

JULIO PALACIOS

**Mouvements d'un solide soumis à l'action d'un couple
de direction fixe dans l'espace**

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4^e série, tome 7 (1943), p. 123-138

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1943_4_7__123_0

© Université Paul Sabatier, 1943, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MOUVEMENTS D'UN SOLIDE SOUMIS A L'ACTION D'UN COUPLE DE DIRECTION FIXE DANS L'ESPACE

par JULIO PALACIOS⁽¹⁾

Le mouvement d'un solide soumis à l'action d'un système de forces quelconques s'obtient, comme on le sait, en composant le mouvement qu'aurait son centre de gravité, si toute la masse y était concentrée, avec la rotation que produit le moment résultant du système de forces, pris par rapport au susdit centre de gravité. Le premier mouvement se réduit à un problème de dynamique du point matériel. En ce qui concerne le second mouvement, la représentation de Poinsot nous donne toutes les circonstances géométriques lorsque le couple résultant est nul, et l'on démontre, dans tous les traités qui s'occupent du mouvement gyroscopique, que, si le corps est animé d'une rotation autour de son axe de révolution et on lui applique un couple d'axe horizontal, qui soit constant en grandeur et, en tout instant, perpendiculaire au dit axe de révolution, l'on obtient une précession régulière. Ce même cas se présente quand on considère le couple moyen que le Soleil (ou la Lune) produit, dans le cours d'une année, sur la Terre⁽²⁾. Ce couple a la direction de la ligne équinoxiale, et tend à porter le plan de l'équateur en coïncidence avec celui de l'écliptique, et, a cause de cela, son effet consiste, de même que dans le cas du gyroscope, en une précession régulière de l'axe terrestre autour de la normale au plan de l'écliptique. Le couple en question n'a pas une direction fixe mais il tourne autour de la dite normale avec la même vitesse angulaire que l'axe de la Terre.

Ayant eu à étudier le mouvement d'un solide mis en rotation par l'intermédiaire d'un fil, nous eûmes besoin de rechercher l'effet que produit un couple de direction fixe dans l'espace. Malgré l'apparente simplicité de ce problème, nous avons remarqué qu'il n'est traité dans aucun ouvrage de Mécanique, et c'est à cause de cela que nous jugeons intéressant de rendre compte des résultats auxquels nous sommes arrivés.

⁽¹⁾ Cet article et le suivant résument deux conférences faites à la Faculté des Sciences de Toulouse en mai 1943.

⁽²⁾ Voir, par exemple, A. GRAY, *Gyrostatics and Rotational Motion*, Londres, 1918

1. Équations générales pour un corps de révolution. — Pour simplifier le problème, nous supposons qu'il s'agit d'un solide de révolution. Nous admettrons que le centre de gravité se trouve immobile, et nous déterminerons la position du corps au moyen des angles d'Euler θ , φ , ψ que forment les axes principaux d'inertie x'_1 , x'_2 , x'_3 , (fig. 1) avec un système de coordonnées orthog-

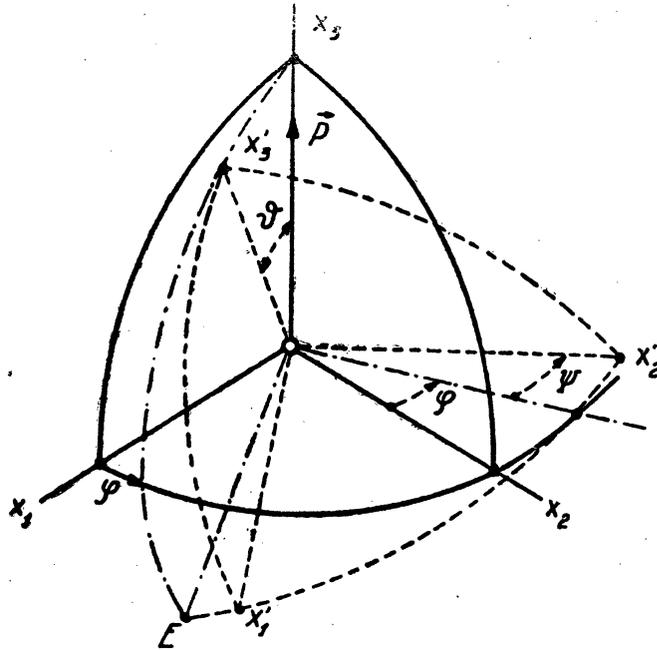


FIG. 1. — Manière de compter les angles d'Euler.

