

J. DIXMIER

L'adjoint du produit de deux opérateurs fermés

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4^e série, tome 11 (1947), p. 101-106

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1947_4_11__101_0

© Université Paul Sabatier, 1947, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

L'ADJOINT DU PRODUIT DE DEUX OPÉRATEURS FERMÉS

par J. DIXMIER

1) Introduction: Précisons d'abord nos notations. Soit H un espace d'Hilbert, de dimension quelconque. Si A et B sont deux opérateurs (*) de H , on désigne par D_A le domaine d'existence de A , par Δ_A son domaine des valeurs, par A^* son adjoint, par \tilde{A} son plus petit prolongement linéaire fermé, par AB le produit de A et B ; $A > B$ signifie que A est un prolongement de B . Si V et V' sont deux variétés linéaires, $[V]$ désigne la plus petite variété linéaire fermée contenant V , P_V l'opérateur de projection sur V , $V + V'$ désigne la plus petite variété linéaire contenant V et V' , et $V \oplus V' = [V + V']$.

Soit H et H' deux espaces d'Hilbert de même dimension orthogonaux, et U un opérateur isométrique avec $D_U = H$, $\Delta_U = H'$. Si A est un opérateur de H , on appelle image V de A par rapport à H, H', U , l'ensemble des vecteurs $X + UAX$, où $X \in D_A$. V est linéaire fermée si et seulement si A est linéaire fermé. On peut avoir $V \cap H' \neq 0$, c'est-à-dire que A peut être multiforme (*).

Lorsque A et B sont deux opérateurs linéaires bornés définis dans H , on a la formule bien connue: $(AB)^* = B^* A^*$. Dès qu'on sort du cadre des opérateurs bornés, la formule cesse d'être exacte. Nous allons chercher une formule plus générale.

2) Définition de $A \cdot B$: Définissons un nouveau produit des deux opérateurs A et B .

Définition: $X \in D_{A \cdot B}$, et $Y = A \cdot BX$ s'il existe deux suites de vecteurs, (X_n) et (Y_n) , avec $X_n \in D_B$, $Y_n \in \Delta_A$, $A^{-1} Y_n - BX_n \rightarrow 0$ (pour des $A^{-1} Y_n$ et des BX_n bien choisis, puisque B et A^{-1} peuvent être multiformes).

Soit H, H', H'' , trois espaces d'Hilbert de même dimension deux à deux orthogonaux dans $\mathcal{H} = H \oplus H' \oplus H''$. Soit U et U' des opérateurs isométriques tels que $D_U = H$, $\Delta_U = H$, $D_{U'} = H'$, $\Delta_{U'} = H''$; soit $U'' = U' U$, qui transforme isométriquement H en H'' . Soit A et B deux opérateurs de H . Soit V l'image de B par rapport à H, H', U , et V'' l'image de UAU^{-1} (qui opère dans H') par rapport à H', H'', U' . Soit V' et U'' les images de AB et $A \cdot B$ par rapport à H, H'', V'' . Soit enfin, dans $H \oplus H''$, S la symétrie par rapport à H'' .

1. Tous les opérateurs considérés ici seront supposés implicitement linéaires.

2. Cf. à ce sujet mon travail: "Étude sur les variétés et les opérateurs de Julia, avec quelques applications", Bull. Soc. Math. de France, (1949), chap. I, § 8. (Ce travail est désigné dans la suite par E).

Lemme 1 : Soit deux vecteurs, $X \in H$, $X'' \in H''$. On a : $X + X'' \in V''$ si et seulement si il existe un vecteur $X' \in H'$ avec $X + X' \in V$, $X' + X'' \in V'$.

