R. HURON

Sur la répartition des décimales de rang donné dans les tables numériques

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série, tome 15 (1951), p. 161-186
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1951_4_15__161_0>

SUR LA RÉPARTITION DES DÉCIMALES DE RANG DONNÉ DANS LES TABLES NUMÉRIQUES

par R. HURON

Résumé. — *Etude de la répartition des décimales de rang fixé, dans les tables numériques obtenues à partir d'une fonction vérifiant certaines conditions de régularité, lorsqu'on insère entre les valeurs extrêmes de la variable des moyens arithmétiques dont le nombre croît indéfiniment. Etude du cas où la variable est entière et où l'intervalle de variation est infini.*

Sont obtenues des formules donnant les valeurs :

de la moyenne de ces décimales;

de la fréquence de chacun des chiffres : 0, 1, ... 9.

INTRODUCTION

Dans un article paru le 15 avril 1899, dans la « *Revue Générale des Sciences* » et reproduit dans « *Science et Hypothèse* »(1), Henri POINCARÉ écrit : « quelle est la probabilité pour que la 5^me^ décimale d'un logarithme pris au hasard dans une table soit un 9? On n'hésitera pas à répondre que cette probabilité est 1/10 » et plus loin il envisage le problème suivant : écrivons 10.000 nombres correspondants aux 10.000 premiers logarithmes d'une table, chacun de ces nombres étant égal à + 1 si la troisième décimale du logarithme correspondant est paire et à — 1 dans le cas contraire; prenons ensuite la moyenne de ces 10.000 nombres. « Je n'hésiterai pas à dire que la moyenne de ces 10.000 nombres est probablement nulle... la propriété est vraie non seulement du logarithme, mais d'une fonction continue quelconque... »

En 1917, J. FRANEL (2) montrait que si $P_i(n)$ est le nombre des décimales paires de rang i des logarithmes décimaux des nombres : 1, 2,... n, le rapport $\frac{P_i(n)}{n}$ ne tend pas vers une limite déterminée quand n augmente indéfiniment, i étant supposé fixe. Il prouvait aussi que la moyenne des n premières décimales de l'ordre i ne tend pas vers une limite déter-

1. Pages 220 et 224.

2. « A propos des tables de logarithmes » — Vierteljarhrsschrift der Natur forschenden Gesellschaft in Zurich. 1917, pp. 286-295.

minée quand n croît indéfiniment et que la fréquence de la décimale l ($l = 0, 1, 2, \ldots 9$) croît avec l. Il signalait en outre que sa méthode était applicable à toute fonction croissante $f(n)$ telle que :

$$\underset{n=\infty}{\text{limite}} \frac{f(n)}{n} = 0$$

J. FRANEL ne fait aucune application numérique et ses conclusions peuvent paraître imprécises. M. G. KENDALL pouvait écrire en 1948 : « *Just what does happer does not appear to be known...* » [3].

Nous nous posons un problème un peu différent et nous étudions dans ce mémoire quelques propriétés de la répartition des décimales de rang i dans les tables numériques obtenues à partir d'une fonction $f(x)$ continue, croissante ou décroissante, lorsqu'on insère entre les valeurs extrêmes a et b de la variable des moyens arithmétiques dont le nombre n croit indéfiniment. On peut supposer $f(x)$, a et b positifs, $b > a$. Nous montrons que ce problème contient celui de J. FRANEL.

La première partie est consacrée à l'étude de la moyenne : m des décimales de rang i; la seconde à l'étude de la fréquence relative : f_l des décimales l ($l = 0, 1, 2, \ldots 9$).

Nous donnons dans chaque cas une formule générale résolvant théoriquement le problème, puis nous étudions quelques cas particuliers où les limites peuvent se calculer rigoureusement. L'application de la formule sommatoire d'EULER-MAC-LAURIER dans le cas où $f'(x)$ et $f''(x)$ sont différent de zéro sur le segment (a, b) nous permet d'établir des formules donnant des valeurs approchées de ces limites dans les cas les plus généraux et de répondre ainsi partiellement à la question posée par M. G. KENDALL.

On peut dire que m est d'autant plus voisin de 4,5 et f_l de 1/10, que i est grand et que les oscillations autour de ces valeurs sont de faible amplitude.

Nous n'explicitons les calculs que dans le cas d'une fonction croissante. La transposition à l'autre cas se fait aisément. Nous avons tenu à faire de nombreuses vérifications numériques, qui mieux que des symboles abstraits montrent la véritable allure des phénomènes.

---

3. « Random sampling numbers » in « The advened Theory of Statistics » — I, p. 193.

PREMIÈRE PARTIE

MOYENNE ARITHMÉTIQUE DES DÉCIMALES DE RANG i.

[1]. — *Énoncé du problème.*

Soit $f(x)$ une fonction donnée que nous supposons continue, monotone et positive sur le segment (a, b) $(o < a < b)$. Insérons entre a et b des moyens arithmétiques, nous obtenons pour x la suite de valeurs :

$$a_0 = a, \quad a_1, \quad a_2, \quad \dots \quad a_r \quad \dots \quad a_{n-1}, \quad a_n = b$$

avec, si $\dfrac{b-a}{n} = h$

$$a_r = a + rh.$$

Nous en déduisons la table des valeurs de $f(x)$:

$$f(a) \quad f(a_0)\,; \quad f(a_1)\,; \quad f(a_2) \;\dots \quad f(a_n) = f(b)$$

et nous nous proposons d'étudier dans cette table la répartition des décimales de rang i, *lorsque* n *tend vers l'infini.*

[2]. — *Notations.*

D'une manière générale la partie entière du nombre x sera représentée par $[x]$, la décimale de rang i par d^i. Nous pouvons alors écrire :

$$x = [x], d^1\, d^2\, d^3 \dots d^i \dots$$

les d^i ne pouvant être tous égaux à 9 à partir d'un certain rang. On en déduit :

(1) $$d^i = [10^i x] - 10\,[10^{i-1} x]$$

Nous poserons :

$$A^i = [10^i f(a)]$$
$$B^i = [10^i f(b)]$$

et si $y = f(x)$, $x = \varphi(y)$. D'après nos hypothèses $\varphi(y)$ existe, est monotone et continue sur le segment d'extrémités : $f(a)$, $f(b)$.

[3]. — Nous nous proposons de calculer[1] :

(2) $$m = \lim_{n=\infty} \frac{1}{h} \sum_{r=1}^{r=n} d^i_r$$

d^i_r représentant la i^me^ décimale de $f(a_r)$.

1. Nous écartons la i^me^ décimale de $f(a)$. Si on veut en tenir compte les transformations à faire sont insignifiantes.

D'après (1) on a :

$$m = \lim_{n=\infty} : \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{r=n} [10^i f(a_r)] - \frac{10}{n} \sum_{r=1}^{r=n} [10^{i-1} f(a_r)]$$

soit avec des notations évidentes :

$$m = \lim_{n=\infty} : \frac{S^i_n}{n} - 10 \frac{S^{i-1}_n}{n} \tag{3}$$

[4]. — *Calcul de* S^i_n :

Cas où $f(x)$ *est une fonction croissante.* Construisons la courbe (C_i) d'équation :

$$y = 10^i f(x)$$

et coupons la par des droites :

$y = A^i \leqslant f(a)$; $y = A^i + 1$; $y = A^i + 2$; ... $y = B^i \leqslant f(b)$

Posons :

$$x_1 \varphi = \left(\frac{A^i + 1}{10^i}\right); \; x_2 = \varphi\left(\frac{A^i + 2}{10^i}\right); \; \ldots\ldots; \; x_k = \varphi\left(\frac{B^i}{10^i}\right) \tag{4}$$

Si :

$$\begin{array}{ll} a < a_r < x_1 , & [10^i f(a_r)] = A^i \\ x_1 \leqslant a_r < x_2 , & [10^i f(a_r)] = A^i + 1 \\ \ldots\ldots\ldots & \\ x_k \leqslant a_r \leqslant b , & [10^i f(a_r)] = B^i \end{array}$$

