

G. LAVILLE

## Résolution graphique d'intégrales utilisées en analyse harmonique et en calcul symbolique

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4<sup>e</sup> série*, tome 16 (1952), p. 153-168

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1952\\_4\\_16\\_153\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1952_4_16_153_0)

© Université Paul Sabatier, 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# RÉSOLUTION GRAPHIQUE D'INTÉGRALES UTILISÉES EN ANALYSE HARMONIQUE ET EN CALCUL SYMBOLIQUE

par G. LAVILLE

---

SOMMAIRE : *Méthode de calcul graphique des intégrales définies complexes de la forme  $\int_{\theta_0}^{\theta_1} f(\theta) e^{i\theta} d\theta$  qui se rencontrent en analyse harmonique et en calcul symbolique.*

*Lorsque  $f(\theta)$  est un polynôme du troisième degré le vecteur représentatif de l'intégrale se construit exactement à l'aide d'une figure composée de vecteurs rectangulaires (orthogone) dont les côtés sont liés simplement à quatre ordonnées particulières de la courbe  $y = f(\theta)$ .*

*La méthode s'étend à une courbe quelconque qu'on découpe en arcs partiels assimilables à des arcs de courbe du troisième degré.*

*Application aux développements en série et en intégrale de Fourier. Construction de l'image d'une fonction dans la transformation de Laplace et détermination inverse de l'original à partir de son image.*

Lorsque l'on développe une fonction périodique en série de Fourier ou bien une fonction non périodique en intégrale de Fourier, on rencontre des intégrales définies qui, par un changement de variable convenable, se ramènent aux deux types

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} f(\theta) \cos \theta d\theta \quad \text{et} \quad \int_a^b f(\theta) \sin \theta d\theta.$$

On trouve des intégrales analogues quand on calcule par la transformation de Laplace l'image d'une fonction  $h(t)$  de la variable réelle  $t$ . On en rencontre également quand on veut remonter de l'image à l'original au moyen de l'intégrale de Mellin-Fourier.

Dans le cas fréquent en pratique où la fonction  $f(\theta)$  est définie par une courbe expérimentale non susceptible d'être représentée par une équation connue, on pourra toujours, en principe, calculer les intégrales ci-dessus, par un procédé graphique dont un des meilleurs est la méthode de Massau exposée dans « Calcul Graphique et Nomographie » de M. D'OCAGNE.

L'inconvénient de ce procédé est qu'il exige la construction préalable des deux courbes qui représentent les fonctions réelles  $f(\theta) \cos \theta$  et  $f(\theta) \sin \theta$ . Cet inconvénient ne serait pas très grave si le problème qu'on étudie ne comportait que la résolution de ces deux seules intégrales.

Mais en analyse harmonique et en calcul symbolique on doit souvent recommencer la construction pour un grand nombre d'intégrales de la forme

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} f(\theta) \cos n \theta d\theta \quad \text{et} \quad \int_{\theta_0}^{\theta_1} f(\theta) \sin n \theta d\theta$$

et cette répétition devient rapidement pénible en rendant la recherche très longue.

La méthode que nous allons exposer évite cet inconvénient en substituant au calcul des deux intégrales *réelles* ci-dessus le calcul graphique de la seule intégrale *complexe* :

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} f(\theta) e^{i n \theta} d\theta$$

Ce calcul présente des avantages de même nature que ceux qui rendent si précise et si rapide la méthode de Massau. On sait que cette dernière, traduction graphique de la méthode de Simson, découpe la courbe à intégrer en un nombre relativement petit d'arcs relativement étendus dont chacun est assimilable, avec beaucoup de précision, à une parabole du troisième degré. Il n'y a donc qu'à effectuer un nombre restreint d'intégrations partielles ce qui favorise la rapidité sans nuire à la précision; cette dernière est assurée par l'exactitude avec laquelle est réalisée l'assimilation de chaque arc partiel à un arc de parabole du troisième degré. De plus l'intégrale définie cherchée est obtenue sans qu'on ait à construire la courbe qui représente l'intégrale indéfinie de la fonction.

Ces avantages se retrouvent dans la méthode que nous exposons. En outre les constructions effectuées pour le calcul de l'intégrale  $\int_{\theta_0}^{\theta_1} f(\theta) e^{i n \theta} d\theta$  ne sont pas perdues pour le calcul des intégrales  $\int_{\theta_0}^{\theta_1} f(\theta) e^{i n_0 \theta} d\theta$ , de sorte que le calcul des harmoniques d'une fonction périodique se déduit très simplement et très rapidement de celui du fondamental.

Nous exposerons d'abord dans ce qui suit la méthode d'intégration graphique de l'intégrale complexe précédente.

Puis nous en ferons des applications au développement en série de Fourier d'une fonction périodique, au développement en intégrale de Fourier d'une fonction non périodique, au calcul de l'image d'une fonction par la transformation de Laplace, puis au calcul de l'original à partir de l'image par la formule de Mellin-Fourier.

Enfin nous donnerons la reproduction d'une épure effectivement réalisée, qui permettra d'apprécier la commodité de la méthode et la précision qu'on en peut attendre.

## I

CALCUL GRAPHIQUE DE L'INTÉGRALE COMPLEXE  $\int_{\theta_0}^{\theta_1} f(\theta) e^{i\theta} d\theta$ .

Nous supposons la fonction réelle  $f(\theta)$  représentée par une courbe (C) rapportée à deux axes rectangulaires  $x = \theta$ ,  $y = f(\theta)$ .

Elle peut parfois être représentée en coordonnées polaires par la courbe  $\rho = f(\theta)$ , mais ce cas se ramène facilement au précédent.

Nous supposons également que la fonction  $f(\theta)$  est toujours positive, ce qui s'obtient, s'il est nécessaire, par un changement de signe et une translation de l'axe  $Ox$ .

L'intégrale complexe indéfinie  $\int f(\theta) e^{i\theta} d\theta$  est représentée, à une translation arbitraire près, par une courbe  $\Gamma$  tracée dans le plan complexe de  $Z = X + iY$ , lieu du point M de coordonnées X et Y.

