ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

JEAN COMBES

Sur les dérivées successives des fonctions analytiques

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4^e série, tome 16 (1952), p. 212-230
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1952_4_16__212_0>

SUR LES DÉRIVÉES SUCCESSIVES DES FONCTIONS ANALYTIQUES

par Jean COMBES

SOMMAIRE : Etude des fonctions analytiques $f(z)$ dont une suite partielle de dérivées $f^{(n_i)}$ converge uniformément dans un certain domaine; influence du choix de la suite partielle sur la limite et sur le domaine où a lieu la convergence. Etude de la convergence de $f^{(n)}$ vers l'infini. Fonctions dont une suite partielle de dérivées converge en un point, la suite des autres dérivées convergeant en un second point. Généralisation : étude des fonctions pour lesquelles $c_n f^{(n)}$ ou $\dfrac{\sum_0^n c_m f^{(m)}}{\varphi(n)}$ a une limite pour n infini, les suites c_n et $\varphi(n)$ satisfaisant à certaines conditions de régularité.

1. Introduction. — La théorie des équations différentielles peut être généralisée de bien des manières. En partant d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants et en faisant croître l'ordre, on est conduit aux équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre infini

$$\text{(E)} \qquad c_0 f + c_1 f' + \ldots + c_n f^{(n)} + \ldots = g.$$

Certains types de telles équations ont fait l'objet d'un article antérieur [1], où nous avons montré que, sous certaines conditions imposées aux c_n, l'équation (E) admet dans le champ complexe une *solution unique*, le second membre g pouvant être quelconque, à des conditions d'inégalité près.

Un autre mode de généralisation conduit à l'étude d'équations fonctionnelles telles que $\lim\limits_{n=\infty} f^{(n)} = g$, ou $\lim\limits_{n=\infty} c_n f^{(n)} = g$, ou $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{\sum_0^n c_m f^{(m)}}{\varphi(n)} = g$.

Et là, sous des conditions qui seront précisées, le résultat est tout différent : les solutions f, lorsqu'elles existent, dépendent d'une infinité de constantes arbitraires; mais le second membre g doit être d'une *forme bien déterminée*, ne contenant qu'un facteur constant arbitraire. On voit ainsi les conclusions inexactes auxquelles conduirait une extension hâtive et injustifiée des propriétés des équations différentielles d'ordre fini aux deux généralisations qui en ont été indiquées.

Le présent article a pour objet l'étude du second mode de généralisation et de quelques problèmes connexes; nous étudierons, par exemple, les fonctions analytiques $f(z)$ dont une suite *partielle* de dérivées $f^{(n_i)}$ converge

1. Cf. *Ann. de la Fac. des Sc. de Toulouse,* t. XV, 1951, p. 195 et suivantes.

uniformément dans un certain domaine et nous préciserons la limite; nous donnerons des indications sur les fonctions $f(z)$ pour lesquelles $f^{(n)}(z)$ tend uniformément vers l'infini dans un domaine, et nous retrouverons par la théorie des familles normales un théorème de Radström-Martin; nous étudierons, enfin, les fonctions $f(z)$ dont une suite partielle de dérivées extraite de la suite $f^{(n)}$ converge *en un point,* la suite des autres dérivées convergeant en un *second point,* et cela amènera à examiner, dans les cas les plus simples, le problème suivant : détermination de $f(z)$ lorsque, la suite $f^{(n)}$ ayant été scindée en plusieurs suites partielles S_1, S_2, ... on donne les valeurs des termes de S_1 en un point z_1, celles des termes de S_2 en un point z_2, ...

2. Convergence d'une suite extraite de la suite $f^{(n)}$. — Recherchons les fonctions analytiques $f(z)$ ayant la propriété suivante : il existe dans le plan (z) un domaine où la suite formée par les dérivées successives de $f(z)$ est convergente.

Choisissons pour origine un point intérieur au domaine, et posons $f(z) = \sum_{0}^{\infty} \frac{a_n z^n}{n!}$ ($a_n = f^{(n)}(0)$). On a : $f^{(p)}(z) = \sum_{0}^{\infty} \frac{a_{n+p} z^n}{n!}$. La convergence à l'origine exige que, si $n \to \infty$, a_n ait une limite finie A. Réciproquement, si cette condition est remplie, $f(z)$ est une fonction entière, et, dans tout domaine borné, $f^{(n)}(z)$ tend uniformément vers Ae^z lorsque $n \to \infty$ [2]. La convergence de la suite $f^{(n)}$ *en un point* entraîne donc la convergence uniforme dans tout domaine borné, et la fonction limite est nécessairement de la forme Ae^z. Ce point était d'ailleurs évident dès que la convergence uniforme de la suite $f^{(n)}$ était établie : la limite de $f^{(n)}$, qui est aussi celle de $f^{(n+1)}$ doit être identique à sa dérivée. Remarquons que $f(z)$ est au plus du type moyen de l'ordre 1; si l'ordre est < 1, la limite est 0.

Des circonstances plus variées se présentent si on recherche les fonctions pour lesquelles *une suite partielle extraite de la suite $f^{(n)}$ est convergente.*

Soit une suite croissante d'entiers n_i, et supposons que la suite des dérivées d'ordre n_i converge uniformément vers $F(z)$ dans un certain

---

2. On sait que, pour que la suite de fonctions $f_m(z) = a_0(m) + \ldots + a_n(m) \frac{z^n}{n!} + \ldots$ $(m = 1, 2, \ldots)$ converge uniformément vers $F(z) = A_0 + \ldots + A_n \frac{z^n}{n!} + \ldots$ dans le cercle $|z| \leqslant R$, il est nécessaire que, pour chaque rang n, $a_n(m) \to A_n$ lorsque $m \to \infty$, et que, quel que soit m, on ait $|a_n(m)| < k \frac{n!}{R^n}$ (k étant une certaine constante). Réciproquement ces deux conditions entraînent l'holomorphie des f_m et de F et la convergence uniforme de f_m vers F dans tout cercle $|z| \leqslant r < R$.

domaine entourant un point pris pour origine (3). Posons $n_{i+1} - n_i = d_i$, et *supposons d'abord* $l = \underline{\lim}\, d_i < \infty$.

Si m est une valeur limite finie quelconque de la suite d_i, valeur prise une infinité de fois, la fonction limite F doit vérifier $F^{(m)} = F$. S'il existe une autre valeur limite finie $n \neq m$, on a aussi $F^{(n)} = F$. Si par exemple $n > m$, effectuons la division de n par m : $n = qm + r$, $r < m$. On voit, en dérivant $n - m$ fois la relation $F^{(m)} = F$, que F vérifie aussi $F^{(r)} = F$, et, de proche en proche, que F vérifie $F^{(d)} = F$, d étant le p. g. c. d. de m et n. En définitive *les fonctions F admissibles comme limites sont solutions de* $F^{(p)} = F$, p *étant le p. g. c. d. de toutes les valeurs limites finies* l, m, n ... *de la suite* d_i; *et ces fonctions ne dépendent que de* p *constantes arbitraires.* On a toujours $p \leqslant \underline{\lim}\, d_i$.