nales x_1 , x_2 , x_3 , fixe dans l'espace. Les deux systèmes sont supposés *dextrorsum*; on prend l'axe de révolution du corps comme axe x'_3 , et sa position se détermine par la colatitude ou angle de nutation θ et par l'angle de précession φ compté à partir du plan $x_1 x_2$, *dextrorsum* par rapport à x_3 . Finalement, la position de l'axe x'_1 se détermine par l'angle ψ , compté (*) à partir de OE, c'est-à-dire, depuis la projection de x_3 , changée de signe, sur le plan $x'_1 x'_2$, et avec le signe positif lorsqu'il représente une rotation à droite autour de x'_2 .

Sur le corps agit un couple \vec{p} dirigé suivant une droite fixe dans l'espace, droite que nous pouvons prendre comme axe x_3 . Nous prendrons, en outre, l'axe x_1 de telle façon que le moment cinétique initial \vec{c}_0 se trouve dans le plan $x_1 x_2$; ainsi sa composante $c_{0,3}$ suivant x_3 sera nulle.

(*) Nous adoptons la notation de M. PLANCK dans son *Traité de Mécanique Générale*, trad. par A. PEÑA, (1930), page 245. D'autres auteurs désignent φ par ψ , et ψ par φ .

Avec ces conventions, le théorème du moment cinétique

$$\frac{d\vec{c}}{dt} = \vec{p} \quad (1)$$

nous fournit les trois équations

$$c_1 = c_{0,1}, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = pt + c_{0,3}. \quad (2)$$

La méthode que nous allons suivre consistera à exprimer les composantes c_1, c_2, c_3 , du moment cinétique, en fonction des moments principaux d'inertie $I_1, I_2 (= I_1), I_3$, ainsi que des angles θ, φ, ψ et des vitesses $\dot{\theta}, \dot{\varphi}$ et $\dot{\psi}$. Dans ce but, nous remarquerons que les composantes du moment cinétique, rapportées aux axes principaux d'inertie sont

$$c'_1 = I_1 w'_1, \quad c'_2 = I_2 w'_2, \quad c'_3 = I_3 w'_3, \quad (3)$$

où w'_1, w'_2, w'_3 , désignent les composantes de la vitesse angulaire par rapport aux axes mobiles. Pour atteindre notre but, il suffira de passer des axes mobiles aux axes fixes.

Si les équations de passage sont

$$c_i = \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} c'_j, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4)$$

il existe entre les coefficients α_{ij} et les angles θ, φ, ψ les relations suivantes^(*) :

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \sin \varphi \sin \psi - \cos \varphi \cos \psi \cos \theta \\ \alpha_{12} &= \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \cos \theta \\ \alpha_{13} &= \sin \theta \cos \varphi \\ \alpha_{21} &= -\cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi \cos \theta \\ \alpha_{22} &= -\cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \cos \theta \\ \alpha_{23} &= \sin \theta \sin \varphi \\ \alpha_{31} &= \sin \theta \cos \psi \\ \alpha_{32} &= -\sin \theta \sin \psi \\ \alpha_{33} &= \cos \theta. \end{aligned}$$

(*) Voir, par ex., l'ouvrage, déjà cité, de PLANCK, page 246, en remarquant que, pour avoir une plus grande symétrie, nous avons fait : $\alpha = \alpha_1; \beta = \alpha_2; \gamma = \alpha_3$.

D'ailleurs, en exprimant les composantes de la vitesse en fonction des angles θ , φ , ψ et de leurs dérivées, on a (*) :

$$\begin{aligned}w'_1 &= \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\w'_2 &= -\dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi - \dot{\theta} \cos \psi \\w'_3 &= \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}.\end{aligned}$$

Il suffit de substituer en (4) et en (2) pour obtenir les équations de mouvement suivantes :

$$(I_3 - I_1) \dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta \cos \varphi + I_3 \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - I_1 \dot{\theta} \sin \varphi = c_{0,1} \quad (5)$$

$$(I_3 - I_1) \dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta \sin \varphi + I_3 \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + I_1 \dot{\theta} \cos \varphi = 0 \quad (6)$$

$$(I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) \dot{\varphi} + I_3 \dot{\psi} \cos \theta = pt + c_{0,3}. \quad (7)$$