L'intégrale définie  $\int_{\theta_0}^{\theta_1} f(\theta) e^{i\theta} d\theta$  est alors représentée par la corde  $M_0 M_1$  de cette courbe. Les points  $M_0, M_1$  correspondent aux limites d'intégration  $\theta_0$  et  $\theta_1$ . Il semble qu'il faille d'abord construire de proche en proche la courbe  $\Gamma$ , puis tracer la corde  $M_0 M_1$  dont les projections sur les axes  $OX$  et  $OY$  donneront les deux intégrales cherchées

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} f(\theta) \cos \theta d\theta \quad , \quad \int_{\theta_0}^{\theta_1} f(\theta) \sin \theta d\theta$$

Nous verrons plus loin qu'il est inutile de construire cette courbe  $\Gamma$  dont les propriétés sont les suivantes :

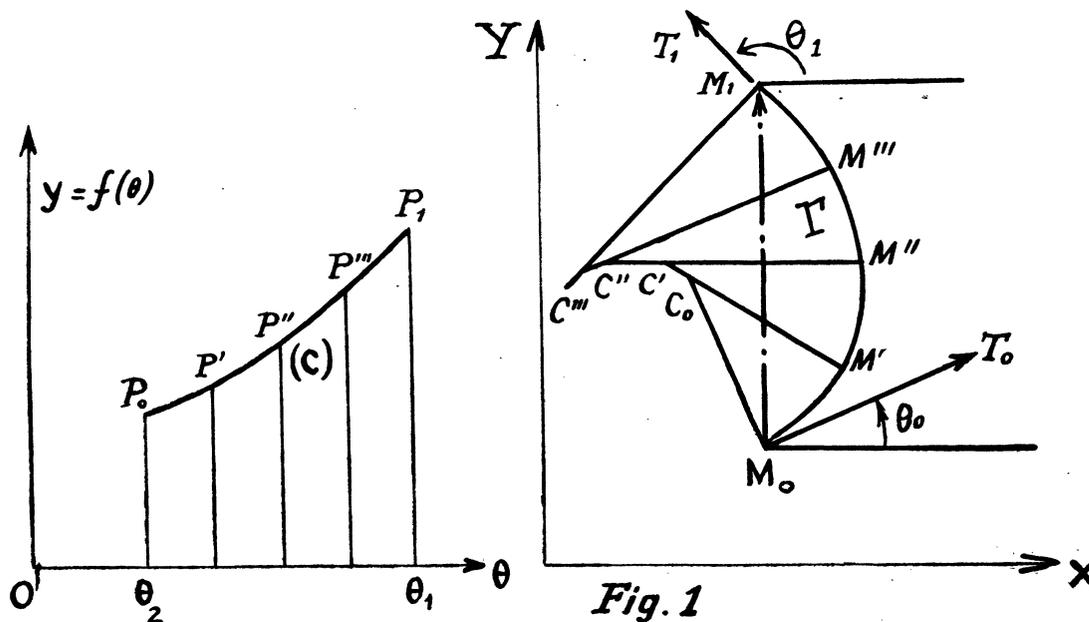
a) Au point M qui correspond à  $\theta$  sa tangente directe fait avec l'axe réel  $OX$  l'angle  $\theta$ .

b) Son rayon de courbure est égal à  $f(\theta)$ .

Grâce aux hypothèses posées plus haut la courbe  $\Gamma$  ne présente pas de rebroussement et si l'amplitude  $\theta_1 - \theta_0$  est supérieure à  $2\pi$  elle a l'allure d'une spirale qui présente autant de spires que  $2\pi$  est contenu de fois dans  $\theta_1 - \theta_0$ .

On peut la tracer approximativement comme suit : (fig. 1). Du point  $M_0$  choisi arbitrairement dans le plan X, Y on mène le vecteur  $M_0 C_0$  qui fait avec l'axe  $OY$  l'angle  $\theta_0$  et dont la longueur, relevée sur la courbe (C), est  $f(\theta_0)$ . Le point  $C_0$  est le centre de courbure de  $\Gamma$  en  $M_0$ . On décrit un petit arc de cercle  $M_0 M'$  de centre  $C_0$  et d'angle au centre  $\Delta$ . Le point  $M'$  est, si  $\Delta$  est très petit, assimilable au point de la courbe  $\Gamma$  qui correspond

à l'angle  $\theta = \theta_0 + \Delta$ . La courbe (C) fournit pour ce point le rayon de courbure  $f(\theta_0 + \Delta)$  qui permet de tracer un second arc  $M'M''$  et ainsi de suite, de proche en proche, jusqu'à ce que  $\theta$  ait pris la valeur  $\theta_1$ . On obtient ainsi,



par petits arcs de cercle qui se raccordent, l'arc  $M_0M_1$  de la courbe  $\Gamma$  cherchée. La corde  $M_0M_1$  représente l'intégrale cherchée.

Ce procédé donne, nous l'avons vérifié, des résultats assez corrects pourvu que l'on procède par accroissements  $\Delta$  très petits de l'angle  $\theta$ . Mais il est très peu rapide et devient impraticable lorsque l'amplitude  $\theta_1 - \theta_0$  correspond à plusieurs circonférences. Il fournit évidemment la courbe  $\Gamma$  ainsi que sa développée, mais c'est plutôt un inconvénient car ces deux courbes encombrant inutilement l'épure.

*Cas où  $f(\theta)$  est un polynôme.*

Lorsque  $f(\theta)$  est un polynôme en  $\theta$ , dont le degré est au plus égal à trois l'intégrale définie s'obtient *exactement*, sans avoir à construire la courbe  $\Gamma$ , par des constructions simples qui ne font intervenir que des longueurs relevées directement sur la courbe (C).