Le cas le plus simple, où l'on considère la suite des dérivées prises de p en p, est celui des fonctions $f(z)$ pour lesquelles, lorsque $n \to \infty$, $a_{np} \to A_0$, $a_{np+1} \to A_1, \ldots, a_{np+p-1} \to A_{p-1}$: Ici encore $f(z)$ est entière, d'ordre $\leqslant 1$, et la convergence uniforme a lieu dans tout domaine borné.

Il en est de même tant que $L = \overline{\lim}\, d_i < \infty$. Dans ce cas, en effet, les suites partielles formées des dérivées d'ordre n_i, $n_i + p$, $n_i + 2p$ . . . convergent uniformément vers F; et la suite formée par les dérivées de f prises de p en p à partir d'un certain rang converge aussi uniformément vers F, puisqu'elle est la réunion d'un nombre *fini* de suites partielles qui convergent uniformément vers F. Ce cas n'est donc pas distinct du précédent.

Toujours dans l'hypothèse $l = \underline{\lim}\, d_i < \infty$, *des faits nouveaux apparaissent si on suppose* $L = \overline{\lim}\, d_i = \infty$. La suite des dérivées prises de p en p peut ne plus être convergente. Et, comme il est naturel, le champ des fonctions $f(z)$ répondant à la question est d'autant plus vaste que la condition imposée est moins restrictive, c'est-à-dire que la suite n_i est plus rapidement croissante. Dans cet ordre d'idées nous démontrons le théorème suivant :

Si, au moins à partir d'un certain rang, on a $\dfrac{d_i}{n_i} \leqslant \alpha$, $f(z)$ *est une fonction entière dont l'ordre ne peut dépasser* $1 + \alpha$.

Considérons, en effet, le coefficient a_N de $f(z)$. N est compris, par exemple, entre n_i et n_{i+1}. En écrivant que la convergence uniforme de la suite $f^{(n_i)}$ a lieu pour $|z| \leqslant R$, et en considérant la dérivée d'ordre n_i, on a : $|a_N| < k \dfrac{(N-n_i)!}{R^{N-n_i}}$. Donc l'ordre ρ de $f(z)$, donné par $1 - \dfrac{1}{\rho} = \overline{\lim} \dfrac{\log |a_N|}{N \log N}$ vérifie : $1 - \dfrac{1}{\rho} \leqslant \overline{\lim} \dfrac{\log (N-n_i)!}{N \log N}$, et, en utilisant la formule de Stirling, $1 - \dfrac{1}{\rho} \leqslant \overline{\lim} \dfrac{N - n_i}{N} \leqslant \dfrac{\alpha}{1+\alpha}$, ou $\rho \leqslant 1 + \alpha$.

3. L'hypothèse de la convergence en un point ne peut évidemment suffire ici.

Par contre si, pour une infinité de valeurs de i, on a $\frac{d_i}{n_i} \geqslant \alpha$, *on peut construire une fonction* $f(z)$ *répondant à la question et d'ordre quelconque* $\leqslant 1 + \alpha$.

On peut, par exemple, employer le procédé suivant : on part d'une fonction $f(z)$ pour laquelle la suite des dérivées prises de p [4] en p tend vers la fonction F, choisie parmi les solutions de $F^{(p)} = F$, et on la modifie de la manière suivante : dans chaque tranche (n_i, n_{i+1}) pour laquelle $\frac{d_i}{n_i} \geqslant \alpha$, on remplace le coefficient a_N de rang $N = n_i + \lambda_i d_i$ par $(N!)^\beta$. Les λ_i sont pris entre 0 et 1, et leur borne inférieure est *positive*. La convergence uniforme vers F subsistera certainement, dans tout cercle $|z| \leqslant R$, si, quel que soit R, on a une inégalité de la forme : $(N!)^\beta < k \dfrac{(N-n_i)!}{R^{N-n_i}}$. Les logarithmes des deux membres étant respectivement équivalents à

$$\beta\ (n_i + \lambda_i d_i)\ \log\ d_i$$

et $\lambda_i d_i \log d_i$, il suffit pour cela que β soit plus petit que la borne supérieure des $\dfrac{\lambda_i d_i}{n_i + \lambda_i d_i}$, ce qu'on peut réaliser pour tout $\beta < \dfrac{\alpha}{1+\alpha}$ en prenant tous les λ_i assez voisins de 1. β peut être aussi proche qu'on veut de $\dfrac{\alpha}{1+\alpha}$, donc $\rho = \dfrac{1}{1-\beta}$ aussi proche qu'on veut de $1 + \alpha$.

On peut évidemment, en appliquant la méthode précédente de construction de $f(z)$, ne pas utiliser *toutes* les tranches (n_i, n_{i+1}) pour lesquelles $\frac{d_i}{n_i} \geqslant \alpha$; dans chaque tranche utilisée on peut modifier *plusieurs* coefficients; et on peut évidemment prendre, comme coefficient a_N modifié, d'autres expressions que $(N!)^\beta$.

Nous n'avons construit que des fonctions d'ordre inférieur à $1 + \alpha$; une analyse plus précise montre que l'ordre peut atteindre la valeur $1 + \alpha$. On obtient un exemple en remplaçant, lorsque $\frac{d_i}{n_i} \geqslant \alpha$, le coefficient de rang $N = n_i + d_i - 1$ par $\left(\dfrac{N^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}}{\log N}\right)^N$. On établit comme ci-dessus que la convergence uniforme de la suite $f^{(n_i)}$ vers F a lieu dans tout cercle $|z| \leqslant R$, en comparant dans l'inégalité qui exprime ce fait, les logarithmes des deux membres : le logarithme du premier membre est $\dfrac{\alpha}{1+\alpha}$ N log N—N log log N; en négligeant des termes dont le quotient par N est borné, le logarithme du second s'écrit successivement $(N - n_i)\log(N - n_i)$, $\left(1 - \dfrac{n_i}{N}\right)$ N log N et $\dfrac{d_i}{n_i + d_i}$ N log N qui est $\geqslant \dfrac{\alpha}{1+\alpha}$ N log N.

4. p désigne le p. g. c. d. des valeurs limites de la suite d_i.

Enfin, *toujours dans le cas* $\overline{\lim}\, d_i < \infty$, *on peut prendre pour* $f(z)$ *une fonction holomorphe seulement dans un cercle lorsque la suite* n_i *croît* assez vite.

Si $f(z)$ a un rayon de convergence fini, on a, pour une infinité de rangs N, $|a_N| \geqslant \frac{N!}{C^N}$ (C : constante). Soient encore n_i, n_{i+1} les valeurs qui encadrent N. Il faut que $N - n_i \to \infty$ avec N puisque, dans $f^{(n_i)}$, chaque coefficient de rang déterminé doit tendre vers une limite finie; il faut, d'autre part, que $\frac{N!}{C^N} < k\,\frac{(N-n_i)\,!}{R^{N-n_i}}$ Ceci exige d'abord que $\frac{n_i}{N} \to 0$. Dès lors, le logarithme du premier membre est $N \log N - N(1 + \log C) + \ldots$, celui du second $N \log N - n_i \log N - N(1 + \log R) + \ldots$, les termes non écrits étant infiniment petits par rapport aux termes écrits. La convergence uniforme ne pourra avoir lieu dans un cercle de centre 0 qui si $\frac{n_i \log N}{N}$ reste borné.