Démonstration : a) Si $X + X'' \in V''$, on a : $X'' = U'' ABX = U' (UAU^{-1})(UB)X$. Soit $X' = UBX \in H'$. On a : $X + X' \in V$, et $X'' = U' (UAU^{-1})X'$, donc $X' + X'' \in V'$.

b) Si, réciproquement, il existe un $X' \in H'$ avec $X + X' \in V$, $X' + X'' \in V'$, on a : $X' = UBX$, $X'' = U' (UAU^{-1})X' = U' UABX = U'' ABX$, donc $X + X'' \in V''$.

Lemme 2 : On a : (a) $S(V'') = (V + V') \cap (H \oplus H'')$

(b) $S(\check{V}'') = (V \oplus V') \cap (H \oplus H'')$

Démonstration : Démontrons (a). Soit un vecteur $X + X'' \in V''$ ($X \in H$, $X'' \in H''$). Soit $X' \in H'$ tel que $X + X' \in V$, $X' + X'' \in V'$ (lemme 1). On a : $S(X + X'') = -X + X'' = (X' + X'') - (X + X') \in V + V'$. Donc : $S(X + X'') \in (V + V') \cap (H \oplus H'')$.

Réciproquement, soit $X + X''$ ($X \in H$, $X'' \in H''$) tel que $S(X + X'') = -X + X'' \in V + V'$. On a : $-X + X'' = Z + Z'$, où $Z \in V$, $Z' \in V'$. D'où :

$$P_H(-X + X'') = -X = P_H Z + P_H Z' = P_H Z$$

$$P_{H''}(-X + X'') = X'' = P_{H''} Z + P_{H''} Z' = P_{H''} Z'$$

$$P_{H'}(-X + X'') = 0 = P_{H'} Z + P_{H'} Z'$$

Soit : $X' = -P_{H'} Z = P_{H'} Z'$. On a : $X + X' = -P_H Z - P_{H'} Z = -Z \in V$. $X' + X'' = P_{H'} Z' + P_{H''} Z' = Z' \in V'$. Donc (lemme 1) : $X + X'' \in V''$.

Démontrons (b). Considérons les suites (X_n) , (Y_n) qui interviennent dans la définition de $A \cdot B$. On a :

$$(X_n + UBX_n) - (U'' Y_n + UA^{-1} Y_n) \in V + V' \subset V \oplus V'$$

ou : $(X_n - U'' Y_n) + U(BX_n - A^{-1} Y_n) \in V \oplus V'$.

A la limite : $X - U'' Y \in V \oplus V'$.

Ou : $X - U'' Y \in (V \oplus V') \cap (H \oplus H'')$.

Or, $X - U'' Y$ est un vecteur quelconque de $S(\check{V}'')$. Réciproquement, soit un vecteur de $H \oplus H''$, $X - U'' Y$ ($X \in H$, $Y \in H$), appartenant à $(V \oplus V') \cap (H \oplus H'')$. Il existe une suite de vecteurs dans $V + V'$ qui tend fortement vers $X - U'' Y$, donc des suites de vecteurs $X_n + UX'_n \in V$, ($X_n \in H$, $X'_n \in H$), et $Z_n + U'^{-1} Z'_n \in V'$ ($Z_n \in H''$, $Z'_n \in H''$) telles que $X_n + UX'_n + Z_n + U'^{-1} Z'_n \rightarrow X - U'' Y$; ceci entraîne : $X_n \rightarrow X$, $-Z_n \rightarrow U'' Y$, $UX'_n + U'^{-1} Z'_n \rightarrow 0$. Ceci exprime que $X \in D_{A \cdot B}$ et que $U'' Y = A \cdot BX$. Donc $X - U'' Y \in S(\check{V}'')$.

Théorème 1 : $A \cdot B$ est fermé, et $A \cdot B > \tilde{A} \cdot B$; $A \cdot B = \tilde{A} \cdot B$.

Démonstration : C'est une conséquence immédiate du lemme 2, et du fait que $V \oplus V'$, fermé, contient $V + V'$.

On verra qu'on peut avoir $A \cdot B > \tilde{A} \cdot B$.