Désignons par λ_j le nombre des points d'abscisses a_r pour lesquels on a:

$$x_j \leqslant a_r < x_{j+1}$$

si $j \neq k$, et

$$x_k \leqslant a_n \leqslant b$$

si $j = k$, on peut alors écrire :

$$S^i_n = \lambda_0 A^i + \lambda_1 (A^i + 1) + \lambda_2 (A^i + 2) \ldots + \lambda_k B^i$$

d'où :

$$\frac{S^i_n}{n} = A^i + \frac{\lambda_1}{n} + 2 \frac{\lambda_2}{n} + \ldots j \frac{\lambda_j}{n} + \ldots\ldots (B^i - A^i) \frac{\lambda_k}{n}$$

Mais : $$\lambda_j = \frac{x_{j+1} - x_j}{\frac{b-a}{n}}$$ avec $-1 \leqslant \varepsilon_j \leqslant 1$

d'où :

$$\frac{S^i_n}{n} = A^i + \frac{1}{b-a} [(x_2 - x_1) + 2(x_3 - x_2) + 3(x_4 - x_3) + \ldots$$
$$\ldots (B^i - A^i)(b - x_k)]$$
$$+ \frac{1}{n} [\varepsilon_1 + 2 \varepsilon_2 + 3 \varepsilon_3 + \ldots + (B^i - A^i) \varepsilon_k]$$

Si i *est fixé* le dernier crochet est borné, on a donc :

$$(5)\qquad \sigma^i = \lim_{n=\infty} \frac{S^i_n}{n} = \frac{1}{b-a}\left[B^i b - A^i a - (x_1 + x_2 + \ldots + x_k)\right]$$

[5]. — *Majoration de l'erreur commise.*

Si on utilise (5) pour n fini, le terme négligé est :

$$\alpha = \frac{1}{n}\left[\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \ldots + (B^i - A^i)\,\varepsilon_k\right]$$

Nous avons :

$$|\alpha| \leqslant \frac{1}{n}\left[1 + 2 + 3 \ldots + (B^i - A^i)\right]$$

d'où :

$$(6)\qquad |\alpha| \leqslant \frac{(B^i - B^i + 1)(B^i - A^i)}{2n}$$

[6]. — *Calcul de* S^i_n *dans le cas où* $f(x)$ *est décroissante.*

Les modifications a apporter aux raisonnements précédents sont peu importantes, on trouve :

$$(7)\qquad \sigma^i = \lim_{n=\infty} \frac{S^i_n}{n} = \frac{1}{b-a}\left[B^i b - A^i a + (x_1 + x_2 + \ldots + x_k)\right]$$

[7]. — *Étude de quelques exemples.*

L'emploi des formules générales (5) ou (7) est intéressant lorsqu'il est possible d'évaluer exactement la somme :

$$s = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$$

qui dans le cas d'une fonction croissante s'écrit :

$$(8)\qquad s = \varphi\left(\frac{A^i + 1}{10^i}\right) + \varphi\left(\frac{A^i + 2}{10^i}\right) + \ldots + \varphi\left(\frac{B^i}{10^i}\right)$$

et dans celui d'une fonction décroissante :

$$(9)\qquad s = \varphi\left(\frac{B^i + 1}{10^i}\right) + \varphi\left(\frac{B^i + 2}{10^i}\right) + \ldots + \varphi\left(\frac{A^i}{10^i}\right)$$

ceci conduit naturellement à l'étude des cas simples suivants qui pourraient être multipliés.

[8]. — *Exemple I* : $y = x$.

1° *Prenons* $a = o$; b *entier*

on a :

$$\lim_{n=\infty} \frac{S^i_n}{n} = 10^i b - \frac{10^i b + 1}{2}$$

d'où : $m = 4{,}5.$

2° *Prenons* $a = o$; b *quelconque*

Nous avons : $B^i = [10^i\, b]$ et

$$\lim_{n=\infty} \frac{S'_n}{n} = B^i - \frac{B^i\,(B^i+1)}{2\,b\,10^i}$$

d'où :

(10) $m = B^i - 10\,B^{i-1} + \dfrac{1}{2\,b\,10^i}\,[100\,B^{i-1}\,(B^{i-1}+1) - B^i\,(B^i+1)]$

Posons

(11) $$10^{i-1}\,b = B^{i-1} + \frac{d^i}{10} + \frac{\alpha}{100}$$

où d^i est mis à la place de d^i_b, *décimale de rang* i *de* $f(b)$ et α étant un nombre tel que : $o \leqslant \alpha < 10$

on a : $d^i = B^i - 10\,B^{i-1}$ d'où :

(12) $$m = 4{,}5 + \frac{1}{2.10^i\,b}\left[(d^i)^2 + (0{,}2\,\alpha - 10)\,d^i - \frac{9}{10}\,\alpha\right]$$

Étude de la variation de m *en fonction de* d^i.

Le crochet de (12) est un trinôme du second degré en d^i on vérifiera que pour d^i variant de 0 à 9 ce trinôme est négatif et que son minimum a lieu pour d^i égal à l'entier le plus voisin de $5 - \dfrac{\alpha}{10}$, c'est-à-dire : $d^i = 4$ ou 5 (si $\alpha > 5$ ou $\alpha < 5$).

Si nous posons :

(13) $$m = 4{,}5 + \xi$$

et si nous appelons ξ *le terme correctif,* nous pouvons dire :

ξ est négatif pour toutes les valeurs de d^i et si i et b sont assez grands son minimum à lieu pour 4 ou 5.

Application numérique. :

Prenons $b = 1 + \dfrac{d}{10}$, d entier tel que $o \leqslant d \leqslant 9$

Ici $i = 1$ d'où :

$$m = 4{,}5 + \tfrac{1}{2}\,\frac{d\,(d-10)}{10+d}$$

on en déduit le tableau :

d	m
0	4.500
1	4.090
2	3.833
3	3.692
4	3.642

5	3.666
6	3.750
7	3.882
8	4.055
9	4.263

A titre de vérification il est facile de calculer *directement* une valeur approchée de m, soit m'.

Prenons $d = 2$ $n = 10^6$, la table numérique sera :

0,0000012
0,0000024
0,0000036
. . . .
1,2000000

Les décimales de rang 1 se répartissent suivant le tableau suivant :

Valeur de la décimale	fréquence absolue
0	166.666
1	166.666
2	83.334
3	83.334
4	83.334
5	83.334
6	83.334
7	83.334
8	83.334
9	83.334
9	83.334

d'où : $m' = 3.833338$

$$| m - m' | < 5 \times 10^{-6}$$

En résumé nous pouvons conclure :

La limite pour n infini de la moyenne arithmétique des décimales de rang i des nombres :

$$k \times \frac{b}{n}$$

où $k = 1, 2 \ldots n$ et où b est un nombre donné

1° *est égale à* 4,5 *si b est un entier;*

2° *est égale à* 4,5 *si $10^\lambda\, b$ étant entier $i > \lambda$ (ou est ramené au* 1°);

3° *est inférieure à* 4,5 *dans les autres cas. Cette limite dépend alors de b, mais si b n'est pas très petit et si i est assez grand, m est très voisin de* 4,5 (2).

---

2. On peut voir facilement que : $\left| \xi \right| < \dfrac{99}{10^i .\, 4\, b}$

[9]. — *Exemple II* : $y = \sqrt{x}$.

