression (1) du lagrangien. Pour pouvoir intégrer commodément ces équations, il est nécessaire de développer la fonction F suivant les puissances croissantes de  $y, y', z'$ .

**2° Développement en série du lagrangien.**

a) *Expression du potentiel scalaire  $V + \varepsilon$  et du potentiel vecteur  $A$ .*

Désignons par  $f(x)$  le potentiel dans le plan de symétrie de la lentille. Le potentiel en un point quelconque peut être développé suivant l'expression (1)

$$(2) \quad V(x, y) + \varepsilon = f(x) - \frac{y^2}{2!} \left( \frac{d}{dx} \right)^2 f(x) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} \left( \frac{d}{dx} \right)^{2n} f(x)$$

Le même développement demeurant valable pour le potentiel scalaire magnétique  $V^*(x, y)$ , les composantes du champ magnétique  $\vec{H}$  s'écrivent :

$$H_x(x, y) = -\frac{\partial V^*}{\partial x} = H_x(x, 0) - \frac{y^2}{2!} \left( \frac{d}{dx} \right)^2 H_x(x, 0) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} \left( \frac{d}{dx} \right)^{2n} H_x(x, 0)$$

$$H_y(x, y) = -\frac{\partial V^*}{\partial y} = -y \left( \frac{d}{dx} \right) H_x(x, 0) + \frac{y^3}{3!} \left( \frac{d}{dx} \right)^3 H_x(x, 0) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} \left( \frac{d}{dx} \right)^{2n+1} H_x(x, 0)$$

$$H_z(x, y) = -\frac{\partial V^*}{\partial z} = 0$$

1. E. DURAND, p. 367.



Le potentiel vecteur A s'écrit

$$A_x = A_y = 0$$

$$\frac{1}{\mu_0} Az = y H_x(x, 0) - \frac{y^3}{3!} \left( \frac{d}{dx} \right)^3 H_x(x, 0) + \dots$$

ou encore en posant  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

$$(3) \quad \begin{cases} A_x = A_y = 0 \\ Az = y B_x(x, 0) - \frac{y^3}{3!} \left( \frac{d}{dx} \right)^3 B_x(x, 0) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} \left( \frac{d}{dx} \right)^{2n} B_x(x, 0) \end{cases}$$

b) Développement en série du lagrangien.

De la relation (2) nous déduisons

$$(V + \varepsilon)^{1/2} = f^{1/2} - \frac{f''}{4f^{1/2}} y^2 + \left\{ \frac{f^{IV}}{3} - \frac{f''^2}{2f} \right\} \frac{y^4}{16 f^{1/2}} - \dots$$

$$\left\{ 1 + \alpha (V + \varepsilon) \right\}^{1/2} = (1 + \alpha f)^{1/2} - \frac{\alpha f''}{4(1 + \alpha f)^{1/2}} y^2 + \left\{ \frac{\alpha f^{IV}}{3} - \frac{\alpha^2 f''^2}{2(1 + \alpha f)} \right\} \frac{y^4}{16(1 + \alpha f)^{1/2}}$$

d'où

$$(4) \quad (V + \varepsilon)^{1/2} \left\{ 1 + \alpha (V + \varepsilon) \right\}^{1/2} = S - My^2 + Ny^4 - \dots$$

avec

$$(5) \quad \begin{cases} S = f^{1/2} (1 + \alpha f)^{1/2} \\ M = \frac{f''}{4S} (1 + 2\alpha f) \\ N = \frac{1}{16S} \left\{ \frac{f^{IV} (1 + 2\alpha f)}{3} - \frac{f''^2}{2S^2} \right\} \end{cases}$$

En désignant par B l'induction dans le plan de symétrie, et en tenant compte de (3) nous obtenons

$$(6) \quad (\pm) \gamma z' Az = (\pm) \gamma y z' \left\{ B - \frac{y^2}{6} B'' + \dots \right\}$$

D'autre part on a

$$(7) \quad \left\{ 1 + y'^2 + z'^2 \right\}^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} (y'^2 + z'^2) - \frac{1}{8} (y'^2 + z'^2)^2 + \dots$$

En portant (4), (6) et (7) dans (1), le développement en série du lagrangien s'écrit :

$$F(x, y, y', z') = F_0 + F_2 + F_4$$

avec

$$F_0 = S$$

$$(8) \quad F_2 = -My^2 + \frac{S}{2} (y'^2 + z'^2) \pm \gamma B y z'$$

$$(9) \quad F_4 = Ny^4 - \frac{M}{2} y^2 (y'^2 + z'^2) - \frac{S}{8} (y'^2 + z'^2)^2 - (\pm) \frac{\gamma B''}{6} y^3 z'$$

l'indice  $i$  indiquant le degré du terme  $F_i$ .

Le terme  $F_0$  ne joue aucun rôle car les dérivées  $\frac{\partial F_0}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial F_0}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial F_0}{\partial z}$  qui figurent dans l'équation des trajectoires sont nulles.

Le terme  $F_2$  correspond à l'approximation du premier ordre, et le terme en  $F_4$  nous donnera les aberrations du troisième ordre.

Remarquons que, dans le cas d'une lentille purement magnétique, c'est-à-dire pour laquelle le potentiel est constant, les relations (5) se réduisent à

$$\begin{cases} S = \varepsilon^{1/2} (1 + \alpha \varepsilon)^{1/2} \\ M = N = 0 \end{cases}$$

Dans le cas d'un champ purement électrique, on aura :

$$B = 0 \quad B'' = 0$$

## 2. — L'APPROXIMATION DU PREMIER ORDRE.

### 1° Les équations différentielles des trajectoires.

Les équations différentielles des trajectoires gaussiennes sont obtenues en ne conservant dans l'expression du lagrangien que les termes du second ordre. Elles s'écrivent :

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{\partial F_2}{\partial y'} \right\} - \frac{\partial F_2}{\partial y} = 0 \qquad \frac{d}{dx} \left\{ \frac{\partial F_2}{\partial z'} \right\} = 0$$

soit, en tenant compte de (8)

$$(10) \quad \frac{d}{dx} \left\{ S y' \right\} + 2 M y - (\pm) \gamma B z' = 0$$

$$(11) \quad \frac{d}{dx} \left\{ S z' \pm \gamma B y \right\} = 0$$

La relation (11) fournit l'intégrale première

$$(12) \quad z' = \frac{C}{S} - (\pm) \frac{\gamma B}{S} y \qquad C = \text{const.}$$

En portant (12) dans (10) et en posant

$$T = - \frac{1}{S} (2 M S + \gamma^2 B^2)$$

nous obtenons

$$(13) \quad \frac{d}{dx} \left\{ S y' \right\} - T y = \pm C \frac{\gamma B}{S}$$

## 2° Représentation d'une trajectoire quelconque par trois trajectoires particulières.

Désignons par  $y_0$  et  $z_0$  les coordonnées d'un point-objet dans le plan de front qui le contient (fig. 2).

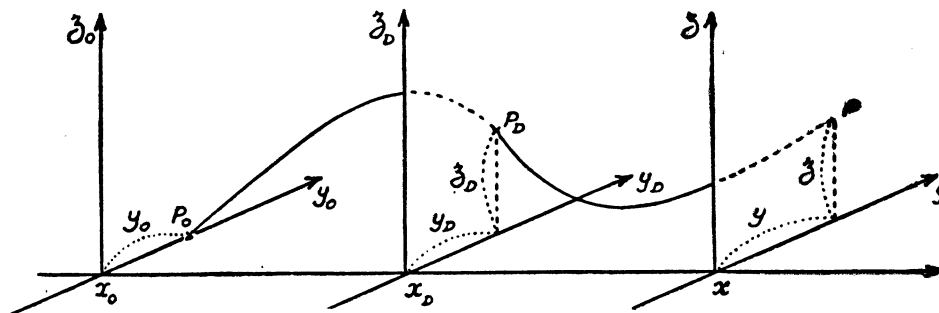


FIG. 2.

Le système étant cylindrique on peut, sans nuire à la généralité, poser  $z_0 = 0$ .

A un point-objet correspond une infinité de trajectoires. Nous individualiserons chacune d'elles en nous donnant les coordonnées  $y_D$  et  $z_D$  du point où elle coupe un certain plan de front pris comme plan du diaphragme.

Soient enfin  $y$  et  $z$  les coordonnées du point où cette trajectoire calculée dans le cas de l'approximation du premier ordre couperait un plan de front pris pour plan d'observation.

Soient  $h(x)$  et  $k(x)$  deux solutions de l'équation homogène

$$(14) \quad \frac{d}{dx} \left\{ S y' \right\} - T y = 0$$

telles que l'on ait

$$\begin{cases} h(x_0) = 0 & k(x_0) = 1 \\ h(x_D) = 1 & k(x_D) = 0 \end{cases}$$

et soit  $l(x)$  une solution de l'équation

$$(15) \quad \frac{d}{dx} \left\{ S Y' \right\} - T Y = \pm \frac{\gamma B}{S}$$

nulle pour  $x = x_0$  et  $x = x_D$  (fig. 3).

L'intégrale de l'équation (13) satisfaisant aux conditions

$$y(x_0) = y_0 \quad y(x_D) = y_D$$

s'écrit

$$(16) \quad y = y_0 k + y_D h + C l$$

En portant (16) dans (12), on obtient

$$(17) \quad z' = -(\pm) \frac{\gamma B}{S} k y_0 - (\pm) \frac{\gamma B}{S} h y_D + \frac{1 - (\pm) \gamma B l}{S} C.$$

$z$  et  $C$  seront effectivement liés si

$$(18) \quad 1 - (\pm) \gamma B l \neq 0$$

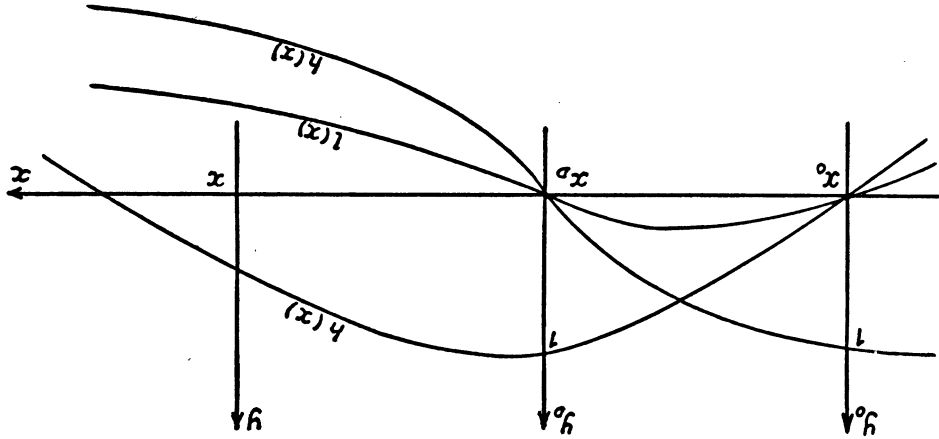


FIG. 3.

c'est-à-dire si  $1/(\pm) \gamma B$  n'est pas solution de (15).

Supposons que la condition (18) soit remplie. L'intégration de (17) donne

$$(19) \quad z = y_0 \alpha + y_D \beta + C \delta$$

avec

$$\alpha = - \int_{x_0}^x (\pm) \frac{\gamma B}{S} k dz$$

$$\beta = - \int_{x_0}^x (\pm) \frac{\gamma B}{S} h dx$$

$$\delta = \int_{x_0}^x \frac{1 - (\pm) \gamma B l}{S} dx$$

Déterminons la constante  $C$  par la condition

$$z(x_D) = z_D$$

nous obtenons

$$(20) \quad C = \frac{1}{\delta_D} (y_0 \alpha_D + y_D \beta_D - z_D)$$

En tenant compte de (20) et de (16) l'équation (19) s'écrit

$$y = y_0 \left( k - l \frac{\alpha_D}{\delta_D} \right) + y_D \left( h - l \frac{\beta_D}{\delta_D} \right) + z_D \frac{l}{\delta_D}$$

$$z = y_0 \left( \alpha - \delta \frac{\alpha_D}{\delta_D} \right) + y_D \left( \beta - \delta \frac{\beta_D}{\delta_D} \right) + z_D \frac{\delta}{\delta_D}$$

soit, pour simplifier les notations :

$$(21) \quad \begin{cases} y = y_0 a_1(x) + y_D a_2(x) + z_D a_3(x) \\ z = y_0 b_1(x) + y_D b_2(x) + z_D b_3(x) \end{cases}$$

## 3° Correspondance objet-image.

Pour qu'il y ait stigmatisme, il faudrait que pour une certaine valeur de  $x_i$ , on ait simultanément

$$a_2(x_i) = 0 \quad a_3(x_i) = 0 \quad b_2(x_i) = 0 \quad b_3(x_i) = 0$$

ce qui n'est pas possible.

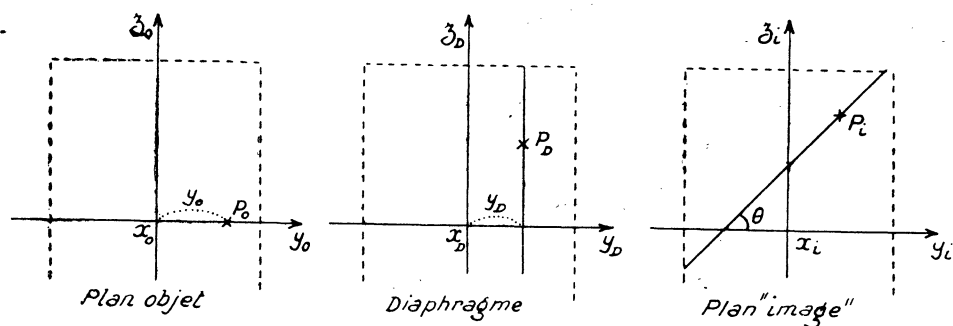


FIG. 4.

Considérons les différentes trajectoires des particules émises par un point-objet et venant percer le plan du diaphragme le long d'une droite d'équation (fig. 4).

$$x = x_D, \quad y = y_D$$

Les coordonnées  $(x, y)$  des points où ces trajectoires coupent le plan d'observation sont obtenues en éliminant  $z$  entre les deux équations (21). On trouve

$$(22) \quad z = \frac{b_3}{a_3} y - \frac{a_1 b_3 - b_1 a_3}{a_3} y_D - \frac{a_2 b_3 - b_2 a_3}{a_3} y_D$$

C'est l'équation d'une droite dont le coefficient angulaire

$$(23) \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{b_3}{a_3} = \frac{1}{l} \int_{x_0}^x \frac{1 - (\pm) \gamma B l}{S} dx$$

est indépendant de  $y_0$  et de  $y_D$ .

Il en résulte que, si l'on déplace la fente d'équation  $y = y_D$  parallèlement à elle-même, la droite précédente se déplace dans le plan d'observation en demeurant également parallèle à elle-même. On obtiendrait un résultat analogue en déplaçant le point-objet.

La droite précédente sera indépendante de la position de la fente diaphragme si l'équation (22) est indépendante de  $y_D$ , c'est-à-dire si l'on a

$$a_2 b_3 - b_2 a_3 = 0$$

soit

$$(24) \quad h_i \int_{x_0}^{x_i} \frac{1 - (\pm) \gamma B l}{S} dx + l_i \int_{x_0}^{x_i} \pm \frac{\gamma B}{S} h dx = 0$$

Toutes les trajectoires issues du point-objet  $y_0$  coupent le plan de front  $x_i$  défini par (24) suivant une droite unique que l'on peut considérer comme « l'image » du point-objet. La relation (24) peut être considérée comme l'équation de conjugaison entre les plans de front « objet » et « image ».

Contrairement aux systèmes de révolution, on n'a pas une correspondance ponctuelle objet-image, mais une correspondance point-droite.

On peut donner à la condition (24) une forme plus simple.

Les fonctions  $h(x)$  et  $l(x)$  satisfaisant respectivement aux équations (14) et (15), nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left\{ s h' \right\} - Th &= 0 \\ \frac{d}{dx} \left\{ S l' \right\} - Tl &= \pm \frac{\gamma B}{S} \end{aligned}$$

Multiplicons la première équation par  $l$  et la seconde par  $h$ , et retranchons membre à membre ces deux égalités, nous obtenons

$$\frac{d}{dx} \left\{ S (hl' - h'l) \right\} = \pm \frac{\gamma B}{S} h$$

En tenant compte des conditions initiales

$$h(x_0) = 0 \quad l(x_0) = 0$$

nous obtenons

$$(25) \quad S (hl' - h'l) = \int_{x_0}^x \pm \frac{\gamma B}{S} h dx$$

soit, en portant (25) dans (24) :

$$(26) \quad h_i \int_{x_0}^x \frac{1 - (\pm) \frac{\gamma B l}{S}}{S} dx + S_i l_i (h_i l'_i - h'_i l_i) = 0$$

D'autre part, la comparaison de (26) et de (23) donne pour coefficient angulaire de la droite image

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{S_i}{h_i} (h_i l'_i - l_i h'_i)$$

#### 4° Objet « éclairé » par un faisceau parallèle à l'axe $Ox$ .

Proposons-nous de déterminer la trajectoire d'une particule issue d'un point de coordonnées  $x_0 y_0 z_0$  et dont la vitesse initiale  $v_0$  est normale au plan de front  $x_0$  (fig. 5).

Désignons par  $y$  et  $z$  les coordonnées du point où cette trajectoire perce le plan de front d'abscisse  $x$ .

Les conditions initiales relatives à cette trajectoire s'écrivent :

$$(27) \quad y(x_0) = y_0 \quad y'(x_0) = 0$$

$$(28) \quad z(x_0) = z_0 \quad z'(x_0) = 0$$

La relation (12) donne, en tenant compte de (27) et de (28)

$$(29) \quad C = \pm \gamma B_0 y_0$$

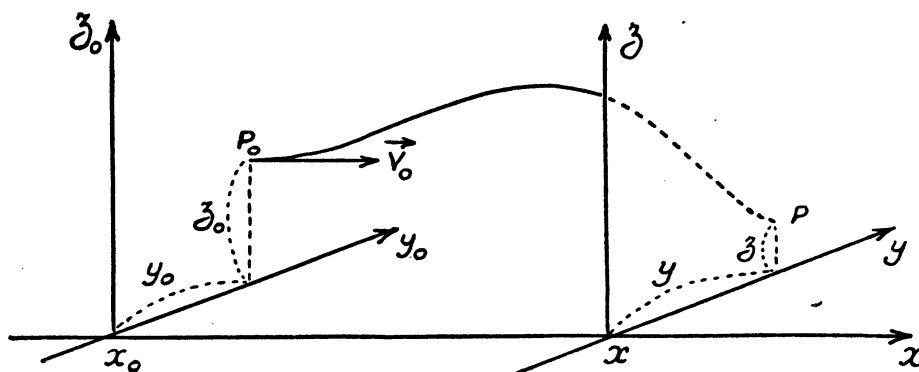


FIG. 5.