Théorème 2 : On a : $A \cdot B = AB$ si : (a) A est fermé, et B fermé borné ; ou si : (b)

A^{-1} est fermé borné et B fermé. On a : $A.B = \widetilde{A}\widetilde{B}$ si : (c) A est fermé et B^{-1} fermé borné ; ou si : (d) A est fermé borné et B fermé.

Démonstration : Cas (a) : A est fermé, et B fermé borné. Supposons :

$$(1) X_n \rightarrow X \quad (2) Y_n \rightarrow Y \quad (3) A^{-1} Y_n - BX_n \rightarrow 0.$$

(1) entraîne : (4) $BX_n \rightarrow BX$; (3) et (4) entraînent : (5) $A^{-1} Y_n \rightarrow BX$; (2) et (5) entraînent : $Y \in D_{A^{-1}}$, et $A^{-1} Y = BX$, ou : $Y = ABX$.

Cas (b) : A^{-1} est fermé borné, B est fermé. (2) entraîne : (6) $A^{-1} Y_n \rightarrow A^{-1} Y$; (6) et (3) entraînent : (7) $BX_n \rightarrow A^{-1} Y$; (1) et (7) entraînent : $X \in D_B$ et $A^{-1} Y = BX$, ou $Y = ABX$.

Cas (c) : A est fermé, et B^{-1} fermé borné. (3) entraîne :

$$(8) B^{-1} (A^{-1} Y_n - BX_n) = B^{-1} A^{-1} Y_n - X_n \rightarrow 0$$

(8) et (1) entraînent : (9) $B^{-1} A^{-1} Y_n \rightarrow X$; (9) et (2) entraînent :

$Y \in D_{B^{-1}A^{-1}}$ et $X = B^{-1} \widetilde{A}^{-1} Y = (\widetilde{A}B)^{-1} Y$, $Y = \widetilde{A}BX$.

Cas (d) : A est fermé borné et B fermé. (3) entraîne :

$$(10) A (A^{-1} Y_n - BX_n) = Y_n - ABX_n \rightarrow 0$$

(10) et (2) entraînent : (11) $ABX_n \rightarrow Y$; (11) et (1) entraînent :

$X \in D_{AB}$ et $Y = \widetilde{A}BX$.

3) Adjoint de AB : Soit W (resp. W' , W'' , \dot{W}'') la variété orthogonale complémentaire de $[V]$ (resp. $[V']$, $[V'']$; V) dans $H \oplus H'$ (resp. $H' \oplus H''$, $H \oplus H''$, $H \oplus H''$). Soit M la variété linéaire fermée, lieu des vecteurs $Z \in \mathcal{H}$ tels que $P_{H \oplus H'} Z \in W$, $P_{H' \oplus H''} Z \in W'$.

Lemme 3 : On a : $S(P_{H \oplus H'} M) = (W \dot{+} W') \cap (H \oplus H'')$.

Démonstration : Un vecteur $X + X''$ ($X \in H$, $X'' \in H''$) appartient à $P_{H \oplus H'} M$ si et seulement il existe un vecteur $X' \in H'$ tel que $X + X' + X'' \in M$, c'est-à-dire tel que $X + X' \in W$, $X' + X'' \in W'$. $P_{H \oplus H'} M$ est donc défini à partir de W et W' exactement comme V'' à partir de V et V' d'après le lemme 1. La formule à établir n'est donc que la formule (a) du lemme 2 appliquée à W et W' .

Lemme 4 : M et $V \oplus V'$ sont orthogonales complémentaires dans \mathcal{H} .

Démonstration : Si $Z \in M$, $P_{H \oplus H'} Z$ est orthogonal à V , ainsi que $P_{H''} Z$. Donc Z est orthogonal à V , de même à V' , donc à $V \oplus V'$. Réciproquement, si Z est orthogonal à $V \oplus V'$, $P_{H \oplus H'} Z$ est orthogonal à V , donc appartient à W ; de même, $P_{H' \oplus H''} Z \in W'$; donc $Z \in M$.