Prenons $a = o$, b quelconque. $B^i = [10^i \sqrt{b}]$

$$s = \frac{1}{10^{2i}} \frac{B^i (B^i + 1)(2 B^i + 1)}{6}$$

d'où d'après (5) :

$$\sigma^i = B^i - \frac{1}{6\, b.\, 10^{2i}} B^i (B^i + 1) (2 B^i + 1)$$

Il en résulte, si d^i est la i^{me} décimale de $\sqrt{b}$:

(13) $$m = \sigma^i - 10\, \sigma^{i-1} = d^i + \frac{1}{6\, b.\, 10^{2i}} [10^3\, B^{i-1} (B^{i-1} + 1) (2 B^{i-1} + 1) - B^i (B^i + 1) (2 B^i + 1)]$$

ou en posant comme dans (11) :

$$10^{i-1} \sqrt{b} = B^{i-1} + \frac{d^i}{10} + \frac{\alpha}{100} = B^{i-1} + \theta$$

et après calculs faciles :

(14) $$\left\{ \begin{aligned} m = 4{,}5 + (4{,}5 - d^i) & \left[\frac{\theta^2}{10^{2i-2}\, b} - \frac{2\, \theta}{10^{i-1} \sqrt{b}}\right] \\ + \left(\frac{33}{2} - d^i - d^{i2}\right) & \left[\frac{1}{10^i \sqrt{b}} - \frac{\theta}{10^{2i}\, b}\right] \\ - \frac{2\, d^{i3} + 3\, d^{i2} + d^i}{10^{2i}, 6\, b} & \end{aligned} \right.$$

En posant toujours :

$$m = 4{,}5 + \xi$$

on voit que pour i et b assez grand la partie principale du terme correctif est :

(15) $$\frac{1}{10^i \sqrt{b}} \left[(d^i)^2 + (0{,}2\, \alpha - 10)\, d^i + 16{,}5 - \frac{9}{10} \alpha\right]$$

Etude d'un cas particulier

Prenons $10^{i-1} \sqrt{b}$ entier : $\theta = d^i = \alpha = o$

(14) devient :

$$m = 4{,}5 + \frac{33}{2\ 10^i \sqrt{b}}$$

Cette *moyenne est constamment supérieure à* 4,5.

Application numérique : $b = 1, \quad i = 1.$

$$m = 6{,}15$$

Il est aisé de vérifier ce résultat particulier en prenant $n = 10^{2p}$. p étant un nombre entier. On a alors :

$$y = \frac{1}{10^p} \sqrt{\lambda}$$

λ entier variant de 1 à 10^{2p}, On obtient le tableau suivant :

Intervalle de variation de λ	1^e décimale de y	Fréquence de cette décimale	Somme des décimales
1 à $1^2 . 10^{2p-2} - 1$	0	$1 \times 10^{2p-2}$	$0 \,.\, 10^{2p-2}$
$1^2 . 10^{2p-2}$ à $2^2 . 10^{2p-2} - 1$	1	$3 \times 10^{2p-2}$	$3 \,.\, 10^{2p-2}$
$2^2 . 10^{2p-2}$ à $3^2 . 10^{2p-2} - 1$	2	$5 \times 10^{2p-2}$	$10 \,.\, 10^{2p-2}$
$3^2 . 10^{2p-2}$ à $4^2 . 10^{2p-2} - 1$	3	$7 \times 10^{2p-2}$	$21 \,.\, 10^{2p-2}$
$4^2 . 10^{2p-2}$ à $5^2 . 10^{2p-2} - 1$	4	$9 \times 10^{2p-2}$	$36 \,.\, 10^{2p-2}$
$5^2 . 10^{2p-2}$ à $6^2 . 10^{2p-2} - 1$	5	$11 \times 10^{2p-2}$	$55 \,.\, 10^{2p-2}$
$6^2 . 10^{2p-2}$ à $7^2 . 10^{2p-2} - 1$	6	$13 \times 10^{2p-2}$	$78 \,.\, 10^{2p-2}$
$7^2 . 10^{2p-2}$ à $8^2 . 10^{2p-2} - 1$	7	$15 \times 10^{2p-2}$	$105 \,.\, 10^{2p-2}$
$8^2 . 10^{2p-2}$ à $9^2 . 10^{2p-2} - 1$	8	$17 \times 10^{2p-2}$	$136 \,.\, 10^{2p-2}$
$9^2 . 10^{2p-2}$ à $10^2 . 10^{2p-2} - 1$	9	$19 \times 10^{2p-2}$	$171 \,.\, 10^{2p-2}$
$10^2 . 10^{2p-2}$	0	1	0

$$\sum_{10^{2p}}^{1} = 6\;15{,}10^{2h-2}$$

$$m' = \frac{\sum_{10^{2p}}^{1}}{10^{2p}} = 6{,}15$$

La limite m' étant indépendant de p, elle est invariable si p tend vers l'infini et on a bien :

$$\underset{n=\infty}{\text{limite}} \frac{\sum_{n}^{1}}{n} = 6{,}15.$$

Retour au cas général.

Nous avons pour b et i assez grands :

$$(16) \quad m = 4{,}5 + \frac{1}{10^i \sqrt{b}} \left[(d^i)^2 + (0{,}2\,\alpha - 10)\, d^i + 16{,}5 - \frac{9}{10}\alpha \right] + \dots$$

Si z_1 désigne la quantité entre le crochet on peut dresser le tableau suivant :

Valeurs de d^i	Valeurs de z	Signe de z	Position de m par rapport à 4,5
0	$16{,}5 - 0{,}9\,\alpha$	$+$	$m > 4{,}5.$
1	$7{,}5 - 0{,}7\,\alpha$	$+$	$m > 4{,}5.$
2	$0{,}5\,(1 - \alpha)$	$+$ si $\alpha < 1$ o si $\alpha = 1$ $-$ si $\alpha > 1$	$m > 4{,}5.$ $m > 4{,}5.$ $m < 4{,}5.$

Valeurs de d^i	Valeurs de z_4	Signe de z_4	Position de m par rapport à 4.5
3	$-0,3\ (15+\alpha)$	$-$	$m < 4,5.$
4	$-0,1\ (75+\alpha)$	$-$	$m < 4,5.$
5	$-0,1\ (85-\alpha)$	$-$	$m < 4,5.$
6	$-0,3\ (25-\alpha)$	$-$	$m < 4,5.$
7	$0,5\ (\alpha-9)$	$-$ si $\alpha < 9$ 0 si $\alpha = 9$ $+$ si $\alpha > 9$	$m < 4,5.$ $m > 4,5.$ $m > 4,5.$
8	$0,5 + 0,7\,\alpha > 0$	$+$	$m > 4,5.$
9	$7,5 + 0,9\,\alpha > 0$	$+$	$m > 4,5.$

Le minimum de m a bien pour
$d^i = 4$ ou $d^i = 5$
suivant la valeur de α.

En résumé nous pouvons conclure.

La limite pour n infini de la moyenne arithmétique m des décimales de rang i des nombres :

$$\sqrt{k\frac{b}{n}} \quad (k = 1,2 \ldots . n;)$$

où b est un nombre positif donné, n'est jamais égale à 4,5 mais s'en rapproche d'autant plus que i et b sont grands.

Si $10^{i-1}\sqrt{b}$ est entier, (b est le carré d'une fraction décimale) m est toujours supérieur à 4,5.

Si b est quelconque, assez grand, ainsi que i, m est supérieur à 4,5 si la i^{me} décimale de $\sqrt{b}$ est l'un des nombres : 0, 1, 8, 9.
m est inférieur à 4,5 si cette décimale est : 3, 4, 5 *ou* 6.

