ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

DUSAN MITROVIC

Sur un principe nouveau de construction des machines électriques destinées à résoudre les équations algébriques

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série, tome 16 (1952), p. 204-211

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1952_4_16__204_0>

SUR UN PRINCIPE NOUVEAU DE CONSTRUCTION DES MACHINES ÉLECTRIQUES DESTINÉES A RÉSOUDRE LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES (1)

par Dusan MITROVIC

RÉSUMÉ. — Description et étude d'un réseau analogue particulièrement simple permettant la résolution des équations algébriques de tous types. Son domaine d'application peut être étendu à d'autres problèmes.

INTRODUCTION

Dans les applications physiques ou techniques on est souvent conduit à chercher les valeurs numériques des racines d'équations algébriques. Plusieurs méthodes de calcul approché de ces racines ont été proposées, mais dès que le degré de l'équation s'élève, leur application est longue et délicate.

On a été ainsi conduit à proposer des méthodes basées sur l'analogie électrique ou électro-mécanique. On peut les classer en :

1° Recherche des racines d'une équation algébrique à l'aide de machines servant à résoudre les systèmes algébriques linéaires [1], [2], [3], [4].

2° Méthode électro-mécanique [5].

3° Méthode électrique [6], [7], [8].

Les machines existantes et utilisant ces méthodes sont compliquées et d'un prix de revient élevé.

Nous nous proposons dans ce mémoire, d'indiquer une méthode simple, basée sur les relations entre les courants, les tensions et les impédances dans les réseaux passifs.

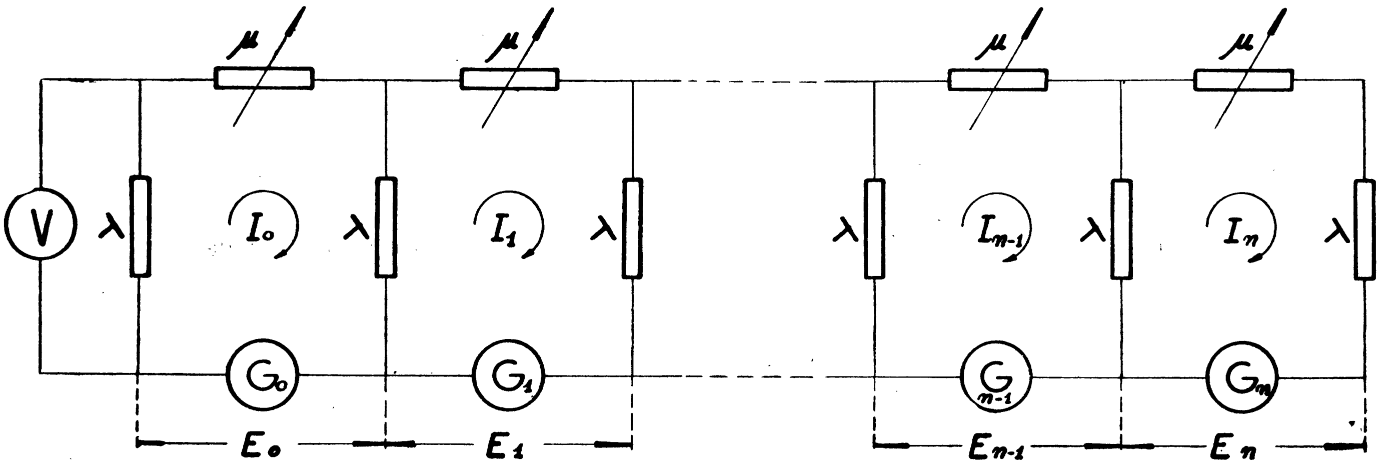
***

Principe de la méthode.

Considérons le réseau de la figure 1. Les générateurs : G_0, $G_1 \dots G_n$, fournissent respectivement les tensions : E_0, $E_1 \dots E_n$, dont les valeurs absolues et les angles, par rapport à un axe arbitraire, sont réglables. Ces tensions serviront à représenter les coefficients réels ou complexes de l'équation algébrique proposée. Les impédances λ sont constantes et égales. Nous verrons, qu'ordinairement ces impédances peuvent être remplacées par des résistances ou des capacitances. Les impédances μ sont réglables simultanément et demeurent toujours égales entre elles. A l'aide du voltmètre V on

1. Développement d'une note parue aux C. R. de l'Acad. des Sciences, t. 234, pp. 2519-2521, séance du 23 juin 1952.

Nous tenons à remercier ici M. R. Huron pour l'aide constante qu'il nous a accordée.



peut observer le courant I_0 comme la chute de tension sur l'impédance λ. Nous suposerons que la consommation de cet instrument est négligeable.