Des deux premières, en éliminant successivement $\dot{\psi}$ et $\dot{\varphi}$, il résulte :

$$I_1 \dot{\theta} = -c_{0,1} \sin \varphi \quad (8)$$

$$(I_3 - I_1) \dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta + I_3 \dot{\psi} \sin \theta = c_{0,1} \quad (9)$$

et, par élimination de $\dot{\psi}$ entre (7) et (9) :

$$I_1 \dot{\varphi} \sin \theta = (pt + c_{0,3}) \sin \theta + c_{0,1} \cos \varphi \cos \theta. \quad (10)$$

L'équation (8) nous indique que la nutation $\dot{\theta}$ ne dépend que de l'angle de précession φ , qu'elle est comprise entre les limites $\pm c_{0,1}/I_1$ et que l'angle de nutation passe par un maximum (pour $\varphi = 0$ si $c_{0,1} > 0$) et par un minimum (pour $\varphi = \pi$, si $c_{0,1} < 0$) chaque fois que l'axe de révolution fait un tour complet autour de l'axe du couple. D'une manière plus expressive, nous pouvons dire : *l'axe de révolution fait une révérence chaque fois que, en faisant des tours sur l'axe du couple, il passe par le plan $x_3 x_1$, déterminé par cet axe et par le moment cinétique initial.*

L'équation (10) nous fournit la solution asymptotique suivante :

$$I_1 \dot{\varphi} = pt \quad (11)$$

de sorte que, au bout d'un certain temps suffisamment grand, il résulte une précession uniformément accélérée :

$$\varphi = \frac{1}{2} \frac{P}{I_1} t^2 + \varphi_0. \quad (12)$$

(*) *Ibid.*, page 247.

Pour des valeurs de t très grandes, nous pouvons calculer la vitesse de nutation, car (8) et (12) conduisent à

$$\dot{\theta} = -\frac{c_{0,1}}{I_1} \sin\left(\frac{pt^2}{2I_1} + \varphi_0\right)$$

et la valeur de θ se calcule par une intégrale de FRESNEL. Il en résulte que, au bout d'un temps suffisamment grand, l'angle θ accomplit des fluctuations avec une pseudopériode τ telle que

$$\frac{p(t+\tau)^2}{2I_1} - \frac{pt^2}{2I_1} = 2\pi,$$

c'est-à-dire, puisque $t \gg \tau$,

$$\tau = \frac{2\pi I_1}{pt}, \quad (13)$$

de sorte que la dite pseudopériode devient de plus en plus courte. En outre, vu que θ se maintient entre des limites finies, l'amplitude des dites fluctuations ira en diminuant et, en fin, elles deviendront imperceptibles. On a donc :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta = \text{const.}, \quad (14)$$

de sorte que la nutation tend à s'annuler, et l'axe de révolution décrit un cône circulaire autour de l'axe du couple.

Dans les équations précédentes, le temps n'intervient que dans le produit pt , de sorte que, si nous changeons le signe de p , toutes les phases se répéteront mais en ordre inverse. Si, par exemple, lorsque la nutation semble avoir disparu parce que la précession est devenue très rapide, nous invertissons le sens du couple, la précession s'amortira et la nutation reparaitra.

L'angle constant que, d'après (14), finit par former l'axe de révolution avec l'axe du couple dépend des conditions initiales. Si, par exemple, la composante $c_{0,1}$ est très petite, l'équation (10) nous dit que, en première approximation, le corps commence une précession uniformément accélérée, à laquelle se superpose, en vertu de (8), une petite nutation, d'amplitude décroissante, autour de la valeur primitive de θ .

2. Cas où le corps part du repos. — Lorsque le moment cinétique initial est nul, les solutions sont :

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= 0, & \theta &= \theta_0, \\ \dot{\varphi} &= \frac{p}{I_1} t, & \varphi &= \frac{p}{2I_1} t^2 + \varphi_0, \\ \dot{\psi} &= -\frac{I_2 - I_1}{I_1 I_2} pt \cos \theta_0, & \psi &= -\frac{I_2 - I_1}{I_1 I_2} \frac{pt^2}{2} \cos \theta_0 + \psi_0, \end{aligned}$$

de sorte que l'angle de nutation conserve sa valeur initiale, la précession est uniformément accélérée dès le premier instant, et le corps tourne autour de son propre axe de révolution, avec une vitesse uniforme qui dépend de l'angle de nutation; si $\theta_0 = \pi/2$, cette vitesse est nulle.