Méthode pour une vérification numérique :

Si b est un entier quelconque, en prenant

$$n = b \times 10^{2p}$$

nous aurons à calculer les nombres $\sqrt{k\frac{b}{n}} = \frac{1}{10^p}\sqrt{k}$

($k = 1, 2 \ldots 10^{2p}$). Si i est le rang de la décimale choisie, il suffira de lire dans la table des racines carrées la décimale de rang $i - p$. Avec les tables de Barlow $p = 2$, on pourra prendre $i = 3, 4 \ldots$

[10]. — *Exemple III* : $y = \sqrt[3]{x}$

Prenons $a = o$ et b quelconque; $B^i = [10^i\sqrt[3]{b}]$

$$s = \frac{1}{10^{3i}}\,\frac{B^{i2}(B^i+1)^2}{4}$$

d'où :
$$\sigma^i = B^i - \frac{1}{4\,b.\,10^{3i}}\, B^{i2}\,(B^i + 1)^2$$

et

(17) $$m = d^i + \frac{1}{4\,b.\,10^{3i}}\; 10\;(B^{i-1})^2\,(B^{i2} + 1)^2 - B^{i2}\,(B^i + 1)^2$$

En posant maintenant :

$$10^{i-1}\sqrt{b} = B^{i-1} + \frac{d^i}{10} + \frac{\alpha}{100}$$

nous obtenons pour i et b assez grands :

(18) $$m = 4{,}5 + \frac{3}{2.10^i\, b^{1/3}}\left[(d^i)^2 + (0{,}2\,\alpha - 10)\, d^2 + 16{,}5 - \frac{9}{10}\,\alpha\right] + \dots$$

Le crochet de la partie principale du terme correctif est identique à celui obtenu dans l'étude de $y = \sqrt{x}$ [3], de sorte que toutes les conclusions de l'exemple précédent sont valables pour l'exemple actuel.

Etude d'un cas particulier.

Prenons : $10^{i-1}\,\sqrt[3]{b}$ entier, il vient :

$$m = 4{,}5 + \frac{99}{4.10^i\, b^{1/3}}$$

Cette moyenne est constamment supérieure à 4,5.

Application numérique : $b = 1$; $i = 1$

$$m = 6{,}975$$

En raisonnant comme dans l'exemple précédent on voit qu'en prenant $n = 10^{3p}$ la limite m' obtenue est indépendante de p. Elle est donc rigoureusement égale à m et il suffit de le vérifier pour $p = 1$. On a alors :

$$y = \frac{1}{10}\sqrt[3]{\lambda} \quad (\lambda = 1, 2, \dots 10^3)$$

d'où le tableau :

1re décimale de y	fréquence
1	7
2	19
3	37
4	61
5	91
6	127
7	169
8	217
9	271
0	1

3. Nous verrons que la propriété est générale.

On trouve $m' = \frac{6975}{1000} = 6{,}975$ comme attendu.

[11]. — *Remarque importante.*

Nous avons vu formule (6) que

$$\left| \sigma^i - \frac{S^i_n}{n} \right| < \frac{(B^i - A^i + 1)(B^i - A^i)}{2n}$$

Prenons $A^i = o$, $b = n$, le second membre devient :

$$\frac{(B^i + 1) B^i}{2n} = \frac{10^{2i} \overline{f(n)}^2 + (1 - 2\theta) 10^i f(n) - \theta + \theta^2}{2n}$$

Si $f(n)$ tend vers l'infini avec n

$$\frac{(B^i + 1) B^i}{2n} \backsim \frac{10^{2i}}{2} \cdot \frac{\overline{f(n)}^2}{n}$$

de sorte que dans le cas où :

$$\frac{\overline{f(n)}^2}{n} \rightarrow 0 \text{ avec } \frac{1}{n} \tag{19}$$

nous pouvons écrire :

$$\frac{S^i_n}{n} = B^i_n - \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{n} + \varepsilon_n \tag{20}$$

avec : $B^i_n = [10^i f(n)]$ et :

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = \varphi\left(\frac{1}{10^i}\right) + \varphi\left(\frac{2}{10^i}\right) + \dots + \varphi\left(\frac{B^i_n}{n}\right);$$

ε_n tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

La formule 20 est en particulier valable pour les fonctions :

1° $f(x) = x^m$ $o < m < \frac{1}{2}$

2° $f(x) = \log x$

Dans ce dernier cas elle n'est autre que la formule de base de M. J. FRANEL [4]. *Elle permet d'évaluer la limite de la moyenne arithmétique des i^{mes} décimales des valeurs de $f(x)$ pour les valeurs entières 1, 2 ... n ... de la variable.*

Bien entendu l'hypothèse $A^i = o$ n'est pas obligatoire.

[12]. — *Application à* $y = \sqrt[3]{x}$.

Il suffit dans (18) de poser $b = n$ et de faire tendre n vers l'infini. On obtient : $m = 4{,}5$ *quel que soit i.*

4. Les méthodes de J. FRANEL donnent la limitation $0 < m < 1$. Nous retrouverons ce résultat dans la deuxième partie.

[13]. — *Etude du cas général.*

Tout le problème revient à évaluer la somme :

$$s = \varphi\left(\frac{A^i + 1}{10^i}\right) + \varphi\left(\frac{A^i + 2}{10^i}\right) + \dots + \varphi\left(\frac{B^i}{10^i}\right)$$

qui s'écrit en posant : $h = \dfrac{1}{10^i}$; $\alpha = \dfrac{A^i}{10^i}$; $\beta = \dfrac{B^i}{10^i} = B^i h$

$$s = \varphi(\alpha + h) + \varphi(\alpha + 2h) + \dots\dots + \varphi(\beta) \tag{21}$$

On sait d'autre part que [5]

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\left\{\frac{f(a) + f(b)}{2} + f(a+h) + \dots + f[a + (n-1)h]\right\} - \frac{h^2}{12}\Big[f'(b) - f'(a)\Big] + \frac{h^4}{720}\Big[f'''(b) - f'''(a)\Big] - \mu\, h^6 \tag{22}$$

μ étant une quantité finie si $f(x)$ a des dérivées bornées.
Nous en déduisons :

$$s = \frac{\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)}{2} + \frac{1}{k}\int_\alpha^\beta \varphi(u)\,du + \frac{h}{12}[\varphi'(\beta) - \varphi'(\alpha)] + \varepsilon\, h^3 \tag{23}$$

Admettons que l'on ait :

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + \lambda \\ \beta &= \beta_0 + \xi \end{aligned} \tag{24}$$

λ et ξ étant des quantités suffisamment petites; nous écrirons avec une approximation suffisante :

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha) &= \varphi(\alpha_0) + \lambda\,\varphi'(\alpha_0) \dots \\ \varphi(\beta) &= \varphi(\beta_0) + \xi\,\varphi'(\beta_0) \dots \end{aligned}$$

$$\int_\alpha^\beta \varphi(u)\,du = \int_{\alpha_0+\lambda}^{\alpha_0} + \int_{\alpha_0}^{\beta_0} + \int_{\beta_0}^{\beta_0+\xi} = \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \varphi(u)\,du + \int_{\beta_0}^{\beta_0+\xi} \varphi(u)\,du - \int_{\alpha_0}^{\alpha_0+\lambda} \varphi(u)\,du$$

d'où en tenant compte que : $\varphi(u) = \varphi(\beta_0) + (u - \rho_0)\,\varphi'(\beta_0)$; etc...

$$\int_\alpha^\beta \varphi(u)\,du = \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \varphi(u)\,du + \xi\,\varphi(\beta_0) + \frac{\varphi'(\beta_0)}{2}\,\xi^2 - \left[\lambda\,\varphi(\alpha_0) + \frac{\varphi'(\alpha_0)}{2}\,\lambda^2\right]$$

et en définitive et approximativement :

$$\left\{\begin{aligned} s &= \varphi(\alpha+h) + \varphi(\alpha+2h) + \dots \varphi(\beta) = \frac{1}{2}\,[\varphi(\beta_0) - \varphi(\alpha_0)] + \frac{1}{h}\int_{\alpha_0}^{\beta_0} \varphi(u)\,du \\ &+ \frac{h}{12}\Big[\varphi'(\beta_0) - \varphi'(\alpha_0)\Big] + \xi\left[\frac{1}{h}\,\varphi(\beta_0) + \frac{1}{2}\,\varphi'(\beta_0)\left(1 + \frac{\xi}{h}\right) + \frac{h}{12}\,\varphi''(\beta_0)\right] \\ &- \lambda\left[\frac{1}{h}\,\varphi(\alpha_0) + \frac{1}{2}\,\varphi'(\alpha_0)\left(1 + \frac{\lambda}{h}\right) + \frac{h}{12}\,\varphi''(\alpha_0)\right]; \end{aligned}\right. \tag{25}$$