Si $\frac{n_i \log N}{N} \to 0$, on peut, avec des $|a_N| \geqslant \frac{N!}{C^N}$ et convenablement choisis, satisfaire à la condition qui exprime la convergence uniforme, pourvu que $R < C$; si $\frac{n_i \log N}{N}$ est seulement borné, on ne pourra y satisfaire que dans un cercle de rayon R assez petit.

En définitive, si la suite n_i *est telle qu'on puisse choisir des N pour lesquels* $\frac{n_i \log N}{N} \to 0$, *on pourra, par le procédé déjà employé, construire une fonction* $f(z)$ *de rayon de convergence fini quelconque et telle que, dans tout cercle intérieur au cercle de convergence, la suite* $f^{(n_i)}$ *converge uniformément vers une limite F choisie arbitrairement parmi les solutions de* $F^{(p)} = F$. *Si on suppose seulement que* $\frac{n_i \log N}{N}$ *reste borné, la convergence uniforme n'aura lieu que dans un cercle de rayon assez petit.*

Les conditions ainsi mises en évidence pour la suite n_i s'écrivent, en remarquant que $\frac{\log N}{N}$ est décroissant, soit $\underline{\lim}\, \frac{n_i \log n_{i+1}}{n_{i+1}} = 0$, soit $\underline{\lim}\, \frac{n_i \log n_{i+1}}{n_{i+1}} < \infty$.

Cas où d_i augmente indéfiniment. — L'hypothèse faite jusqu'ici, que $\overline{\lim}\, d_i < \infty$, restreignait le choix des fonctions limite F. Mais *si* $d_i \to \infty$, *la fonction limite F peut être absolument quelconque.* Elle peut n'être holomorphe et la convergence n'avoir lieu qu'au voisinage de 0. Nous le montrerons en indiquant, F étant donnée, un procédé de construction de f.

Soit $F = \sum A_n \frac{z^n}{n!}$, de rayon de convergence R, et soit la suite n_i telle que $d_i \to \infty$ avec i. Dans chaque tranche $(n_i,\ n_{i+1})$ prenons pour coefficients a, du rang n_i jusqu'au rang $n_{i+1}-1$, les coefficients A_0, A_1, A_2 ... successifs de F. On a visiblement [5], pour $|z| \leqslant r < R$,

$$\left| f^{(n_i)}(z) - F(z) \right| < \sum_{n=d_i}^{\infty} \frac{|A_n|\, r^n}{n\,!} + \left(\sum_{0}^{\infty} \frac{|A_n|\, r^n}{n\,!} \right) \cdot \left(\frac{r^{d_i}}{d_i\,!} + \frac{r^{d_i+d_{i+1}}}{(d_{i+}d_{i+1})!} + \dots \right)$$

ce qui prouve que, dans tout cercle $|z| \leqslant r < R$, $f^{(n_i)}$ converge uniformément vers F.

Comme on l'a vu plus haut, la croissance des fonctions $f(z)$ est limitée par celle de la suite n_i. Si $\dfrac{d_i}{n_i} \leqslant \alpha$, $f(z)$ est entière et d'ordre $\leqslant 1+\alpha$. Si $\underline{\lim} \dfrac{n_i \log n_{i-1}}{n_{i+1}} < \infty$, on peut, en modifiant certains coefficients dans la fonction f construite comme il a été indiqué pour une fonction F donnée, obtenir des fonctions f ayant un rayon de convergence plus petit que celui de F. Par suite la convergence uniforme peut n'avoir lieu que dans une portion du domaine d'existence de F ou f.

Remarque. — Si l'on présente les questions qui précèdent sous l'aspect : résolution de l'équation fonctionnelle $\lim\limits_{n_i=\infty} f^{(n_i)} = F$, F et la suite n_i étant données, on voit que, pourvu que F satisfasse aux conditions nécessaires indiquées, il y a une infinité de solutions que l'on obtient toutes en ajoutant à l'une d'elles la solution générale de l'équation sans second membre. Ces solutions dépendent d'une infinité de constantes arbitraires : par exemple, pour $\lim\limits_{n=\infty} f^{(n)} = Ae^z$, on trouve $f = Ae^z + \sum \dfrac{\varepsilon_n z^n}{n!}$ (où $\varepsilon_n \to 0$).

3. Convergence vers l'infini. — Nous allons étudier maintenant la convergence vers l'infini, en nous limitant au cas de la suite de toutes les dérivées successives.

Pour exprimer qu'une suite de fonctions $f_m(z)$, holomorphes dans le cercle $|z| \leqslant R$, tend uniformément dans ce cercle vers l'infini, on peut écrire que dans le cercle les $\dfrac{1}{f_m}$ tendent uniformément vers 0.

Si $f(z) = a_0 + \dots + \dfrac{a_n z^n}{n!} + \dots$ $(a_0 \neq 0)$, $\dfrac{1}{f(z)} = b_0 + \dots + \dfrac{b_n z^n}{n!} + \dots$, les b se calculent au moyen des a par les formules :

$$\left\{\begin{array}{l} a_0 b_0 = 1 \\ a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0 \\ a_0 b_2 + 2\, a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0 \\ \quad \dots \\ a_0 b_p + C_p^1\, a_1 b_{p-1} + \dots + a_p b_0 = 0 \\ \quad \dots \end{array}\right.$$

5. En majorant ce qui provient de chaque tranche (n_i, n_{i+1}).

D'où $b_0 = \frac{1}{a_0}$, $b_1 = \frac{-a_1}{a_0^2}$, $b_2 = \frac{2a_1^2 - a_2 a_0}{a_0^3}$ . . . ; b_p est ainsi le quotient par a_0^{p+1} d'un polynôme $a_0, a_1, \ldots a_p$ dont la somme des coefficients s_p est donnée par les formules [6] :

$$s_0 = 1, \quad s_1 = 1, \quad \ldots, \quad s_p = C_p^1 s_{p-1} + \ldots + C_p^q s_{p-q} + \ldots + s_0, \quad \ldots$$

On a $s_p < \alpha^p p!$ avec $\alpha = \frac{1}{\log 2}$. Si en effet la propriété a lieu jusqu'à l'indice p-1, on a :

$$s_p < \alpha^{p-1} C_p^1 (p-1)! + \ldots + \alpha^{p-q} C_p^q (p-q)! + \ldots + 1$$

ou : $$s_p < \alpha^p p! \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2!\,\alpha^2} + \ldots + \frac{1}{p!\,\alpha^p}\right) < \alpha^p p! \,(e^{1/\alpha} - 1)$$

On verrait de même que, si $\beta < \frac{1}{\log 2}$, on a à partir d'un certain rang $s_p > \beta^p p!$. En effet, pour $p > p_0$, $\frac{1}{\beta} + \frac{1}{2!\,\beta^2} + \ldots + \frac{1}{p!\,\beta^p}$ est supérieur à $k > 1$. A étant une constante convenable, on peut écrire que, jusqu'au rang p_0, $s_p > A\,\beta^p p!$. D'où pour p quelconque, $s_p > A \beta^p p!\, k^{p-p_0}$.

Appliquons ceci à la suite $f^{(n)}(z)$. Pour qu'elle tende uniformément vers l'infini au voisinage de l'origine, *il faut d'abord que* $|a_n| \to \infty$ *avec* n.