Soit

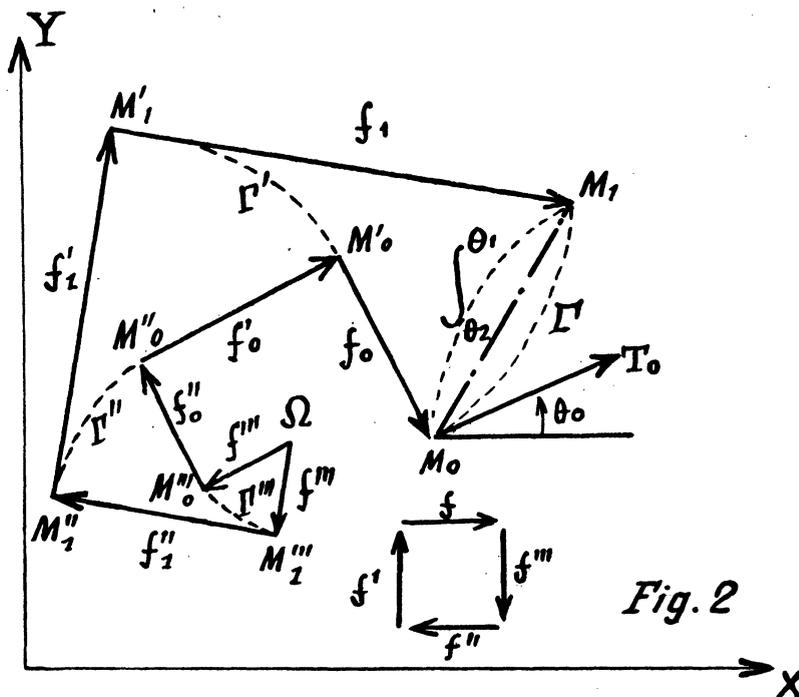
$$f(\theta) = a + b\theta + \frac{c\theta^2}{2} + \frac{d\theta^3}{6}$$

cette expression représentant le rayon de courbure de la courbe  $\Gamma$ , celle-ci est une développante d'une courbe  $\Gamma'$  dont le rayon de courbure est égal à :

$$f'(\theta) = b + c\theta + \frac{d\theta^2}{2}$$

$\Gamma'$  est donc elle-même développante d'une courbe  $\Gamma''$  dont le rayon de courbure est  $f''(\theta) = c + d\theta$ .  $\Gamma''$  est enfin développante d'un cercle  $\Gamma'''$  de rayon  $d = f'''(\theta) = \text{constante}$ .

La construction du point  $M_1$  à partir du point  $M_0$  est immédiate si l'on connaît  $f(\theta_0)$ ,  $f'(\theta_0)$ ,  $f''(\theta_0)$ ,  $f'''(\theta)$  ainsi que  $f(\theta_1)$ ,  $f'(\theta_1)$ ,  $f''(\theta_1)$ . A partir du point  $M_0$ , choisi arbitrairement (fig. 2) on construira le vecteur  $\overline{M_0 M'_0}$  de longueur  $f(\theta_0)$  et qui fait avec l'axe réel OX l'angle  $\theta_0 + \frac{\pi}{2}$  puis par  $M'_0$  on construira le vecteur  $\overline{M'_0 M''_0}$  de longueur  $|f'(\theta_0)|$  et perpendiculaire à  $\overline{M'_0 M_0}$ . On construira de même  $\overline{M''_0 M'''_0}$  perpendiculaire à  $\overline{M'_0 M''_0}$  de longueur  $|f''(\theta_0)|$  et enfin le vecteur  $\overline{M'''_0 \Omega}$  perpendiculaire à  $\overline{M''_0 M'''_0}$  et de longueur  $|f'''(\theta)|$ . Nous désignerons la figure  $M_0 M'_0 M''_0 M'''_0 \Omega$  sous le nom d'orthogone proposé par M. D'OCAGNE pour désigner une figure analogue utilisée dans le calcul des polynômes par la méthode de Lill.



Seul le premier côté de l'orthogone  $\overline{M'_0 M_0}$  a un sens bien déterminé car nous avons supposé  $f(\theta) > 0$ . Les sens des autres côtés dépendent du signe de  $f'$ ,  $f''$ ,  $f'''$  qui peuvent être négatifs. Pour tracer l'orthogone dans le sens convenable on s'aidera d'une figure d'orientation formée de quatre flèches marquées  $f'''$ ,  $f''$ ,  $f'$ ,  $f$  qui indique les sens relatifs des côtés d'un orthogone pour lequel les quantités  $f'''$ ,  $f''$ ,  $f'$ ,  $f$  sont positives.

Parvenu au point  $\Omega$  on fera tourner dans le sens trigonométrique le côté  $\Omega M'''_0$  de l'angle  $(\theta_1 - \theta_0)$  d'où le côté  $\Omega M'''_1$  à partir duquel on construira l'orthogone  $\Omega M'''_1 M''_1 M'_1 M_1$  dont les côtés ont pour mesures respectives  $f'''(\theta)$ ,  $f''(\theta_1)$ ,  $f'(\theta_1)$  et  $f(\theta_1)$ . On aura ainsi évité le tracé des arcs des courbes  $\Gamma'''$ ,  $\Gamma''$ ,  $\Gamma'$  et  $\Gamma$ .

Des sept côtés des deux orthogones, deux seulement sont connus :  $M'_0 M_0 = f(\theta_0)$ ,  $M'_1 M_1 = f(\theta_1)$  qui sont donnés par les ordonnées extrêmes de l'arc considéré de la courbe (C). Mais il est facile de voir qu'en partageant l'intervalle angulaire  $\theta_1 - \theta_0$  en trois parties égales on obtient sur la courbe (C) quatre points dont les ordonnées  $y_1, y_2, y_3, y_4$  relevées sur la courbe (fig. 3) permettent de calculer facilement les 5 côtés inconnus des deux orthogones.

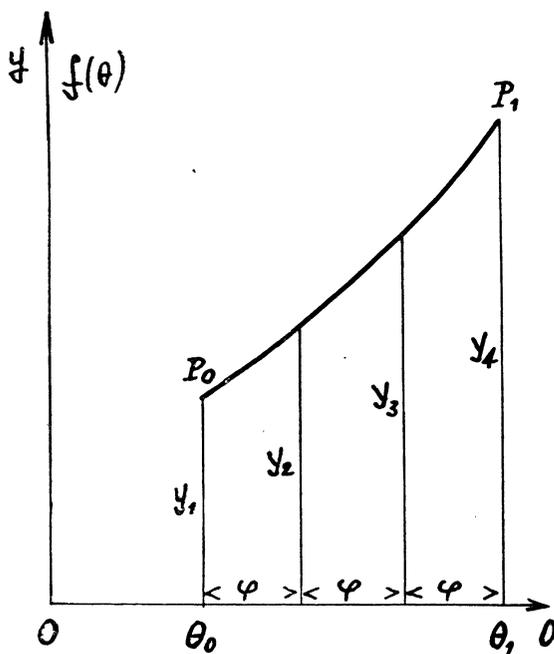


Fig. 3

On vérifiera qu'en posant  $\frac{\theta_1 - \theta_0}{3} = \varphi$  on obtient :