5. Voir par exemple J. Hadamard. Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique. Tome I, pp. 141 à 145.

Nous avons ici :

$$\alpha = \frac{10^i f(a) - \gamma^i}{10^i} = f(a) - \frac{\gamma^i}{10^i} \qquad 0 \leqslant \gamma^i < 1$$

De même :

$$\beta = f(b) - \frac{\theta^i}{10^i} \qquad 0 \leqslant \theta^i < 1$$

Il faut donc appliquer la formule (24) avec :

$$\left\{ \begin{array}{llll} \alpha_0 = f(a) & \text{d'où} & \varphi(\alpha_0) = a & \varphi'(\alpha_0) = \dfrac{1}{f(a)} \\ \lambda = -\dfrac{\gamma^i}{10^i} & & & \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{llll} \beta_0 = f(b) & \text{d'où} & \varphi(s_0) = b & \varphi'(s_0) = \dfrac{1}{f(b)} \\ \xi = -\dfrac{\theta^i}{10^i} & & & \end{array} \right.$$

Ce qui donne :

$$s = \frac{b-a}{2} + 10^i \int_{f(a)}^{f(e)} \varphi(u)\, du + \frac{1}{12.10^i} \left[\frac{1}{f'(e)} - \frac{1}{f'(a)} \right]$$
$$- \frac{\theta^i}{10^i} \left[10^i b + \frac{1}{2 f'(e)} (1 - \theta^i) + \frac{1}{12.10^i} \varphi''(\beta_0) \right]$$
$$+ \frac{\gamma^i}{10^i} \left[10^i a + \frac{1}{2 f'(a)} (1 - \gamma^i) + \frac{1}{12.10^i} \varphi''(\alpha_0) \right] \ldots\ldots$$

ou en n'écrivant pas les termes de degré supérieur à un en $h = \frac{1}{10^i}$

$$s = \frac{b-a}{2} + 10^i \int_{f(a)}^{f(e)} \varphi(u)\, du + a\gamma^i - b\theta^i + \frac{1}{12.10^i} \left[\frac{1}{f'(e)} - \frac{1}{f'(a)} \right]$$
$$+ \frac{\gamma^i (1-\gamma^i)}{2 f'(a).\, 10^i} - \frac{\theta^i (1-\theta^i)}{2 f'(b).\, 10^i}$$

d'où :

$$(26) \left\{ \begin{array}{l} \sigma^i = \dfrac{1}{2-a} \Big\{ B^i b - A^i a - \dfrac{b-a}{2} - 10^i \displaystyle\int_{f(a)}^{f(e)} \varphi(u)\, du + b\theta^i - a\gamma^i \\ \qquad - \dfrac{1}{12.10^i} \left[\dfrac{1}{f'(b)} - \dfrac{1}{f'(a)} \right] + \dfrac{\theta^i (1-\theta^i)}{2 f'(b)\, 10^i} - \dfrac{\gamma^i (1-\gamma^i)}{2 f'(a).\, 10^i} \Big\} \end{array} \right.$$

on en déduit :

$$(27) \left\{ \begin{array}{l} \sigma^i - 10\,\sigma^{i-1} = 4{,}5 + \dfrac{1}{b-a} \Big\{ b\,(B^i - 10\,B^{i-1}) - a\,(A^i - 10\,A^{i-1}) \\ \qquad + a\,(10\,\gamma^{i-1} - \gamma^i) - b\,(10\,\theta^{i-1} - \theta^i) \\ \qquad + \dfrac{33}{4\ 10^i} \left[\dfrac{1}{f'(b)} - \dfrac{1}{f(a)} \right] \\ \qquad - \dfrac{1}{2 f'(b)\, 10^i} \left[100\,\theta^{i-1} (1 - \theta^{i-1}) - \theta^i (1 - \theta^i) \right] \\ \qquad + \dfrac{1}{2 f'(a)\, 10^i} \left[100\,\gamma^{i-1} (1 - \gamma^{i-1}) - \gamma^i (1 - \gamma^i) \right] \Big\} \end{array} \right.$$

Mais nous avons :

$$10\,\theta^{i-1} = d^i + \frac{\alpha}{10} \qquad\qquad o \leqslant \alpha < 10$$

d'où : $$\theta^i = \frac{\alpha}{10}$$

De même :

$$10\,\gamma^{i-1} = \delta^i + \frac{\nu}{10} \qquad\qquad o \leqslant \nu < 10$$

$$\gamma^i = \frac{\nu}{10}$$

d^i et δ^i désignant en décimales de rang i de $f(b)$ et $f(a)$.
En portant ces valeurs dans (27) nous obtenons finalement :

$$(28)\left\{\begin{aligned} m = 4{,}5 + \frac{1}{2(b-a)\,10^i}\left\{\frac{1}{f'(b)}\left[d^{i2} - \left(10 - \frac{2\alpha}{10}\right)d^i + 16{,}5 - \frac{9\alpha}{10}\right]\right. \\ \left. - \frac{1}{f'(a)}\left[\delta^{i2} - \left(10 - \frac{2\nu}{10}\right)\delta^i + 16{,}5 - \frac{9\nu}{10}\right]\right\} + \ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

qui montre qu'en général $[f'(a)$ et $f'(b) \neq o]$ m tend vers 4,5 lorsque i grandit.

[14] — *Application.*

Pour $y = x^{\frac{1}{p}}$ $(p > 1)$; $a = o$; b quelconque on obtient :

$$m = 4{,}5 + \frac{p}{2\,b^{1/p}\,10^i}\left[d^{i2} - \left(10 - \frac{2\alpha}{10}\right)d^i + 16{,}5 - \frac{9\alpha}{10}\right]\ldots\ldots$$

Pour $p = 2$, $p = 3$ on retrouve les résultats déjà signalés,

— Si $\displaystyle \lim_{n=\infty} \frac{\overline{f(n)}^2}{n} = 0$

nous avons vu que l'on peut poser $b = n$; (28) montre alors que

$$m = 4{,}5$$

si $\displaystyle \lim_{n=\infty} n\,f'(n) = \infty$ (avec bien entendu $f'(a) \neq o$).

C'est le cas pour $f(x) = x^m \qquad o < m < \frac{1}{2}$.

Ce n'est pas le cas de $y = \log x = \dfrac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log} 10}$ que nous allons étudier maintenant.

[15]. — *Fonction* $y = \log x$. [6].

$$\varphi(u) = 10^{u}$$

s est une progression géométrique facile à sommer.

---

6. On pourra consulter J. Franel (loc. cité) où on trouvera quelques propriétés intéressantes.

Dans le cas où $a = 1$, $b = n$, on trouve :

$$m = d^i + q_i^{-\frac{\alpha}{10}} \left[10 \frac{q_i^{10-d^i}}{q_i^{10}-1} - \frac{q_i}{q_i - 1} \right]$$

$$\text{avec } q_i = 10^{\frac{1}{10^i}}$$

Si n est une puissance de 10, d^i et α sont nuls, d'où :

$$m = 10 \frac{q_i^{10}}{q_i^{10} - 1} - \frac{q_i}{q_i - 1}$$

Il est facile de voir que cette limite est voisine de 4,5 pour i grand.

Laissons b fixe et appliquons la formule (28) :

$$f(a) = \delta^i = \nu = o; \quad f'(a) = \frac{1}{\text{Log } 10} \qquad f'(b) = \frac{1}{b.\text{Log } 10}$$

d'où :

$$m = 4{,}5 + \frac{\text{Log } 10}{2(b-1)\,10^i} \left\{ b \left[d^{i^2} - \left(10 - \frac{2\alpha}{10}\right) d^i + 16{,}5 - \frac{9\alpha}{10} \right] - 16{,}5 \right\} + \ldots$$

Si b est par exemple une puissance de 10 il reste,

$$m = 4.5 + \frac{8{,}25 \text{ Log } 10}{10^i} + \ldots.$$

Sa limite est indépendante de b, comme il est facile de le voir en calculant :

$$\frac{1}{b-1} [\varphi^{(h)}(\beta_0) - \varphi^{(h)}(\alpha_0)] = \frac{p}{\text{Log } 10}$$

pour $\alpha_0 = o \qquad \beta_0 = \frac{\text{Log } b}{\text{Log } 10}.$

Donc, pour i assez grand, m est supérieur à 4,5.