Soient  $h_1$  et  $k_1$ , deux solutions de l'équation (14) et  $l_1$ , une solution de (15) satisfaisant aux conditions (fig. 6)

$$\begin{array}{lll} h_1(x_0) = 0 & k_1(x_0) = 1 & l_1(x_0) = 0 \\ h'_1(x_0) = 1 & k'_1(x_0) = 0 & l'_1(x_0) = 1 \end{array}$$

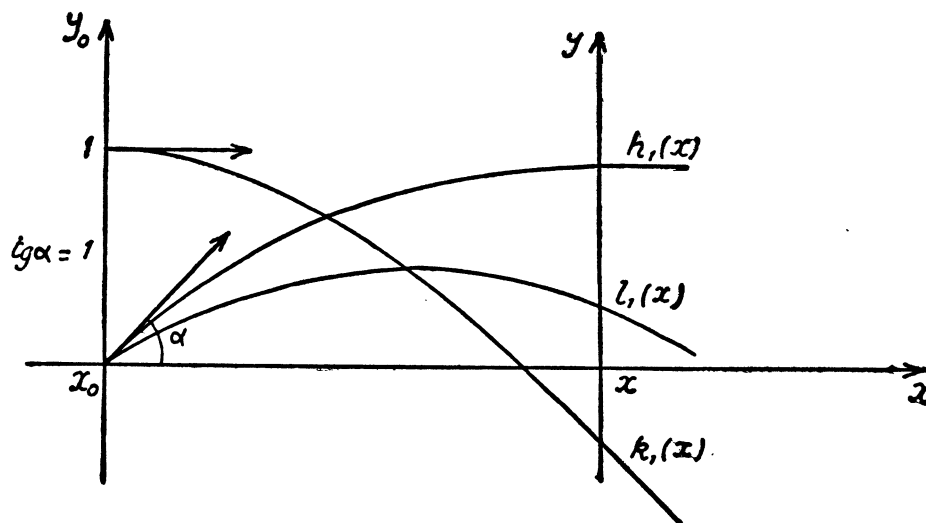


FIG. 6.

En remplaçant  $C$  par son expression (29), l'intégrale générale de (14) s'écrit

$$y = C_1 h_1 + C_2 k_1 \pm \gamma B_0 y_0 l_1$$

Nous déterminerons les deux constantes  $C_1$  et  $C_2$  en écrivant que  $y$  satisfait aux conditions (27).

Nous obtenons

$$(30) \quad y = y_0 \quad \left\{ k_1 \pm \gamma B_0 (l_1 - h_1) \right\}$$

En portant (30) dans (12) et en intégrant, nous avons :

$$z = z_0 \pm y_0 \int_{x_0}^x \frac{dx}{S} \left\{ \gamma B_0 - \gamma B [k_1 \pm \gamma B_0 (l_1 - h_1)] \right\}$$

Soit, en définitive :

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} y = y_0 a(x) \\ z = y_0 b(x) + z_0 \end{array} \right.$$

Lorsque le point-objet  $P_0$  est placé dans une région où le champ magnétique est négligeable, les coefficients  $a(x)$  et  $b(x)$  se simplifient et deviennent

$$\begin{aligned} a(x) &= k_1(x) \\ b(x) &= - \int_{x_0}^x \pm \frac{\gamma B}{S} k_1 dx \end{aligned}$$

Dans le cas d'un système purement électrostatique, ces coefficients se réduisent à

$$\left\{ \begin{array}{l} a(x) = k_1(x) \\ b(x) = 0 \end{array} \right.$$

et les équations (31) s'écrivent :

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} y = y_0 k_1(x) \\ z = z_0 \end{array} \right.$$

Si le plan d'observation est situé dans le plan  $x_i$  défini par

$$(33) \quad a(x_i) = 0$$

on obtient

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ z = z_0 - (\pm) \gamma B_0 y_0 \int_{x_0}^x \frac{dx}{S} \end{array} \right.$$

Quelle que soit la forme de l' « objet » situé dans le plan de front  $x_0$  son « ombre portée » dans le plan  $x = x_i$  est donc un segment de droite défini par (34).

En particulier, si l'on considère un faisceau de rayons incidents parallèles dans une région où le champ est négligeable, la relation (33) devient :

$$k_1(x_i) = 0$$

Le plan de front ainsi défini qui correspond au plan « image » conjugué d'un plan objet à l'infini par rapport au système, peut être considéré comme le plan « focal image ». Dans ce plan, la droite  $y = 0$  conjuguée d'un point-objet situé à l'infini dans la direction  $Ox$  sera la droite focale image.

« Ombre portée » d'un carré.

A un carré de côté  $c$  situé dans le plan de front  $x_0$  (fig. 7), les relations



(31) font correspondre en général un parallélogramme disposé comme il est indiqué sur la figure (8).

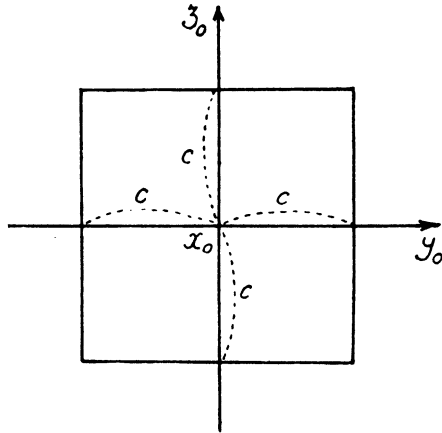


FIG. 7.

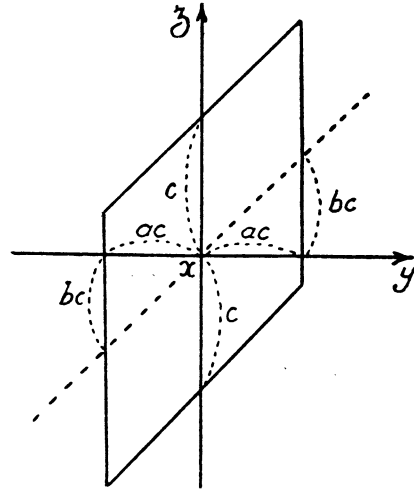


FIG. 8.

Pour que ce parallélogramme soit un rectangle, il faudrait choisir le plan d'observation  $x$  de telle sorte que l'on ait :

$$(35) \quad \int_{x_0}^x \left\{ \gamma B_0 - \gamma B [k_1 \pm \gamma B_0 y_0 (l_1 - h_1)] \right\} \frac{dx}{S} = 0$$

Si l'on voulait que ce parallélogramme soit un carré, il faudrait de plus

$$(36) \quad k_1 \pm \gamma B_0 \{ l_1 - h_1 \} = \pm 1$$

Dans le cas d'un système électrostatique, la condition (35) est toujours réalisée, et la condition (36) se réduit à

$$k_1 = \pm 1$$

« Ombre portée » d'un cercle.

Au cercle  $y_0^2 + z_0^2 = 1$

situé dans le plan objet  $x_0$  (fig 9) correspond dans le plan de front  $x$  l'ellipse (fig. 10).

$$(37) \quad y^2 \frac{1 + b^2}{a^2} - 2 \frac{b}{a} y z + z^2 = 1$$

Si la condition (35) est satisfaite, l'équation (37) se réduit à

$$\frac{y^2}{a^2} + z^2 = 1$$

et l'ellipse admet  $oy$  et  $oz$  pour axe de symétrie.

Enfin, si (36) est remplie, on obtient un cercle égal au cercle objet.

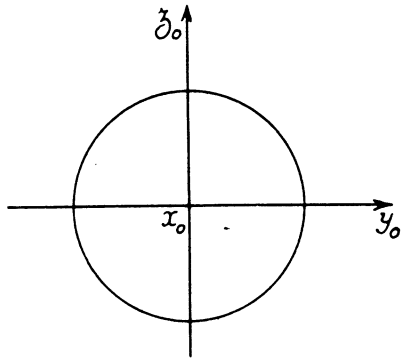


FIG. 9.

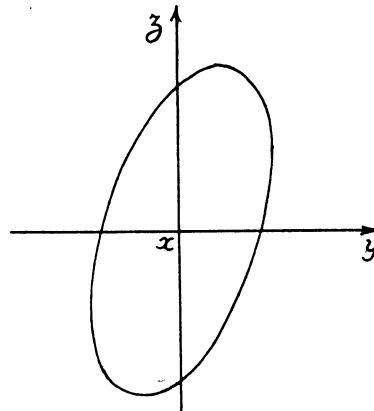


FIG. 10.

5° Application au cas particulier d'une lentille purement magnétique.

Une telle lentille est caractérisée par

$$\left\{ \begin{array}{l} S_0 = \varepsilon^{1/2} (1 + \alpha \varepsilon)^{1/2} \\ M = N = 0 \end{array} \right.$$

et les équations différentielles des trajectoires s'écrivent

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} z' = \frac{C}{S_0} - (\pm) \frac{\gamma B}{S_0} y \\ y'' + \frac{\gamma^2 B^2}{S_0^2} y = \pm \frac{C \gamma B}{S_0} \end{array} \right.$$

Il est possible d'obtenir la solution analytique des équations précédentes dans le cas où l'induction magnétique B dans le plan de symétrie est de la forme (champ de Glaser)

$$B = B_0 \frac{1}{1 + (x/c)^2}$$

La figure (11) donne l'allure de la variation de B/B<sub>0</sub>

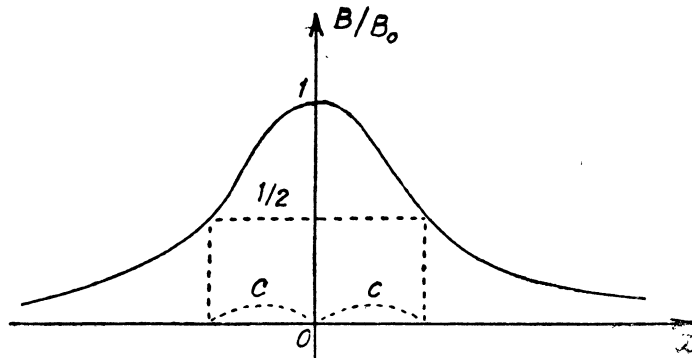


FIG. 11.

La constante  $c$  est demi-largeur de la courbe correspondant à  $B/B_0 > 1/2$   
Posons

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \frac{x}{c} \quad Y = \frac{y}{c} \quad z = \frac{z}{c} \\ k = \pm \frac{\gamma B_0}{S_0} c \quad K = \frac{C}{S_0} \end{array} \right.$$

Le système (42) s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dz}{dX} = K - k \frac{Y}{1+X^2} \\ [1 + X^2]^2 \frac{d^2 Y}{dX^2} + k^2 Y = Kk [1 + X^2] \end{array} \right.$$

Posons encore

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \cotg \varphi \\ Y = u/\sin \varphi \end{array} \right.$$

Les équations précédentes deviennent :

$$(39) \quad \frac{dZ}{d\varphi} = k \frac{u}{\sin^2 \varphi} - \frac{K}{\sin^2 \varphi}$$

$$(40) \quad \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + (1 + k^2) u = \frac{Kk}{\sin \varphi}$$

Nous poursuivrons la résolution du système dans le cas particulier où  $k^2 = 3$ . L'équation (44) donne dans ces conditions

$$(41) \quad \frac{u}{K} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \left\{ C_1 \sin 2\varphi + C_2 \cos 2\varphi + 2 \sin \varphi \left[ 1 + \cos \varphi \operatorname{Log} \left| \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right| \right] \right\}$$

En portant (41) dans (39), nous avons :

$$\frac{Z}{K} = \cotg \varphi + 3 \left\{ C_1 \sin \varphi + C_2 \left[ \frac{1}{2} \operatorname{Log} \left| \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right| - \cos \varphi \right] + \sin \varphi \operatorname{Log} \left| \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right| \right\} + C_3$$

Enfin, en revenant aux coordonnées initiales, nous obtenons l'équation de la trajectoire sous la forme paramétrique

$$\frac{x}{c} = \cotg \varphi$$

$$\frac{y}{\pm \sqrt{3} ck} = C_1 \cos \varphi + C_2 \frac{\cos 2\varphi}{2 \sin \varphi} + \cos \varphi \operatorname{Log} \left| \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right| + 1$$

$$\frac{z}{ck} = \cotg \varphi + 3 \left\{ C_1 \sin \varphi + C_2 \left[ \frac{1}{2} \operatorname{Log} \left| \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right| - \cos \varphi \right] + \sin \varphi \operatorname{Log} \left| \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right| \right\} + C_3$$

Plaçons le diaphragme au centre de la lentille et proposons-nous de déterminer l'image d'un point situé dans le plan de front

$$x = c$$

Il suffit de déterminer les quatre constantes  $C_1, C_2, C_3$  et  $K$  de telle sorte que dans le plan  $x = c$  qui correspond à  $\varphi = \pi/4$  on ait

$$y = y_0 \quad z = 0$$

et que, dans le plan  $x = 0$  obtenu pour  $\varphi = \pi/2$  on ait

$$y = y_D \quad z = z_D$$

On trouve

$$y = y_0 \begin{bmatrix} 1,505 \\ -0,503 \\ -0,127 \end{bmatrix} \cos \varphi \begin{bmatrix} -0,170 \\ -0,055 \\ +0,238 \end{bmatrix} \frac{\cos 2\varphi}{\sin \varphi} \begin{bmatrix} -0,170 \\ +0,945 \\ +0,238 \end{bmatrix} \left( 1 + \cos \varphi \operatorname{Log} \left| \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right| \right)$$

$$\pm z = y_D \begin{bmatrix} 2,607 \\ -0,872 \\ -0,219 \end{bmatrix} \sin \varphi \begin{bmatrix} -0,591 \\ -0,191 \\ +0,823 \end{bmatrix} \left[ \frac{1}{2} \operatorname{Log} \left| \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right| - \cos \varphi \right]$$

$$\begin{bmatrix} -0,098 \\ +0,546 \\ +0,137 \end{bmatrix} \left[ \operatorname{cotg} \varphi + 3 \sin \varphi \operatorname{Log} \left| \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right| \right] \begin{bmatrix} -2,607 \\ +0,872 \\ +1,219 \end{bmatrix}$$

de la forme

$$\begin{aligned} y &= y_0 a_1 + y_D a_2 \pm z_D a_3 \\ \pm z &= y_0 b_1 + y_D b_2 \pm z_D b_3 \end{aligned}$$

Dans le plan de front  $x$  on obtient une droite d'équation

$$\pm a_3 z_3 - b_3 y = (b_1 a_3 - a_1 b_3) y_0 + (b_2 a_3 - a_2 b_3) y_D$$

qui sera indépendante de  $y$  si l'on a :

$$b_2 a_3 - a_2 b_3 = 0$$

Cette relation est vérifiée pour

$$\varphi = 155^\circ 445$$

et l'équation de la droite « image » du point  $P(c, y_0, 0)$  s'écrit

$$\frac{x}{c} = -2,189$$

$$\pm z = 6,201 y + 7,263 y_0$$

## CHAPITRE II

### L'ABERRATION CHROMATIQUE

Les équations (17) et (15) sont relatives à une valeur  $\varepsilon$  de la tension d'accélération de la particule. Pour une valeur voisine  $\varepsilon + \Delta\varepsilon$  de cette tension, ces équations deviennent respectivement :

$$(42) \quad \frac{d}{dx} \left\{ (S + \Delta S) (y + \Delta y)' \right\} - (T + \Delta T) (y + \Delta y) = - (\pm) C \frac{\gamma B}{S + \Delta S}$$

$$(43) \quad (z + \Delta z)' = \frac{C}{S + \Delta S} - (\pm) \frac{\gamma B}{S + \Delta S} (y + \Delta y)$$

En retranchant membre à membre (42) et (17) d'une part, (43) et (15) d'autre part, nous obtenons, en nous limitant aux termes du premier ordre :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left\{ S (\Delta y)' \right\} - T \Delta y &= - \left\{ \frac{d}{dx} (\Delta S, y') - \Delta T, y \pm C \frac{\gamma B}{S^2} \Delta S \right\} \\ (\Delta z)' &= - \left\{ \frac{C}{S^2} \Delta S \pm \gamma B \Delta \left( \frac{y}{S} \right) \right\} \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} \Delta P &= - \left\{ \frac{d}{dx} (\Delta S, y') - \Delta T, y \pm C \frac{\gamma B}{S^2} \Delta S \right\} \\ \Delta Q &= - \left\{ \frac{C}{S^2} \Delta S \pm \gamma B \Delta \left( \frac{y}{S} \right) \right\} \end{aligned}$$

Les équations (36) et (37) s'écrivent

$$(44) \quad \frac{d}{dx} \left\{ S (\Delta y)' \right\} - T \Delta y = \Delta P$$

$$(45) \quad (\Delta z)' = \Delta Q$$

Les conditions initiales relatives aux deux trajectoires  $\varepsilon$  et  $\varepsilon + \Delta\varepsilon$  étant les mêmes, nous avons

$$(46) \quad \begin{array}{ll} (\Delta y)_0 = 0 & (\Delta y)'_0 = 0 \\ (\Delta z)_0 = 0 & (\Delta z)'_0 = 0 \end{array}$$

Soit  $l(x)$  une solution de l'équation (18) qui ne s'annule pas pour  $x$  compris entre  $x_0$  et  $x_1$ . Par combinaison linéaire des équations (18) et (44), nous obtenons

$$\frac{d}{dx} \left\{ S [l (\Delta y)' - l' (\Delta y)] \right\} = l \Delta P$$

soit en intégrant et en tenant compte de (46)

$$l(\Delta y)' - l'(\Delta y) = \frac{1}{S} \int_{x_0}^x l \Delta P d\xi,$$

Cette équation peut s'écrire encore :

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{\Delta y}{l} \right\} = \frac{1}{S l^2} \int_{x_0}^x l \Delta P d\xi,$$

d'où l'on déduit par une nouvelle intégration

$$\Delta y = l \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{s l^2} \int_{x_0}^{\xi} l \Delta P d\xi,$$

En portant cette valeur de  $\Delta y$  dans  $\Delta Q$  et en intégrant (45) nous obtenons

$$\Delta z = \int_{x_0}^x \Delta Q dx$$

$\Delta P$  et  $\Delta Q$  étant des fonctions linéaires de  $y_0$ ,  $y_D$  et  $z_D$ , l'image d'un point est encore une droite. Signalons que, au point de vue qualitatif, ce résultat se déduit immédiatement des relations (21).