Si on suppose les $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ *bornés, cette condition est suffisante.* En effet, si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqslant D$, on voit que le coefficient b_p de $\frac{z^p}{p!}$ dans $\frac{1}{f^{(n)}(z)}$ vérifie : $|b_p| < \frac{s_p D^p}{|a_n|} < \frac{1}{|a_n|} p! \left(\frac{D}{\log 2}\right)^p$, ce qui prouve que, *dans tout cercle de centre o et de rayon* $< \frac{\log 2}{D}$, la suite $f^{(n)}(z)$ tend uniformément vers l'infini. Ceci peut se démontrer élémentairement, puisque l'on a dans ces conditions

$$|f^{(n)}(z)| \geqslant |a_n| \,.\left(1 - D\,|z| \ldots - \frac{D^n |z|^n}{n!} \ldots\right) = |a_n| \,.\,(2 - e^{|Dz|}).$$

Si $\overline{\lim} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, *les choses sont moins simples.* On peut, en utilisant la méthode théorique indiquée, former des conditions nécessaires : par exemple, outre $\frac{1}{a_n}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n^2}$, $\frac{2a_{n+1}^2 - a_{n+2}\,a_n}{a_n^3}$ ... doivent tendre vers 0. *Il est en tout cas impossible de donner une condition nécessaire et suffisante où n'interviendraient que les modules des* a_n. On sait en effet, d'après

---

6. Il est facile de voir qu'il n'y a pas de réductions de termes dans le polynôme écrit au numérateur. Si par exemple a_0 est > 0 et les a_p alternativement > 0 et < 0 à partir de a_1 qui est > 0, au numérateur de b_p tous les termes sont de même signe (+ ou — alternativement).

un théorème de Radström précisé et complété par Y Martin ([7]), que si la fonction $f(z) = \sum_{0}^{\infty} \frac{a_n z^n}{n!}$ vérifie $\overline{\lim} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, il est possible, en modifiant simplement $f(z)$ par multiplication de certains coefficients par un nombre α donné $\neq 1$ (par exemple $\alpha = e^{i\theta}$), d'obtenir une fonction $g(z)$ pour laquelle l'origine est point d'accumulation des zéros des dérivés successives.

Ce théorème peut être aisément démontré par la théorie des familles normales. Il résulte de la remarque suivante : soit la famille de fonctions, holomorphes dans un domaine entourant O, $\varphi(z) = c_0 + \ldots + c_n \frac{z^n}{n!} + \ldots$ les c_n dépendant d'un paramètre; si les c_0 sont bornés sans que les c_p le soient (pour une seule valeur de p), la famille n'est pas normale au point $z = 0$.

Dans le cas contraire, en effet, on pourrait extraire de toute suite de fonctions φ une suite partielle qui convergerait uniformément vers une fonction holomorphe en O, la convergence uniforme s'étendrait à la suite partielle des dérivés d'ordre p, ce qui est manifestement incompatible avec l'hypothèse que les c_p ne sont pas bornés.

Appliquant ceci aux fonctions $\frac{f^{(n)}(z)}{a_n}$ ([8]), on voit qu'elles forment une famille qui n'est pas normale au point O. Toute valeur finie sauf une au plus est prise une infinité de fois dans tout voisinage de O par l'ensemble des fonctions de la famille. Si 0 n'est pas valeur exceptionnelle, le théorème est démontré; sinon il suffit de considérer la famille $\frac{f^{(n)}(z)}{a_n} - (1 - \alpha)$ qui n'est pas normale à l'origine et pour laquelle 0 n'est pas valeur exceptionnelle. On en conclut que l'origine est point d'accumulation des zéros des fonctions $\alpha a_n + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_{n+p} z^p}{p!}$; et, à partir de là, en employant le théorème de Rouché, on peut indiquer un procédé de formation de la fonction $g(z)$ ([9]).

Peut-on étendre le théorème de Radström-Martin à d'autres valeurs que la valeur zéro? Toutes les fois qu'on pourra affirmer que la famille $f^{(n)}(z)$ n'est pas normale au point O, on sera assuré que O est point d'accu-

---

7. Cf. *Proceedings of the Nat. Academy of Sc. U.S.A.*, vol. 35, n° 7, July 1949, pp. 399-404, et *Bull. des Sc. Mathém.*, 2e série, t. LXXV, 1951, pp. 166-170.
8. En supposant qu'il n'y a pas une infinité de a_n nuls. Dans ce cas particulier le théorème est évident.
9. Voir la référence citée du *Bull. des Sc. Mathém.*

mulation des racines des équations $f^{(n)}(z) = A$, pour toute valeur finie de A sauf une au plus. Ce sera le cas, par exemple, s'il existe une suite de a_n bornés, les a_{n+1} correspondants ne l'étant pas; ou bien s'il existe une suite de a_n tendant vers l'infini, les $\frac{a_{n+1}}{a_n^2}$ correspondants ne tendant pas vers O.

Les conditions d'application du théorème n'excluent d'ailleurs pas la possibilité pour la famille $f^{(n)}(z)$ (ou $g^{(n)}(z)$ d'être normale à l'origine. Mais il est alors nécesaire que l'origine soit zéro d'une fonction limite, et cela exige que $\underline{lim} \, |a_n| = 0$. Un exemple très simple s'obtient à partir de e^z en remplaçant, pour une infinité de rangs n_i, les coefficients $\frac{1}{n_i\,!}$ par $\frac{\varepsilon_i}{n_i!}$, où $\varepsilon_i \to 0$ si $i \to \infty$. La suite des dérivées de la fonction f obtenue est normale dans tout le plan, puisque les a_n sont bornés, donc les $f^{(n)}$ bornées dans tout cercle $|z| \leqslant R$. Mais le théorème s'applique, puisque $\overline{\lim} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$. Si, par exemple, on suppose que $n_{i+1} - n_i \to \infty$ avec i, on voit que $f^{(n_i)}(z)$ tend uniformément vers $e^z - 1$ dans tout domaine borné; et, pour n_i assez grand, chaque $f^{(n_i)}(z)$ a un zéro dans le cercle $|z| < \varepsilon$.

4. Convergence d'une suite partielle de dérivées en un point et de la suite restante en un second point. — Comme nous l'avons vu au § 2, l'hypothèse que la suite $f^{(n)}$ converge en un point entraîne la convergence uniforme dans tout domaine borné et détermine à un facteur près la limite. Qu'advient-il lorsque l'on scinde la suite $f^{(n)}$ en plusieurs suites partielles, et que l'on impose la convergence de la première suite partielle en un point z_1, de la deuxième en un point z_2, ...

Nous donnerons d'abord des indications sur un problème préliminaire : celui de la détermination d'une fonction analytique par la donnée des valeurs d'une suite partielle de dérivées en un point, d'une deuxième en un second point ... Nous nous limiterons aux cas les plus simples suivants :

a) *Déterminer une série entière* $f(z)$ *pour laquelle* $f'(0)$, $f'''(0)$, ... $f^{(2n+1)}(0)$ ... *d'une part,* $f(z_0)$, $f''(z_0)$, ... $f^{(2n)}(0)$ ... *d'autre part, ont* des valeurs données.

z_0 est supposé *intérieur* au cercle de convergence. Pour la commodité des notations nous prendrons $z_0 = 1$. Nous traiterons d'abord le cas particulier où les valeurs données de f et de ses dérivées sont nulles, et nous montrerons qu'il y a une infinité de solutions. Dans le cas général, toutes les solutions s'obtiennent en ajoutant à l'une d'elles les solutions trouvées dans le cas particulier : donc le problème sera impossible on admettra une infinité de solutions.