$$\begin{array}{ll}
 f(\theta_0) = y_1 & f(\theta_1) = y_4 \\
 \varphi f'(\theta_0) = -\frac{11}{6} y_1 + 3 y_2 - \frac{3}{2} y_3 + \frac{y_4}{3} & \varphi f'(\theta_1) = \frac{11}{6} y_1 - 3 y_2 + \frac{3}{2} y_3 - \frac{y_4}{3} \\
 \varphi^2 f''(\theta_0) = 2 y_1 - 5 y_2 + 4 y_3 - y_4 & \varphi^2 f''(\theta_1) = 2 y_1 - 5 y_2 + 4 y_3 - y_4 \\
 \varphi^3 f'''(\theta_0) = \varphi^3 f'''(\theta_1) = -y_1 + 3 y_2 - 3 y_3 + y_4 &
 \end{array}$$

Ces formules permettent de calculer les côtés des deux orthogones par des opérations arithmétiques simples. On peut aisément leur trouver des interprétations géométriques qui permettraient de construire sans aucun calcul arithmétique les côtés des orthogones. Mais, comme nous nous en sommes assurés, cela ne présente aucun avantage. Toute construction inutile est nuisible et introduit des erreurs. Il vaut mieux apporter tout son soin à mesurer les quatre longueurs  $y_1, y_2, y_3, y_4$  et l'amplitude  $\theta_1 - \theta_0 = 3\varphi$ . Les calculs n'introduisent plus ensuite d'erreurs nouvelles et les coefficients des formules ci-dessus sont si simples que les opérations sont très rapides.

*Cas où  $f(\theta)$  est du second ou du premier degré.*

Lorsque  $f(\theta) = a + b\theta + \frac{c\theta^2}{2}$  les mêmes considérations s'appliquent mais les orthogones n'ont plus que trois côtés. En posant  $\theta_1 - \theta_0 = 2\varphi$  on obtient les formules suivantes qui permettent de calculer les côtés des orthogones.

$$\begin{aligned} f(\theta_0) &= y_1 & f(\theta_1) &= y_3 \\ \varphi f'(\theta_0) &= -\frac{3}{2}y_1 + 2y_2 - \frac{y_3}{2} & \varphi f'(\theta_1) &= \frac{3}{2}y_3 - 2y_2 + \frac{y_1}{2} \\ \varphi^2 f'' &= y_1 - 2y_2 + y_3 \end{aligned}$$

Lorsque la courbe (C) est une droite,  $f(\theta) = a + b\theta$ , les orthogones n'ont plus que deux côtés.

En posant  $\theta_1 - \theta_0 = \varphi$  on obtient :

$$\begin{aligned} f(\theta_0) &= y_1 & f(\theta_1) &= y_2 \\ \varphi f' &= y_2 - y_1 \end{aligned}$$

*Intégrales harmoniques.* Nous désignerons ainsi, parce qu'elles se rencontrent dans le calcul des harmoniques d'une fonction périodique des intégrales de la forme :

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} f(\theta) e^{in\theta}$$

$n$  peut être entier ou non, positif ou négatif. Si la fonction  $f(\theta)$  est un polynôme du troisième degré au plus  $f(\theta) = a + b\theta + \frac{c\theta^2}{2} + \frac{d\theta^3}{6}$  l'intégrale harmonique se ramène à l'intégrale

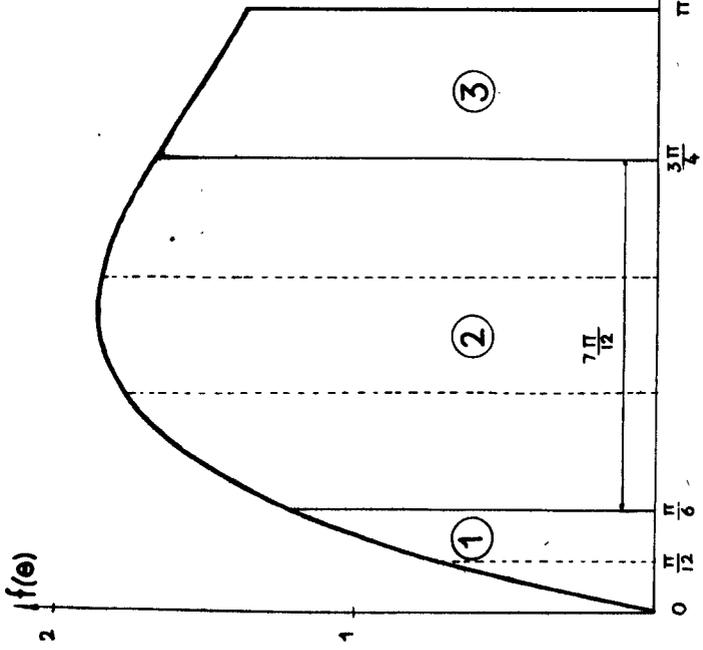
$$\frac{1}{n} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \left[ a + \frac{b}{n}\psi + \frac{c}{n^2}\frac{\psi^2}{2} + \frac{d}{n^3}\frac{\psi^3}{6} \right] e^{i\psi} d\psi. \quad \text{en posant } \psi = n\theta.$$

L'intégrale 
$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \left[ a + \frac{b}{n}\psi + \frac{c}{n^2}\frac{\psi^2}{2} + \frac{d}{n^3}\frac{\psi^3}{6} \right] e^{i\psi} d\psi.$$