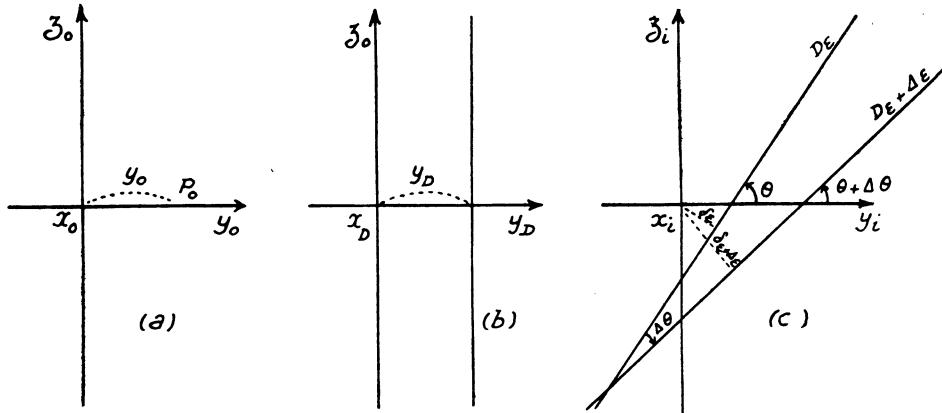


FIG. 12.

Considérons un point-objet  $P_0$  de coordonnées (fig. 12a)

$$x = x_0 \quad y = y_0 \quad z = 0$$

et un diaphragme d'équation (fig. 12b)

$$x = x_D \quad y = y_D$$

Pour une tension d'accélération  $\epsilon$  on obtient dans le plan de front  $x_i$  conjugué au plan  $x = x_0$  une droite  $D_\epsilon$  d'équation

$$z = \left( \frac{b_3}{a_3} \right)_\epsilon y - \left( \frac{a_1 b_3 - b_1 a_3}{a_3} \right)_\epsilon y_0$$

Pour une valeur  $\varepsilon + \Delta\varepsilon$  de la tension, nous avons une droite d'équation (fig. 12c)

$$z = \left(\frac{b_3}{a_3}\right)_{\varepsilon + \Delta\varepsilon} y - \left(\frac{a_1 b_3 - b_1 a_3}{a_3}\right)_{\varepsilon + \Delta\varepsilon} y_0 - \left(\frac{a_2 b_3 - b_2 a_3}{a_3}\right)_{\varepsilon + \Delta\varepsilon} y_D$$

faisant avec  $D\varepsilon$  un angle  $\Delta\theta$  défini par

$$\operatorname{tg} \Delta\theta = \frac{\left(\frac{b_3}{a_3}\right)_{\varepsilon + \Delta\varepsilon} - \left(\frac{b_3}{a_3}\right)_{\varepsilon}}{1 + \left(\frac{b_3}{a_3}\right)_{\varepsilon + \Delta\varepsilon} \left(\frac{b_3}{a_3}\right)_{\varepsilon}}$$

où

$$\operatorname{tg} \Delta\theta = \sigma_{\theta'} \Delta\varepsilon$$

avec

$$\sigma_{\theta'} = \theta'_{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} \theta = \left(\frac{b_3}{a_3}\right)_{\varepsilon}$$

L'angle  $\Delta\theta$  caractérise l'*aberration chromatique de rotation*. Il est indépendant de  $y_0$  et  $y_D$  et n'existe qu'en présence d'une induction magnétique.

Désignons par  $\delta_{\varepsilon}$  et  $\delta_{\varepsilon + \Delta\varepsilon}$  la distance de l'origine aux droites  $D_{\varepsilon}$  et  $D_{\varepsilon + \Delta\varepsilon}$  (fig. 12 c). La différence

$$\delta = \delta_{\varepsilon + \Delta\varepsilon} - \delta_{\varepsilon}$$

caractérise l'*aberration chromatique de translation*.

Elle a pour expression :

$$\delta = \left| \frac{(a_1 b_3 - b_1 a_3) y_0 + (a_2 b_3 - b_2 a_3) y_D}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}} \right|_{\varepsilon + \Delta\varepsilon} - \left| \frac{(a_1 b_3 - b_1 a_3) y_0}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}} \right|_{\varepsilon}$$

soit

$$\delta = \} \sigma_{\delta_0} y_0 + \sigma_{\delta D} y_D \{ \Delta\varepsilon$$

avec

$$\sigma_{\delta_0} = \left| \frac{a_1 b_3 - b_1 a_3}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}} \right|_{\varepsilon}$$

$$\sigma_{\delta D} = \left| \frac{a_2 b_3 - b_2 a_3}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}} \right|_{\varepsilon}$$

$\delta$  est nul pour

$$y_0 = y_D = 0.$$

On passe donc de  $D_{\varepsilon}$  à  $D_{\varepsilon + \Delta\varepsilon}$  par le déplacement produit de la rotation  $\theta$  et de la translation  $\delta$  normale à  $D_{\varepsilon}$ .

Pour la même position du point-objet  $P_0$  (fig. 13 a) considérons dans le même plan de front  $x = x_D$ , une fente diaphragme d'équation (fig. 13 b)

$$y_D - d < y < y_D + d.$$

Pour la tension  $\varepsilon$ , l'image de  $P_0$  dans le plan  $x_i$  conjugué de  $x_0$  est la droite  $D$ .

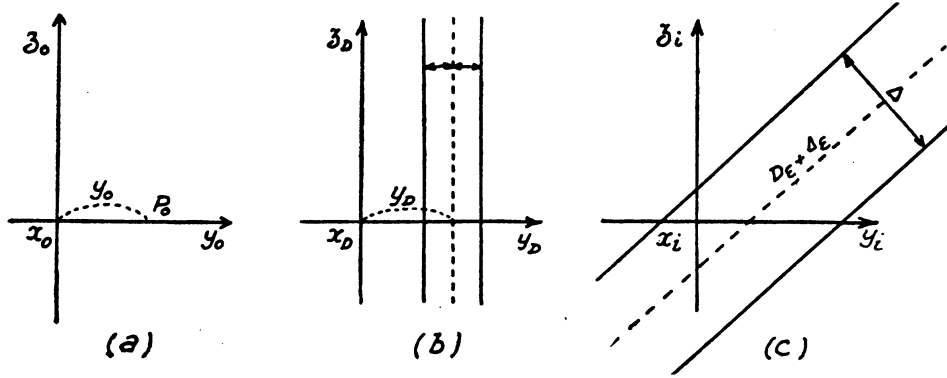


FIG. 13.

Pour la valeur  $\varepsilon + \Delta\varepsilon$  de la tension, les plans  $x_0$  et  $x_i$  ne sont plus conjugués et la droite précédente devient une bande lumineuse (fig. 13 c) parallèle à la droite  $D_{\varepsilon + \Delta\varepsilon}$  et de largeur

$$\Delta = 2 d \left| \frac{a_s b_s - a_s b_s}{\sqrt{a_s^2 + b_s^2}} \right|_{\varepsilon + \Delta\varepsilon}$$

Soit, en tenant compte de  $\sigma_{\delta D}$

$$\Delta = 2 d \sigma_{\delta D} \Delta\varepsilon$$

$\Delta$  tend vers zéro avec l'ouverture  $2 d$  du diaphragme. Elle peut donc servir à caractériser l'aberration chromatique d'ouverture.

On peut enfin définir une aberration chromatique longitudinale par la distance  $\Delta x_i$ , séparant les deux plans de front image  $x_i$  et  $x_i + \Delta x_i$ , conjugués d'un même plan de front objet  $x_0$  et correspondant aux deux valeurs  $\varepsilon$  et  $\varepsilon + \Delta\varepsilon$  de la tension d'accélération des particules.

Les conditions de conjugaisons entre les plans images  $x_i$  et  $x_i + \Delta x_i$ , et le plan objet  $x_0$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} (a_s b_s - b_s a_s)_{\varepsilon, x_i} &= 0 \\ (a_s b_s - b_s a_s)_{\varepsilon + \Delta\varepsilon, x_i + \Delta x_i} &= 0 \end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$\Delta x_i = - \frac{(a_s b_s - b_s a_s)'_{\varepsilon}}{(a_s b_s - b_s a_s)_{\varepsilon}} \Delta\varepsilon$$



### CHAPITRE III.

#### L'APPROXIMATION DU TROISIÈME ORDRE

##### I. — LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DES TRAJECTOIRES.

Il suffit de considérer les termes  $F_2$  et  $F_4$  dans l'expression du lagrangien  $F$ .

Les équations de la trajectoire s'écrivent alors

$$(47) \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F_2}{\partial y'} \right) - \left( \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) = - \left\{ \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F_4}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F_4}{\partial y} \right\}$$

$$(48) \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F_2}{\partial z'} \right) = - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F_4}{\partial z'} \right)$$

Les seconds membres de ces équations contiennent les termes du troisième ordre en  $y$ ,  $y'$ ,  $z'$ . Nous pouvons donc, à la même approximation remplacer  $y$  et  $z$  par les solutions relatives à l'approximation du premier ordre.

Désignons par  $y + \Delta y$  et  $z + \Delta z$  les solutions (47) et (48) pour les distinguer des solutions  $y$  et  $z$  des équations (13) et (14). En retranchant membre à membre (13) de (47) et (14) de (48), nous obtenons

$$(49) \quad \frac{d}{dx} \left\{ S \Delta y' \right\} + 2 M \Delta y - (\pm) \gamma B \Delta z' = - \left\{ \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F_4}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F_4}{\partial y} \right\}$$

$$\frac{d}{dx} \left\{ S \Delta z' \pm \gamma B \Delta y \right\} = - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F_4}{\partial z'} \right)$$

Cette dernière équation fournit l'intégrale première

$$(50) \quad S \Delta z' \pm \gamma B \Delta y = - \frac{\partial F_4}{\partial z'}$$

En portant (50) dans (49) et en tenant compte de (16), on obtient :

$$(51) \quad \frac{d}{dx} \left\{ S \Delta y' \right\} - T \Delta y = - (\pm) \frac{\gamma B}{S} \frac{\partial F_4}{\partial z'} - \left\{ \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F_4}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F_4}{\partial y} \right\}$$

Les seconds membres de (50) et (51) sont des fonctions connues de  $x$  puisqu'on y a remplacé  $y$  et  $z$  par les solutions supposées connues de l'approximation du second ordre.

On aura  $\Delta y$  en résolvant (51). On obtiendra ensuite  $\Delta z$  en portant cette valeur de  $\Delta y$  dans (50) et en intégrant.

Les conditions initiales étant les mêmes pour les trajectoires  $(y, z)$  et  $(y + \Delta y, z + \Delta z)$ , nous avons

$$(52) \quad (\Delta y)_0 = 0 \quad (\Delta y)'_0 = 0$$

$$(53) \quad (\Delta z)_0 = 0 \quad (\Delta z)'_0 = 0$$

## 2. — INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DES TRAJECTOIRES.

Par combinaison linéaire des équations (18) et (51) nous obtenons

$$l \frac{d}{dx} \left\{ S \Delta y' \right\} - \Delta y \frac{d}{dx} \left\{ S l' \right\} = - \left\{ (\pm) \frac{\gamma B}{S} \frac{\partial F_4}{\partial z'} - \frac{\partial F_4}{\partial y} \right\} l - l \frac{d}{dx} \left\{ \frac{\partial F_4}{\partial y'} \right\}$$

ou encore

$$\frac{d}{dx} \left\{ S l^2 \frac{d}{dx} \left( \frac{\Delta y}{l} \right) \right\} = - l \left[ (\pm) \frac{\gamma B}{S} \frac{\partial F_4}{\partial z'} - \frac{\partial F_4}{\partial y} \right] + l' \frac{\partial F_4}{\partial y'} - \frac{d}{dx} \left\{ l \frac{\partial F_4}{\partial y'} \right\}$$

En intégrant du plan objet  $x = x_0$  au plan d'observation  $x$ , on obtient :

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{\Delta y}{l} \right\} = \frac{1}{S l^2} \left\{ l_0 \left( \frac{\partial F_4}{\partial y'} \right)_0 - l \frac{\partial F_4}{\partial y'} \right\} - \frac{1}{S l^2} \int_{x_0}^x \left\{ l \left[ (\pm) \frac{\gamma B}{S} \frac{\partial F_4}{\partial z'} - \frac{\partial F_4}{\partial y} \right] - l' \frac{\partial F_4}{\partial y'} \right\} d\xi_1$$

Une nouvelle intégration donne, en tenant compte de (52)

$$(54) \quad \Delta y = l \int_{x_0}^x \frac{1}{S l^2} \left\{ l_0 \left( \frac{\partial F_4}{\partial y'} \right)_0 - l \frac{\partial F_4}{\partial y'} \right\} d\xi_1 \\ - l \int_{x_0}^x \frac{d\xi_2}{S l^2} \int_{x_0}^{\xi_2} \left\{ l \left[ (\pm) \frac{\gamma B}{S} \frac{\partial F_4}{\partial z'} - \frac{\partial F_4}{\partial y} \right] - l' \frac{\partial F_4}{\partial y'} \right\} d\xi_1$$

La relation (50) donne ensuite, compte tenu de (53)

$$(55) \quad \Delta z = - \int_{x_0}^x \left\{ \pm \gamma B \Delta y + \frac{\partial F_4}{\partial z'} \right\} \frac{dx}{S}$$

## 3. — EXPRESSION DES COEFFICIENTS D'ABERRATION.

En dérivant la relation (10), nous obtenons les expressions des dérivées partielles de  $F_4$

$$\frac{\partial F_4}{\partial y} = 4 N y^2 - M (y'^2 + z'^2) y - (\pm) \frac{\gamma B''}{2} y^2 z' \\ \frac{\partial F_4}{\partial y'} = - M y^2 y' - \frac{S}{2} (y'^2 + z'^2) y' \\ \frac{\partial F_4}{\partial z'} = - M y^2 z' - \frac{S}{2} (y'^2 + z'^2) z' - (\pm) \frac{\gamma B''}{6} y^3$$

Soit, en tenant compte de (29)

$$(56) \quad \frac{\partial F_4}{\partial y} = A_1 y_0^3 + B_1 y_0^2 y_D + C_1 y_0^2 z_D + D_1 y_0 y_D^2 + 2 E_1 y_0 y_D z_D \\ + F_1 y_0 z_D^2 + G_1 y_D^3 + H_1 y_D^2 z_D + I_1 y_D z_D^2 + J_1 z_D^3$$

avec

$$A_1 = 4 N a_1^3 - M (a_1'^2 + b_1'^2) a_1 - (\pm) \frac{\gamma B''}{2} a_1^2 b_1 \\ B_1 = 12 N a_1^2 a_2 - M \left\{ 2 a_1 (a_1' a_2' + b_1' b_2') + (a_1'^2 + b_1'^2) a_2 \right\} \\ - (\pm) \frac{\gamma B''}{2} (2 a_1 a_2 b_1' + a_1^2 b_2')$$

$$C_1 = 12 N a_1^2 a_3 - M \left\{ 2 a_1 (a'_1 a'_3 + b'_1 b'_3) + (a_1'^2 + b_1'^2) a_3 \right\} \\ - (\pm) \frac{\gamma B''}{2} (2 a_1 a_3 b'_1 + a_1'^2 b'_1)$$

$$D_1 = 12 N a_1 a_3^2 - M \left\{ 2 a_1 (a'_1 a'_3 + b'_1 b'_3) + (a_1'^2 + b_1'^2) a_3 \right\} \\ - (\pm) \frac{\gamma B''}{2} (2 a_1 a_3 b'_1 + a_1'^2 b'_1)$$

$$E_1 = 12 N a_1 a_2 a_3 - M \left\{ a_1 (a'_2 a'_3 + b'_2 b'_3) + a_2 (a'_1 a'_3 + b'_1 b'_3) + a_3 (a'_1 a'_2 + b'_1 b'_2) \right\} \\ - (\pm) \frac{\gamma B''}{2} (a_2 a_3 b'_1 + a_1 a_3 b'_2 + a_1 a_2 b'_3)$$

$$F_1 = 12 N a_1 a_3^2 - M \left\{ 2 a_1 (a'_1 a'_3 + b'_1 b'_3) + (a_1'^2 + b_1'^2) a_3 \right\} \\ - (\pm) \frac{\gamma B''}{2} (2 a_1 a_3 b'_1 + a_1'^2 b'_1)$$

$$G_1 = 4 N a_1^2 - M (a_1'^2 + b_1'^2) a_3 - (\pm) \frac{\gamma B''}{2} a_1^2 b'_1$$

$$H_1 = 12 N a_1^2 a_3 - M \left\{ 2 a_1 (a'_1 a'_3 + b'_1 b'_3) + (a_1'^2 + b_1'^2) a_3 \right\} \\ - (\pm) \frac{\gamma B''}{2} (2 a_1 a_3 b'_1 + a_1'^2 b'_1)$$

$$I_1 = 12 N a_1 a_3^2 - M \left\{ 2 a_1 (a'_1 a'_3 + b'_1 b'_3) + (a_1'^2 + b_1'^2) a_3 \right\} \\ - (\pm) \frac{\gamma B''}{2} (2 a_1 a_3 b'_1 + a_1'^2 b'_1)$$

$$J_1 = 4 N a_1^2 - M (a_1'^2 + b_1'^2) a_3 - (\pm) \frac{\gamma B''}{2} a_1^2 b'_1$$

On obtient de même

$$(57) \quad \frac{\partial F_1}{\partial y'} = A_2 y_0^3 + B_2 y_0^2 y_D + C_2 y_0^2 z_D + D_2 y_0 y_D^2 + 2 E_2 y_0 y_D z_D \\ + F_2 y_0 z_D^2 + G_2 y_D^3 + H_2 y_D^2 z_D + I_2 y_D z_D^2 + J_2 z_D^3$$

avec

$$A_2 = - M a_1^2 a'_1 - \frac{S}{2} (a_1'^2 + b_1'^2) a'_1$$

$$B_2 = - M (2 a_1 a_3 a'_1 + a_1'^2 a'_1) - \frac{S}{2} \left\{ 2 a'_1 (a'_1 a'_3 + b'_1 b'_3) + (a_1'^2 + b_1'^2) a'_1 \right\}$$

$$C_2 = - M (2 a_1 a_3 a'_1 + a_1'^2 a'_1) - \frac{S}{2} \left\{ 2 a'_1 (a'_1 a'_3 + b'_1 b'_3) + (a_1'^2 + b_1'^2) a'_1 \right\}$$

$$D_2 = - M (2 a_1 a_3 a'_1 + a_1'^2 a'_1) - \frac{S}{2} \left\{ 2 a'_1 (a'_1 a'_3 + b'_1 b'_3) + (a_1'^2 + b_1'^2) a'_1 \right\}$$

$$E_2 = - M (a_2 a_3 a'_1 + a_1 a_3 a'_2 + a_1 a_2 a'_3) - \frac{S}{2} \left\{ a'_1 (a'_1 a'_3 + b'_1 b'_3) \right. \\ \left. + a'_2 (a'_1 a'_3 + b'_1 b'_3) + a'_3 (a'_1 a'_3 + b'_1 b'_3) \right\}$$

$$F_s = -M(2a_s a_s a'_s + a_s^2 a'_s) - \frac{S}{2} \left\{ 2a'_s (a'_s a'_s + b'_s b'_s) + (a_s^2 + b_s^2) a'_s \right\}$$

$$G_s = -M a_s^2 a'_s - \frac{S}{2} (a_s^2 + b_s^2) a'_s$$

$$H_s = -M(2a_s a_s a'_s + a_s^2 a'_s) - \frac{S}{2} \left\{ 2a'_s (a'_s a'_s + b'_s b'_s) + (a_s^2 + b_s^2) a'_s \right\}$$

$$I_s = -M(2a_s a_s a'_s + a_s^2 a'_s) - \frac{S}{2} \left\{ 2a'_s (a'_s a'_s + b'_s b'_s) + (a_s^2 + b_s^2) a'_s \right\}$$

$$J_s = -M a_s^2 a'_s - \frac{S}{2} (a_s^2 + b_s^2) a'_s$$

On a enfin

$$(58) \quad \frac{\partial F}{\partial z'} = A_s y_s^2 + B_s y_s^2 y_D + C_s y_s^2 z_D + D_s y_s y_D^2 + 2 E_s y_s y_D z_D \\ + F_s y_s z_D^2 + G_s y_D^2 + H_s y_D^2 z_D + I_s y_D z_D^2 + J_s z_D^2$$