Voici une circonstance remarquable : Pour la précession $\dot{\varphi}$, résulte toujours une valeur positive, ce qui signifie que l'axe de révolution tourne toujours dans le sens imposé par le couple, par contre, puisque $\delta_0 \leq 0$, il arrive que la vitesse $\dot{\psi}$ de

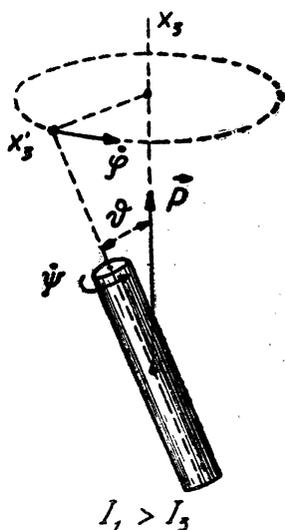


FIG. 2. — Ellipsoïde d'inertie allongé.

La rotation $\dot{\psi}$ et la précession $\dot{\varphi}$ ont un même sens.

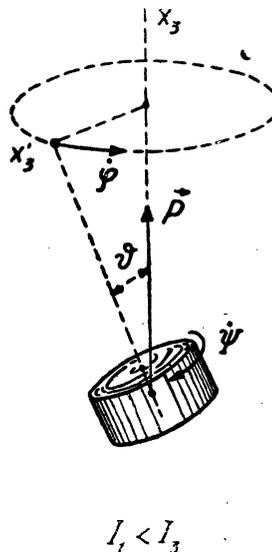


FIG. 3. — Ellipsoïde d'inertie aplati.

La rotation $\dot{\psi}$ et la précession $\dot{\varphi}$ ont des sens contraires.

rotation du corps autour de son axe de révolution est positive si $I_1 > I_3$ (ellipsoïde d'inertie allongé), mais cette vitesse est négative lorsque $I_1 < I_3$ (ellipsoïde aplati). Dans le premier cas, la rotation du corps autour de lui même, projetée sur l'axe du couple (*fig. 2*), a le même sens que celui-ci. Dans l'autre cas (*fig. 3*), la projection et l'axe du couple ont des sens opposés.

3. Corps quelconque soumis à l'action d'un couple dont la direction coïncide avec celle du moment cinétique initial. — Étudions maintenant le cas d'un corps quelconque, de révolution ou non, quand il part du repos ou lorsque son moment cinétique initial coïncide avec le moment du couple appliqué. Dans ce cas-ci, l'équation vectorielle (1) nous dit que le moment cinétique \vec{c} a toujours la même direction que le couple et croît proportionnellement avec le temps. Il est facile de voir, en outre, que les trajectoires sont celles données par

la représentation de POINSON pour le même corps abandonné à lui-même et avec un moment initial dirigé suivant l'axe du couple. Autrement dit : du point de vue géométrique, tout se passe comme si le couple n'agissait pas.

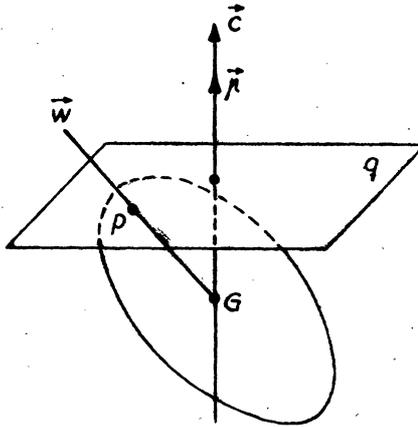


FIG. 4. — Un corps soumis à l'action d'un couple \vec{p} dirigé selon le moment initial \vec{c}_0 se meut d'accord avec la règle de POINSON.