Vérifications expérimentales.

A partir d'une table de logarithmes décimaux on trouve pour les nombres de 2 à 999 inclus et pour les deuxièmes décimales les fréquences absolues des chiffres $l = 0, 1, \ldots 9$ du tableau suivant. On en déduit une valeur expérimentale de m, soit m'.

Valeurs de l.	fréquence : f_l	$l \times f_l$
0	93	0
1	90	90
2	93	186
2	93	186
3	94	282

4	101	404
5	102	510
6	101	606
7	107	749
8	106	848
9	111	999
	998	4.674

d'où pour $b = 999$

$m' = 4{,}683.$

Appliquons notre formule; on a ici :

$d^2 = 9 \qquad \alpha = 9{,}57$ et pour valeur du terme correctif : 0,186

d'où $m = 4{,}5 + 0{,}186 = 4{,}686$

Pour $b = 1000$, $\sum_{l=0}^{l=9} l f_i$ est toujours 4.674 (jusqu'à 1.023 cette somme est invariable donc m' va décroître)

$d^2 = \alpha = o$ d'où :

$$m = 4{,}5 + 0{,}19 = 4{,}69$$

$$\text{et} \qquad m' = \frac{4.674}{999} = 4{,}68$$

La formule exacte :

$$\frac{10\, q_i^{10}}{q_i^{10}-1} - \frac{q_i}{q_i - 1}$$

donne : $m = 4{,}691.$

Étudions un cas où $m < 4{,}5$. D'après le tableau du n° 9 il suffit que : $d^i = 3, 4, 5$ ou 6.

Prenons $b = 436 \qquad d^2 = 3; \qquad \alpha = 9{,}49$

d'où : $z_1 = -7{,}5$

et pour le terme correctif : $-0{,}087$

soit : $m = 4{,}5 - 0{,}09 = 4{,}41.$

La table des logarithmes décimaux donne :

l	f_l	$l \times f_l$
0	49	0
1	44	44

2	44	88
2	44	88
3	48	144
4	41	164
5	40	200
6	40	240
7	44	308
8	40	320
9	45	405
9	45	405
	435	1.913

d'où $$m' = \ldots\ldots\ldots = \frac{1913}{436} = 4{,}40.$$

DEUXIÈME PARTIE

ETUDE DES FREQUENCES RELATIVES DES CHIFFRES : 0, 1, 2..9

[16]. — *Établissement de la formule générale* (1).

Nous supposons $f(x)$ croissante pour fixer les idées.
P^l_i désignera le nombre des décimales de rang i *égales à* l; l représentant l'un des chiffres : 0, 1, 2 ... 9. Ces décimales forment un ensemble L et les valeurs de a_r pour lesquelles la i^{me} décimale de $f(a_T)$ appartient à L forment un ensemble E.

Soit p un entier quelconque tel que

$$A^{i-1} + 1 \leqslant p \leqslant B^{i-1} - 1$$

les valeurs de a_r pour lesquelles on a :

$$p + \frac{l}{10} \leqslant 10^{i-1} f(a_r) < p + \frac{l+1}{10} \tag{1}$$

appartiennent à E.

En faisant varier p de $A^{i-1} + 1$ à $B^{i-1} - 1$ nous obtiendrons une partie de l'ensemble E, qu'il faudra compléter en y adjoignant les valeurs de a_r si elles existent telles que :

$$A^{i-1} + \frac{l}{10} \leqslant 10^{i-1} f(a_r) < A^{i-1} + \frac{l+l}{10}$$

ou :

$$B^{i-1} + \frac{l}{10} \leqslant 10^{i-1} f(a_r) < B^{i-1} + \frac{l+1}{10}$$

Si x est tel que $p + \dfrac{l}{10} = 10^{i-1} f(x)$, on a :

$$x = \varphi\left[\frac{p}{10^{i-1}} + \frac{l}{10^i}\right]$$

D'une manière générale, nous poserons :

$$x_p = \varphi\left[\frac{A^{i-1} + p}{10^{i-1}} + \frac{l}{10^i}\right] \; ; \; x'_p = \varphi\left[\frac{A^{i-1} + p}{10^{i-1}} + \frac{l+1}{10^i}\right]$$

p variant de o à $B^{i-1} - 1 = k$

1. Nous écartons toujours les décimales de $f(a)$, ce qui ne change pas les limites considérées dans le texte.

Désignons par λ_p le nombre des points d'abscisses a_r pour lesquels on a :

$$x_p \leqslant a_r < x'_p$$

Comme dans la première partie nous avons :

$$\lambda_p = \frac{x'_p - x_p}{\frac{b-a}{n}} + \varepsilon_p \quad \text{avec} \quad -1 \leqslant \varepsilon_p \leqslant 1.$$

d'où :

$$P_i{}' = (\lambda_0) + (\lambda_{k+1}) + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$$

les parenthèses indiquant que λ_0 et λ_{k+1} ne doivent être pris que sous certaines conditions précisées plus loin.

En posant $\Delta_p = x'_p - x_p$ on a :

$$\frac{P_i{}^l}{n} = \frac{1}{b-a} \left\{ (\Delta_0) + \Delta_{k+1}) + \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_k + \frac{(\varepsilon_0) + (\varepsilon_{k+1}) + \varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}{n} \right\}$$

En prenant :

$$\frac{P_i{}^l}{n} = \frac{1}{b-a} \left[(\Delta_0) + \Delta_{k+1}) + \Delta_1 \ \Delta_2 + \dots + \Delta_k \right]$$

on commet une erreur inférieure à :

$$\left| \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_{k+1} + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_k}{n} \right| < \frac{B^{i-1} - A^{i-1}}{n}$$

Si i est fixe cette quantité tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$ d'où :

$$(29) \qquad f_l = \lim_{n=\infty} \frac{P_i{}^l}{n} = \frac{1}{b-a} \left[(\Delta_0) + (\Delta_{k+1}) + \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_k \right]$$

Remarque.

Si nous prenons $b = n$

$$\frac{B^{i-1} - A^{i-1}}{n} = \frac{[10^{i-1} f(n)] - A^{i-1}}{n}$$

Cette quantité tend vers zéro si : $\lim_{n=\infty} \frac{f(n)}{n} = o$ (30)

Dans cette hypothèse la formule (29) permet de calculer f_l pour les tables de $f(x)$ construites pour les valeurs entières de x lorsque tend vers l'infini. C'est le cas pour :

$$f(x) = x^m \qquad o < m < 1$$

$$f(x) = \log x$$

Comme d'autre part :

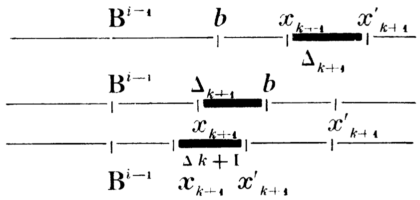
$$m = \sum_{l=o}^{l=9} l . f_l$$

nous retrouvons exactement le résultat de J. Franel (voir note page 15).

[17]. — *Condition d'application de (29).*

1° *Extrémité* b.

Les schémas suivants indiquent les trois cas possibles,



(1) $d^i < l$

(2) $d^i = l$

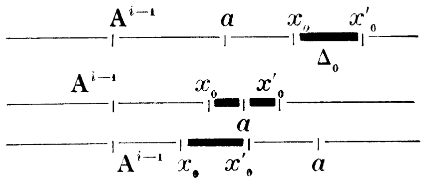
(3) $l < d^i$

Dans le cas $d^i > l$ on a $f_l = \ldots\ldots \Delta_k + \Delta_{k+1}$

$d^i = l$ $f_l = \ldots\ldots\ldots + b - x_{k1^+}$

$l > d_i$ $f_l = \ldots\ldots\ldots \Delta_k;$

2° *Extrémité* a.