Avec

$$A_s = -M a_s^2 b'_s - \frac{S}{2} (a_s^2 + b_s^2) b'_s - (\pm) \frac{\gamma B'}{6} a_s^2$$

$$B_s = -M(2a_s a_s b'_s + a_s^2 b'_s) - \frac{S}{2} \left\{ 2b'_s (a'_s a'_s + b'_s b'_s) + (a_s^2 + b_s^2) b'_s \right\} \\ - (\pm) \frac{\gamma B'}{2} a_s^2 a_s$$

$$C_s = -M(2a_s a_s b'_s + a_s^2 b'_s) - \frac{S}{2} \left\{ 2b'_s (a'_s a'_s + b'_s b'_s) + (a_s^2 + b_s^2) b'_s \right\} \\ - (\pm) \frac{\gamma B'}{2} a_s^2 a_s$$

$$D_s = -M(2a_s a_s b'_s + a_s^2 b'_s) - \frac{S}{2} \left\{ 2b'_s (a'_s a'_s + b'_s b'_s) + (a_s^2 + b_s^2) b'_s \right\} \\ - (\pm) \frac{\gamma B'}{2} a_s a_s^2$$

$$E_s = -M(a_s a_s b'_s + a_s a_s b'_s + a_s a_s b'_s) - \frac{S}{2} \left\{ b'_s (a'_s a'_s + b'_s b'_s) \right. \\ \left. + b'_s (a'_s a'_s + b'_s b'_s) + b'_s (a'_s a'_s + b'_s b'_s) \right\} - (\pm) \frac{\gamma B'}{2} a_s a_s a_s$$

$$F_s = -M(2a_s a_s b'_s + a_s^2 b'_s) - \frac{S}{2} \left\{ 2b'_s (a'_s a'_s + b'_s b'_s) + (a_s^2 + b_s^2) b'_s \right\} \\ - (\pm) \frac{\gamma B'}{2} a_s^2 a_s$$

$$G_s = -M a_s^2 b'_s - \frac{S}{2} (a_s^2 + b_s^2) b'_s - (\pm) \frac{\gamma B'}{6} a_s^2$$

$$H_3 = -M(2a_2 a_3 b'_2 + a_2^2 b'_3) - \frac{S}{2} \left\{ 2b'_2 (a'_2 a'_3 + b'_2 b'_3) + (a_2'^2 + b_2'^2) b'_3 \right\} \\ - (\pm) \frac{\gamma B''}{2} a_2^2 a_3$$

$$I_3 = -M(2a_2 a_3 b'_3 + a_3^2 b'_2) - \frac{S}{2} \left\{ 2b'_3 (a'_2 a'_3 + b'_2 b'_3) + (a_3'^2 + b_3'^2) b'_2 \right\} \\ - (\pm) \frac{\gamma B''}{2} a_2 a_3^2$$

$$J_3 = -M a_3^2 b'_3 - \frac{S}{2} (a_3'^2 + b_3'^2) b'_3 - (\pm) \frac{\gamma B''}{6} a_3^3$$

En portant (56), (57) et (58) dans (54), on obtient

$$(59) \quad \Delta y = A y y_0^3 + B y y_0^2 y_D + C y y_0^2 z_D + D y y_0 y_D^2 + 2E y y_0 y_D z_D \\ + F y y_0 z_D^2 + G y y_D^3 + H y y_D^2 z_D + I y y_D z_D^2 + J y z_D^3$$

avec

$$K_y = l \int_{x_0}^x \frac{1}{S l^2} \left\{ (l K_2)_0 - l K_2 \right\} d\xi \\ - l \int_{x_0}^x \frac{d\xi_2}{S l^2} \int_{x_0}^{\xi_2} \left\{ l \left[ \pm \frac{\gamma B}{S} K_3 - K_1 \right] - l' K_2 \right\} d\xi_1$$

avec  $K = A, B, \dots, J$ .

De (55) on tire, en tenant compte de (59)

$$(60) \quad \Delta z = A z y_0^3 + B z y_0^2 y_D + C z y_0^2 z_D + D z y_0 y_D^2 + 2E z y_0 y_D z_D \\ + F z y_0 z_D^2 + G z y_D^3 + H z y_D^2 z_D + I z y_D z_D^2 + J z z_D^3$$

avec

$$K_z = - \int_{x_0}^x \left\{ \pm \gamma B K_y + K_3 \right\} \frac{dx}{S} \text{ avec } K = A, B, \dots, J.$$

#### 4. — CLASSIFICATION DES ABERRATIONS.

Nous déterminerons les aberrations correspondant aux différents termes de  $\Delta y$  et  $\Delta z$  en considérant les rayons émis par un point objet  $(y_0, 0)$  et en venant percer le plan du diaphragme le long d'une droite d'équation  $y = y_D$ .

##### 1° Aberration sphérique.

Elle est exprimée par les termes indépendants de  $y_0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_y = G_y y_D^3 + H_y y_D^2 z_D + I_y y_D z_D^2 + J_y z_D^3 \\ \Delta_z = G_z y_D^3 + H_z y_D^2 z_D + I_z y_D z_D^2 + J_z z_D^3 \end{array} \right.$$

Ce sont les seuls qui subsistent quand le point objet est dans le plan de symétrie du système.

2° **La coma.**

Elle correspond à l'ensemble des termes proportionnels à  $y_0$

$$\begin{cases} \Delta y = y_0 \{ D_y y_D^2 + 2 E_y y_D z_D + F_y z_D^2 \} \\ \Delta z = y_0 \{ D_z y_D^2 + 2 E_z y_D z_D + F_z z_D^2 \} \end{cases}$$

3° **L'astigmatisme et la courbure de champ.**

Elle est relative aux termes proportionnels à  $y_0^2$

$$\begin{cases} \Delta y = y_0^2 \{ B_y y_D + C_y z_D \} \\ \Delta z = y_0^2 \{ B_z y_D + C_z z_D \} \end{cases}$$

Elle devient prépondérante pour des points éloignés du plan de symétrie.

4° **La distorsion.**

Elle est caractérisée par les termes

$$\begin{cases} \Delta y = A_y y_0^3 \\ \Delta z = A_z y_0^3 \end{cases}$$

Elle existerait même si la droite était dans le plan de symétrie de la lentille.

## 5. — ÉTUDE DE QUELQUES COURBES D'ABERRATION.

Soient  $y$  et  $z$  les coordonnées du point P où un rayon couperait le plan d'observation si les conditions de l'approximation du second ordre étaient satisfaites.

En réalité, les coordonnées du point d'intersection sont

$$y_1 = y + \Delta y \qquad z_1 = z + \Delta z.$$

Nous nous proposons d'étudier le lieu des points  $P_1 (y_1, z_1)$  correspondant aux rayons issus d'un point lumineux  $P_0 (y_0, 0)$  et s'appuyant sur une fente d'équation  $y = y_0$ .

Nous savons que le lieu du point P ( $y, z$ ) est une droite ( $\delta$ ) d'équation

$$(\delta) \quad \begin{cases} y = y_0 a_1 + y_0 a_2 + z_0 a_3 \\ z = y_0 b_1 + y_0 b_2 + z_0 b_3. \end{cases}$$

Pour étudier plus commodément les déformations de cette courbe lorsqu'on s'écarte des conditions de l'approximation du premier ordre, nous prendrons pour axe  $Z'Z$  la droite ( $\delta$ ) elle-même, et pour axe  $Y'Y$  l'axe issu de 0 et normal à ( $\delta$ ) (*fig. 14*).

Ce changement d'axe est défini par

$$(61) \qquad \qquad \qquad \text{tg } \theta_1 = - \frac{a_3}{b_1}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta = y_0 \frac{a_1 b_3 - b_1 a_3}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}} + y_D \frac{a_1 b_3 - b_1 a_3}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}} \\ \xi = y_0 \frac{a_1 a_3 + b_1 b_3}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}} + y_D \frac{a_2 a_3 + b_2 b_3}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}} \end{array} \right.$$

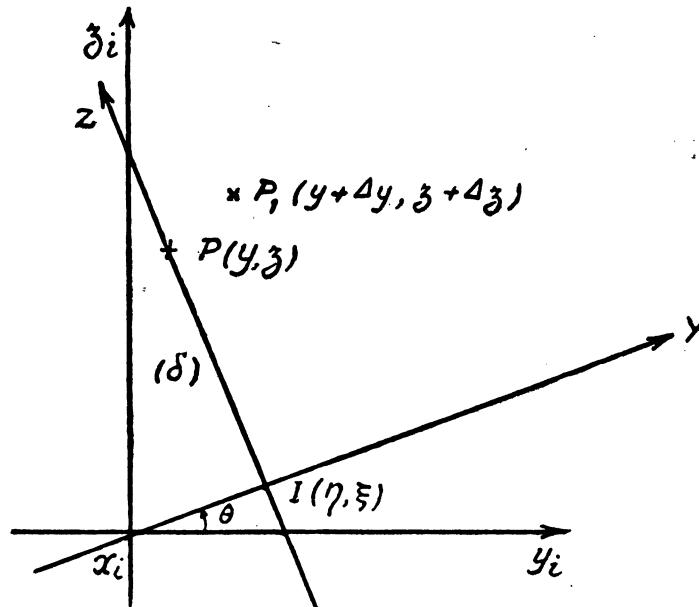


FIG. 14.

Dans ce nouveau système la droite  $(\delta)$  a pour équation

$$Y = 0 \quad Z = z_D \sqrt{a_3^2 + b_3^2}$$

et les coordonnées du point  $P_1 (y + \Delta y, z + \Delta z)$  deviennent

$$y_1 = \Delta y \cos \theta_1 + \Delta z \sin \theta_1$$

$$z_1 = z_D \sqrt{a_3^2 + b_3^2} - \Delta y \sin \theta_1 + \Delta z \cos \theta_1.$$

Soit, en tenant compte de (61)

$$(62) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_1 = \frac{1}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}} \{ b_3 \Delta y - a_3 \Delta z \} \\ Z_1 = \frac{1}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}} \{ z_D (a_3^2 + b_3^2) + a_3 \Delta y + b_3 \Delta z \} \end{array} \right.$$

Nous étudierons tout d'abord le cas où le point objet est dans le plan de symétrie du système ( $y_0 = 0$ ) et nous suivrons les déformations de la courbe lorsqu'on déplace la fente du diaphragme parallèlement à elle-même et nor-

malement au plan de symétrie. Ce sont les aberrations relatives à l'ouverture du faisceau.

Nous supposons ensuite que la fente du diaphragme est dans le plan de symétrie ( $y_D = 0$ ) et nous déplacerons l'objet normalement à ce plan.

Ce sont les aberrations dues aux dimensions de l'objet.

1° **Aberrations dues à l'ouverture du faisceau.**

En faisant  $y_0 = 0$  dans les équations (59) et (60) nous obtenons

$$(63) \quad \begin{cases} \Delta y = G_y y_D^2 + H_y y_D^2 z_D + I_y y_D z_D^2 + J_y z_D^3 \\ \Delta z = G_z y_D^2 + H_z y_D^2 z_D + I_z y_D z_D^2 + J_z z_D^3 \end{cases}$$

Soit, en portant dans (62)

$$Y_1 = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \left\{ (b_1 G_y - a_1 G_z) y_D^2 + (b_1 H_y - a_1 H_z) y_D^2 z_D + (b_1 I_y - a_1 I_z) y_D z_D^2 + (b_1 J_y - J_z) z_D^3 \right\}$$

$$Z_1 = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \left\{ z_D (a_1^2 + b_1^2) + (a_1 G_y + b_1 G_z) y_D^2 + (a_1 H_y + b_1 H_z) y_D^2 z_D + (a_1 I_y + b_1 I_z) y_D z_D^2 + (a_1 J_y + b_1 J_z) z_D^3 \right\}$$

ou encore avec des notations différentes

$$(64) \quad \begin{cases} Y_1 = \alpha_0 y_D^2 + \alpha_1 y_D^2 z_D + \alpha_2 y_D z_D^2 + \alpha_3 z_D^3 \\ Z_1 = \lambda^2 z_D + \beta_0 y_D^2 + \beta_1 y_D^2 z_D + \beta_2 y_D z_D^2 + \beta_3 z_D^3 \end{cases}$$

Faisons le changement d'axe défini par

$$(65) \quad \begin{cases} Y_2 = (Y_1 - \alpha_0 y_D^2) \cos \theta_2 + (Z_1 - \beta_0 y_D^2) \sin \theta_2 \\ Z_2 = -(Y_1 - \alpha_0 y_D^2) \sin \theta_2 + (Z_1 - \beta_0 y_D^2) \cos \theta_2 \end{cases}$$

avec

$$\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{\alpha_1 y_D^2}{\lambda^2 + \beta_1 y_D^2}$$

et posons

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \alpha_2 \cos \theta_2 + \beta_2 \sin \theta_2 & \gamma_3 &= \alpha_3 \cos \theta_2 + \beta_3 \sin \theta_2 \\ \mu &= -\alpha_1 y_D^2 \sin \theta_2 + (\lambda^2 + \beta_1 y_D^2) \cos \theta_2 \\ \delta_2 &= -\alpha_2 \sin \theta_2 + \beta_2 \cos \theta_2 & \delta_3 &= -\alpha_3 \sin \theta_2 + \beta_3 \cos \theta_2. \end{aligned}$$

Les équations (65) s'écrivent

$$(66) \quad \begin{cases} Y_2 = \gamma_2 y_D z_D^2 + \gamma_3 z_D^3 \\ Z_2 = \mu z_D + \delta_2 y_D z_D^2 + \delta_3 z_D^3 \end{cases}$$

Les courbes représentatives sont tangentes à l'origine à l'axe  $Z'_2 Z_2$ . Elles ont, en ce point, une courbure  $\frac{1}{\rho}$  dont le développement en fonction



de  $y_D$  limité au terme du troisième ordre a pour expression :

$$(67) \quad \frac{1}{\rho} = 2 \frac{\alpha_2}{\lambda^2} y_D - 2 \frac{\alpha_1 \beta_2 + 2 \alpha_2 \beta_1}{\lambda^6} y_D^3$$

a) *Le diaphragme est dans le plan de symétrie de la lentille.*

Dans le cas où le diaphragme est dans le plan de symétrie de la lentille, c'est-à-dire pour  $y_D = 0$ , les équations (64) et (67) se réduisent à

$$\begin{cases} Y_1 = \alpha_3 z_D^3 \\ Z_1 = \lambda^2 z_D + \beta_3 z_D^3 \end{cases} \quad \frac{1}{\rho} = 0$$

et la courbe représentative a l'allure indiquée sur la figure 15.

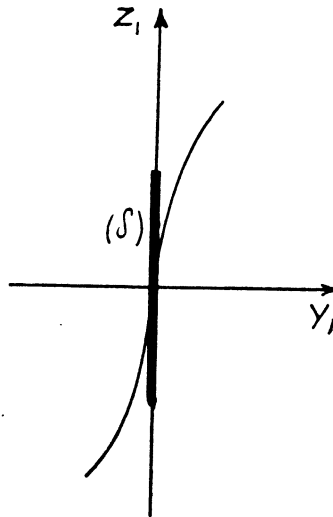


FIG. 15.

Lorsque  $z_D$  est suffisamment petit pour que l'on puisse négliger les termes en  $z_D^3$ , c'est-à-dire dans le cas de l'approximation du premier ordre, nous retrouvons la droite (8) d'équation

$$y_1 = 0 \quad z_1 = \lambda^2 z_D$$

b) *Le diaphragme est situé près du plan de symétrie de la lentille.*

Dans le cas où le diaphragme est situé très près du plan de symétrie de la lentille, nous pouvons négliger les termes en  $y_D^2$  et  $y_D^3$ . Les équations (64) s'écrivent alors

$$\begin{cases} Y_1 = \alpha_3 y_D z_D^3 + \alpha_3 z_D^3 \\ Z_1 = \lambda^2 z_D + \beta_2 y_D z_D^2 + \beta_3 z_D^3 \end{cases}$$

et la courbe représentative (fig. 16) au voisinage de l'origine est un arc dont la courbure a pour expression

$$\frac{1}{\rho} = 2 \frac{z_2}{\lambda_4} y_D$$

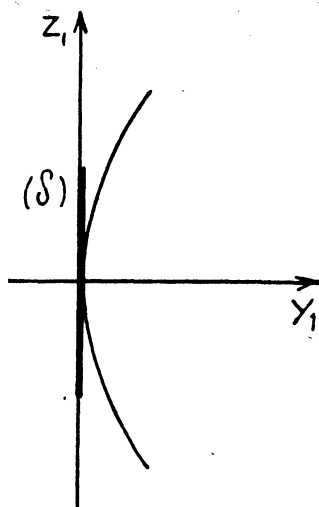


FIG. 16.

c) *Le diaphragme n'est plus au voisinage immédiat du plan de symétrie de la lentille.*

Si le diaphragme n'est plus situé au voisinage immédiat du plan de symétrie de la lentille, il faut tenir compte des termes en  $y^2$  et  $y^3$ .

Nous avons alors un arc de courbe (fig. 17) dont la courbure est donnée par (67) mais n'admettant plus pour tangente la droite ( $\delta$ ).

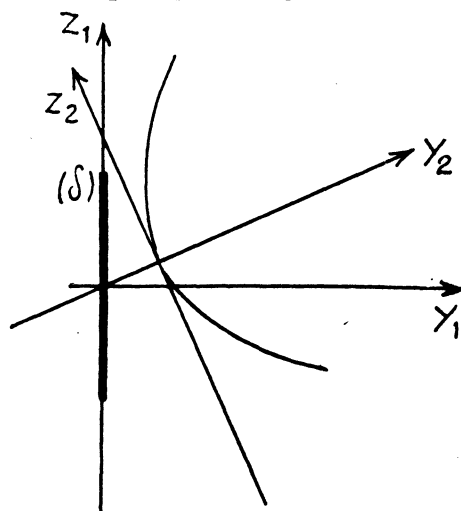


FIG. 17.