Lorsque les valeurs données sont nulles, f (z) est de la forme

$$a_0 + \frac{a_2 z^2}{2!} + \dots + \frac{a_{2n} z^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

les a devant vérifier le système

$$(S) \begin{cases} a_0 + \dfrac{a_2}{2!} + \dots + \dfrac{a_{2n}}{(2n)!} + \dots = 0 \\ a_2 + \dfrac{a_4}{2!} + \dots + \dfrac{a_{2n-2}}{(2n)!} + \dots = 0 \\ \dots \end{cases}$$

et d'autre part la condition d'inégalité

$$(C) \quad \overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{|a_{2n}|}{(2n)!}} < 1$$

qui exprime que le rayon de convergence de $f(z)$ est > 1.

Le système linéaire à une infinité d'inconnues qui détermine les a est d'un type étudié par H. von Koch [10]. Considérons la fonction caractéristique $\varphi(t) = 1 + \frac{t}{2!} + \dots + \frac{t^n}{(2n)!} + \dots = ch\sqrt{t}$. Si $\nu(r)$ désigne le nombre de racines de $\varphi(t)$ dans le cercle $|t| \leqslant r$, les solutions de (S) qui vérifient $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_{2n}|} \leqslant r$ dépendent de $\nu(r)$ constantes arbitraires. Si $\nu(r) = 0$, seule la solution banale $a_0 = \dots = a_{2n} = \dots = 0$ répond à la question.

Comme la fonction $ch\sqrt{t}$ admet une infinité de racines simples $t_p = -\pi^2 \left(p + \frac{1}{2}\right)^2$, $p = 0, 1, 2 \dots$, on voit que, sous la condition

$$\overline{\lim} \sqrt[2n]{|a_{2n}|} < \left(N + \frac{3}{2}\right)\pi,$$

$a_{2n} = (-1)^n \sum_{p=0}^{N} A_p \pi^{2n}\left(p + \frac{1}{2}\right)^{2n}$ les A_p désignant des constantes arbitraires. Cela conduit à $f(z) = \sum_{p=0}^{N} A_p \cos \pi \left(p + \frac{1}{2}\right) z$. Ces solutions, construites avec des cosinus, et qui sont des fonctions entières d'ordre 1, étaient évidentes à priori; mais nous voyons que, *sous la condition énoncée, ce sont les seules*. En particulier, si on impose $\overline{\lim} \sqrt[2n]{|a_{2n}|} < \frac{\pi}{2}$, il n'y a que la solution banale $f(z) = 0$.

On peut ainsi construire des solutions $f(z)$ dépendant d'autant de constantes arbitraires qu'on le désire; mais on peut aussi obtenir des

10. Cf. *Arkiv för Mat., Astr. och Fys.*, 1921, Bd XV, n° 26.

solutions dépendant d'une infinité de constantes arbitraire en prenant $f(z) = \sum_{0}^{\infty} A_p \cos \pi \left(p + \frac{1}{2}\right) z$, et en choisissant les A_p tels que la série écrite converge uniformément dans un cercle $|z| \leqslant R$, avec $R > 1$. En remarquant que $|\cos(x + iy)|^2 = \cos^2 x + sh^2 y$, on voit qu'il suffit d'imposer

$$\sum_{0}^{\infty} |A_p| \, e^{pR} < \infty.$$

Dans le cas général, les coefficients a_n de rang impair sont donnés $\left(\text{avec la condition d'inégalité nécessaire } \overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n!}} < 1\right)$, ainsi que $f(1)$, $f''(1)$, ... $f^{(2n)}(1)$ ... Posons $g(z) = \sum_{0}^{\infty} \frac{a_{2n+1} z^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Les coefficients de rang pair sont fournis par le système (S) avec, comme seconds membres, les valeurs $\alpha_0, \alpha_2, \ldots \alpha_{2n} \ldots$ égales respectivement à $f(1) - g(1)$, $f''(1) - g''(1)$, ...

Il faut évidemment que les données vérifient $\overline{\lim} \sqrt[2n]{\frac{|f^{(2n)}(1)|}{(2n)!}} < \infty$, $f(z)$ étant holomorphe au point 1. Les $g^{(2n)}(1)$ vérifient automatiquement cette condition d'après l'inégalité imposée aux a de rang impair. Et on ne doit prendre que les solutions de (S) satisfaisant à la condition (C).

En ce qui concerne le système (S) seul, indépendamment de son application au problème qui nous occupe, notons qu'il a été résolu par von Koch lorsque les seconds membres satisfont à $\overline{\lim} \sqrt[n]{|\alpha_{2n}|} < \infty$. Si $\overline{\lim} \sqrt[n]{|\alpha_{2n}|} \leqslant r$, il y a toujours une solution vérifiant $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_{2n}|} \leqslant r$. On obtient toutes les autres en lui ajoutant les solutions du système homogène. Dans le cas où les seconds membres sont absolument quelconques, on peut encore montrer l'existence d'une solution (et par suite d'une infinité) en utilisant une méthode d'E. Borel [11] : on résout d'abord le système avec une certaine approximation qui ramène au cas où les seconds membres sont bornés.

Dans le problème ici traité, il resterait à examiner si les solutions du système (S) satisfont à la condition (C), lorsque les données satisfont aux

---

11. Cf. **Borel,** Sur quelques points de la théorie des Fonctions, *Ann. de l'Ec. Norm. sup.*, 3e série, t. XII, 1895, pp. 9-55.
Voir aussi F. **Riesz,** Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, Paris, Gauthier-Villars, 1913, p. 19.

conditions nécessaires qui ont été indiquées. Nous n'aurons à utiliser que le cas où les α_{2n} sont bornés, donc $\overline{\lim} \sqrt[n]{|\alpha_{2n}|} \leqslant 1$.

Il y aura donc une solution unique vérifiant $\overline{\lim} \sqrt[2n]{|\alpha_{2n}|} < \frac{\pi}{2}$, des solutions dépendant d'un nombre fini de constantes arbitraires sous la condition que $\sqrt[2n]{|\alpha_{2n}|}$ soit borné; et, sous la seule condition (C), on pourra former des solutions dépendant d'une infinité de constantes arbitraires.

b) Tout ce qui précède se généralise au cas où *l'on donne à l'origine les valeurs des termes de la suite* $f^{(n)}$, *à l'exception de* f, $f^{(p)}$, $f^{(2p)}$ ... $f^{(mp)}$ ... *dont on donne les valeurs au point 1.*

On est conduit à un système (S) qui a pour fonction caractéristique

$\varphi(t) = 1 + \frac{t}{p} + \frac{t^2}{(2p)!} + \dots$; si on pose $t = u^p$, on obtient

$\psi(u) = 1 + \frac{u^p}{p!} + \frac{u^{2p}}{(2p)!} + \dots$ qui est un *sinus d'ordre p*.