(1') $\delta^i < l$

(2') $\delta^i = l$

(3') $l < d^i$

Si $\delta^i < l$ on a $f_l = \Delta_0 + \Delta_1 + \ldots\ldots$

$\delta^i = l$ $f_l = x'_0 - a + \Delta_1 + \ldots\ldots$

$l < \delta^i$ $f_l = \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots\ldots$

La combinaison de ces diverses éventualités donne neuf cas différents. Calculons la quantité :

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots \Delta_k$$
$$= (x'_1 + \ldots x'_k) - (x_1 + \ldots + x_k) = S' - S$$

Il suffit pour cela d'utiliser la formule (25). Pour S' il faut considérer

$$x'_1 = \varphi\left[\frac{A^{i-1}+1}{10^{i-1}} + \frac{l+1}{10^i}\right] = \varphi\left[\frac{A^{i-1}}{10^{i-1}} + \frac{l+1}{10^i} + \frac{1}{10^{i-1}}\right]$$

d'où $h = \dfrac{1}{10^{i-1}}$; $\alpha_0 = f(a)$; $\lambda' = \dfrac{l+1-10\gamma^{i-1}}{10^i}$

et : $x'_k = \varphi\left(\dfrac{B^{i-1}}{10^{i-1}} + \dfrac{l+1}{10^i}\right)$

d'où : $\beta_0 = f(b)$; $\xi' = \dfrac{l+1-10\theta^{i-1}}{10^i}$

Pour S il suffit de changer $l+1$ en l d'où :

$$\lambda = \frac{l-10\gamma^{i-1}}{10^i} \; ; \; \xi = \frac{l-10\theta^{i-1}}{10^i}$$

(25) donne alors :

$$\Delta = S' - S = (\xi' - \xi)\left\{\frac{1}{h}\varphi(\beta_0) + \tfrac{1}{2}\varphi'(\beta_0)\left[1 + \frac{1}{h}(\xi' + \xi)\right] + \frac{h}{12}\varphi''(\beta_0)\right\} - (\lambda' - \lambda)\left\{\frac{1}{h}\varphi(\alpha_0) + \tfrac{1}{2}\varphi'(\alpha_0)\left[1 + \frac{1}{h}(\lambda' + \lambda)\right] + \frac{h}{12}\varphi''(\beta_0)\right\}$$

soit :

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta = \frac{b-a}{10} &+ \frac{1}{2f'(b)10^{i+1}}\left[2l - 2d^i - 9 - \frac{2\alpha}{10}\right] \\ &- \frac{1}{2f'(a)10^{i+1}}\left[2l - 2\delta^i + 11 - \frac{2\nu}{10}\right] + \dots \end{aligned}\right.$$

Calcul de Δ_{k+1}

$$\Delta_{k+1} = \varphi\left(\frac{B^{i-1}}{10^{i-1}} + \frac{l+1}{10^i}\right) - \varphi\left(\frac{B^{i-1}}{10^i} + \frac{l}{10^i}\right) = \frac{1}{f'(b)}\cdot\frac{1}{10^i} + \dots$$

Calcul de Δ_0

on a de même: $$\Delta_0 = \frac{1}{f'(a)}\cdot\frac{1}{10^i} + \dots$$

Calcul de : $b - x_{k+1}$

$$b - x_{k+1} = b - b - \frac{1}{f'(b)}\cdot\frac{l - 10\theta^{i-1}}{10^i}$$

comme le terme correctif n'est à apporter que si $d^i = l$ on a:

$$b - x_{k+1} = \frac{1}{f'(b)10^i}\cdot\frac{\alpha}{10}$$

Calcul de : $x'_0 - a$.

On a en tenant compte que $l = d^i$:

$$x'_0 - a = \frac{1}{f'(a)}\cdot\frac{l + 1 - 10\gamma^{i-1}}{10^i} = \frac{1}{f'(a)10^i}\left(1 - \frac{\nu}{10}\right)$$

Finalement nous pouvons écrire :

$$(31)\quad \begin{aligned} f_l = \frac{1}{10} + \frac{1}{b-a}\Bigg\{&\frac{1}{2f'(b)10^{i+1}}\left[2l - 2d^i - 9 - \frac{2\alpha}{10} + \begin{pmatrix} 20 & \text{si } d^i > l \\ 2\alpha & \text{si } d^i = l \\ 0 & \text{si } l > d^i \end{pmatrix}\right] \\ &- \frac{1}{2f'(a)10^{i+1}}\left[2l - 2\delta^i + 11 - \frac{2\nu}{10} - \begin{pmatrix} 20 & \text{si } \delta^i < l \\ 20 - 2\nu & \text{si } \delta^i = l \\ 0 & \text{si } l < \delta^i \end{pmatrix}\right] \\ &+ \dots\dots \Bigg\} \end{aligned}$$

Remarque.

Il faut avoir : $\sum_{l=o}^{l=9} l.f_l = m$. La vérification se fait très simplement.

Par exemple : $$\sum_{l=o}^{l=9} \frac{l}{10} = 4{,}5.$$

$$\text{et : } \sum_{l=0}^{l=9} \left[2l - 2d' - 9 - \frac{2\alpha}{10} \begin{pmatrix} 20 \\ 2\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \right] 2 \times 285 - 90d' - 9 \times 45 - 9\alpha$$
$$+ 20 \frac{d(d-1)}{2} + 2\alpha d$$
$$= 10 \left[d^2 - \left(10 - \frac{2\alpha}{10} \right) d + 16{,}5 - \frac{9}{10} \alpha \right]. \quad \text{etc...}$$

[18]. — *Conséquences.*

Si i est assez grand [avec $f'(x)$ et $f''(x)$ différents de zéro sur le segment (a, b)] les chiffres : 0, 1, 2 ... 9 ont des fréquences relatives voisines de 1/10.

[19]. — *Application à des cas particuliers.*

Dans tous les cas où l'on peut calculer exactement la somme dans la formule (29) on obtiendra la valeur exacte de f_l. Cela a lieu en particulier pour les fonctions suivantes :

$$y = x; \qquad y = {}^2\sqrt{x}, \quad y = {}^3\sqrt{x}; \qquad y = \log_a x; \ y = \text{arc sin } x; \text{ etc, etc...}$$

dont nous étudions quelques exemples à titre de vérification. Dans le cas contraire la formule (31) donne une approximation en général rapidement bonne.

[20]. — *Exemple I* : $y = x$.

$$a = o; \quad b \text{ quelconque}; \quad \varphi(u) = u; \quad \delta^i = o \leqslant l; \quad x'_p = \frac{p}{10^{i-1}} + \frac{l+1}{10^i}$$

d'où : $$\Delta_p = \frac{p}{10^{i-1}} + \frac{l+1}{10^i} - \left(\frac{p}{10^{i-1}} + \frac{l}{10^i} \right) = \frac{1}{10^i}$$

$$f_l = \frac{1}{b} \left[\frac{1}{10^i} + \frac{1}{10^i} \left([10^{i-1} b] - 1 \right) + \begin{pmatrix} \dfrac{1}{10^i} \text{ si } d^i > l \\ \dfrac{\alpha}{10^i} \text{ si } d^i = l \\ 0 \text{ si } l > d^i \end{pmatrix} \right.$$

C'est ce que l'on obtiendrait en appliquant la formule (31).