**2° Aberrations dues aux dimensions de l'objet.**

En faisant  $y_D = 0$  dans les équations (59) et (60) nous obtenons

$$\begin{aligned}\Delta y &= A_y y_0^2 + C_y y_0^2 z_D + F_y y_0 z_D^2 + J_y z_D^3 \\ \Delta z &= A_z y_0^2 + C_z y_0^2 z_D + F_z y_0 z_D^2 + J_z z_D^3\end{aligned}$$

Ce sont des équations analogues aux relations (63). On aura donc des phénomènes semblables en déplaçant le point objet ou la fente diaphragme.

---

CHAPITRE IV.

CAS PARTICULIER D'UN SYSTÈME ÉLECTROSTATIQUE PUR

I. — L'APPROXIMATION DU PREMIER ORDRE.

1° Équation différentielle des trajectoires gaussiennes.

Dans le cas particulier des systèmes électrostatiques purs, les termes  $F_0$ ,  $F_2$  et  $F_4$  du lagrangien se réduisent à

$$\left\{ \begin{array}{l} F_0 = S \\ F_2 = -M y'^2 + \frac{S}{2} (y''^2 + z''^2) \\ F_4 = N y'^4 - \frac{M}{2} y'' (y''^3 + z''^3) - \frac{S}{8} (y''^4 + z''^4) \end{array} \right.$$

et les équations différentielles des trajectoires gaussiennes se simplifient et s'écrivent :

$$(68) \quad z' = \frac{C}{S}$$

$$(69) \quad \frac{d}{dx} (S y') + 2 M y = 0$$

2° Correspondance « objet-image ».

L'équation (68) s'intègre immédiatement et donne

$$(70) \quad z = z_D \frac{\int_{x_0}^x \frac{dx}{s}}{\int_{x_0}^{x_D} \frac{dx}{S}} = z_D b(x)$$

Soient  $h(x)$  et  $k(x)$  deux solutions particulières de (69) satisfaisant aux conditions aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} h(x_0) = 0 \\ h(x_D) = 1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} k(x_0) = 1 \\ k(x_D) = 0 \end{array} \right.$$

L'intégrale de (69) pour laquelle on a

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{et} \quad y(x_D) = y_D$$

s'écrit

$$(71) \quad y = y_0 k(x) + y_D h(x)$$

et la condition de conjugaison entre le plan « objet »  $x = x_0$  et le plan « image »  $x = x_i$  se réduit à

$$h(x_i) = 0.$$

Dans le plan  $x_i$  conjugué du plan  $x_0$  (fig. 18), la droite « image » a donc pour équation

$$y = y_0 k(x_i).$$

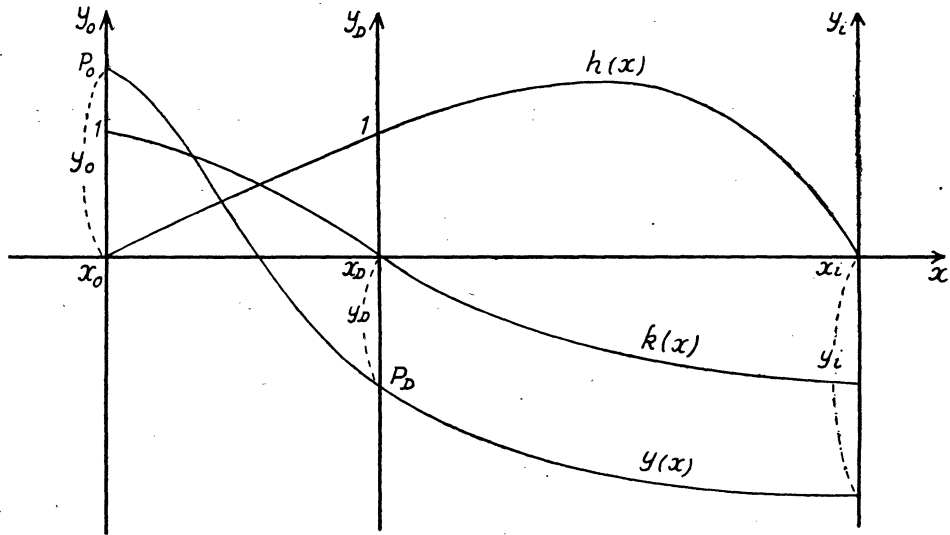


FIG. 18.

### 3° Plan focal image.

Les conditions initiales relatives à la trajectoire d'une particule issue d'un point de coordonnées  $x_0 y_0 z_0$  et dont la vitesse initiale est normale au plan de front  $x_0$  s'écrivent

$$(72) \quad \begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = 0 \end{cases}$$

$$(73) \quad \begin{cases} z(x_0) = z_0 \\ z'(x_0) = 0. \end{cases}$$

L'équation (68) donne, compte tenu de (73)

$$z = z_0.$$

Soit  $k_1(x)$  une solution particulière de (69) satisfaisant à

$$k_1(x_0) = 1 \quad k'_1(x_0) = 0.$$

L'intégrale de (69) vérifiant (72) s'écrit (fig. 19)

$$y = y_0 k_1(x).$$

Si le plan  $x_0$  est supposé situé dans une région où le champ est négligeable, le « plan focal image » sera défini par

$$k_1(x_f) = 0$$

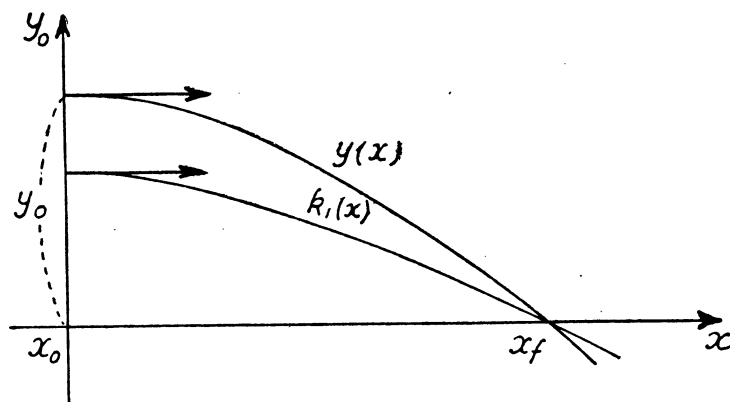


FIG. 19.

et la « droite focale image » aura pour équation  $y = 0$ .

2. — LES ABERRATIONS CHROMATIQUES.

Quelle que soit la tension d'accélération  $\varepsilon$  des électrons, les droites « images » demeurent parallèles au plan de symétrie du système. Il n'y a pas d'aberration chromatique de rotation

$$\sigma_r = 0.$$

L'aberration chromatique de translation  $\delta$  se réduit à (fig. 20)

$$\delta = \{ k'_\varepsilon y_0 + h'_\varepsilon y_D \} \Delta\varepsilon$$

d'où

$$\sigma_{\delta 0} = k'_\varepsilon \quad \sigma_{\delta D} = h'_\varepsilon$$

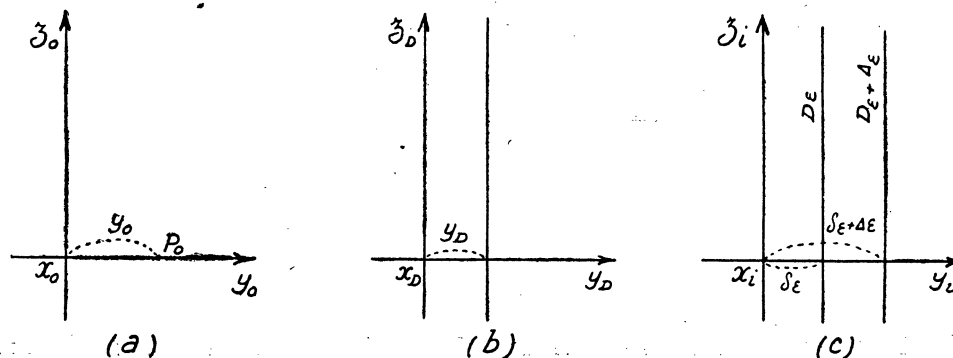


FIG. 20.

On en déduit l'expression de l'aberration chromatique d'ouverture

$$\Delta = 2 d h'_i \Delta \varepsilon.$$

Enfin, l'aberration chromatique longitudinale a pour expression

$$\Delta x_i = - \frac{h'_i}{h'_x} \Delta \varepsilon$$

### 3. — LES ABERRATIONS DU TROISIÈME ORDRE.

#### 1° Équation différentielle des aberrations.

Les équations différentielles relatives aux aberrations du troisième ordre se simplifient notablement. Elles s'écrivent en effet :

$$(74) \quad \frac{d}{dx} \left\{ S \Delta y' \right\} + 2 M \Delta y = - \left\{ \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F_i}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F_i}{\partial y} \right\}$$

$$(75) \quad \frac{d}{dx} \left\{ S \Delta z' \right\} = - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F_i}{\partial z'} \right)$$

L'intégration de (75) donne

$$(76) \quad (\Delta z)_i = - \int_{x_0}^{x_i} \frac{1}{S} \frac{\partial F_i}{\partial z'} dx$$

Par combinaison linéaire de (74) et de

$$\frac{d}{dx} \left\{ S h' \right\} + 2 M h = 0$$

nous obtenons

$$\frac{d}{dx} \left\{ S [h \Delta y' - h' \Delta y] \right\} = - h \left\{ \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F_i}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F_i}{\partial y} \right\}$$

En intégrant du plan « objet »  $x = x_0$  pour lequel nous avons

$$h(x_0) = 0 \quad (\Delta y)_0 = 0 \quad (\Delta y)'_0 = 0$$

au plan image défini par

$$h(x_i) = 0$$

nous obtenons

$$\left\{ S [h \Delta y' - h' \Delta y] \right\}_{x=x_0}^{x=x_i} = \int_{x_0}^{x_i} \left\{ \frac{d}{dx} \left( h \frac{\partial F_i}{\partial y'} \right) - \left( h \frac{\partial F_i}{\partial y} + h' \frac{\partial F_i}{\partial y'} \right) \right\} dx$$

soit

$$(77) \quad (\Delta y)_i = \frac{1}{S_i h'_i} \int_{x_0}^{x_i} \left[ h \frac{\partial F_i}{\partial y} + h' \frac{\partial F_i}{\partial y'} \right] dx$$

#### 2° Expression des coefficients d'aberration.

En tenant compte des expressions (70) et (71) de  $z$  et de  $y$  nous trouvons successivement

$$(78) \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = A_1 y_0^2 + B_1 y_0^2 y_D + D_1 y_0 y_D^2 + F_1 y_0 z_D^2 + G_1 y_D^2 + I_1 y_D z_D^2$$

avec

$$\begin{aligned} A_1 &= 4 N k^3 - M k k'^2 \\ B_1 &= 12 N h k^2 - M k' (2 k h' + h k') \\ D_1 &= 12 N k h^2 - M h' (2 h k' + k h') \\ F_1 &= - M k b'^2 \\ G_1 &= 4 N h^3 - M h h'^2 \\ I_1 &= - M h b'^2 \end{aligned}$$

$$(79) \quad \frac{\partial F_1}{\partial y'} = A_1 y_0^2 + B_1 y_0^2 y_D + D_1 y_0 y_D^2 + F_1 y_0 z_D^2 + G_1 y_D^2 + I_1 y_D z_D^2$$

avec

$$\begin{aligned} A_1 &= - M k^2 k' - \frac{S}{2} k'^2 \\ B_1 &= - M k (2 h k' + k h') - \frac{3}{2} S k'^2 h' \\ D_1 &= - M h (2 k h' + h k') - \frac{3}{2} S k' h'^2 \\ F_1 &= - \frac{S}{2} k' b'^2 \\ G_1 &= - M h^2 h' - \frac{S}{2} h'^2 \\ I_1 &= - \frac{S}{2} h' b'^2 \end{aligned}$$

$$(80) \quad \frac{\partial F_1}{\partial z'} = C_1 y_0^2 z_D + 2 E_1 y_0 y_D z_D + H_1 y_D^2 z_D + J_1 z_D^2$$

avec

$$\begin{aligned} C_1 &= - M k^2 b' - \frac{S}{2} k'^2 b' \\ E_1 &= - M h k b' - \frac{S}{2} h' k' b' \\ H_1 &= - M h^2 b' - \frac{S}{2} h'^2 b' \\ J_1 &= - \frac{S}{2} b'^2 \end{aligned}$$

En portant (78) et (79) dans (77) et (80) dans (76) nous obtenons

$$(81) \quad \left\{ \begin{aligned} (\Delta y)_i &= A_y y_0^2 + B_y y_0^2 y_D + D_y y_0 y_D^2 + F_y y_0 z_D^2 + G_y y_D^2 + I_y y_D z_D^2 \end{aligned} \right.$$

$$(82) \quad \left\{ \begin{aligned} (\Delta z)_i &= C_z y_0^2 z_D + 2 E_z y_0 y_D z_D + H_z y_D^2 z_D + J_z z_D^2 \end{aligned} \right.$$



en posant

$$(83) \quad \begin{cases} K_y = \frac{1}{S_i h'_i} \int_{x_0}^{x_i} [h K_1 + h' K_2] dx & \text{avec } K = A, B, D, F, G, I \\ K_z = - \int_{x_0}^{x_i} \frac{K_3}{S} dx & \text{avec } K = C, E, H, J \end{cases}$$

### 3° Courbes d'aberrations.

Une étude analogue à celle faite dans le cas général nous conduit en définitive à distinguer les aberrations dues à l'ouverture du faisceau et celles dues aux dimensions de l'objet.

#### a) Aberrations dues à l'ouverture du faisceau.

Elles correspondent au cas où le point objet est dans le plan de symétrie ( $y_0 = 0$ ). Les relations (81) et (82) se réduisent à

$$\begin{cases} (\Delta y)_i = G_y y_D^3 + I_y y_D z_D^2 \\ (\Delta z)_i = H_z y_D^2 + J_z z_D^3 \end{cases}$$

Les rayons s'appuyant sur la fente diaphragme d'équation  $y_D$  coupent le plan image  $x_i$  suivant une courbe d'équation (fig. 21)

$$\begin{aligned} y_i &= G_y y_D^3 + I_y y_D z_D^2 \\ z_i &= b_i z_D + H_z y_D^2 z_D + J_z z_D^3 \end{aligned}$$

dont la courbure pour  $z_D = 0$  a pour expression, en supposant que le diaphragme est voisin du plan de symétrie

$$\frac{1}{\rho} = 2 \frac{I_y}{b_i^2} y_D$$

Soit, en tenant compte de (83)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2 y_D}{b_i^2 S_i h'_i} \int_{x_0}^{x_i} b^2 (M h^2 + \frac{S}{2} h'^2) dx$$

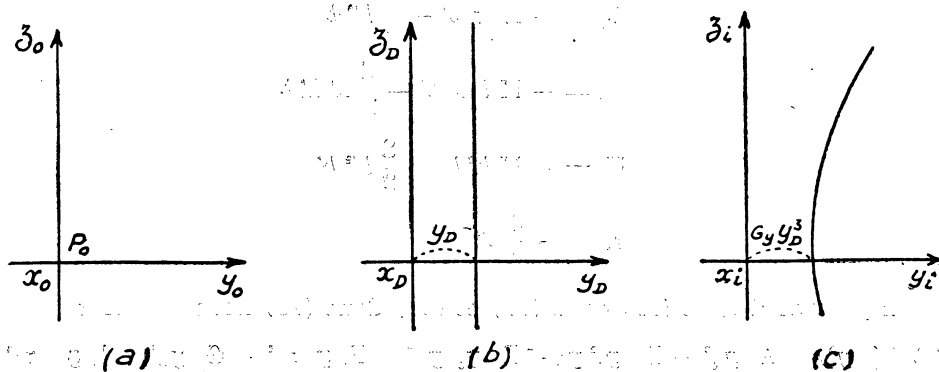


Fig. 21.

b) *Aberrations dues aux dimensions de l'objet.*

Elles correspondent au cas où le diaphragme est dans le plan de symétrie ( $y_D = 0$ ). On a dans ces conditions :

$$\left. \begin{aligned} (\Delta y)_i &= A_y y_0^3 + F_y y_0 z_D^2 \\ (\Delta z)_i &= C_z y_0^2 z_D + J_z z_D^3 \end{aligned} \right\}$$

On obtient alors, dans le plan image, une courbe d'équation (fig. 22)

$$\left\{ \begin{aligned} y_i &= k_i y_0 + A_y y_0^3 + F_y y_0 z_D^2 \\ z_i &= b_i z_D + C_z y_0^2 z_D + J_z z_D^3 \end{aligned} \right.$$

dont la courbure pour  $z_D = 0$  a pour valeur, dans le cas où le point objet est voisin du plan de symétrie

$$\frac{1}{\rho} = 2 \frac{F_y}{b_i^2} y_0$$

soit, en tenant compte de (83)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{-2 y_0}{b_i^2 S_i h_i} \int_{x_0}^{x_i} b'^2 \left( M k h + \frac{S}{2} k' h' \right) dx$$

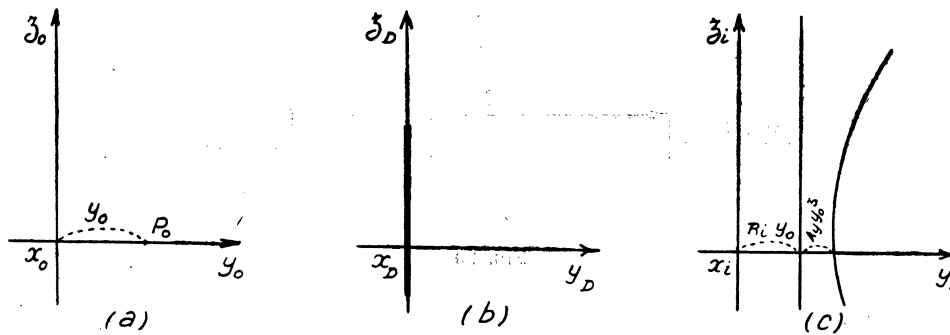


FIG. 22.

**DÉTERMINATION ANALYTIQUE DU POTENTIEL ET DU CHAMP  
DANS LE PLAN DE SYMÉTRIE D'UNE LENTILLE ÉLECTROSTATIQUE  
A TROIS FENTES**

Nous appellerons lentille cylindrique à trois fentes une lentille à électrodes planes, parallèles et infiniment minces, formées de six demi-plans, apposés deux à deux.

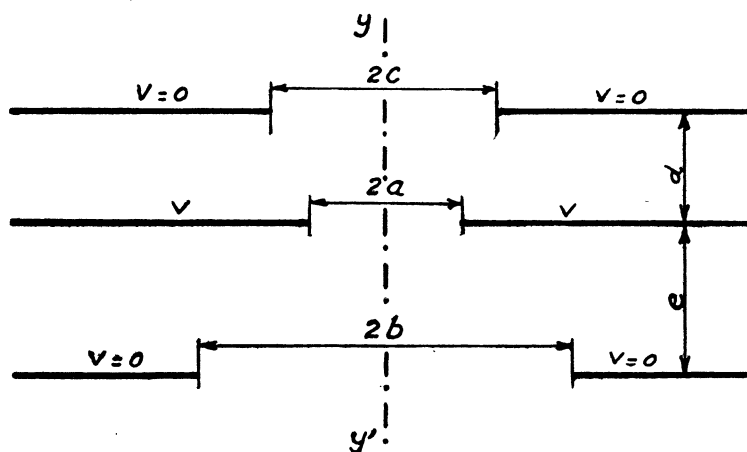


FIG. 23.