Lemme 5 : On a : $\dot{W}'' = [(W \dot{+} W') \cap (H \oplus H'')]$

Démonstration : On a (lemme 4) : $V \oplus V' = \mathcal{H} \ominus M$.

et : $H \oplus H'' = \mathcal{H} \ominus H'$.

Donc : (12) $(V \oplus V') \cap (H \oplus H'') = \mathcal{H} \ominus (M \oplus H')$

Or : (13) $(V \oplus V') \cap (H \oplus H'') = S(\dot{V}'')$

d'après le lemme 2. D'autre part :

$$M \oplus H' = [M \dot{+} H'] = [P_{H \oplus H''} M \dot{+} H'] = [P_{H \oplus H''} M] \oplus H'.$$

Donc : (14) $\mathcal{H} \ominus (M \oplus H') = (H \oplus H') \ominus [P_{H \oplus H''} M].$

(12) devient, d'après (13) et (14) :

$$S(\dot{V}'') = (H \oplus H') \ominus [P_{H \oplus H''} M].$$

ou :

$$S(\dot{W}'') = [P_{H \oplus H''} M]$$

ou, d'après le lemme 3, la formule à démontrer.

Lemme 6 : Si A et B sont fermés, on a : $W'' = (W \oplus W') \cap (H \oplus H'').$

Démonstration : Faisons jouer, dans le lemme 5, les rôles de V et V' à W et W'. Il faut alors remplacer W et W' par $(H \oplus H') \ominus W = [V] = V$ et $(H' \oplus H'') \ominus W' = [V'] = V'$. $(W \dot{+} W') \cap (H \oplus H'')$ est donc remplacé par $(V \dot{+} V') \cap (H \oplus H'') = S(\dot{V}'')$ (lemme 2). $S(\dot{V}'') = (V \oplus V') \cap (H \oplus H'')$ (lemme 2) est remplacé par $(W \oplus W') \cap (H \oplus H'')$, donc $S(\dot{W}'')$ est remplacé par la variété orthogonale complémentaire de $(W \oplus W') \cap (H \oplus H'')$ dans $H \oplus H''$. Le lemme 5 prouve alors que $S(\dot{V}'')$ et $S[(W \oplus W') \cap (H \oplus H'')]$ sont orthogonales complémentaires dans $H \oplus H''$. D'où la formule à démontrer.

Théorème 3 : On a : $(A.B)^* = B^* A^*$

et, quand A et B sont fermés : $(AB)^* = B^* A^*.$

Démonstration : Par rapport à H, H'', U'', \dot{V}'' est l'image de A. B, donc \dot{W}'' est l'image de $-(A.B)^{*^{-1}}$ (cf. E, chap. I, § 8); d'après le lemme 2 où on remplace V et V' par W et W', $(W \dot{+} W') \cap (H \oplus H'')$ est l'image de $-(A^*{}^{-1})$ ($-B^*{}^{-1}) = -(B^* A^*)^{-1}$ (en effet, W est l'image de $-B^*{}^{-1}$ par rapport à H, H' U, et W' est l'image de $-A^*{}^{-1}$ par rapport à H', H'', U'). Le lemme 5 prouve alors que $(A.B)^* = B^* \tilde{A}^*.$

De même, W'' est l'image de $-(AB)^{*^{-1}}$ par rapport à H, H'', U'', et $(W \oplus W') \cap (H \oplus H'')$ est l'image de $-(A^*{}^{-1})$. ($-B^*{}^{-1}) = -(B^* A^*)^{-1}$ par rapport à H, H'', U''. Le lemme 6 prouve donc que : $(AB)^* = B^* A^*.$

4. Comparaison de $(AB)^*$ et de $B^* A^*$: Pour montrer qu'on peut avoir $(AB)^* \not\geq B^* A^*$, considérons le cas particulier où H est séparable et à une

infinité de dimensions. Nous faisons dans ce § un usage constant des résultats de E.