En effet, le solide abandonné à lui-même se meut de telle façon que son ellipsoïde d'inertie (*fig. 4*) reste tangent au plan fixe q perpendiculaire au moment cinétique initial \vec{c} , et la polhodie est la courbe d'intersection du dit ellipsoïde avec le cône (*)

$$I_1 (I_1 h^2 - 1) x_1'^2 + I_2 (I_2 h^2 - 1) x_2'^2 + I_3 (I_3 h^2 - 1) x_3'^2 = 0$$

qui ne dépend que du paramètre h^2 , lequel est lié avec l'énergie cinétique T et avec le module c du moment cinétique par la relation

$$h^2 = \frac{2T}{c^2}.$$

Nous allons démontrer que ce paramètre reste constant en tant que la direction de l'axe du couple ne varie pas. On a :

$$\frac{dh^2}{dt} = \frac{2}{c^2} \left(\frac{dT}{dt} - \frac{2T}{c} \frac{dc}{dt} \right)$$

(*) Voir M. PLANCK, *loc. cit.*, page 253, équation 522.

et comme, si α est l'angle formé par \vec{p} et par la rotation instantanée \vec{w} , le théorème des forces vives nous dit que

$$\frac{dT}{dt} = wp \cos \alpha$$

et puisque, \vec{p} et \vec{c} ayant la même direction, le théorème du moment devient l'équation scalaire

$$\frac{dc}{dt} = p,$$

il en résulte :

$$\frac{dh^2}{dt} = \frac{2p}{c^3} \left(w \cos \alpha - \frac{2T}{c} \right) = 0$$

car, en tout moment, la relation

$$2T = cw \cos \alpha$$

est satisfaite. Ceci prouve que le paramètre h^2 reste constant; l'énergie et le moment cinétique croissent proportionnellement. Le pôle de rotation restera, donc, sur la même polhodie où il se trouvait au début du mouvement.

Si le corps est de révolution, il suffira de faire $c_{\theta, \theta} = 0$ dans l'équation (8) pour avoir

$$\dot{\theta} = 0, \quad \theta = \theta_0$$

d'où il résulte la même conséquence que nous avons trouvée auparavant pour un corps quelconque.

En résumant ce qui précède, nous pouvons dire que :

1° Si on applique à un solide de révolution, doué d'un mouvement initial quelconque, un couple d'axe constant en grandeur et en direction, ce solide finit par accomplir une précession uniformément accélérée autour de cet axe, et il réalise une nutation chaque fois que l'axe de révolution fait un tour complet autour de l'axe du couple. L'amplitude de la nutation décroît peu à peu et tend à s'annuler.

2° Si le solide de révolution part du repos, il n'y a pas de nutation, la précession est uniformément accélérée dès le premier instant et, en plus, le corps tourne, autour de son axe de révolution, avec une accélération proportionnelle au cosinus de l'angle (constant) de nutation, et cela dans un sens ou dans l'autre selon que l'ellipsoïde d'inertie est allongé ou aplati.

3° Si on applique à un solide quelconque (de révolution ou non) un couple constant ou variable, mais ayant toujours la direction du moment cinétique initial, le mouve-

ment, en ce qui se rapporte aux trajectoires des points, est le même que celui que le corps accomplirait s'il était abandonné à lui-même. Pour parvenir à ce que l'axe instantané de rotation ne change pas, il faudra que la rotation initiale ait lieu autour de l'axe de plus grande inertie ou bien de celui de plus petite (ou, encore, que cette rotation soit nulle) et que le moment du couple soit parallèle au dit axe.

REMARQUE. — Il va sans dire que le problème en question peut être résolu en partant des équations de LAGRANGE. Cependant, pour intégrer ces équations il faut recourir à un artifice qui n'est pas facile à découvrir si l'on ne connaît pas d'emblée la solution. Nous indiquons, dans ce qui suit, la marche du calcul pour le cas d'un solide de révolution.

L'expression de l'énergie cinétique, si l'on prend pour coordonnées les angles d'EULER, est :

$$2 T = (I_1 \sin^2 \theta + I_2 \cos^2 \theta) \dot{\varphi}^2 + I_1 \dot{\theta}^2 + I_3 \dot{\psi}^2 + 2 I_3 \dot{\varphi} \dot{\psi} \cos \theta ;$$

les forces respectives ont pour valeur :

$$Q_\theta = 0, \quad Q_\varphi = p, \quad Q_\psi = p \cos \theta$$

et, avec ceci, les équations de LAGRANGE deviennent :

$$A = (I_1 \sin^2 \theta + I_2 \cos^2 \theta) \ddot{\varphi} + I_3 \ddot{\psi} \cos \theta + 2 (I_1 - I_2) \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta - I_3 \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta = p \quad (15)$$

$$B = I_1 \ddot{\theta} - (I_1 - I_2) \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta + I_3 \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \theta = 0 \quad (16)$$

$$C = I_3 (\ddot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta - \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin \theta) = p \cos \theta. \quad (17)$$