Nous admettons, de plus, que la lentille possède un plan de symétrie (fig. 23) et que les quatre demi-plans extérieurs sont au potentiel zéro tandis que les deux demi-plans intérieurs sont portés au potentiel V.

I. — ÉTUDE DU CAS GÉNÉRAL.

Pour déterminer analytiquement la distribution du potentiel et du champ d'un tel système, nous ferons appel à la transformation de Schwarz<sup>(1)</sup>

$$(84) \quad z = A \int \prod_i (\zeta - \zeta_i) \left( \frac{\alpha_i}{\pi} - 1 \right) d\zeta + B$$

où A et B sont des constantes, les angles intérieurs du polygone 1, 2, ... 12 (fig. 24).

1. E. DURAND, Électrostatique et Magnétostatique, chapitre X, Masson, Paris, 1953.

La relation (84) associe les plans complexes  $xy$  et  $\xi\eta$  et fait correspondre en particulier le contour du polygone à l'axe des  $\xi$ .

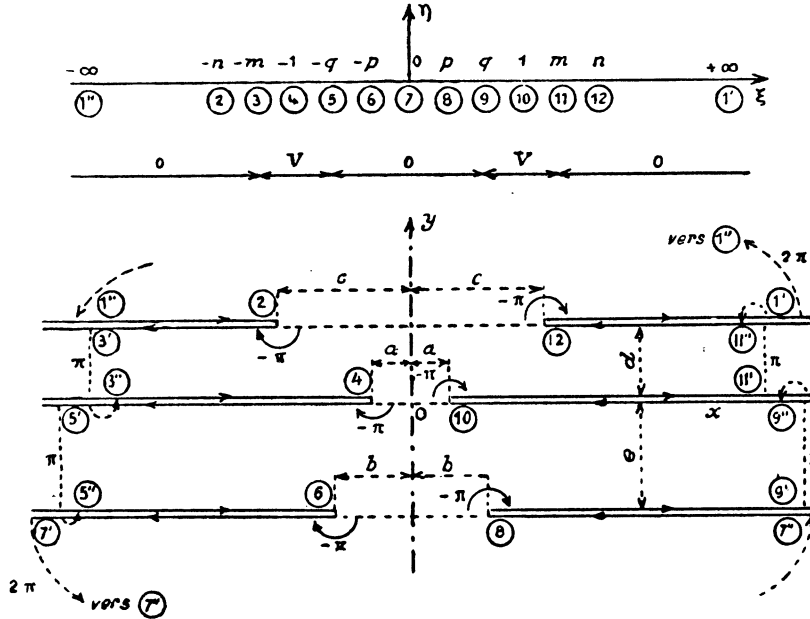


FIG. 24.

Les valeurs de  $(\alpha/\pi) - 1$  étant respectivement 1, -1, 1, -1, 1, -2, 1, -1, 1, -1, 1 pour les points 2, 3, ... 12, la transformation (84) s'écrit

$$(85) \quad z = A \int \frac{(\zeta^2 - n^2)(\zeta^2 - 1)(\zeta^2 - p^2)}{\zeta^2(\zeta^2 - m^2)(\zeta^2 - q^2)} d\zeta + B$$

L'intégration de (85) nécessite la décomposition de la fraction rationnelle en éléments simples.

Posons

$$(86) \quad \frac{(\zeta^2 - n^2)(\zeta^2 - 1)(\zeta^2 - p^2)}{\zeta^2(\zeta^2 - m^2)(\zeta^2 - q^2)} = 1 - \frac{C_1}{\zeta^2} + \frac{2mC_2}{\zeta^2 - m^2} + \frac{2qC_3}{\zeta^2 - q^2}$$

nous obtenons

$$(87) \quad \left\{ \begin{aligned} C_1 &= \frac{n^2 p^2}{m^2 q^2} \\ C_2 &= \frac{(m^2 - n^2)(m^2 - 1)(m^2 - p^2)}{2m^3(m^2 - q^2)} \\ C_3 &= \frac{(q^2 - n^2)(q^2 - 1)(q^2 - p^2)}{2q^3(q^2 - m^2)} \end{aligned} \right.$$

En tenant compte de (86), l'équation (85) s'écrit

$$z = A \int \left\{ d\zeta - \left[ C_1 \frac{d\zeta}{\zeta^2} + C_2 \frac{2m d\zeta}{\zeta^2 - m^2} + C_3 \frac{2q d\zeta}{\zeta^2 - q^2} \right] \right\} + B$$

soit en intégrant

$$(88) \quad z = A \left\{ \zeta + \frac{C_1}{\zeta} + C_2 \operatorname{Log} \frac{\zeta - m}{\zeta + m} + C_3 \operatorname{Log} \frac{\zeta - q}{\zeta + q} \right\} + B$$

Pour déterminer les cinq coefficients  $m, n, p, q, A$  nous écrivons que

$$\overrightarrow{3' 3''} = -id, \quad \overrightarrow{5' 5''} = -ie$$

$$\left. \begin{array}{l} z_n - z_{-n} = 2c \\ z_1 - z_{-1} = 2a \\ z_p - z_{-p} = 2b \end{array} \right\}$$

Nous obtenons ainsi les cinq relations :

$$(89) \quad AC_2 = -\frac{d}{\pi}, \quad (90) \quad AC_3 = -\frac{e}{\pi}$$

$$(91) \quad C = A \left( n + \frac{C_1}{n} \right) - \frac{d}{\pi} \operatorname{Log} \frac{n - m}{n + m} - \frac{e}{\pi} \operatorname{Log} \frac{n - q}{n + q}$$

$$(92) \quad a = A \left( 1 + \frac{C_1}{1} \right) - \frac{d}{\pi} \operatorname{Log} \frac{1 - m}{1 + m} - \frac{e}{\pi} \operatorname{Log} \frac{1 - q}{1 + q}$$

$$(93) \quad b = A \left( p + \frac{C_1}{p} \right) - \frac{d}{\pi} \operatorname{Log} \frac{p - m}{p + m} - \frac{e}{\pi} \operatorname{Log} \frac{p - q}{p + q}$$

Enfin la constante  $B$  sera déterminée en plaçant l'origine en un point choisi arbitrairement. Nous écrivons par exemple que pour  $\zeta = 1, z = a$ , soit en tenant compte de (92)

$$B = 0$$

L'équation (88) s'écrit donc en définitive

$$(94) \quad z = A \left( \zeta + \frac{C_1}{\zeta} \right) - \frac{d}{\pi} \operatorname{Log} \frac{\zeta - m}{\zeta + m} - \frac{e}{\pi} \operatorname{Log} \frac{\zeta - q}{\zeta + q}$$

Si l'on désire que les deux demi-plans intérieurs soient au potentiel  $V$  et que les quatre demi-plans extérieurs soient au potentiel zéro, il faut prendre sur l'axe  $\xi$  les valeurs  $0, V, 0, V, 0$  comme il est indiqué sur la figure 24. Pour qu'il en soit ainsi, il suffit de poser

$$(95) \quad w = -\frac{V}{\pi} \operatorname{Log} \left\{ \frac{\zeta + m}{\zeta - m} \cdot \frac{\zeta - q}{\zeta + q} \right\}$$

Les équations (94) et (95) ont été choisies de telle sorte que les lignes équipotentielles soient données par  $\eta = C^{te}$  pour la transformation  $z = z(\zeta)$  et par  $v = \text{const.}$  pour la transformation  $w = w(\zeta)$  (avec  $w = u + iv$ ). En faisant  $v = \text{const.}$ , ou  $u = \text{const.}$  dans la transformation

$$z = z \{ \zeta(w) \} = \bar{z}(w),$$

on a l'équation des lignes équipotentielles ou des lignes de forces.

De la symétrie du système et de la définition des fonctions flux  $\xi = \xi(x, y)$  et  $u = u(\xi, \eta)$  nous pouvons conclure à la correspondance des axes imaginaires des trois plans  $z, \zeta$  et  $w$ . Nous établirons analytiquement cette propriété.

La séparation des parties réelles et imaginaires des équations (94) et (95) quoique assez laborieuse n'offre pas de difficultés particulières. On trouve

$$(96) \quad x = A \zeta \left( 1 + \frac{C_1}{\zeta^2 + \gamma_1^2} \right) + \frac{d}{2\pi} \operatorname{Log} \frac{(\zeta + m)^2 + \gamma_1^2}{(\zeta - m)^2 + \gamma_1^2} + \frac{e}{2\pi} \operatorname{Log} \frac{(\zeta + q)^2 + \gamma_1^2}{(\zeta - q)^2 + \gamma_1^2}$$

$$(97) \quad y = A \gamma_1 \left( 1 - \frac{C_1}{\zeta^2 + \gamma_1^2} \right) - \frac{d}{\pi} \left\{ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2 m \gamma_1}{\zeta^2 + \gamma_1^2 - m^2} + k_1 \pi \right\} - \frac{e}{\pi} \left\{ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2 q \gamma_1}{\zeta^2 + \gamma_1^2 - q^2} + k_2 \pi \right\}$$

$$(98) \quad u = -\frac{V}{2\pi} \left\{ \operatorname{Log} \frac{(\zeta + m)^2 + \gamma_1^2}{(\zeta - m)^2 + \gamma_1^2} - \operatorname{Log} \frac{(\zeta + q)^2 + \gamma_1^2}{(\zeta - q)^2 + \gamma_1^2} \right\}$$

$$(99) \quad v = \frac{V}{\pi} \left\{ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2 m \gamma_1}{\zeta^2 + \gamma_1^2 - m^2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2 q \gamma_1}{\zeta^2 + \gamma_1^2 - q^2} + k \pi \right\}$$

$k_1$ ,  $k_2$  et  $k$  étant des nombres entiers que nous déterminerons ultérieurement de telle sorte que la continuité de la fonction potentiel soit assurée.

Faisons  $\xi = 0$  dans les équations (96) et (98). Nous obtenons quel que soit  $\eta$  :

$$x = 0 \quad \text{et} \quad u = 0$$

ce qui établit la correspondance des axes imaginaires des trois plans  $z$ ,  $\zeta$  et  $w$ .

La connaissance du potentiel dans le plan de symétrie  $x = 0$  est seule utile en optique électronique.

Les formules (97) et (99) donnent pour  $\xi = 0$

$$(100) \quad y = A \gamma_1 \left( 1 - \frac{C_1}{\gamma_1^2} \right) - \frac{d}{\pi} \left\{ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2 m \gamma_1}{\gamma_1^2 - m^2} + k_1 \pi \right\} - \frac{e}{\pi} \left\{ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2 q \gamma_1}{\gamma_1^2 - q^2} + k_2 \pi \right\}$$

$$(101) \quad v = \frac{V}{\pi} \left\{ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2 m \gamma_1}{\gamma_1^2 - m^2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2 q \gamma_1}{\gamma_1^2 - q^2} + K \pi \right\}$$

Le champ complexe E a pour expression

$$(102) \quad E = -\left( \frac{dw}{dz} \right)^* = -\left( \frac{dw}{d\zeta} \right)^* \left( \frac{d\zeta}{dz} \right)^*$$

Des équations (85) et (95) on tire

$$\frac{dz}{d\zeta} = A \frac{(\zeta^2 - \gamma_1^2)(\zeta^2 - 1)(\zeta^2 - p^2)}{\zeta^2(\zeta^2 - m^2)(\zeta^2 - q^2)}$$

et

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{2(m-q)}{\pi} V \frac{\zeta^2 + mq}{(\zeta^2 - m^2)(\zeta^2 - q^2)}$$

D'autre part, dans le plan de symétrie de la lentille, nous avons

$$\zeta^* = -\zeta = -i \eta$$

d'où l'expression du champ :

$$(103) \quad E = \frac{2}{\pi} V \frac{m-q}{A} \frac{\gamma_1^2(\gamma_1^2 - mq)}{(\gamma_1^2 + \gamma_1^2)(\gamma_1^2 + 1)(\gamma_1^2 + p^2)}$$

## 2. — CAS PARTICULIER DE LA LENTILLE SYMÉTRIQUE

Parmi les lentilles du type précédent, c'est la lentille symétrique (fig. 25) qui est le plus couramment utilisée. Nous lui consacrerons un paragraphe spécial.

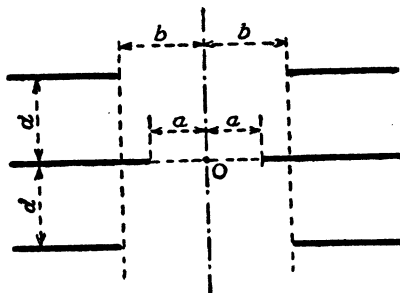


FIG. 25.

Si l'on fait simultanément  $m q = 1$  et  $n p = 1$  dans les équations (87), (89), (90) et (93) on trouve  $d = e$  et  $c = b$ .

C'est le cas que nous proposons d'étudier. En tenant compte des relations précédentes, nous obtenons

$$(104) \quad d = A \pi \frac{C_s = 1}{2 p^2 q (1 + q^2)} (1 - p^2 q^2) (q^2 - p^2)$$

$$(105) \quad a = 2 A - \frac{2 d}{\pi} \text{Log} \frac{1 - q}{1 + q}$$

$$(106) \quad b = A \left( p + \frac{1}{p} \right) - \frac{d}{\pi} \text{Log} \left\{ \frac{1 - p q}{1 + p q} \cdot \frac{q - p}{q + p} \right\}.$$

Les trois dernières équations permettent de déterminer les trois constantes  $p$ ,  $q$  et  $A$ .

Les équations (100) et (101) deviennent :

$$(107) \quad y = A \frac{\eta^2 - 1}{\eta} - \frac{d}{\pi} \left\{ \text{arc tg} \frac{2 q \eta}{q^2 \eta^2 - 1} + \text{arc tg} \frac{2 q \eta}{\eta^2 - q^2} + K' \pi \right\}$$

$$(108) \quad v = \frac{V}{\pi} \left\{ \text{arc tg} \frac{2 q \eta}{q^2 \eta^2 - 1} - \text{arc tg} \frac{2 q \eta}{\eta^2 - q^2} + K \pi \right\}$$

avec

$$\begin{cases} K' = 1 & k = 0 & \text{pour} & 0 < \eta < q \\ K' = 0 & k = 1 & \text{pour} & q < \eta < 1 \end{cases}$$

L'équation (103) donne pour le champ

$$(109) \quad E = -\frac{2}{\pi} V \frac{p^2 (1 - q^2)}{A q} \frac{\eta^2 (1 - \eta^2)}{(p^2 \eta^2 + 1) (\eta^2 + 1) (\eta^2 + p^2)}$$

Si l'on fait  $\eta = 1$  dans la formule (107) on trouve  $y = 0$ .

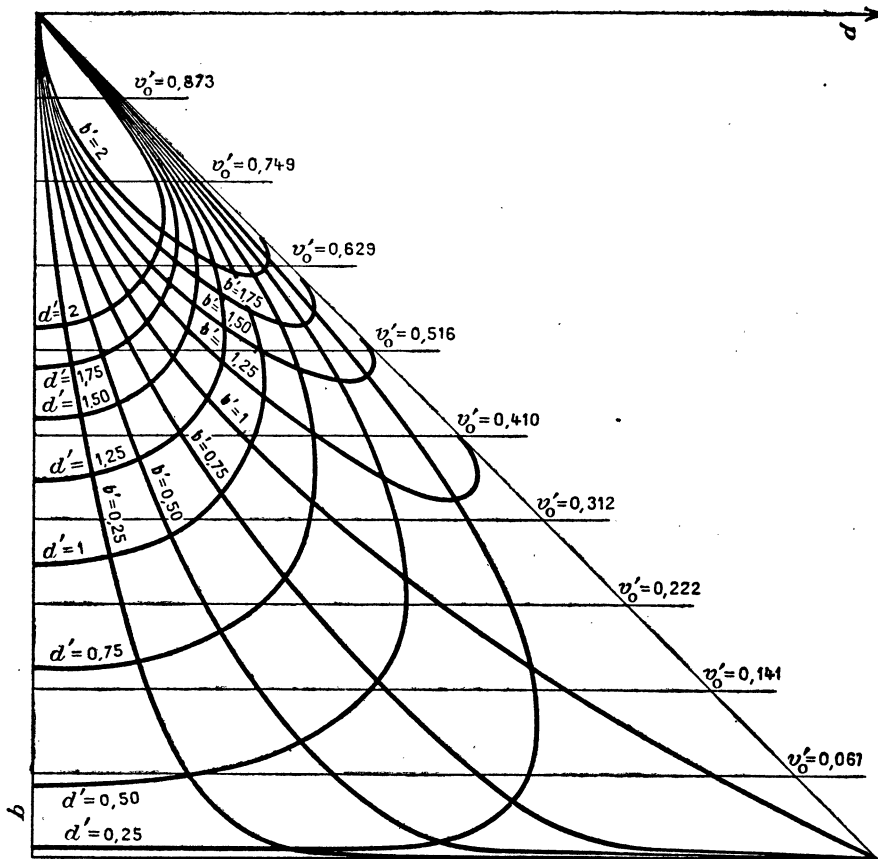


FIG. 26.



On en déduit les expressions  $v_0$  et  $E_0$  du potentiel et du champ au centre de la lentille

$$(110) \quad v_0 = V \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} - \text{arc tg} \frac{2q}{1-q^2} \right\},$$

$$E_0 = 0.$$

La détermination des constantes  $p$ ,  $q$  et  $A$  en fonction des paramètres géométriques  $a$ ,  $b$  et  $d$  définissant la lentille donne lieu à des calculs compliqués. Nous avons préféré déterminer les rapports  $b' = b/a$  et  $d' = d/a$  en fonction des constantes  $p$  et  $q$ .

Les résultats de ces calculs ainsi que les variations  $v' = v/V$  du potentiel au centre de la lentille, sont représentés sur la figure 26.

### 3. — CAS DE L'OBJECTIF A IMMERSION.

Un autre cas particulièrement important dans la pratique et dont l'étude peut être rattachée au cas général envisagé au début de ce chapitre, est celui de l'objectif à immersion qui s'obtient (*fig. 27*) en remplaçant par une cathode plane l'électrode 6-8 de la figure 24.