Lemme 7 : Soit D_1, D'_1 deux variétés J complémentaires non fermées telles que $D_1 \cap D'_1$ soit de classe 2. Soit D_2, D'_2 deux autres variétés J complémentaires non fermées. Il existe un unitaire U tel que $U(D_2) \subset D_1, U(D'_2) \subset D'_1.$

Démonstration : Il existe (E, prop. 2, 5) deux variétés linéaires fermées orthogonales complémentaires V_1, V'_1 (resp. V_2, V'_2), deux variétés J non fermées Δ_1, Δ'_1 (resp. Δ_2, Δ'_2), telles que :

$$[\Delta_1] = V_1, \quad [\Delta'_1] = V'_1, \quad D_1 = V_1 + \Delta_1, \quad D'_1 = V'_1 + \Delta_1,$$

(resp. $[\Delta_1] = V_1$, $[\Delta'_1] = V'_1$, $D_1 = V_1 + \Delta'_1$, $D'_1 = V'_1 + \Delta_1$)

On a : $D_1 \cap D'_1 = \Delta_1 + \Delta'_1$, donc l'une au moins des variétés J , Δ_1 et Δ'_1 , est de classe 2. Δ_1 par exemple contient un noyau N . Soit N_1 et N_2 deux variétés linéaires fermées orthogonales complémentaires dans N , à ∞ dimensions. En remplaçant V_1 par $V_1 \ominus N_1$ et V'_1 par $V'_1 \oplus N_1$, on voit qu'on peut supposer que Δ_1 et Δ'_1 sont de classe 2. Alors, il existe (E, lemme 8,1) un opérateur isométrique I (resp. I') transformant V_1 en V'_1 (resp. V'_1 en V_1) tel que $I(\Delta_1) \subset \Delta'_1$ (resp. $I'(\Delta'_1) \subset \Delta_1$). $U = I P_{V_2} + I' P_{V'_2}$ est un unitaire de H qui répond aux conditions du lemme.

Lemme 8 : On peut trouver deux couples de variétés J complémentaires, (D_1, D'_1) et (D_2, D'_2) tels que D_1 et D'_1 soient disjointes de D_2 et D'_2 , avec $D_1 \cap D'_1$ de classe 2.

Démonstration : Soit V_1, V'_1 deux variétés linéaires fermées orthogonales complémentaires à ∞ dimensions, et V_2, V'_2 deux variétés linéaires fermées orthogonales complémentaires à ∞ dimensions en position p avec V_1 et V'_1 , asymptotiques à V_1 et V'_1 . $P_{V_2} V_1$ et $P_{V_2} V'_1$ sont non fermées, soit Δ_1 une variété J de classe 3, avec $[\Delta_1] = V_1$, disjointe de $P_{V_2} V_1$ et $P_{V_2} V'_1$ (E, th. 8,3); soit $D'_1 = V'_1 + \Delta_1$. Soit de même Δ'_1 une variété J de classe 3 avec $[\Delta'_1] = V'_1$, disjointe de $P_{V_2} V_1$ et $P_{V_2} V'_1$, et soit $D_1 = V_1 + \Delta'_1$.

On a : $P_{V_1} D_1 = P_{V_1} V_1 + P_{V_1} \Delta'_1$; $P_{V_1} V_1$ est non fermée, et $P_{V_1} \Delta'_1$ est de classe 3, donc $P_{V_1} D_1$ est non fermée (E, prop. 3,13); de même, $P_{V_1} D'_1$ est non fermée. Soit Δ_2 une variété J de classe 2 avec $[\Delta_2] = V_2$, disjointe de $P_{V_1} D_1$ et $P_{V_1} D'_1$ (E, th. 8,3), et soit $D'_2 = V'_2 + \Delta_2$. Soit de même Δ'_2 une variété J de classe 2 avec $[\Delta'_2] = V'_2$, disjointe de $P_{V_1} D_1$ et $P_{V_1} D'_1$, et soit $D_2 = V_2 + \Delta'_2$.