L'équation (15), multipliée par dt , est une différentielle exacte et, une fois intégrée, mène à (7). Les deux autres équations ne sont pas intégrables directement, mais l'artifice suivant permet de les transformer en des autres qui satisfont aux conditions d'intégrabilité. Il suffit de former les expressions

$$- A \cos \theta \cos \varphi - B \sin \theta \sin \varphi + C \cos \varphi = 0$$

$$A \cos \theta \sin \varphi + B \sin \theta \cos \varphi + C \sin \varphi = 0$$

pour obtenir, après avoir divisé par $\sin \theta$,

$$- I_1 \ddot{\theta} \sin \varphi - (I_2 - I_1) \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi + [(I_2 - I_1) (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - I_3] \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \varphi + (I_2 - I_1) \ddot{\varphi} \sin \theta \cos \theta \cos \varphi + I_3 \ddot{\psi} \sin \theta \cos \varphi + I_3 \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - I_3 \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi = 0$$

$$(I_2 - I_1) \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta \cos \varphi + [(I_2 - I_1) (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - I_3] \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin \varphi + (I_2 - I_1) \ddot{\varphi} \sin \theta \cos \theta \sin \varphi + I_3 \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi + I_3 \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + I_3 \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + I_1 \ddot{\theta} \cos \varphi = 0$$

qui peuvent être intégrées et donnent les équations (5) et (6), respectivement.

MOUVEMENT D'UN SOLIDE MIS EN ROTATION PAR L'INTERMÉDIAIRE D'UN JOINT ÉLASTIQUE

Le mouvement élémentaire d'un solide soumis à des forces quelconques consiste, comme on sait, dans la translation instantanée que produirait la résultante générale si toute la masse était concentrée au centre de gravité, conjointement avec la rotation instantanée que produirait, autour de ce point, un couple de forces dont le moment serait égal au moment dynamique, ou moment résultant des forces pris par rapport au dit centre. Ce dernier mouvement admet une interprétation suggestive due à Poinso⁽¹⁾. Si un solide se trouve primitivement en repos, ou bien animé d'un mouvement rectiligne et uniforme, il commence à tourner autour du rayon vecteur qui va depuis le centre de gravité jusqu'au point de tangence de l'ellipsoïde de Poinso avec un plan perpendiculaire à celui du dit moment. Lorsqu'il existe un mouvement tournant initial et que le moment dynamique est nul (corps abandonné à lui-même) le solide continue à tourner de façon à ce que l'ellipsoïde roule sur le dit plan, qui se maintient dans une position invariable. Nous avons démontré, dans un travail précédent, que la même chose arrive quand on applique au corps un couple dont l'axe a le même sens que le moment cinétique initial. Il découle de cela que l'axe de rotation ne conservera un sens constant que lorsqu'il coïncidera avec un des axes principaux d'inertie; et l'on démontre encore que les deux axes, par rapport auxquels le moment est extrêmu^m (maximum pour l'un d'eux et minimum pour l'autre); sont stables, dans le sens que lorsque, par une cause quelconque, il se produit une petite déviation de l'axe de rotation, bien que les dits axes ne reprennent plus leur rôle d'axes permanents, il arrive que le pôle de la rotation, point de contact de l'ellipsoïde avec le plan fixe, décrit une polhodie qui, dans les cas mentionnés plus haut, est une courbe entourant l'axe respectif. Par contre, si la rotation initiale s'accomplit autour de l'axe intermédiaire, comme la polhodie respective n'entoure pas cet axe mais s'en éloigne de plus en plus, il suffira d'une petite déviation fortuite pour que l'ellipsoïde et, avec lui, le corps voltigent d'une façon irrégulière. A cause de cela, l'axe intermédiaire est instable. Les axes extrêmes s'appellent aussi les *axes libres*, afin de laisser comprendre que, tant qu'il n'y aura

(¹) L. POINSO. *Théorie nouvelle de la rotation des corps*. Paris, 1884.

pas de perturbations extérieures, on pourra se passer des coussinets pour parvenir à faire que le corps tourne autour de ces axes.

