Annales de la faculté des sciences de Toulouse

René Cazenave

Sur une nouvelle expression intégrale de la fonction de Legendre de seconde espèce $Q_n(x)$ d'ordre n positif pour $-1 < x < +1$

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série, tome 17 (1953), p. 139-141
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1953_4_17__139_0>

Sur une nouvelle expression intégrale de la fonction de Legendre de seconde espèce $Q_n(x)$ d'ordre n positif pour $-1 < x < +1$.

par René CAZENAVE

Pour x réel compris entre -1 et $+1$, Hobson définit la fonction de Legendre de seconde espèce $Q_n(x)$ d'ordre n positif quelconque par

$$(1)\quad 2\,Q_n(\mathrm{Cos}\,\theta) = \int_0^\infty \frac{d\psi}{(\mathrm{Cos}\,\theta + i\,\mathrm{Sin}\,\theta\,\mathrm{Ch}\,\psi)^{n+1}} + \int_0^\infty \frac{d\psi}{(\mathrm{Cos}\,\theta - i\,\mathrm{Sin}\,\theta\,\mathrm{Ch}\,\psi)^{n+1}}$$

si $x = \mathrm{Cos}\,\theta$ avec $0 < \theta < \pi$.

Posons

$$(2)\qquad \mathrm{Cos}\,\theta + i\,\mathrm{Sin}\,\theta\,\mathrm{Ch}\,\psi = \rho\, e^{i\varphi},$$

où, par conséquent,

$$(3)\qquad \rho = \sqrt{\mathrm{Cos}^2\,\theta + \mathrm{Sin}^2\,\theta\,\mathrm{Ch}^2\,\psi}$$

et

$$(4)\qquad \mathrm{tg}\,\varphi = \mathrm{tg}\,\theta\,\mathrm{Ch}\,\psi.$$

La relation (2) équivalant à

$$(5)\qquad \mathrm{Cos}\,\theta = \rho\,\mathrm{Cos}\,\varphi,$$

$$(6)\qquad \mathrm{Sin}\,\theta\,\mathrm{Ch}\,\psi = \rho\,\mathrm{Sin}\,\varphi,$$

la relation (1) devient

$$(7)\qquad Q_n(\mathrm{Cos}\,\theta) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos}\,(n+1)\,\varphi}{\rho^{n+1}}\,d\psi\,.$$

1° Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a $\rho = \mathrm{Ch}\,\psi$ d'après (3) et $\varphi = \frac{\pi}{2}$ d'après l'une des relations (4), (5) et (6). Dès lors, (7) s'écrit

$$Q_n(0) = \mathrm{Cos}\,(n+1)\frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{d\psi}{\mathrm{Ch}^{n+1}\,\psi}$$

ou, avec la transformation de Gudermann $\mathrm{Ch}\,\psi = \frac{1}{\mathrm{Cos}\,t}$,

$$Q_n(0) = \mathrm{Cos}\,(n+1)\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Cos}^n\,t\,dt,$$

c'est-à-dire

$$(8)\qquad Q_n(0) = \frac{\mathrm{Cos}\,(n+1)\frac{\pi}{2}}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}\,.$$

ce qui donne, pour n entier pair ou impair,

$$Q_{2m}(0) = 0, \qquad Q_{2m+1}(0)\,(-1)^m \frac{2.\,4.\,6\ldots 2m}{3.\,5.\,7\ldots(2m+1)}$$

2° Pour $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, il résulte de (5) et (6) que φ est dans celui des intervalles $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ et $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ qui contient θ.

De (4) se déduisent les relations

$$\operatorname{Ch}\psi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\theta}, \quad \operatorname{Sh}\psi = \varepsilon\,\frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2\varphi - \operatorname{tg}^2\theta}}{\operatorname{tg}\theta}$$

avec $\varepsilon = \pm 1$ du signe de $\operatorname{tg}\theta$,
d'où, par différentiation de la première relation, et compte tenu de la seconde,

$$d\psi = \varepsilon\,\frac{d\varphi}{\operatorname{Cos}^2\varphi\sqrt{\operatorname{tg}^2\varphi - \operatorname{tg}^2\theta}}, \tag{9}$$

Comme $\rho = \dfrac{\operatorname{Cos}\theta}{\operatorname{Cos}\varphi}$ d'après (5), en écrivant

$$\operatorname{Cos}\theta\operatorname{Cos}\varphi\sqrt{\operatorname{tg}^2\varphi - \operatorname{tg}^2\theta} = \sqrt{\frac{\operatorname{Cos}2\theta - \operatorname{Cos}2\varphi}{2}}$$

et en remplaçant $d\psi$ par son expression (9), la relation (7) devient la formule

$$Q_n(\operatorname{Cos}\theta) = \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{\operatorname{Cos}^n\theta}\int_\theta^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{Cos}^n\varphi\operatorname{Cos}(n+1)\varphi}{\sqrt{\operatorname{Cos}2\theta - \operatorname{Cos}2\varphi}}\,d\varphi, \tag{10}$$

avec $\varepsilon = \pm 1$ du signe de $\frac{\pi}{2} - \theta$, qui exprime $Q_n(\operatorname{Cos}\theta)$ par une intégrale analogue à l'intégrale de Dirichlet-Mehler

$$P_n(\operatorname{Cos}\theta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_\theta^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{Sin}(n+\frac{1}{2})\varphi}{\sqrt{\operatorname{Cos}\theta - \operatorname{Cos}\varphi}}\,d\varphi$$

pour la fonction de Legendre de première espèce $P_n(\operatorname{Cos}\theta)$, et qui, comme l'expression (1), est valable pour tout n réel positif.

Pour n entier positif, la substitution de $\pi - \theta$ à θ, qui conserve ρ d'après (3) mais remplace φ par $\pi - \varphi$ en vertu de (5) et (6), conduit, sur (7) ou (10), à l'identité connue

$$Q_n(-\operatorname{Cos}\theta) \equiv (-1)^{n+1} Q_n(\operatorname{Cos}\theta). \tag{11}$$

La formule (10) fournit aisément les expressions classiques

$$Q_0(\operatorname{Cos}\theta) = \operatorname{Log}\cot\frac{\theta}{2},$$

$$Q_1(\mathrm{Cos}\,\theta) = \mathrm{Cos}\,\theta\,\mathrm{Log}\,\cot\frac{\theta}{2} - 1,$$

$$Q_2(\mathrm{Cos}\,\theta) = \frac{3\,\mathrm{Cos}^2\theta - 1}{2}\,\mathrm{Log}\,\mathrm{Cot}\frac{\theta}{2} - \frac{3}{2}\,\mathrm{Cos}\,\theta, \ldots, \text{etc.} \ldots,$$

qu'il suffit d'établir pour $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, en raison de l'identité (11).

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

E. W. HOBSON. — The Theory of spherical and ellipsoïdals Harmonics, University Press, Cambridge, 1931.

René LAGRANGE. — Polynomes et Fonctions de Legendre, fascicule XCVII du *Mémorial des Sciences Mathématiques,* Gauthier-Villars, 1939.