Il résulte des propriétés des sinus d'ordre supérieur que $\varphi(t)$ admet une infinité de racines simples t_1, t_2, ... t_n ... alignées avec l'origine, et par suite qu'on peut former pour le système homogène des solutions dépendant d'un nombre fini ou d'une infinité de constantes arbitraires; les fonctions $f(z)$ correspondantes s'expriment comme combinaisons linéaires finies ou infinies de

$$\psi(\sqrt[p]{t_1}\, z), \quad \psi(\sqrt[p]{t_2}\, z), \dots$$

On verrait d'autre part aisément comment les résultats précédents se transforment lorsque, au lieu du point 1, on prend pour deuxième point un point z_0 quelconque.

Application. — Cherchons les fonctions analytiques f (z), holomorphes *dans un cercle de centre O, de rayon > 1, pour lesquelles* $f^{(2n+1)}(0) \to A$ et $f^{(2n)}(0) \to B$ lorsque $n \to \infty$.

Il faut d'abord $a_{2n+1} = A + \varepsilon'_n$ $(\varepsilon'_n \to 0)$. Les a_{2n} sont alors donnés par le système (S) avec aux seconds membres α_0, α_2, ... α_{2n} ..., et on voit que $_{2n} \to B - A\, sh 1$ *si* $n \to \infty$.

En écrivant $\alpha_{2n} = B - A\, sh\, 1 + \varepsilon''_n$, on trouve pour le système (S), d'après la théorie de H. von Koch, une solution particulière de la forme

$$a_{2n} = \frac{B - A\, sh\, 1}{ch\, 1} + \varepsilon'''_n \, (\varepsilon'''_n \to 0)$$

On obtient ainsi les fonctions

$$f(z) = A\, sh\, z + \frac{B - A\, sh\, 1}{ch\, 1}\, ch\, z + \sum_0^\infty \frac{\varepsilon_n z^n}{n!} \; (\varepsilon_n \to 0)$$

qui visiblement répondent toutes à la question.

Pour ces fonctions, la suite des dérivées d'ordre pair et la suite des dérivées d'ordre impair sont toutes deux uniformément convergentes dans tout domaine borné, les limites étant respectivement

$$A\, shz + \frac{B - A\, sh\, 1}{ch\, 1}\, chz, \quad \text{et} \quad A\, chz + \frac{B - A\, sh\, 1}{ch\, 1}\, shz.$$

Ces limites sont déterminées dès que A et B sont connus.

Or, *sous la condition* $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{\pi}{2}$, *les fonctions* $f(z)$ *ainsi trouvées sont les seules qui répondent à la question.* Les propriétés vues au début du § 2 s'étendent donc, à condition de ne considérer que les fonctions $f(z)$ dont les coefficients sont ainsi limités [12].

Sans cette restriction les fonction $f(z)$ s'obtiennent en ajoutant aux précédentes les fonctions à dérivées impaires nulles à l'origine, et à dérivées paires nulles au point 1. Les propriétés précédentes disparaissent.

Plus généralement, si le point 1 est remplacé par le point z_0 on obtient des résultats analogues, la condition $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{\pi}{2}$ étant remplacée par $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{\pi\,(p + \frac{1}{2})}{|z_0|}$, où p désigne le premier entier $\geqslant 0$ pour lequel le second nombre est $\geqslant 1$.

5. Généralisations. — Le problème traité au § 2 peut être généralisé de la manière suivante : *la suite* c_n *étant donnée, trouver les fonctions analytiques* $f(z)$ *telles que, dans un certain domaine, la suite* $c_n\, f^{(n)}(z)$ *soit uniformément convergente.*

Avec les notations déjà employées, la convergence à l'origine exige que $c_n\, a_n$ tende vers une limite A lorsque $n \to \infty$. La convergence uniforme dans un domaine comprenant O exige que $c_n\, a_{n+1} = \frac{c_n}{c_{n+1}}\, c_{n+1}\, a_{n+1}$ ait une limite, donc, si $A \neq 0$, que $\frac{c_n}{c_{n+1}}$ tende vers une limite finie λ. C'est ce que nous supposons désormais [13].

---

12. La condition, qui est $\overline{\lim} \sqrt[n]{|f^{(n)}(o)|} < \frac{\pi}{2}$, entraîne que $f(z)$ est entière, d'ordre $\leqslant 1$, au plus du type moyen de l'ordre 1, et équivaut à $\overline{\lim} \sqrt[n]{|f^{(n)}(z)|} < \frac{\pi}{2}$ quel que soit z.

13. Si la limite n'est pas nulle, on peut la supposer égale à 1, en remplaçant z par $\frac{z}{\lambda}$. Si $\frac{c_n}{c_{n+1}}$ ne tend pas vers une limite finie, la seule fonction holomorphe F(z) qui puisse être limite uniforme de $c_n\, f^{(n)}$ est $F(z) = 0$. En effet, si dans F le coefficient de $\frac{z^p}{p!}$ était $A_p \neq 0$, on devrait avoir : $c_n\, a_{n+p} \to A_p$ et $c_n\, a_{n+p+1} = \frac{c_n}{c_{n+1}}\, c_{n+1}\, a_{n+p+1} \to$ limite finie.

Dès lors, si $c_n a_n \to A$, le coefficient de $\frac{z^p}{p!}$ dans $c_n y^{(n)}$ est $c_n a_{n+p}$, qui tend vers $A\lambda^p$, et vérifie quel que soit n : $|c_n a_{n+p}| < M K^p$ (M désigne un nombre supérieur à tous les $|c_n a_n|$ et K un nombre supérieur à tous les $\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$). Donc $c_n f^{(n)}$ tend uniformément dans tout domaine borné vers $F(z) = Ae^{\lambda z}$. Les fonctions $f(z)$ cherchées sont les fonctions pour lesquelles $a_n \frac{A + \varepsilon_n}{c_n}$ ($\varepsilon_n \to 0$. Elles sont entières, d'ordre $\leqslant 1$, et au plus du type moyen de l'ordre 1.

En particulier, si $\frac{c_n}{c_{n+1}} \to 0$, les seules limites possibles sont les constantes A.

On pourrait considérer de même le cas d'une suite partielle de $c_n f^{(n)}$, et on retrouverait des propriétés analogues à celles déjà rencontrées. Par exemple si $c_{np} f^{(np)}$ tend uniformément vers F lorsque $n \to \infty$, $c_{np} f^{(np+p)} = \frac{c_n}{c_{np+p}} c_{np+p} f^{(np+p)}$ tend à la fois vers $F^{(p)}$ et vers $\lambda^p F$. F est donc solution de $F^{(p)} = \lambda^p F$. Si $\lambda = 0$, F est un polynôme de degré $\leqslant p - 1$.

On pourrait enfin étudier les limites d'expressions faisant intervenir plusieurs dérivées successives. Par exemple, si on recherche les fonctions pour lesquelles $\alpha_0 f^{(n)} + \alpha_1 f^{(n+1)} + \dots + \alpha_p f^{(n+p)}$ converge uniformément lorsque $n \to \infty$ $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_p$ étant des constantes données, on se ramène à un problème traité en posant $g = \alpha_0 f + \alpha_1 f' + \dots + \alpha_p f^{(p)}$.

6. Limites de moyennes des dérivées. — Nous allons maintenant étudier les fonctions analytiques pour lesquelles une *moyenne* de la fonction et de ses n premières dérivées admet une limite quand $n \to \infty$.