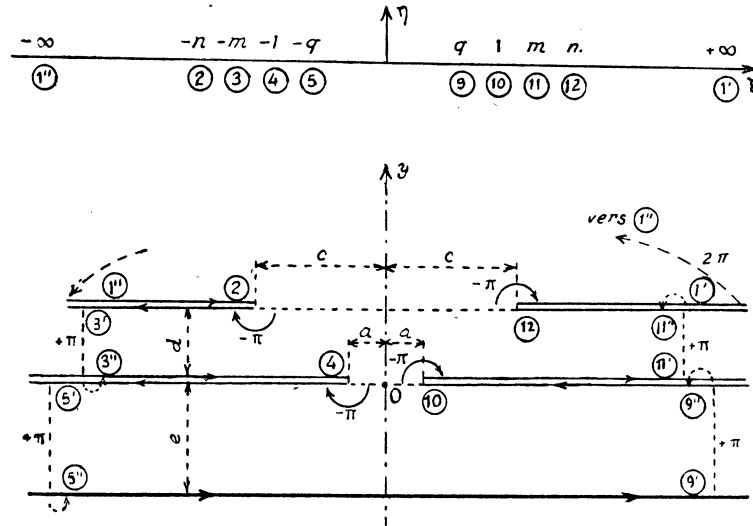


FIG. 27.

On peut étudier directement ce dispositif à partir de la transformation de Schwarz qui s'écrit ici :

$$(111) \quad z = A \int \frac{(\zeta^2 - n^2)(\zeta^2 - 1)}{(\zeta^2 - m^2)(\zeta^2 - q^2)} d\zeta + B$$

On peut également remarquer que les résultats précédents demeurent

valables à la condition de faire  $p = 0$  dans les équations (85) et (87). On obtient dans ces conditions

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = 0 \\ C_2 = \frac{(m^2 - n^2)(m^2 - 1)}{2m(m^2 - q^2)} \\ C_3 = \frac{(q^2 - n^2)(q^2 - 1)}{2q(q^2 - m^2)} \end{array} \right.$$

et la transformation (111) s'écrit alors

$$z = A \zeta - \frac{d}{\pi} \operatorname{Log} \frac{\zeta - m}{\zeta + m} - \frac{e}{\pi} \log \frac{\zeta - q}{\zeta + q}$$

Les constantes  $n$ ,  $m$ ,  $q$  et  $A$  seront déterminées à partir des quatre équations

$$\begin{aligned} \frac{d}{A} &= -\pi \frac{(m^2 - n^2)(m^2 - 1)}{2m(m^2 - q^2)} \\ \frac{e}{A} &= -\pi \frac{(q^2 - n^2)(1 - q^2)}{2q(q^2 - m^2)} \\ \frac{a}{A} &= 1 - \frac{d}{\pi A} \operatorname{Log} \frac{1 - m}{1 + m} - \frac{e}{\pi A} \operatorname{Log} \frac{1 - q}{1 + q} \\ \frac{e}{A} &= n - \frac{d}{\pi A} \operatorname{Log} \frac{n - m}{n + m} - \frac{e}{\pi A} \operatorname{Log} \frac{n - q}{n + q} \end{aligned}$$

obtenues en écrivant que

$$\begin{aligned} 3' 3'' &= -id \\ 5' 5'' &= -ie \\ z_1 - z_{-1} &= 2c \\ z_n - z_{-n} &= 2a \end{aligned}$$

On peut envisager une étude analogue de la lentille symétrique en se donnant  $m$ ,  $p$  et  $q$  et en calculant les valeurs correspondantes des rapports

$$b' = \frac{b}{a} \quad d' = \frac{d}{a} \quad c' = \frac{c}{a}$$

permettant de définir géométriquement l'objectif. Mais la présence de trois variables rend le calcul beaucoup plus compliqué et ne permet pas de construire un abaque.

On pourrait, toutefois, pour trois valeurs correspondantes  $p$ ,  $q$ ,  $m$  donner aisément les variations du champ et du potentiel d'un objectif.

## CHAPITRE VI.

### CALCUL NUMÉRIQUE D'UNE LENTILLE ÉLECTROSTATIQUE SYMÉTRIQUE A TROIS FENTES

Nous étudierons une lentille caractérisée par (fig. 28)  $a = b = c$ .

Nous déterminerons d'abord la répartition du potentiel par la méthode de relaxation. Nous calculerons ensuite les trajectoires gaussiennes et les aberrations à partir des formules précédemment établies.

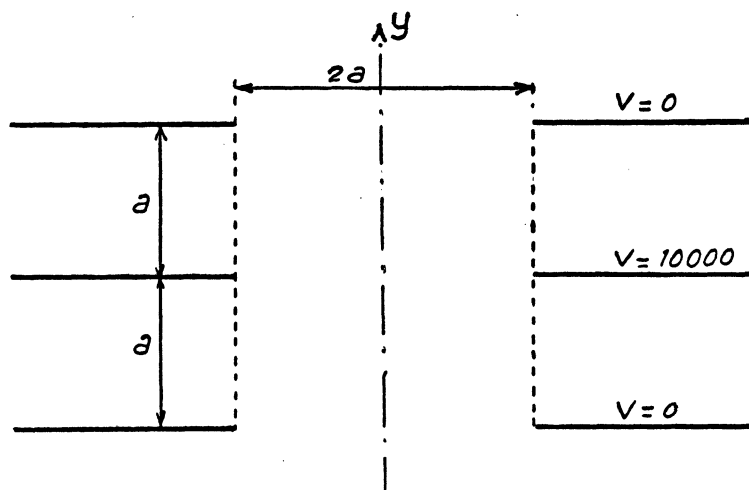


FIG. 28.

#### I. — CALCUL DU POTENTIEL.

Nous avons déterminé le potentiel par la méthode de relaxation, en admettant que l'électrode centrale était portée au potentiel  $V = 10.000$ , et que les diaphragmes extérieurs étaient au potentiel  $V = 0$ .

Comme pour les lentilles électrostatiques de révolution, nous avons limité le domaine étudié en supposant qu'à grande distance des diaphragmes, le potentiel variait linéairement entre les électrodes, et qu'il était nul à l'extérieur.

L'étude des aberrations nécessitant une détermination précise du potentiel, nous avons utilisé des réseaux non homogènes nous permettant d'explorer un domaine très étendu, sur la frontière duquel les conditions aux limites sont remplies.

De plus, au voisinage des diaphragmes, nous avons extrapolé les valeurs relatives à deux quadrillages. Les résultats définitifs ont été rassemblés sur les figures 29, 30, 31, 32, 33.

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

FIG. 29.

0	1	1	2	2	2	2	2	2	3
0	1	2	2	2	3	3	3	3	3
0	1	2	3	3	3	3	3	3	3
0	2	3	4	4	4	4	4	4	4
0	1	2	3	4	5	5	5	5	4
0	2	3	4	5	6	6	6	6	4
0	2	3	4	5	6	7	6	6	4
0	3	4	5	6	7	8	7	7	4
0	4	5	6	7	8	9	8	8	5
0	7	12	13	12	11	10	9	9	5
0	15	19	17	15	13	12	10	9	5

FIG. 30.



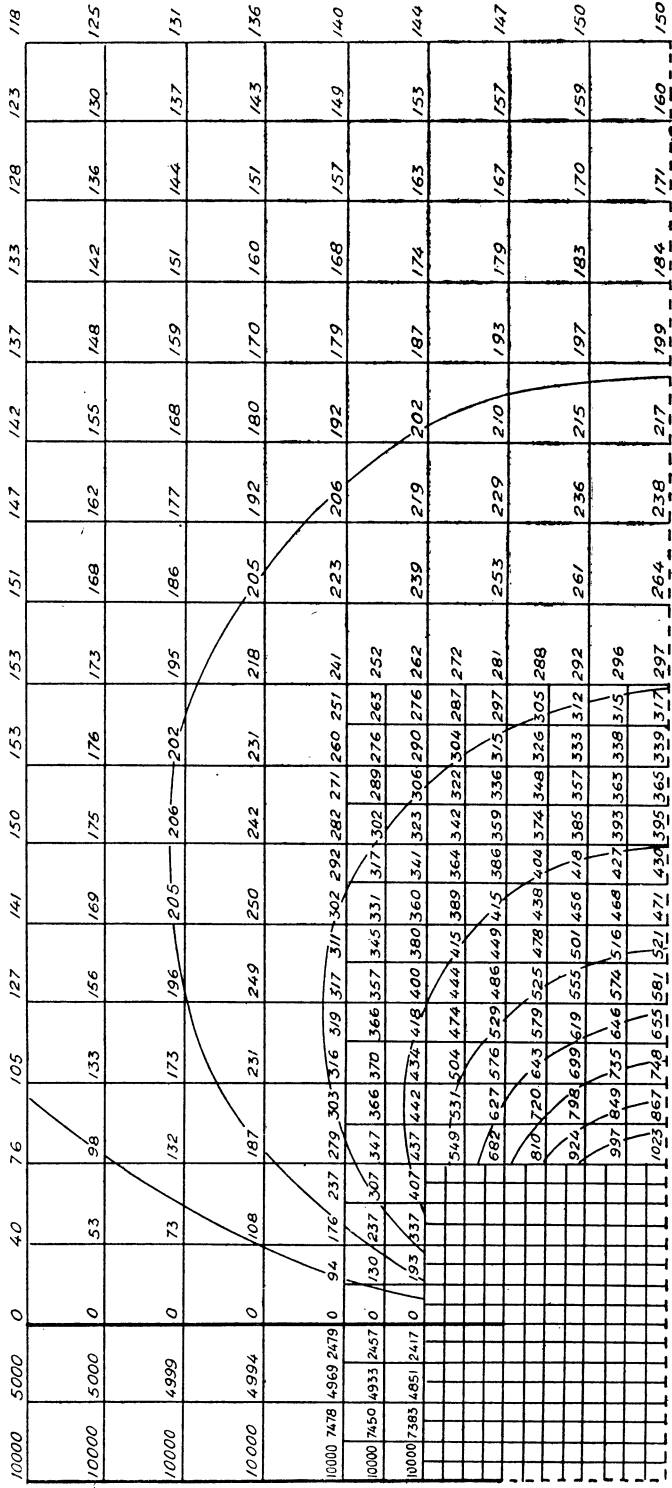


Fig. 32.

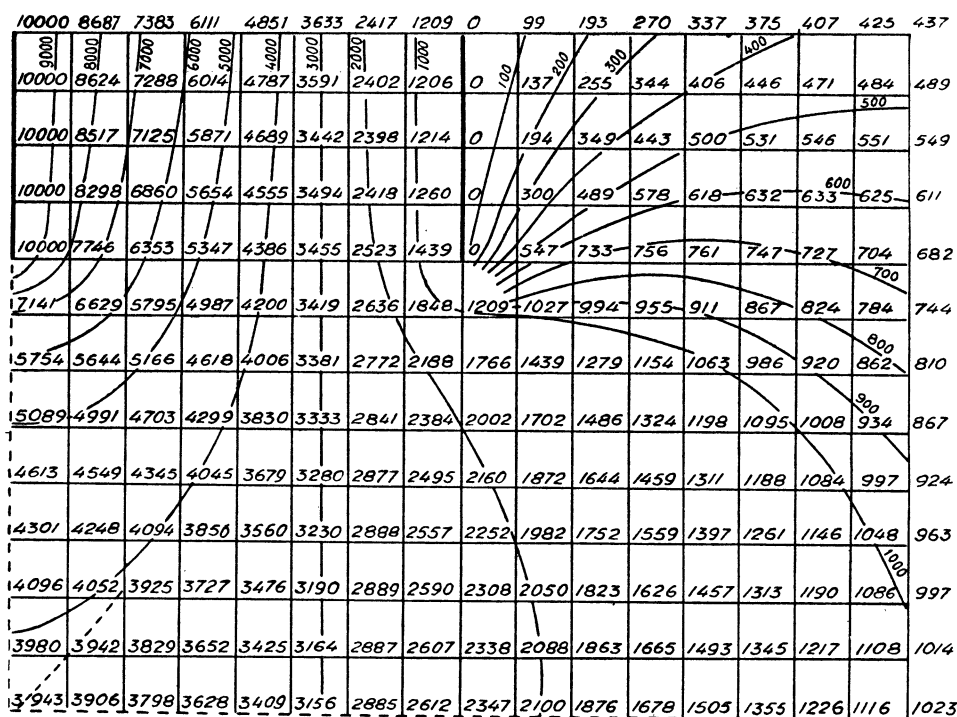


FIG. 33.

*Précision :*

Nous avons comparé dans le tableau (I) les valeurs obtenues pour le potentiel dans le plan de symétrie de la lentille, aux valeurs calculées à partir des expressions (107) et (108) de  $y$  et de  $V$ .

Les paramètres  $q$ ,  $p$  et  $A$  ont été déterminés en faisant  $a = b = c$  dans les équations (104), (105) et (106).

Nous avons obtenu :

$$q = 0,515\ 875 \quad p = 0,254\ 907 \quad \frac{A}{a} = 0,136\ 685$$

Si l'on désigne par  $V$  la différence de potentiel entre les électrodes, on voit que l'erreur relative  $V/V$  est partout inférieure à  $1/1000$ .

*Interpolation des résultats.*

La détermination précise des trajectoires nécessite la connaissance du potentiel dans le plan de symétrie de la lentille, en des points plus rapprochés que ceux correspondant aux nœuds des réseaux que nous avons utilisés. Il est possible d'interpolier aisément à partir des résultats précédemment calculés.

Nous obtenons, en effet, par combinaison des formules normales et diagonales (fig. 34)

$$8 V_0 = 3 V_I + V_{II} + V_{III} + 3 V_{IV}$$

TABLEAU I.

$x/a$	$\eta$	V exact	V relax	$\Delta V$
0,00	1,000 000	393,6	394,3	0,7
0,25	0,729 833	379,0	379,8	0,8
0,50	0,534 564	340,0	340,9	0,9
0,75	0,394 083	287,6	288,5	0,9
1,00	0,293 710	233,8	234,7	0,9
1,50	0,173 618	149,8	150,5	0,7
2,00	0,114 625	101,6	102,3	0,7
3,00	0,064 147	57,7	58,1	0,4
4,00	0,043 991	39,7	39,5	- 0,2
5,00	0,033 342	30,1	29,7	- 0,4
9,00	0,017 024	15,4	15,0	- 0,4
17,00	0,008 535	7,7	7,4	- 0,3
33,00	0,004 271	3,9	3,7	- 0,2
65,00	0,002 136	1,9	1,9	0,0
129,0	0,001 067	1,0	1,0	0,0
257,0	0,000 534	0,5	0,5	0,0
513,0	0,000 267	0,2	0,2	0,0
1025	0,000 133	0,1	0,1	0,0
2049	0,000 068	0,0	0,0	0,0

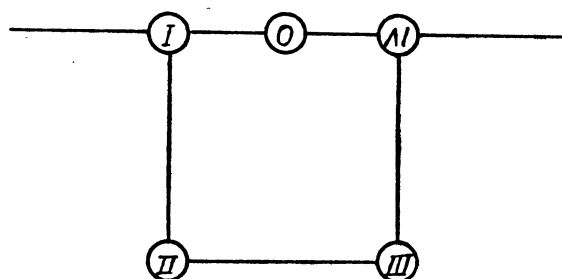


FIG. 34.

2. — CALCUL DES TRAJECTOIRES.

Nous supposons que l'électrode centrale est au potentiel  $V = 0$  Volt tandis que les diaphragmes extérieurs sont portés au même potentiel  $V = 10\ 000$  Volt; nous admettrons que les électrons sont émis sous la tension d'accélération  $\epsilon = 10\ 000$  Volt.

1° L'approximation du premier ordre.

a) Intégration numérique des équations des trajectoires.

En négligeant l'apport de la relativité, les coefficients S et M ont pour



expression

$$S = f^{1/2} \quad 2M = \frac{1}{2} f'' f^{-1/2}$$

et les équations différentielles des trajectoires gaussiennes s'écrivent :

$$(112) \quad z' = C f^{-1/2} \quad (C = \text{const.})$$

$$(113) \quad \frac{d}{dx} \left\{ f^{1/2} y' \right\} + \frac{1}{2} f'' f^{-1/2} y = 0$$

Posons

$$(114) \quad \begin{aligned} y &= f^{-1/4} U \\ Q &= -1/4 \{ f'' f^{-1} + 3/4 (f' f^{-1})^2 \} \end{aligned}$$

l'équation (113) devient :

$$(115) \quad U'' = Q U$$

Le système étant symétrique, nous déterminerons tout d'abord les deux solutions de (115) définies par

$$(U_I, U'_I)_0 = (1, 0) \quad (U_{II}, U'_{II})_0 = (0, 1)$$

ou encore <sup>(1)</sup>

$$\begin{aligned} (U_I)_0 = 1 & \quad (U_I)_i = 1 + Q_0 \frac{h^2}{2!} + (Q_0^2 + Q''_0) \frac{h^4}{4!} + \dots \\ (U_{II})_0 = 0 & \quad (U_{II})_i = h + Q_0 \frac{h^3}{3!} + (Q_0^2 + 3 Q''_0) \frac{h^5}{5!} + \dots \end{aligned}$$

avec

$$h = x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1}$$

L'équation (115) transformée en équation aux différences finies s'écrit, à l'approximation du quatrième ordre :

$$U_{i+1} = B_i U_i - A_{i-1} U_{i-1}$$

avec

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{h^2}{12} Q_i \\ A_i - 1 &= \frac{1 - a_i - 1}{1 + a_i + 1} \\ B_i &= \frac{2 + 10 a_i}{1 - a_{i+1}} \end{aligned}$$

$a_i, Q_i, U_i$ , sont les valeurs numériques que prennent les fonctions  $a, Q, U$  pour  $x = x_i$ .

Nous avons opéré avec deux séries d'intervalles et extrapolé avec l'indice 3 les résultats relatifs aux points communs <sup>(2)</sup>.

1. E. DURAND, Le calcul numérique des trajectoires électroniques. 78<sup>me</sup> Congrès des Sociétés Savantes, 1953.

2. Pour la disposition des calculs, voir M. LAUDET, Calcul numérique d'une lentille électronique à trois électrodes. 78<sup>me</sup> Congrès des Sociétés Savantes, 1953.

Les valeurs intermédiaires ont été calculées à partir de la formule

$$U_i = \frac{U_{i-1} + A_{i-1} U_{i-1}}{B_i}$$

TABLEAU II.