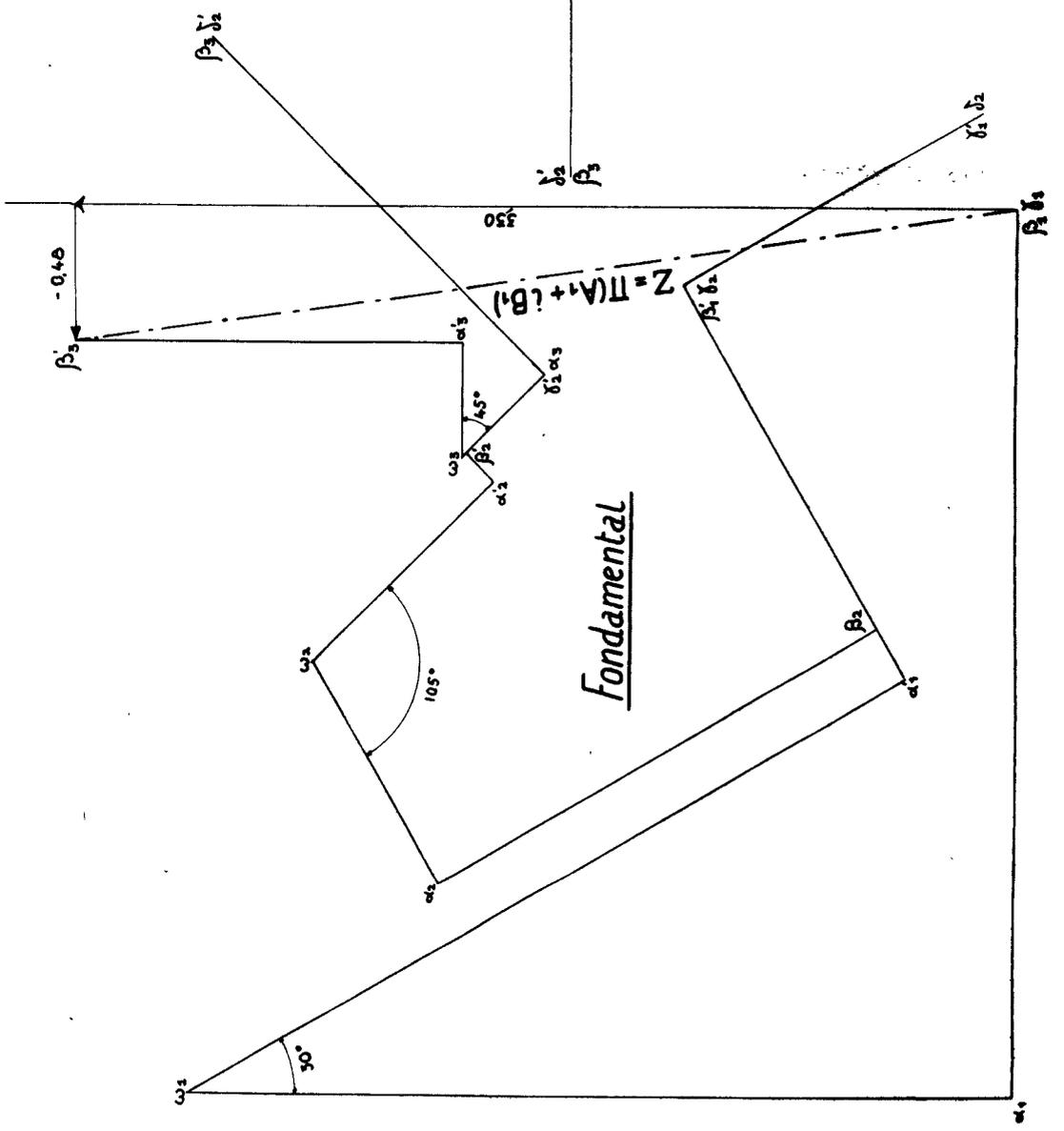
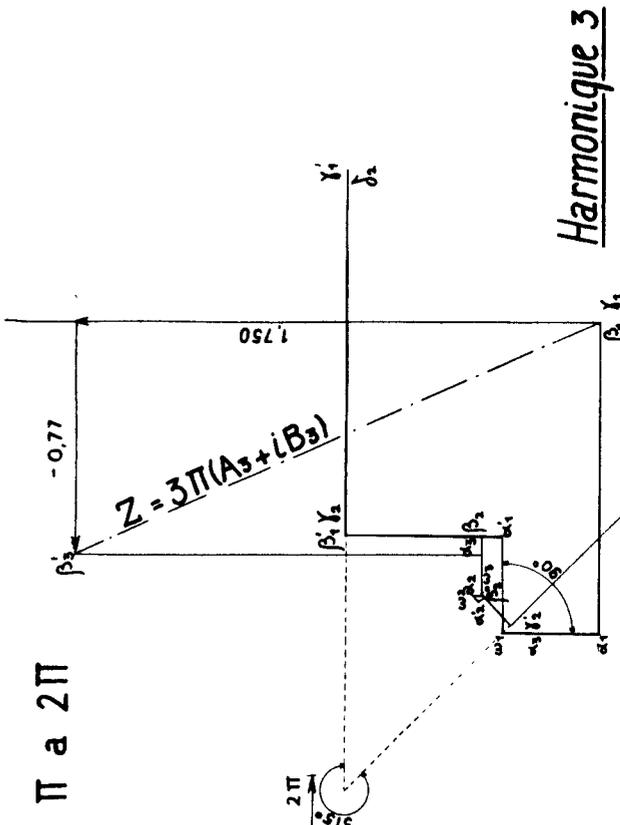
est du même type que l'intégrale fondamentale  $\int_{\theta_0}^{\theta_1} \left( a + b\theta + \frac{c\theta^2}{2} + \frac{d\theta^3}{6} \right) e^{i\theta} d\theta$  et, comme elle, se construira au moyen de deux orthogones. Ces derniers se déduisent facilement des orthogones correspondants de l'intégrale fonda-



# DEVELOPPEMENT EN SERIE DE FOURIER



$$\begin{cases} f(\theta) = 5 \times \frac{2\theta}{\pi} e^{-\frac{2\theta}{\pi}} & \text{de } 0 \text{ a } \pi \\ f(\theta) = 0 & \text{de } \pi \text{ a } 2\pi \end{cases}$$



second degré. Pour  $\frac{\pi}{3}$  il y a une discontinuité  $y'_1 - y_4$ . On a figuré la

construction de  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta) e^{i\theta} d\theta$ , représentée par le vecteur  $\overline{M_0 M_{\frac{\pi}{2}}}$ .