Reprenons l'application numérique du n° 8 :

$b = 1{,}2; \quad i = 1; \quad [10^{i-1}b] = 1$ d'où :

$$f_l = \frac{1}{1{,}2}\left[\frac{1}{10} + \begin{cases} \frac{1}{10} \text{ si } l = 0;\ 1 \\ 0 \text{ si } l = 2{,}3 \ldots 9 \end{cases}\right]$$

ce qui donne les fréquences relatives suivantes :

pour : 0 et 1 : $1/6 = 0{,}16666$

pour : 2, 3, 4 ... 9 : $1/12 = 0{,}08333$

Ce sont bien les résultats obtenus au n° 8 en prenant $n = 10^6$.

$a = o$; *b entier :* $\quad d^i = o; \quad \alpha = o: \quad d^i \leqslant l$ d'où :

$$f_l = \frac{1}{b}\left[\frac{1}{10^i} + \frac{1}{10^i}\left(10^{i-1} b - 1\right)\right] = \frac{1}{10}$$

[21]. — *Exemple II* : $y = \sqrt{x}$.

$a = o$; b quelconque; d'où $\delta^i = o \leqslant l$

$\varphi(u) = u^2; \qquad x'_p = \left(\frac{10\,p + l + 1}{10^i}\right)^2 \qquad x_p = \left(\frac{10\,p + l}{10^i}\right)^2$

$$\Delta_p = \frac{1}{10^{2i}}(20\,p + 2\,l + 1) = \frac{2\,l + 1}{10^{2i}} + \frac{2}{10^{2i-1}}\,p$$

$$b.\,f_l = \frac{2}{10^{2i-1}} \sum_{p=o}^{p=[10^{i-1}\sqrt{b}]-1} p. + \frac{2\,l+1}{10^{2i}}\,[10^{i-1}\sqrt{b}] + C$$

avec :

$$C = \frac{20\,[10^{i-1}\sqrt{b}] + 2\,l + 1}{10^{2i}} \qquad \text{si} \quad d^i > l$$

$$C = \frac{\alpha}{10^{2i-1}}\left(2\sqrt{b} - \frac{\alpha}{10^{i-1}}\right) \qquad \text{si} \quad d^i = l$$

$$C = 0 \qquad \text{si} \quad l > d^i$$

d'où :

$$f_l = \frac{1}{b.10^{2i-1}} + [10^{i-1}\sqrt{b}]\left([10^{i-1}\sqrt{b}] - 1\right) + \frac{2\,l + 1}{10^{2i}}\,[10^{i-1}\sqrt{b}] + \frac{1}{b}\,C$$

$$f_l = \frac{[10^{i-1}\sqrt{b}]}{b\,10^{2i}}\left(10^i\sqrt{b} - d^i - \frac{\alpha}{10} - 9 + 2l\right) + \frac{1}{b}\,C$$

Cas particulier : $10^{i-1}\sqrt{b}$ *entier.*

$d^i = \alpha = o \qquad d^i \leqslant l. \qquad C = o$

d'où : $$f_l = \frac{1}{10} + \frac{2l - 9}{\sqrt{b}\,10^{i+1}}$$

f_l croît de : $\qquad \dfrac{1}{10} - \dfrac{9}{10^{i+1}\sqrt{b}}$ à $\dfrac{1}{10} + \dfrac{9}{10^{i+1}\sqrt{b}}$

Ici les chiffres 9 ont une fréquence maximum.

Vérification :

$$b = 1 ; \qquad i = 1 ; \qquad f_l = \frac{2\,l + 1}{100}$$

En faisant successivement $l = 0, 1, 2 \ldots 9$ on retrouve le tableau du n° 9.

[22]. — *Exemple III* : $y = \sqrt[3]{x}$:

Examinons seulement le cas $b = 1$; $i = 1$ qui constitue l'application numérique du n° 10. On obtient après calculs faciles :

$$f_l = \frac{1}{10^3}(3\,l^2 + 3\,l + 1) = \frac{3\,l\,(l+1) + 1}{10^3}$$

On en déduirait le tableau trouvé à ce n°.

Pour i quelconque on a :

$$f_l = \frac{1}{10} - \frac{15}{10^{i+1}} + \frac{15\,(2l+1)}{10^{i+2}} + \frac{3\,l^2 - 27\,l + 36}{10^{2i+1}}$$

ou encore :

$$f_l = \frac{1}{10} - \frac{15+9}{10^{i+2}} + \frac{36}{10^{2i-1}} + \frac{3\,l\,(l+1)}{10^{2i+1}}$$

qui montre que f_l croît toujours quand l varie de 0 à 9. La formule (31) donne :

$$f_l = \frac{1}{10} - \frac{15}{10^{2i-1}} + \frac{15\,(2l+1)}{10^{i-2}} + \ldots$$

[23]. — *Exemple IV* : $f(x) = x^m$, $o < m < 1$: $a = o$, $b = n$.

$f'(x) = mx^{m-1}$; $\dfrac{1}{f'(a)} = 0$;

$\dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{x^{1-m}}{m}$; $\qquad \dfrac{1}{b\,f'(b)} = \dfrac{1}{m\,b^m}$ tend vers zéro avec $\dfrac{1}{n}$

donc: $\qquad f_l = \dfrac{1}{10}$

On peut dire en particulier :

Dans les tables numériques donnant les racines carrées et les racines cubiques des nombres entiers, les décimales de rang i forment des suites de nombres où les chiffres : 0, 1, 2, ... 9 figurent avec une égale fréquence.

[24]. — *Exemple V* : $y = \log x$.

On a le droit de poser $b = n$. (29) redonne alors les résultats de J. Franel : la fréquence de la décimale l croît avec l.

Appliquons (31) au cas où : $\begin{matrix} a = 1 \\ b = b \end{matrix}$ donc $\delta' = \nu = o \leqslant l$.

Nous savons que : $f'(a) = \dfrac{1}{\mathrm{Log}\, 10}$; $f'(b) = \dfrac{1}{b\, \mathrm{Log}\, 10}$ d'où :

$$f_l = \frac{1}{10} + \frac{\mathrm{Log}}{2(b-1)\, 10^{i+1}} \left\{ b \left(2l - 2d^i - 9 - \frac{2\alpha}{10} + \begin{pmatrix} 20 & \text{si} & l < d^i \\ 2\alpha & & l = d^i \\ 0 & & l > d^i \end{pmatrix} \right. \right.$$
$$\left. - (2l - 9) \right\}$$

Si b est une puissance de 10 : $d^i = \alpha = o$. d'où :

$$f_l = \frac{1}{10} + \frac{\mathrm{Log}\, 10}{2(b-1)\, 10^{i+1}} (b-1)(2l-9)$$

$$f_l = \frac{1}{10} + \frac{\mathrm{Log}\, 10}{2.10^{i+1}} (2l - 9)$$

qui est indépendant de b. Pour i assez grand f_l croît de :

$$\frac{1}{10} - 4{,}5 \frac{\mathrm{Log}\, 10}{10^{i+1}} \quad \text{à} \quad \frac{1}{10} + 4{,}5 \frac{\mathrm{Log}\, 10}{10^{i+1}}$$

soit :
$$\frac{1}{10} \mp \frac{1{,}0362}{10^i}$$

Pour $i = 2$ on trouve :

$$\begin{array}{rl} l = 0 & f_l = 0{,}1 - 0{,}010 = 0{,}090 \\ 1 & \ 0{,}1 - 0{,}008 = 0{,}092 \\ 2 & \ 0{,}1 - 0{,}006 = 0{,}094 \\ 3 & \ 0{,}1 - 0{,}003 = 0{,}097 \\ 4 & \ 0{,}1 - 0{,}001 = 0{,}099 \\ 5 & \ 0{,}1 + 0{,}001 = 0{,}099 \\ 6 & \ 0{,}1 + 0{,}003 = 0{,}103 \\ 7 & \ 0{,}1 + 0{,}006 = 0{,}106 \\ 8 & \ 0{,}1 + 0{,}008 = 0{,}108 \\ 9 & \ 0{,}1 + 0{,}010 = 0{,}111 \end{array}$$

valeurs qui se trouvent approximativement vérifiées au n° 15.