On recherche la limite d'une expression de la forme $\dfrac{\sum_0^n c_m f^{(m)}}{\sum_0^n c_m}$ ou, plus généralement, $\dfrac{\sum_0^n c_m f^{(m)}}{\varphi(n)}$ [14]. Si $\varphi(n)$ a une limite finie lorsque $n \to \infty$, on est conduit à l'étude d'une équation différentielle linéaire d'ordre infini à coefficients constants. Nous supposerons ici que $\varphi(n) \to \infty$, la suite $|\varphi(n)$ étant non décroissante, et nous montrerons que, sous des hypo-

14. Nous supposons c_m indépendant de n. Plus généralement on pourrait examiner le cas de $\dfrac{\sum_0^n c_m(n) f^{(m)}}{\varphi(n)}$.

thèses de régularité convenables pour les suites c_n et $\varphi(n)$, on retrouve les phénomènes observés dans l'étude de la limite de $f^{(n)}$ ou $c_n f^{(n)}$: la convergence en un point entraîne la convergence uniforme dans tout domaine borné, et les fonctions limites ne contiennent qu'un facteur constant arbitraire.

Lemme. — Soit une suite $\varphi(n)$ *telle que* $\underline{\lim}\left|\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)}\right| > 1$ *et une suite* u_n *telle que* $\frac{u_0+u_1+\ldots+u_n}{\varphi(n)}$ *reste borné. Si* $\varepsilon_n \to 0$ *lorsque* $n \to \infty$, $\frac{\varepsilon_0 u_0+\varepsilon_1 u_1+\ldots\varepsilon_n u_n}{\varphi(n)}$ *tend aussi vers 0.*

Posons en effet $u_n = \psi(n) - \psi(n-1)$, $u_0 = \psi(0)$. Par hypothèse : $\left|\frac{\psi(n)}{\varphi(n)}\right| < M$. En appliquant la transformation d'Abel, et écrivant $\psi(n) = \psi_n$, on a :

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 u_0 + \varepsilon_1 u_1 + \ldots + \varepsilon_n u_n &= \varepsilon_0 \psi_0 + \varepsilon_1(\psi_1 - \psi_0) + \ldots + \varepsilon_n(\psi_n - \psi_{n-1}) \\ &= \psi_0(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) + \psi_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \ldots + \psi_{n-1}(\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) + \varepsilon_n \psi_n.\end{aligned}$$

Pour $m \geqslant p$, on aura : $|\varepsilon_m| < \varepsilon$ et $\left|\frac{\varphi_m}{\varphi_{m+1}}\right| < k < 1$, d'où, si $m < n$, $|(\varepsilon_m - \varepsilon_{m+1})\psi_m| < 2\varepsilon M|\varphi_m| < 2\varepsilon M|\varphi_n|k^{n-m}$ et

$$\left|\frac{\varepsilon_0 u_0 + \ldots + \varepsilon_n u_n}{\varphi(n)}\right| < \frac{B}{|\varphi_n|} + \varepsilon M(1 + 2k + 2k^2 + \ldots),$$

ce qui démontre la proposition.

Remarque.— Le résultat peut être en défaut si $\lim\left|\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)}\right| = 1$. Par exemple, si $\varphi(n) = n$, $u_n = (-1)^n n$, $\varepsilon_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, on voit que $\frac{u_0+\ldots+u_n}{\varphi(n)}$ reste borné, tandis que $\frac{\varepsilon_0 u_0 + \ldots + \varepsilon_n u_n}{\varphi(n)} \to \infty$. Mais le résultat subsiste si on impose aux ε_n des conditions supplémentaires. Il est valable, comme on le voit aisément, si, la suite $|\varphi(n)|$ étant toujours supposée non décroissante et tendant vers l'infini, $\varepsilon_n \to 0$ et la série $\Sigma|\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}|$ est convergente.

Théorème. — Soit une suite c_n *telle que* $\frac{c_n}{c_{n+1}}$ *tende vers une limite finie* λ *quand* $n \to \infty$. *Soit une suite* $\varphi(n)$ *telle que* $|\varphi(n)| \to +\infty$ *sans décroître et que* $\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)}$ *tende vers une limite finie* $\mu \neq 0$; *si* $|\mu| = 1$, *on suppose de plus que la série* $\sum\left|\frac{c_n}{c_{n+1}} - \frac{c_{n+1}}{c_{n+2}}\right|$ *converge. Soit* $f(z) = \sum_0^\infty \frac{a_n z^n}{n!}$ *une fonction holomorphe au voisinage de 0.*

Si, pour $z = 0$, $\dfrac{\sum\limits_0^n c_m f^{(m)}}{\varphi(n)}$ *tend vers une limite finie A lorsque $n \to \infty$, $f(z)$ est une fonction entière, d'ordre $\leqslant 1$, et dans tout domaine borné* $\dfrac{\sum\limits_0^n c_m f^{(m)}}{\varphi(n)}$ *tend uniformément vers* $A e^{\frac{\lambda z}{\mu}}$.

En effet, par hypothèse $\dfrac{c_0 a_0 + c_1 a_1 + \ldots + c_n a_n}{\varphi(n)} \to A$. Le coefficient du terme en z dans $\dfrac{\sum\limits_0^n c_m f^{(m)}}{\varphi(n)}$ est

$$\frac{c_0 a_1 + c_1 a_2 + \ldots + c_n a_{n+1}}{\varphi(n)} = \frac{\dfrac{c_0}{c_1} c_1 a_1 + \ldots + \dfrac{c_n}{c_{n+1}} c_{n+1} a_{n+1}}{\varphi(n)}$$

Or $\dfrac{c_n}{c_{n+1}}$ est de la forme $\lambda + \varepsilon_n$; $\dfrac{c_1 a_1 + \ldots + c_{n+1} a_{n+1}}{\varphi(n+1)} \to A$. Le coefficient considéré a donc pour limite $A \dfrac{\lambda}{\mu}$. De proche en proche on voit que le coefficient $\alpha_p(n)$ du terme en $\dfrac{z^p}{p!}$ a pour limite $A \dfrac{\lambda^p}{\mu^p}$.

Il reste, pour établir la convergence uniforme, à indiquer une majoration convenable de $\alpha_p(n)$ valable quel que soit n.

Supposons d'abord $|\mu| < 1$. On voit que

$$|\alpha_p(n)| = \left| \frac{\dfrac{c_0}{c} c_p a_p + \ldots + \dfrac{c_n}{c_{n+p}} c_{n+p} a_{n+p}}{\varphi(n)} \right| < 2 M^p B \frac{|\varphi(p)| + \ldots + |\varphi(n+p)|}{|\varphi(n)|}$$

en remarquant que $\left| \dfrac{c_n}{c_{n+1}} \right|$ reste inférieur à un nombre M, et que, si on pose $c_0 a_0 + \ldots + c_n a_n = \psi(n)$, on a : $|\psi(n)| < B |\varphi(n)|$ et $|c_n a_n| = |\psi(n) - \psi(n-1)| < 2B |\varphi(n)|$.

Soit β la borne inférieure des $\left| \dfrac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} \right|$; β est > 0 par hypothèse. D'autre part, pour n assez grand, on a $\left| \dfrac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} \right| < \gamma < 1$. Donc, à partir d'un certain rang p_0, on a, quel que soit n :

$$|\alpha_p(n)| < 2 M^p B \left[\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} + \ldots + \frac{1}{\beta^p} + 1 + \gamma + \gamma^2 + \ldots \right] < C^p,$$

C étant une constante convenablement choisie.