*Conduite du fractionnement en arcs partiels de la courbe  $y = f(\theta)$ .*

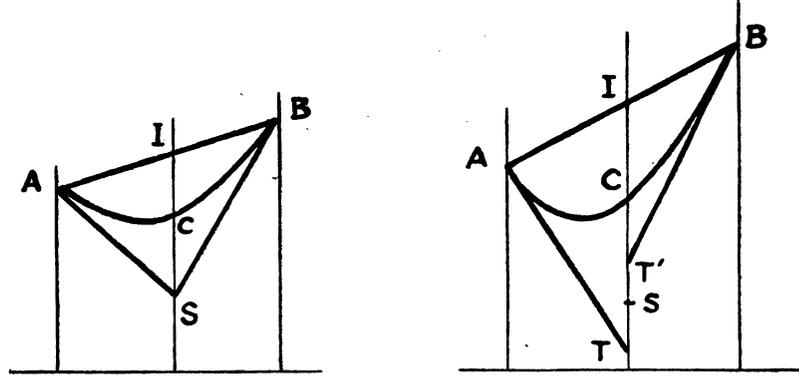
En fractionnant suffisamment un arc continu en arcs partiels suffisamment petits on pourra toujours opérer sur des arcs assimilables à des morceaux de paraboles du troisième et même du deuxième degré. Les orthogones de ces dernières sont plus faciles à construire et l'on peut être tenté de n'utiliser que de tels orthogones quitte à multiplier le nombre des arcs partiels.

Cependant il paraît préférable d'opérer sur un arc d'étendue notable qui peut être représenté par un arc du troisième degré plutôt que de le découper en deux arcs du deuxième degré. Dans le premier cas il n'y a que quatre ordonnées de la courbe à mesurer et les deux orthogones initial et final comportent huit vecteurs à tracer. Dans le second cas il faut mesurer cinq ordonnées et les quatre orthogones nécessaires comportent onze vecteurs différents à tracer. La précision est donc meilleure dans le premier cas, car les calculs, un peu plus compliqués que dans le second, n'introduisent pas d'erreurs autres que celles qui proviennent des mesures et des constructions qui sont moins nombreuses.

Il est difficile d'ailleurs de donner une règle absolue. On doit, il nous semble, rechercher le fractionnement en arcs aussi étendus que possible dont le nombre est aussi restreint que possible. Ce fractionnement se fera d'abord au jugé en isolant de longs arcs ne présentant pas d'inversion de courbure. On peut ensuite vérifier assez exactement si ce fractionnement est convenable en utilisant des propriétés connues des paraboles du second et troisième degré. Pour cela on tracera la corde AB d'un des arcs à vérifier (*fig. 5*). Par le milieu I de AB on mènera la parallèle à l'axe *oy* qui rencontre la courbe en C et l'on marquera le point S symétrique de I par rapport à C. Menons les tangentes aux extrémités A et B de l'arc. (Ce n'est pas une opération graphique très précise mais elle l'est suffisamment pour la vérification cherchée). Si ces tangentes se coupent à peu près au point S, à la tolérance près qui correspond à l'incertitude du tracé de ces tangentes, on est autorisé à admettre que l'arc AB convient et peut se représenter par un arc de parabole du second degré.

Si les deux tangentes rencontrent la droite IS en deux points T et T' nettement distincts et à peu près symétriques par rapport à S c'est une parabole du troisième degré qui convient. Pour plus de sécurité on dimi-

nuera un peu l'amplitude des arcs ainsi vérifiés. On trouvera un exemple de tels fractionnements dans l'épure représentée à la fin de cet article.



*Fig. 5*

## II

### EXEMPLES D'APPLICATIONS.

*Développement en série de Fourier d'une fonction périodique.*

$\varphi(t)$  étant une fonction périodique de  $t$  de période  $T$  dont le développement est

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n \frac{2\pi t}{T} + B_n \sin n \frac{2\pi t}{T}$$

les coefficients  $A_n$  et  $B_n$  de l'harmonique  $n$  seront donnés par la formule

$$\frac{T}{2} (A_n + i B_n) = \int_0^T \varphi(t) e^{i \frac{n2\pi t}{T}} dt.$$

qui, en posant  $\frac{2\pi}{T} t = \theta$ , se transforme en :

$$\pi (A_n + i B_n) = \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{in\theta} d\theta. \quad \text{avec } f(\theta) = \varphi\left(\frac{T\theta}{2\pi}\right)$$

Le fondamental est donné par

$$\pi (A_1 + i B_1) = \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{i\theta} d\theta.$$

Ces intégrales ont été complètement étudiées au chapitre précédent. Quant à la courbe  $f(\theta)$  c'est la courbe  $y = \varphi(t)$  elle-même qu'il n'y a pas à modifier. Seule l'échelle des abscisses est à transformer en angles  $\theta$ , de façon que la période  $T$  corresponde à l'angle  $2\pi$ . Il sera commode de diviser la période en 24 parties égales correspondant chacune à  $\frac{\pi}{12}$  ou  $15^\circ$ .

On essaiera, autant que possible, de fractionner en arcs partiels correspondant à des multiples entiers de  $\frac{\pi}{12}$ , ce qui facilite les tracés des orthogones au moyen des équerres à 45°, 60°, 30° et au besoin à l'aide d'une petite équerre supplémentaire à 15° que l'on fabriquera facilement.

*Développement d'une fonction en intégrale de Fourier.*

Nous supposons que la fonction  $\varphi(t)$  est nulle lorsque  $t < 0$  et qu'elle s'annule lorsque  $t$  augmente indéfiniment d'une façon telle que  $\int_0^{\infty} \varphi(t) dt$  ait un sens.

La fonction  $\varphi(t)$  est représentée par une courbe qui, pratiquement, devient indiscernable de l'axe des abscisses à partir d'une valeur T.

Son développement en intégrale de Fourier est :

$$\varphi(t) = \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} G(\omega) e^{i\omega t} dt.$$

où  $G(\omega)$  est une fonction complexe de la variable réelle  $\omega$  qu'il s'agit de calculer. Elle est donnée par la formule :

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Nous retrouvons une intégrale rencontrée, au changement près de  $i\omega t$  en  $-i\omega t$ . Il suffira de prendre l'imaginaire conjuguée  $\overline{G(\omega)}$  et de faire le changement de variable  $t = \frac{\theta}{\omega}$  pour ramener l'intégrale à la forme :

$$\overline{G} = \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{\infty} f(\theta) e^{i\theta} d\theta.$$

valable pour  $\omega \neq 0$ . Lorsque  $\omega = 0$ , on obtient directement l'intégrale réelle

$$G(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \varphi(t) dt.$$

qui s'intègre par la méthode de Massau. Celle-ci donnera un résultat si l'on sait, à l'avance, que l'intégrale précédente a un sens. Le graphique est ici impuissant à en décider et ce sont des considérations sur la nature physique du problème qui peuvent seules indiquer comment  $\varphi(t)$  tend vers zéro lorsque  $t$  augmente indéfiniment.