$x/a$	$f$	$\beta$	$y_1$	$y_2$	$y_2/y_1$
0,00	6 057	0,0000	0,1134	0	0
0,25	6 202	0,0032	0,1120	0,0281	0,251
0,50	6 591	0,0063	0,1085	0,0550	0,507
0,75	7 115	0,0093	0,1041	0,0805	0,774
1,00	7 653	0,0123	0,0996	0,1050	1,054
1,25	8 124	0,0151	0,0958	0,1291	1,349
1,50	8 495	0,0178	0,0926	0,1535	1,658
1,75	8 774	0,0205	0,0900	0,1781	1,980
2,0	8 977	0,0232	0,0878	0,2032	2,316
2,5	9 252	0,0284	0,0841	0,2544	3,024
3,0	9 419	0,0336	0,0810	0,3064	3,783
3,5	9 529	0,0387	0,0781	0,3589	4,593
4,0	9 605	0,0438	0,0754	0,4118	5,459
4,5	9 661	0,0489	0,0728	0,4650	6,385
5	9 703	0,0540	0,0703	0,5183	7,375
6	9 762	0,0641	0,0677	0,5712	8,439
7	9 801	0,0742	0,0652	0,6243	9,583
8	9 829	0,0843	0,0626	0,6775	10,817
9	9 850	0,0944	0,0601	0,7307	12,153
10	9 867	0,1045	0,0576	0,7840	13,603
12	9 890	0,1246	0,0527	0,8907	16,911
14	9 906	0,1447	0,0477	0,9973	20,903
16	9 917	0,1648	0,0428	1,1042	25,815
18	9 927	0,1668	0,0378	1,2110	32,008
20	9 935	0,1688	0,0329	1,3176	40,057
22	9 941	0,1708	0,0280	1,4244	50,943
24	9 946	0,1728	0,0230	1,5312	66,489
26	9 951	0,1748	0,0181	1,6380	90,494
28	9 955	0,1768	0,0132	1,7448	132,463
30	9 959	0,1788	0,0082	1,8516	224,593
32	9 962	0,1808	0,0033	1,9583	590,197
41	9 971	0,1898	— 0,0189	2,4389	— 129,419
57	9 979	0,2059	— 0,0582	3,2934	— 56,555
73	9 983	0,2219	— 0,0976	4,1479	— 42,493
89	9 986	0,2379	— 0,1370	5,0023	— 36,516
105	9 988	0,2539	— 0,1764	5,8565	— 33,209
121	9 990	0,2699	— 0,2157	6,7113	— 31,109
145	10 000	0,2939	— 0,2747	7,5637	— 27,532
177	10 000	0,3259	— 0,3535	8,4182	— 23,817
209	10 000	0,3579	— 0,4322	9,2726	— 21,455
241	10 000	0,3899	— 0,5109	10,1271	— 19,821

dans laquelle nous avons pris pour  $U_{i-1}$  et  $U_{i+1}$  les valeurs extrapolées. Les deux trajectoires réelles ont été déterminées ensuite à partir de la relation (114) (3).

3. M. LAUDET, Intégration numérique de l'équation des trajectoires électroniques. *Journal de Physique et le Radium*, tome 14, pp. 604 à 610, novembre 1953.

L'équation (112) donne

$$z = z_D \frac{\beta - \beta_0}{\beta_D - \beta_0}$$

avec

$$\beta = \int_0^x f^{-1/2} dx$$

Cette intégrale a été calculée à partir de la formule de Simpson.  
Les résultats numériques ont été rassemblés dans le tableau II.

b) *Correspondance objet image.*

Une solution quelconque de l'équation (113) est une combinaison linéaire de deux solutions particulières indépendantes. Les trajectoires  $h$  et  $k$

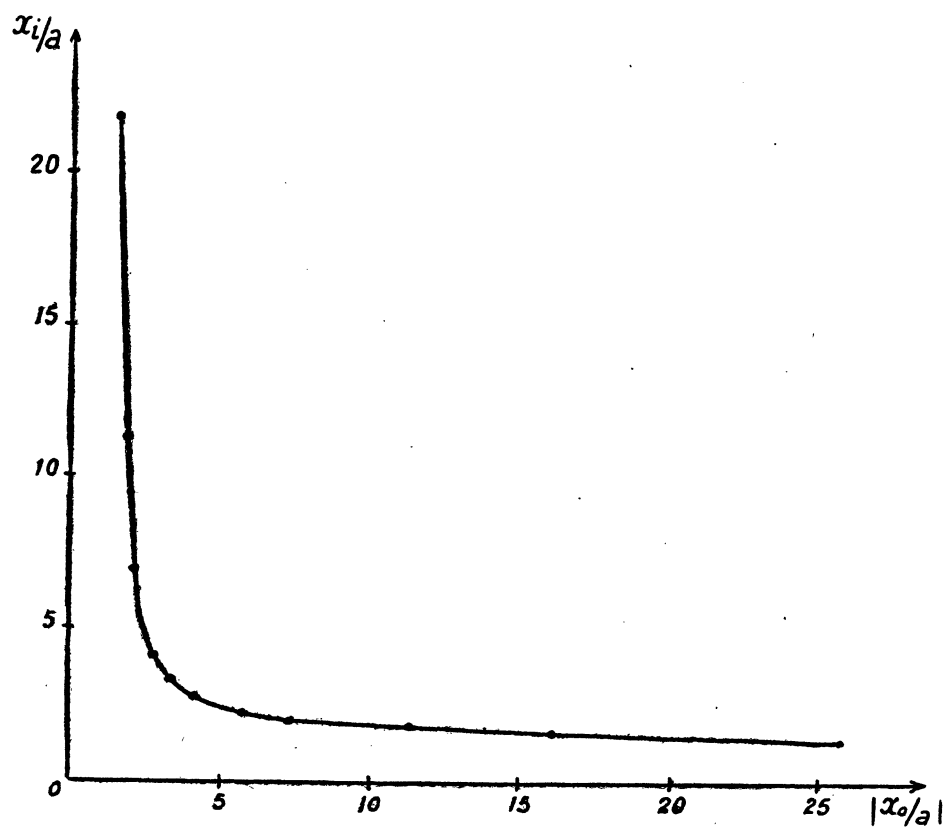


FIG. 35.

peuvent donc s'écrire

$$(116) \quad h(x) = C_{1h} y_1(x) + C_{2h} y_2(x)$$

$$(117) \quad k(x) = C_{1k} y_1(x) + C_{2k} y_2(x)$$

$-x/a_0$	$y_2/y_1$	$x/a_i$
14	- 20,90	219
18	- 32,01	113
21	- 45,06	69
28	-132,46	41
33	$\infty$	33
41	129,42	28
57	56,56	23
73	42,49	20,5
113	32,05	18
161	25,44	16
257	19,18	13,5

TABEAU III

$C_{1h}$ ,  $C_{2h}$ ,  $C_{1k}$ ,  $C_{2k}$  étant quatre constantes déterminées à partir des conditions

$$\begin{cases} h(x_0) = 0 \\ h(x_D) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} k(x_0) = 1 \\ k(x_D) = 0 \end{cases}$$

Nous obtenons :

$$C_{1h} = \frac{-y_2(x_0)}{y_1(x_0)y_2(x_D) - y_1(x_D)y_2(x_0)} \quad C_{2h} = \frac{y_1(x_0)}{y_1(x_0)y_2(x_D) - y_1(x_D)y_2(x_0)}$$

$$C_{1k} = \frac{y_2(x_D)}{y_1(x_0)y_2(x_D) - y_1(x_D)y_2(x_0)} \quad C_{2k} = \frac{-y_1(x_D)}{y_1(x_0)y_2(x_D) - y_1(x_D)y_2(x_0)}$$

La condition de conjugaison

$$h(x_0) = 0 \quad h(x_2) = 0$$

entre le plan objet et le plan image peut s'écrire, en fonction de  $y$  et  $y'$  :

$$\frac{y_2(x_0)}{y_1(x_0)} = \frac{y_2(x_i)}{y_1(x_i)}$$

Deux plans conjugués  $x_0$  et  $x_i$  correspondent donc à la même valeur du rapport  $y_2/y_1$ . Nous avons déterminé ainsi différents couples de valeurs conjuguées (tableau III) et nous avons représenté sur la figure 35 la courbe donnant  $x_i$  en fonction de  $x_0$ .

Le plan focal image est déterminé par la valeur  $x_f$  de  $x$  qui annule la solution  $k_1$  de (113) définie, pour un point très éloigné de la lentille, par les conditions initiales

$$k_1(x_0) = 1 \quad k'_1 = x_0$$

$x_f$  satisfait donc à la relation

$$\frac{y'_2(x_0)}{y'_1(x_0)} = \frac{y_2(x_f)}{y_1(x_f)}$$

Nous avons obtenu ici :

$$x_f/a = 0,65$$

## 2° L'aberration chromatique.

Nous nous limiterons au calcul de l'aberration chromatique dans le plan image.

Pour la tension d'accélération  $\varepsilon$  nous avons la relation :

$$(118) \quad \frac{d}{dx} \left\{ S h' \right\} + 2 M h = 0$$

Pour une tension  $\varepsilon + \Delta\varepsilon$  nous aurons :

$$\frac{d}{dx} \left\{ (S + \Delta S) (h + \Delta h) \right\} + 2 (M + \Delta M) (h + \Delta h) = 0$$

d'où en développant et en nous limitant au second ordre :

$$(\Delta h)_i = \frac{-1}{S_i h'_i} \int_{x_0}^{x_i} h \left[ \frac{d}{dx} \left\{ \Delta S h' \right\} + 2 \Delta M h \right] dx$$

avec

$$\Delta S = 1/2 S^{-1} \Delta \varepsilon \quad \Delta M = -1/2 S^{-2} M \Delta \varepsilon$$

Soit, en tenant compte de (118)

$$(119) \quad (\Delta h)_i = - \frac{\Delta \varepsilon}{S_i h'_i} \int_{x_0}^{x_i} \frac{h h''}{S} dx$$

Un calcul analogue donne :

$$(120) \quad (\Delta k)_i = \frac{-\Delta \varepsilon}{S_i h'_i} \int_{x_0}^{x_i} \frac{h k''}{S} dx$$

En portant (116) et (117) dans (119) et (120), et en posant

$$\begin{aligned}
 Y_{11} &= \int_0^x \frac{y_1 y_1''}{S} dx & Y_{21} &= \int_0^x \frac{y_2 y_1''}{S} dx \\
 Y_{12} &= \int_0^x \frac{y_1 y_2''}{S} dx & Y_{22} &= \int_0^x \frac{y_2 y_2''}{S} dx
 \end{aligned}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\Delta h}{\Delta \varepsilon}\right)_i &= \frac{-1}{S_i (C_{1h} y'_1 + C_{2h} y'_2)_i} \left\{ C_{1h}^2 Y_{11}'' + C_{1h} C_{2h} (Y_{12}'' + Y_{21}'') + C_{2h}^2 Y_{22}'' \right\}_{x_0}^{x_i} \\
 \left(\frac{\Delta k}{\Delta \varepsilon}\right)_i &= \frac{-1}{S_i (C_{1h} y'_1 + C_{2h} y'_2)_i} \left\{ C_{1h} C_{1k} Y_{11}'' + C_{2h} C_{1k} Y_{21}'' + C_{1h} C_{2k} Y_{12}'' + C_{2h} C_{2k} Y_{22}'' \right\}_{x_0}^{x_i}
 \end{aligned}$$

Nous donnons sur la figure 36 les variations de  $(\Delta h/\Delta \varepsilon)_i$  en fonction de  $x_0$  pour les valeurs  $x_D = 2$  et  $x_D = 12$ .

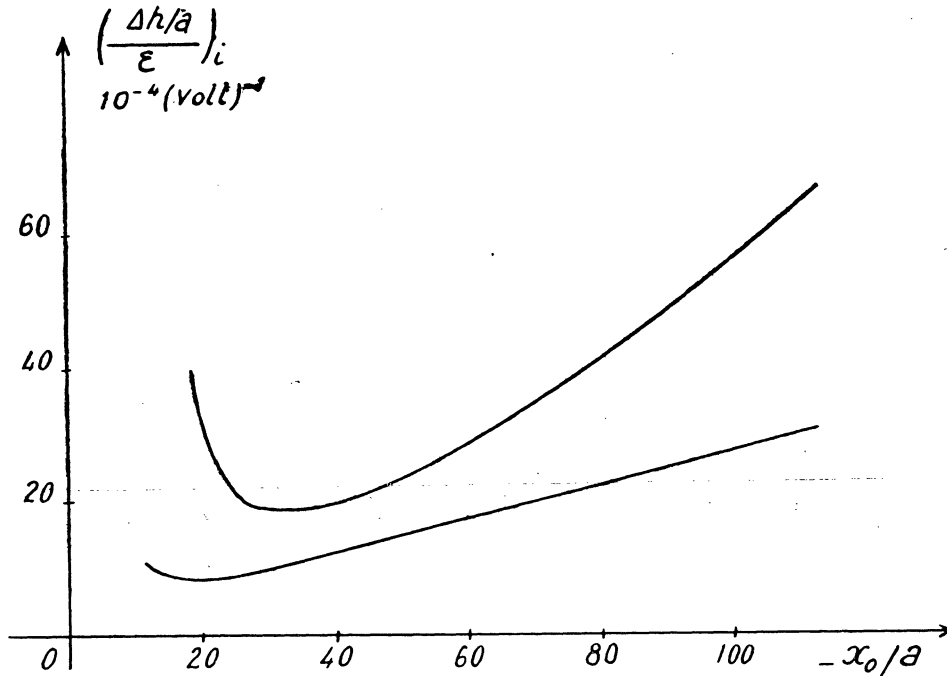


FIG. 36.

3° Les aberrations du troisième ordre.

Nous avons obtenu pour l'aberration relative à l'ouverture du faisceau :

$$\frac{1}{\varphi y_D} = \frac{-2}{S_i h'_i b'_i} \int_{x_0}^x \left[ M h^2 + \frac{S}{2} h'^2 \right] b'^2 dx$$

En tenant compte de (116) et (117), et en posant

$$Y_{11}(x) = \int_0^x \left( M y_1^2 + \frac{S'}{2} y_1'^2 \right) \frac{dx}{S^2}$$

$$Y_{12}(x) = \int_0^x \left( M y_1 y_2 + \frac{S}{2} y_1' y_2' \right) \frac{dx}{S^2}$$

$$Y_{22}(x) = \int_0^x \left( M y_2^2 + \frac{S}{2} y_2'^2 \right) \frac{dx}{S^2}$$

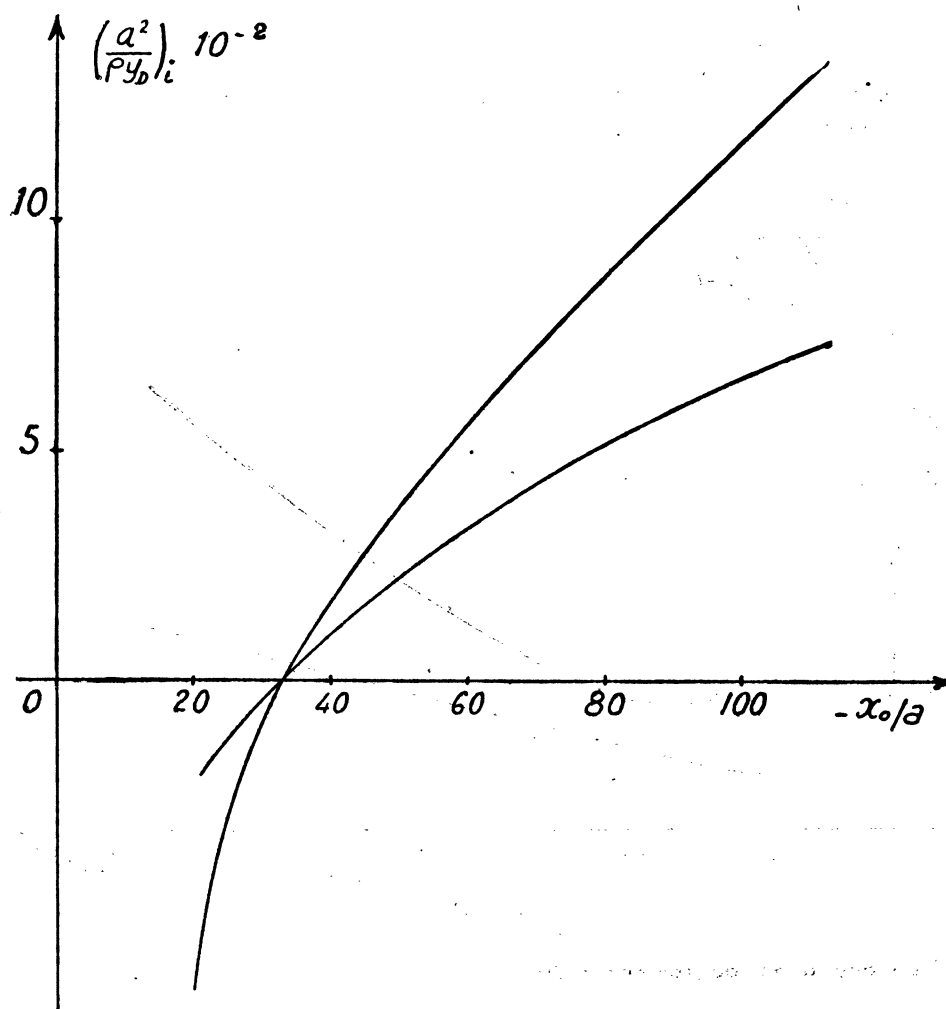


FIG. 37.

nous obtenons

$$\left(\frac{1}{\rho y_D}\right)_i = \frac{-2}{S_i(\beta_i - \beta_0)^2 (C_{1h} y'_1 + C_{2h} y'_2)} \left[ C_{1h}^2 Y_{11} + 2 C_{1h} C_{2h} Y_{12} + C_{2h}^2 Y_{22} \right]_{x_0}^{x_i}$$

Nous aurions de même

$$\left(\frac{1}{\rho y_D}\right)_i = \frac{2}{S_i(\beta_i - \beta_0)^2 (C_{1h} y'_1 + C_{2h} y'_2)} \left[ C_{1h} C_{1k} Y_{11} + (C_{1k} C_{2k} + C_{2h} C_{2k}) Y_{12} + C_{2h} C_{2k} Y_{22} \right]_{x_0}^{x_i}$$

Nous avons donné sur la figure 37 les variations de  $\left(\frac{1}{\rho y_D}\right)_i$  en fonction de  $x_0$  pour  $x_D = 2$  et  $x_D = 12$ .



## BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. DUPOUY. — Éléments d'Optique Électronique. *Collection*, Armand Colin, Paris, 1952.
  - [2] Louis DE BROGLIE. — Optique Électronique et Corpusculaire. Hermann et C<sup>e</sup>, Paris, 1950.
  - [3] R. MOCH, E. ROTH, I. SALMON. — Étude à la cuve Rhéographique de Sources d'ions utilisés en Spectrométrie de Masse. Détermination des trajectoires. *Journal de Physique et le Radium*, tome II, août-septembre 1950, pp. 524 à 528.
  - [4] R. VAUTHIER. — *Thèse*, 2 avril 1954. Applications de l'optique des charges électriques à la spectrométrie de Masse.
  - [5] BERTEIN. — *Thèse*, 28 novembre 1947. Quelques défauts des instruments d'optique électronique et leur correction.
  - [6] SCHERZER. — Sphärische und chromatische Korrektur von Elektronen — Linsen. (*Optik*, tome II, juillet 1947, cahier II, pp. 114-132.)
  - [7] G. MÖLLENSTEDT. — Sur les Pertes chromatiques des Électrons au passage à travers la matière. (*Congrès International de Microscopie électronique*, Paris, 14-22 septembre 1950.)
  - [8] A. SEPTIER. — Étude d'une Lentille électronique à fentes pour analyseur de vitesse. (*C. R. Acad. Sc.*, 239, 402, 1954.)
-