Suposons maintenant $|\mu| = 1$. On obtient une inégalité analogue en raisonnant de proche en proche.

Soit, par hypothèse, $\left|\dfrac{c_0 a_0 + \ldots + c_n a_n}{\varphi(n)}\right| < B$ ou $|\psi(n)| < B|\varphi(n)|$. On a :

$$c_0 a_1 + \ldots + c_n a_{n+1} = \frac{c_0}{c_1} c_1 a_1 + \ldots + \frac{c_n}{c_{n+1}} c_{n+1} a_{n+1}$$
$$= \lambda (c_1 a_1 + \ldots + c_{n+1} a_{n+1}) + \varepsilon_0 c_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_n c_{n+1} a_{n+1}.$$

La première partie du second membre est en module inférieure à $2B|\lambda| |\varphi(n+1)|$. En appliquant à la deuxième la transformation d'Abel, on voit qu'elle est inférieure en module à $BD|\varphi(n+1)|$, D étant une constante qui ne dépend que de la suite ε_n. D'où, pour tout n,

$$\left|\frac{c_0 a_1 + \ldots + c_n a_{n+1}}{\varphi(n)}\right| < B \frac{(D + 2|\lambda|)}{\beta},$$

β ayant la même signification que plus haut. Et, de proche en proche,

$$|\alpha_p(n)| < B\left(\frac{D+2|\lambda|}{\beta}\right)^p.$$

Les fonctions $f(z)$ répondant à la question sont les fonctions pour lesquelles $c_n a_n = \psi(n) - \psi(n-1)$ avec $\psi(n) = (A + \eta_n)\varphi(n)$ où $\eta_n \to 0$. A étant choisi (donc aussi la limite), elles dépendent d'une infinité de constantes arbitraires η_n. Il résulte de la démonstration précédente que ce sont des fonctions entières. D'ailleurs on a : $|a_n| < \dfrac{E|\varphi(n)|}{|c_n|} < EF^n$, E et F étant des constantes convenables.

$f(z)$ est au plus du type moyen de l'ordre 1.

Exemple. — La limite pour $n = \infty$ de la moyenne arithmétique $\dfrac{f + f' + \ldots + f^{(n)}}{n+1}$ ne peut être que Ae^z. Il faut et suffit pour cela que $\dfrac{a_0 + \ldots + a_n}{n+1} \to A$, c'est-à-dire que $a_n = \psi(n) - \psi(n-1)$, avec $\dfrac{\psi(n)}{n} \to A$.

Remarques. — *1.* — Nous avons supposé $\mu \neq 0$. Si $\mu = 0$ et $\lambda \neq 0$, on voit aisément que la seule fonction $F(z)$ qui puisse être limite uniforme de $\dfrac{\sum_0^n c_m f^{(m)}}{\varphi(n)}$ est la constante 0. Si en effet dans F le coefficient A_p de $\dfrac{z^p}{p!}$ était $\neq 0$, $\dfrac{c_0 a_p + \ldots + c_n a_{n+p}}{\varphi(n)}$ tendrait vers A_p, $\dfrac{c_0 a_{p+1} + \ldots + c_n a_{n+p+1}}{\varphi(n+1)}$ tendrait vers λA_p et $\dfrac{c_0 a_{p+1} + \ldots + c_n a_{n+p+1}}{\varphi(n)}$ vers l'infini.

2. — Si les hypothèses de régularité faites pour les suites c_n et $\varphi(n)$ ne sont pas vérifiées, les résultats précédents peuvent être en défaut. On obtient des exemples en utilisant des suites c_n qui donnent une importance prépondérante à une suite partielle de $f^{(n)}$.

Exemple. — $c_{2n} = 1, c_{2n+1} = \dfrac{1}{n^2}$, $\varphi(n) = n$. Si on prend $f(z) = 2\,\mathrm{A}e^z$, on trouve pour limite $\mathrm{A}e^z$; si on prend $f(z) = 2\,\mathrm{A}e^{-z}$, on trouve $\mathrm{A}e^{-z}$.

On pourrait d'ailleurs étudier des limites d'expressions ne faisant intervenir qu'une suite partielle de dérivées, par exemple :

$$\frac{c_0 f + c_p f^{(p)} + \ldots + c_n\, f^{(np)}}{\varphi(np)}$$

Dans ce cas, en conservant pour les suites c_n et $\varphi(n)$ les hypothèses du théorème, on établit aisément que les limites F sont solutions de $\mathrm{F}^{(p)} = \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^p \mathrm{F}$ et dépendent ainsi de p constantes arbitraires. Les fonctions f correspondantes sont caractérisées par :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{c_0\, a_0 + c\;\; a\;\; + \ldots + c_n\;\; a_n}{\varphi(np)} \to \mathrm{A}_0 \\ \dfrac{c_0\, a_1 + c\;\; a_{\;\;+1} + \ldots + c_n\;\; a_{n\;\;+1}}{\varphi(np)} \to \mathrm{A}_1 \\ \qquad\qquad \ldots \\ \dfrac{c_0\, a_{p-1} + c\;\; a_{2\;\;-1} + \ldots + c_{np}\, a_{np+p-1}}{\varphi(np)} \to \mathrm{A}_{p-1} \end{array}\right.$$

Plus généralement, nous avons étudié au § 2 les limites possibles d'une suite partielle $f^{(n_i)}$ suivant le choix de la suite (n_i). Une suite (n_i) étant donnée, posons $c_n = 1$ pour $n = n_i$, $c_n = 0$ si $n \neq n_i$, et $\varphi(n) = \sum\limits_0^n c_m$. Nous appliquons ainsi à la suite $f^{(n_i)}$ le procédé des moyennes arithmétiques de Cesaro. Si $f^{(n_i)} \to \mathrm{F}$, $\dfrac{\sum\limits_0^n c_m f^{(m)}}{\varphi(n)}$ tend aussi vers F. Nous pourrons donc obtenir comme fonction F toute fonction limite d'une suite $f^{(n_i)}$; en particulier, si $n_{i+1} - n_i \to \infty$, F peut être n'importe quelle fonction analytique.

3. — On pourrait de même, dans l'expression $\dfrac{\sum\limits_0^n c_m f^{(m)}}{\varphi(n)}$ ne donner à n qu'une suite de valeurs n_i; ici encore on élargirait l'ensemble des fonctions F admissibles comme limites. Si par exemple, les hypothèses sur c_n et $\varphi(n)$ étant conservées, on ne donne à n que des valeurs multiples de p, F peut être n'importe quelle solution de $\mathrm{F}^{(p)} = \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^p \mathrm{F}$.

4. — Nous nous sommes limités dans tout ce qui précède aux fonctions analytiques. Dans le champ réel et pour une fonction non analytique, une propriété de convergence *en un point* ne peut évidemment suffire à entraîner la même propriété sur un segment. Mais à peu près tous les résultats obtenus subsistent sans changement, à condition de supposer que les convergences envisagées ont lieu uniformément sur un segment. Les limitations imposées aux dérivées de f entraînent alors que f est analytique.