Le principe de notre méthode consiste à régler la partie réelle et la partie imaginaire des impédances μ de telle manière que le courant I_0 soit nul.

Sa justification est la suivante : on a immédiatement

$$\left\{\begin{array}{l} (2\lambda + \mu)\, I_0 - \lambda\, I_0 = E_0 \\ -\lambda\, I_0 + (2\lambda + \mu)\, I_1 - \lambda\, I_2 = E_1 \\ -\lambda\, I_0 + (2\lambda + \mu)\, I_2 - \lambda\, I_3 = E_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -\lambda\, I_{n-1} + (2\lambda + \mu)\, I_2 - \lambda\, I_3 = E_n. \end{array}\right.$$

d'où :

$$I_0 = \frac{\lambda^n \begin{vmatrix} E_0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ E_1 & 2 + \frac{\mu}{\lambda} & -1 & \dots & 0 \\ E_2 & 0 & 2 + \frac{\mu}{\lambda} & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ E_n & 0 & & & 2 + \frac{\mu}{\lambda} \end{vmatrix}}{\lambda^{n+1} \begin{vmatrix} 2 + \frac{\mu}{\lambda} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 + \frac{\mu}{\lambda} & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 + \frac{\mu}{\lambda} & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & 2 + \frac{\mu}{\lambda} \end{vmatrix}} \qquad (2)$$

Nous désignerons par : $\psi\left(2+\frac{\mu}{\lambda}\right)$

le coefficient de λ^n au numérateur de I_0. Si le dénominateur de I_0 est différent de zéro, on aura $I_0 = 0$ pour :

$$\psi\left(2+\frac{\mu}{\lambda}\right) = 0 \tag{3}$$

Le dénominateur de I_0 est nul pour les valeurs de $\frac{\mu}{\lambda}$ égales aux racines de l'équation caractéristique : $x\,\|1\| - \|M\| = 0$
de la matrine d'ordre $n+1$:

$$\|M\| = \left\| \begin{matrix} 2 & -1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ 0 & -1 & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ 0 & & 0 & \ldots\ldots & 0 \end{matrix} \right\|$$

Cette matrice est symétrique, à éléments réels. On vérifie facilement qu'elle est définie positive [**9**], [**10**]. Par suite ses racines caractéristiques sont réelles et négatives. Donc sous la condition suffisante :

$$\mathcal{R}\left\{\frac{\mu}{\lambda}\right\} > 0 \tag{4}$$

où $\mathcal{R}\{\}$ signifie « partie réelle de », le dénominateur de I_0 est différent de zéro. Nous supposerons cette condition satisfaite, nous verrons d'ailleurs qu'elle n'est pas limitative.

En posant :

$$z = 2 + \frac{\mu}{\lambda} \tag{5}$$

la condition (3) s'écrit :

$$\psi(z) = 0 \tag{6}$$

Si nous posons : $\psi(z) = \sum_{p=o}^{p=n} b_p\, z^{n-p}$, il est aisé de montrer que :

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} b_p = E_p - E_{p-2}(n-p+1) + E_{p-4}\sum_{i=p}^{i=n}(i-p+1) \\ - E_{p-6}\sum_{\alpha=p}^{\alpha=n}\sum_{i=p}^{i=\alpha}(i-p+1) \\ + E_{p-8}\sum_{\beta=p}^{\beta=n}\sum_{\alpha=p}^{\alpha=\beta}\sum_{i=p}^{i=\alpha}(i-p+1) + \ldots.. \end{aligned} \right.$$

$$(p = 0, 1, 2 \ldots n)$$

où les sommations multiples s'effectuent à partir de la gauche. Par exemple pour $n = 10$, $p = 8$ on a :