Le calcul de  $\overline{G}(\omega)$  est tout à fait analogue à celui du développement en série d'une fonction périodique. On commencera donc par une valeur simple de  $\omega$ , 1 par exemple

$$\overline{G}(1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^T \varphi(t) e^{it} dt.$$

Si l'on remarque que l'on peut toujours choisir  $T$  de façon qu'il soit égal à  $2K\pi$ ,  $K$  étant un nombre entier, l'intégrale devient

$$\overline{G}(1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2K\pi} \varphi(\theta) e^{i\theta} d\theta$$

qui se résout comme on l'a vu plus haut, sauf qu'ici l'intégration peut porter sur plusieurs circonférences au lieu d'une seule.

Les intégrales « harmoniques »

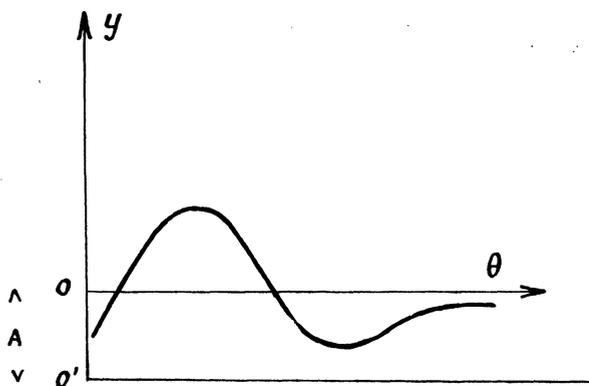
$$\overline{G}(\omega) = \int_0^{2K\pi} \varphi(\theta) e^{i\omega\theta} d\theta.$$

s'obtiennent de la même façon que les harmoniques d'une fonction périodique, mais dans ce cas  $\omega$  peut prendre des valeurs négatives et non entières.

Une difficulté graphique apparaît, qui n'existait pas dans le développement en série de Fourier des fonctions périodiques, lorsque la fonction  $\varphi(t)$  change de signe entre 0 et  $+\infty$ .

En lui ajoutant une constante convenable  $A$ , ce qui revient à déplacer l'axe des  $t$ , (*fig. 6*) on ajoute à l'intégrale cherchée  $G(\omega)$  l'intégrale

$$\int_0^{2K\pi} \frac{A}{2\pi} e^{i\omega t} dt = \frac{A}{i 2\pi \omega} (e^{2iK\omega\pi} - 1)$$



*Fig. 6*

qui n'est nulle que lorsque  $\omega$  est entier, (positif ou négatif).

A l'intégrale, calculée graphiquement, de la courbe décalée de  $A$  il faudra donc ajouter la quantité complexe  $\frac{iA}{2\pi\omega} (e^{2iK\omega\pi} - 1)$  dont la *figure 7* indique la construction en  $MB$ ;  $\varepsilon$  désigne la partie non entière de  $K\omega = N + \varepsilon$ .

Image d'une fonction dans la transformation de Laplace.

C'est l'intégrale complexe  $F(p) = \int_0^{\infty} h(t) e^{-pt} dt$

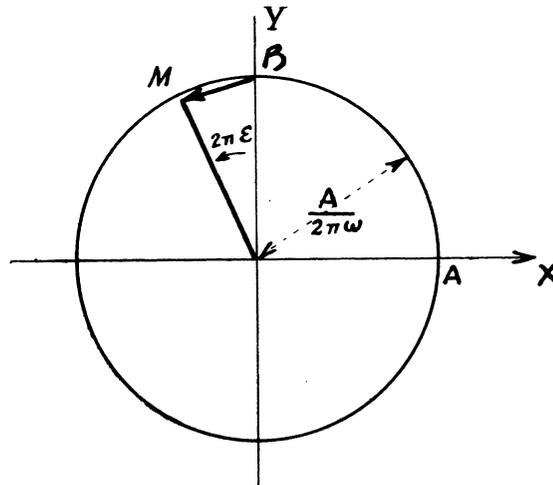


Fig. 7

$h(t)$  étant la fonction réelle de  $t$  à transformer, et  $p$  désignant l'imaginaire  $\gamma + i\omega$  où l'on suppose  $\gamma \geq 0$ .

Elle s'écrit encore  $F(\gamma + i\omega) = \int_0^{\infty} h(t) e^{-\gamma t} e^{-i\omega t} dt$ . et détermine dans le plan transformé deux familles de courbes isothermes les unes cotées  $\gamma$  ( $0 \leq \gamma$ ) les autres cotées  $\omega$  (de  $-\infty$  à  $+\infty$ ).

Le problème revient à construire pour quelques valeurs particulières de  $\gamma$  les courbes  $\gamma = \text{Constante}$  en y marquant les points qui correspondent à des valeurs particulières de  $\omega$  comprises entre  $-\infty$  et  $+\infty$ . La symétrie de la formule permet de se limiter aux valeurs de  $\omega$  variant de  $-\infty$  à 0.

On est alors ramené au calcul déjà rencontré plus haut de l'intégrale  $\int_0^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$  en posant  $f(t) = h(t) e^{-\gamma t}$ . Il faut donc, pour chaque valeur de  $\gamma$  considérée, construire la courbe  $y = f(t) = h(t) e^{-\gamma t}$ . Cette construction peut évidemment se faire par le calcul en s'aidant d'une table de  $e^{-x}$ .

On peut aussi opérer par voie graphique en utilisant la courbe  $y = e^{-x}$  tracée une fois pour toutes sur un transparent qu'on appliquera sur l'épure et qui permettra, presque à vue, d'effectuer graphiquement les multiplications de  $h(t)$  par  $e^{-\gamma t}$ . Le procédé, très rapide, comporte de nombreuses variantes sur lesquelles nous n'insisterons pas ici.