D_2 et D'_2 sont complémentaires, car $V_2 \subset D_2$, $V'_2 \subset D'_2$ (E, prop. 2,5).

D_1 et D'_1 sont complémentaires, car $V_1 \subset D_1$, $V'_1 \subset D'_1$; $D_1 \cap D'_1 = \Delta_1 + \Delta'_1$ est de classe 2.

Montrons que par exemple $D'_1 \cap D_2 = 0$. Soit $X \in D'_1 \cap D_2$. On a : $P_{V_1} X \in P_{V_1} D'_1 \cap P_{V_1} D_2 = \Delta_1 \cap P_{V_1} D_2$, donc $P_{V_1} X = 0$, $X \in V'_1$, $X \in V'_1 \cap D_2$; alors : $P_{V_2} X \in P_{V_2} V'_1 \cap P_{V_2} D_2 = P_{V_2} V'_1 \cap \Delta'_2$, donc $P_{V_2} X = 0$, $X \in V_2$. Donc $X \in V'_1 \cap V_2$, $X = 0$.

Lemme 9 : On peut trouver deux couples de variétés J complémentaires (D_1, D'_1) et (D_2, D'_2) tels que D_1 et D'_1 soient disjointes de D_2 et D'_2 , avec $D_1 \cap D'_1$ et $D_2 \cap D'_2$ de classe 2.

Démonstration : Soit V et \bar{V} deux variétés linéaires fermées orthogonales complémentaires à ∞ dimensions de H . Soit (d_1, d'_1) et (d_2, d'_2) (resp. (\bar{d}_1, \bar{d}'_1) et (\bar{d}_2, \bar{d}'_2)) deux couples de variétés J complémentaires dans V (resp. \bar{V}) tels que d_1 et d'_1 (resp. \bar{d}_1 et \bar{d}'_1) soient disjointes de d_2 et d'_2 (resp. \bar{d}_2 et \bar{d}'_2) avec $d_1 \cap d'_1$ (resp. $\bar{d}_1 \cap \bar{d}'_1$) de classe 2. Alors, $D_1 = d_1 + \bar{d}'_1$, $D'_1 = d'_1 + \bar{d}_1$,

$D_1 = d_1 + \bar{d}_1$, $D'_1 = d'_1 + \bar{d}'_1$ répondent aux conditions du lemme.

Lemme 10 : *Étant donnés deux couples de variétés J complémentaires non fermées, (D_1, D'_1) et (D_2, D'_2) il existe un unitaire U tel que $U(D_1)$ et $U(D'_2)$ soient disjointes de D_2 et D'_1 .*

Démonstration : immédiate à partir des lemmes 7 et 9.

Théorème 4 : *Soit A et B deux opérateurs self adjoints biunivoques, non bornés et d'inverses non bornés. On peut trouver un unitaire U de telle sorte que, en posant $B' = UBU^{-1}$, on ait : $D_{AB'} = D_{B'A} = 0$.*

Démonstration : D_A et Δ_A sont complémentaires ; de même D_B et Δ_B . Il suffit de choisir U, d'après le lemme 10, de façon que $U(D_B)$ et $U(\Delta_B)$ soient disjointes de D_A et Δ_A .

Remarques : 1) On a alors, avec les notations de E (chap. I, § 8), $AB' = \omega$, donc $(AB')^* = \Omega$. et pourtant, $B'^* A^* = B'A = \omega$.

2) De même, on peut trouver un opérateur linéaire fermé A dans le cas p tel que $D_{A^2} = D_{A^{*2}} = 0$.