$$\left\{\begin{aligned} \sum_{\beta=8}^{\beta=10}\sum_{\alpha=8}^{\alpha=\beta}\sum_{i=8}^{i=\alpha}(i-p+1) &= \sum_{\alpha=8}^{\alpha=8}\sum_{i=8}^{i=\alpha} + \sum_{\alpha=8}^{\alpha=9}\sum_{i=8}^{i=\alpha} + \sum_{\alpha=8}^{\alpha=10}\sum_{i=8}^{i=\alpha} \\ &= \sum_{i=8}^{i=8} + \sum_{i=8}^{i=8} + \sum_{i=8}^{i=9} + \sum_{i=8}^{i=8} + \sum_{i=8}^{i=9} + \sum_{i=8}^{=10} \end{aligned}\right.$$

$= 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 2 + 1 + 2 + 3 = 15.$

On pourra vérifier que :

$$b_8 = E_8 - 3\,E_6 + 6\,E_4 - 10\,E_2 + 15\,E_0;$$

Soit à résoudre l'équation :

$$\Phi(x) = \sum_{p=0}^{p=n} a_p\, x^{\,n-p} = 0 \qquad (8)$$

Comme on le constatera par la suite il est avantageux, du point de vue pratique, de faire la transformation :

$$x = k\,(z - 2) \qquad (9)$$

k étant un nombre réel arbitraire. On a alors :

$$\left\{\begin{aligned} \Phi\,[k\,(z-2)] &= \Phi\,(-2\,k) + k\,\frac{\Phi'(-2\,k)}{1\,!}\,z + k^2\,\frac{\Phi''(-2\,k)}{2\,!}\,z^2 + \ldots \\ &\qquad + k^n\,\frac{\Phi^{(n)}(-2\,k)}{n\,!}\,z^n = \psi\,(z) \end{aligned}\right. \qquad (10)$$

Si donc on définit les tensions : $E_0, E_1, E_2 \ldots E_n$ par les formules (7) :

$$b_p = k^{n-p}\,\frac{\psi^{(n-p)}(-2\,k)}{(n-p)\,!} \qquad (11)$$

$$(p = 0, 1, \ldots n)$$

on aura, lorsque I_0 sera ajusté à zéro : $z = 2 + \frac{\mu}{\lambda}$ et

$$x = k\,\frac{\mu}{\lambda} \qquad (12)$$

Il est important de remarquer que les E_i définis par le système linéaire (11), résoluble immédiatement, sont des fonctions linéaires et homogènes des a_i, dont les coefficients peuvent être calculés une fois pour toutes.

Ainsi pour $n = 4$, on a :

$$\left\{\begin{aligned} &E_0 = a_0\,k^4;\; E_1 = -8\,a_0\,k^4 + a_1\,k^3;\; E_2 = 27\,a_0\,k^4 - 6\,a_1\,k^2 + a_2\,k^2 \\ &E_3 = -48\,a_0\,k^4 + 14\,a_1\,k^3 - 4\,a_2\,k^2 + a_3\,k \\ &E_4 = 42\,a_0\,k^4 - 14\,a_1\,k^3 + 5\,a_2\,k^2 - 2\,a_3\,k^2 + a_4 \end{aligned}\right.$$

Du point de vue de la réalisation pratique, nous distinguons les machines servant à résoudre les équations à coefficients complexes de celles servant à résoudre les équations à coefficients réels.

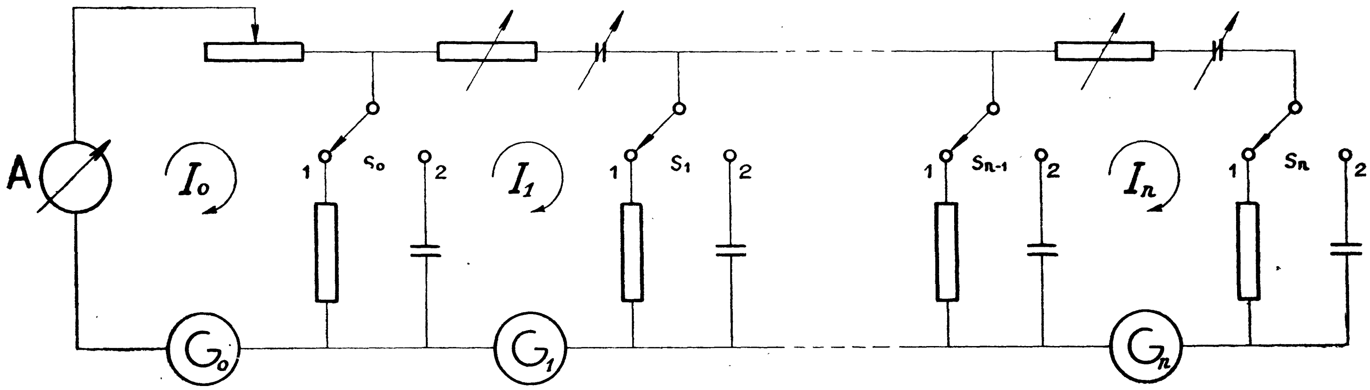
Machines servant à résoudre les équations à coefficients complexes.