En calculant par la méthode de Massau l'intégrale réelle

$$\int_0^{\infty} h(t) e^{-\gamma t} dt$$

on obtient  $F(\gamma)$  qui correspond à  $\omega = 0$ .

On calcule ensuite les intégrales  $F(\gamma + i\omega)$  pour différentes valeurs de  $\omega$  exactement comme on l'a vu pour le développement en intégrale de Fourier, ce qui permet de construire la courbe  $\gamma = C^{te}$  cotée de  $\omega = -\infty$  à  $\omega = +\infty$ .

En recommençant pour différentes valeurs de  $\gamma$  on pourra tracer le réseau isotherme complet qui représente dans le plan complexe image la fonction transformée de  $h(t)$

$$F(p) = X(\gamma, \omega) + i Y(\gamma, \omega).$$

Dans les problèmes de calcul symbolique il sera souvent suffisant de construire une seule courbe  $\gamma = C^{te}$  du réseau,  $\gamma$  étant choisi de façon à conduire à des constructions simples fournissant une courbe qui utilise au mieux la feuille de papier disponible pour l'épure.

*Calcul de l'original à partir de son image.*

Dans le plan complexe de l'image  $F(p)$  d'une fonction  $h(t)$  à déterminer nous supposons qu'on puisse isoler une courbe correspondant à une valeur constante connue de  $\gamma$ , partie réelle de  $p = \gamma + i\omega$ , cette valeur de  $\gamma$  étant positive.

La courbe est cotée en fonction de  $\omega$ , c'est-à-dire qu'à côté de chacun de ses points figure la valeur correspondante de  $\omega$  depuis  $-\infty$  jusqu'à  $+\infty$ .

La formule de Mellin-Fourier

$$h(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(p) e^{pt} dp$$

permet de retrouver l'original. Elle s'écrit ici

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\gamma + i\omega) e^{\gamma t} e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{e^{\gamma t}}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} X(\gamma, \omega) e^{i\omega t} d\omega + \frac{i e^{\gamma t}}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} Y(\gamma, \omega) e^{i\omega t} d\omega \end{aligned}$$

où  $X(\gamma, \omega)$  et  $Y(\gamma, \omega)$  sont représentées par les projections sur l'axe réel et l'axe imaginaire du vecteur représentatif de  $F(\gamma + i\omega)$ .

On relèvera donc ces valeurs de  $X$  et  $Y$  et, construisant en fonction de  $\omega$  les deux courbes  $y = X(\gamma, \omega)$ ,  $y = Y(\gamma, \omega)$ , on est ramené au calcul de deux intégrales du type déjà étudié.

## III

## EXEMPLE D'APPLICATION A UN CALCUL NUMÉRIQUE.

La *figure 8* représente la reproduction réduite d'une épure effectuée dans le but de déterminer expérimentalement les possibilités de la méthode.

On a cherché le développement en série de Fourier de la fonction

$$\begin{cases} f(t) = 5te^{-t} & \text{de } t = 0 \text{ à } t = 2 \\ f(t) = 0 & \text{de } t = 2 \text{ à } t = 4 = T \end{cases}$$

La période  $T$  était égale à 4.

Le calcul donne pour les coefficients de l'harmonique  $n$

$$A_n = -\frac{5}{2} \frac{\frac{n^2 \pi^2}{4} - 1 + \left(\frac{n^2 \pi^2}{4} + 3\right) e^{-2} \cos n\pi}{\left(\frac{n^2 \pi^2}{4} - 1\right)^2 + n^2 \pi^2}$$

$$B_n = -\frac{5n\pi}{2} \frac{\left(\frac{n^2 \pi^2}{4} - 1\right) e^{-2} \cos n\pi + 3 e^{-2} \cos n\pi - 1}{\left(\frac{n^2 \pi^2}{4} - 1\right)^2 + n^2 \pi^2}$$

Le graphique a été effectué à l'échelle de 100<sup>mm</sup> pour 1. La courbe  $y = f(t)$  a été divisée en trois arcs partiels (1) (2) (3). Le premier (1) était assimilable à une parabole du 2<sup>me</sup> degré, le second (2) à une parabole du 3<sup>me</sup> degré et le troisième (3) à une droite à cause du voisinage du point d'inflexion qui correspond à  $t = 2$ .

On trouve ainsi des orthogones à deux, trois et quatre côtés. L'orthogone initial de (1) a deux de ses sommets confondus parce que la courbe part de l'origine.

Les vecteurs en trait mixte représentent les grandeurs complexes

$$Z_1 = \pi (A_1 + i B_1) \text{ pour le fondamental}$$

$$Z_2 = 2\pi (A_2 + i B_2) \text{ pour le 2<sup>me</sup> harmonique}$$

$$Z_3 = 3\pi (A_3 + i B_3) \text{ pour le 3<sup>me</sup> harmonique}$$

On constate bien que ces trois vecteurs sont du même ordre de grandeur.

Le calcul graphique du fondamental est le seul qui demande un peu de temps et une attention spéciale.

Le calcul des harmoniques suivants est au contraire extrêmement rapide.

Le tableau suivant permet de comparer les valeurs calculées à l'aide des formules précédentes et celles données par le graphique.

$n$ rang de l'Harmonique	Coefficients	Calcul	Graphique
1 (fondamental)	$\pi A_1 =$	- 0,475	- 0,480
	$\pi B_1 =$	3,293	3,30
2	$2\pi A_2 =$	- 1,410	- 1,42
	$2\pi B_2 =$	- 0,506	- 0,495
3	$3\pi A_3 =$	- 0,778	- 0,77
	$3\pi B_3 =$	1,763	- 1,75

L'erreur apparaît comme voisine de 1/100 et correspond sur l'épreuve à des écarts de l'ordre du millimètre sur des longueurs de l'ordre du décimètre.

Il nous est difficile pour le moment de faire la part de l'erreur due au principe de la méthode et de celle qui provient du graphique, exécuté par un dessinateur d'habileté moyenne dont les yeux ne sont plus jeunes. Il nous semble qu'en travaillant à grande échelle on pourrait s'approcher de la précision du millième.

L'avantage incontestable du procédé est outre sa rapidité, sa facilité qui permet d'obtenir sans fatigue des résultats numériques que le calcul, quand il est possible, ne donne qu'aux prix d'efforts assez pénibles.