C'est le type le plus général. On peut utiliser la table à calcul à courant alternatif [**11**], [**12**], [**13**], [**14**], mais le dispositif de mesure de cette table et l'utilisation des inductances ne sont pas nécessaires.

Le non emploi des inductances est une question importante. Leur absence signifie que les impédances μ sont nécessairement de la forme : $R - iX$, ou R et X sont positifs et capacitance).

On peut prendre λ soit réel (résistance) soit imaginaire (capacitance). Alors d'après (12) on obtient, pour k positif toutes les racines situées dans le quatrième et le premier quadrant, pour k négatif toutes les autres racines.

Dans tous les cas la condition (4) est satisfaite. Le schéma de principe est indiqué sur la figure 2. Lorsque $I_0 = 0$ les impédances λ et μ peuvent



être arbitraires; dans le réseau de la figure 2 elles sont remplacées par la résistance de sûreté r et l'impédance interne de l'instrument A.

Pratiquement, on applique les tensions calculées suivant les formules (11) pour $k > 0$ et on cherche les racines, les inverseurs : $s_0\, s_1 \ldots s_n$ étant dans la position 1. On obtient ainsi les racines du quatrième quadrant du plan complexe. On cherche celles du premier quadrant en mettant les inverseurs dans la position 2.

On recommence avec $k < 0$. Le choix de k est fait de telle manière que les tensions soient du même ordre de grandeur.

Machines servant à résoudre les équations algébriques à coefficients réels.

Les coefficients étant réels toutes les tensions sont en phase ou en contre-phase. D'autre part, les racines cherchées sont deux à deux imaginaires conjuguées, il suffit donc d'explorer le quatrième et le deuxième quadrant. Il en résulte que l'on peut prendre pour λ, uniquement des résistances. Le schéma 2 est grandement simplifié.

***

Machines servant à la recherche des racines réelles des équations algébriques à coefficients réels.

On peut toujours se ramener à ce cas, ce type de machine est donc important.

Il suffit de prendre pour λ et μ des résistances. Les potentiomètres μ sont branchés sur un axe commun par exemple. La machine peut marcher avec des tensions continues.

Exemples :

Nous avons pris :

μ : boîtes de résistances : 10 — 10.000 Ω

λ : 33.600 Ω

I_0 : était mesuré avec un micro ampèremètre de 50 μ A.

Tensions : piles de poches de 4,5 V branchées sur des potentiomètres : P_0, P_1, P_2 de résistance totale négligeable par rapport à λ.

L'équation proposée était : $x^2 + x - 2 = 0$. On trouve :

$$E_0 = k^2;\ E_1 = k - 4\,k^2;\ E_2 = 5\,k^2 - 2\,k - 2$$
$$\text{Pour } k = -1 \ :\ E_0 = 1;\ E_1 = -5;\ E_2 = 5$$
$$\text{Pour } k = 1 \ :\ E_0 = 1;\ E_1 = -3;\ E_2 = 1$$

valeurs non toutes réalisables avec notre montage. Mais puisque les E_i sont des fonctions linéaires et homogènes des a_i, eux-mêmes définis à un facteur de proportionnalité près, nous avons pris des valeurs proportionnelles aux précédentes et facilement réalisables, c'est-à-dire :

$$E_0 = 1{,}5\text{ V};\ E_1 = -4{,}5\text{ V};\ E_2 = 1{,}5\text{ V} \qquad (k = 1)$$
$$E_0 = 0{,}9\text{ V};\ E_1 = -4{,}5\text{ V};\ E_2 = 4{,}5\text{ V} \qquad (k = -1)$$

Nous avons obtenu :

$$\text{pour } k = 1, \quad \mu = 33.500 \text{ d'où } x_1 = k\frac{\mu}{\lambda} = \frac{33.500}{33.600} = 0{,}997$$

$$\text{pour } k = -1, \ \mu = 67.500 \text{ d'où } x_2 = \quad = -\frac{67.500}{33.600} = -2{,}008$$

Les erreurs sont inférieures à 0,5 pour cent.

Si on voulait une précision supérieure, il suffirait de poser

$$x = x_1 + \alpha \quad (\text{ou } x_2 + \alpha)$$

dans l'équation donnée.

Applications diverses.

Le même principe peut être appliqué à la génération des fonctions. Nous y reviendrons dans un autre mémoire. Nous indiquons seulement ici comment les machines du type précédent peuvent être utilisées pour la recherche des racines communes à deux polynômes.

Il faut disposer de deux réseaux analogues, un pour chaque polynôme. On prépare chacun des réseaux pour la recherche des racines du polynôme qui lui a été attribué et on donne aux impédances μ des valeurs égales. On annule I_0 en faisant varier simultanément ces impédances.

En prenant : $\Phi(x) = 0$ et $\Phi'(x) = 0$ on aura les racines doubles de $\Phi(x)$.

Soit α une racine multiple d'un polynôme $\Phi(x)$ et soit $\Phi^{(m)}(x)$ le premier polynôme dérivé pour lequel I_0 est différent de zéro lorsque μ possède la valeur qui correspond à $x = \alpha$. α est alors une racine d'ordre m de $\Phi(x) = 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] F.-H. Raymond : « Sur un type général de machines mathématiques algébriques. » — Annales des Télécommunications , t. 5, n° 1, janvier 1950.

[2] E. A. Goldberg, G. W. Brown : « An Electronic Simultaneous Equation Solver. » — Journal of Applied Physics, vol. 19, n° 4 (April 1948).

[3] D. Mitrovic, R. Huron, R. Tomovic : « Sur un principe nouveau de construction des machines servant à résoudre les systèmes d'équations linéaires par analogie électrique. » — Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. 234, pp. 589-591, séance du 4 février 1952.

[4] B. A. Sokoloff : « Principe et réalisation d'une machine mathématique dite : Opérateur mathématique électronique (O.M.E.). » — Annales des Télécommunications, t. 5, n° 4 (avril 1950).

[5] H. C. Hart and J. Travis : « Mechanical Solution of Algebraic Equations. » — Journal of Franklin Institut, 225 (1938), pp. 63-72.

[6] Byron O. Marshall : « The Electronic Siograph for Roobs of Polynomials. » — Journal of Applied Physics, April 1950, vol. 21, n° 4, p. 307.

[7] F. W. Bubb, J. R. : « A Circuit for Generating Polynomials and Finding Their Zeros. » — Proceeding IRE, December 1951, vol. 39, n° 12.

[8] Greenwood, Holdam, Mac Rae : « Electronic Instruments. » — Mac Graw-Hill Book, 1948, p. 132.

[9] A. Lichnerowicz : « Algèbre et analyse liénaire. » — Editeurs Masson et Cie, Paris, 1947.

[10] D. Mitrovic : « Etude théorique d'un principe nouveau de construction des machines électriques servant à résoudre les systèmes d'équations algébriques linéaires. » — Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 4e série, 16, 1952.

[11] H. P. Kuehni and R. G. Lorraine : « A N A. C. Network Analyser. » — AIEE Trans. Vol. 57, 1948.

[12] F. Cahen : « Une nouvelle table à calc à courant alternatif. » — Revue générale de l'électricité, t. 58, 1949.

[13] D. Mitrovic and R. Tomovic : « A. C. Network Analyser of the Electric Power Institute in Belgrade. » — Suplement to « Elektroprivreda », n° 4, April 1950.

[14] G. Lyon : « Some Experience withe a Bristish A. C. Network Analyser. » — The Proceedings of the Institution of Electrical Engineers, Part II, n° 60, vol. 97.