L'expérience la plus directe pour vérifier les prédictions précédentes consiste dans le lancement d'un corps de forme prismatique, dont les arêtes soient inégales, en lui imprimant, en même temps, une rotation autour d'une de ces arêtes. On constate, de cette façon, que les faces perpendiculaires à l'axe initial de rotation conservent leur orientation lorsque cet axe est celui d'inertie maximum ou minimum, tandis que le corps voltige d'une façon irrégulière si l'on prend l'axe intermédiaire pour axe de rotation initiale. L'essai devient visible quand on applique des couleurs diverses aux faces du prisme.

Le jeu des enfants qui consiste à faire tourner un bouton en tendant et relâchant un fil passé par deux de ses trous, et que l'on retord préalablement, fait voir, aussi, que l'axe d'inertie maximum est l'axe libre, car le bouton tourne dans son plan, sans voltiger, même aux moments où le fil est détendu. Dans le jeu du diabolo, si répandu il y a trente ans, on voit très bien la stabilité de l'axe d'inertie maximum. En faisant tourner une pièce de monnaie sur un point de sa périphérie l'on prouve que l'axe d'inertie minimum est aussi un axe libre.

Aucune des expériences précédentes ne se prête à être réalisée devant un auditoire nombreux, et, quand on projette un appareil qui sert à faire ressortir la stabilité ou l'instabilité d'un certain axe, il vient l'idée d'utiliser une suspension à la Cardan qui laisse le dit axe en complète liberté de mouvement. Mais si l'on réfléchit plus profondément on s'aperçoit que, avec un tel dispositif, tous les axes semblent stables, car l'inertie des bagues de suspension fait que les réactions, dues à la rotation, ne ressortent pas, aussitôt que celle-ci est un peu rapide. C'est ce qu'il arrive dans la bobine d'un galvanomètre, quand on lui envoie un courant alternatif de fréquence assez élevée.

L'expérience suivante, proposée dans plusieurs traités élémentaires⁽¹⁾, semble très indiquée pour montrer les différentes façons dont se comportent les axes de rotation. Un petit moteur électrique, dont l'axe a été placé verticalement (*fig. 1*), met en rotation un corps quelconque suspendu à un fil. Les auteurs affirment que la rotation est stable en deux positions qui correspondent à chacune des rotations autour des axes extrêmes. Un disque, par exemple, pourrait tourner autour de la position *a* (axe d'inertie minimum) ou de la position *b* (axe d'inertie maximum). Eh bien, en faisant cette épreuve avec des corps de formes très variées, l'on arrive toujours au résultat que la seule rotation stable est celle qui se réalise autour de l'axe d'inertie maximum (position *b*). *Le mouvement tend asymptotiquement vers la rotation simple autour de l'axe d'inertie maximum.*

1. Voir, par exemple, R. W. POHL, *Mechanik and Akustik*, 2^e édition, 1931.

Cette expérience fournit un artifice pour trouver la position de l'axe d'inertie maximum dans des corps de forme quelconque. Dans ce but, on suspend le corps par l'un de ses points, n'importe lequel, et on le fait tourner rapidement ; lorsque la rotation est devenue stable, on touche la partie inférieure du corps avec un pinceau trempé dans de l'encre, et l'on obtient ainsi une des extrémités de l'axe d'inertie maximum ; puis on suspend le corps par ce point et l'on répète l'opération, ce qui nous donnera l'autre bout de l'axe cherché.

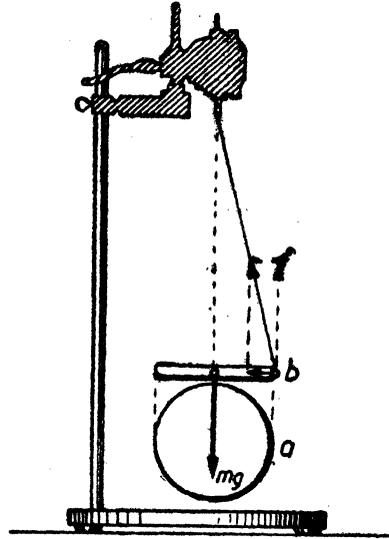


FIG. 1.

Voici une autre application : Si l'on veut mettre en rotation un cylindre vertical allongé, en l'accouplant avec un moteur et en utilisant un seul coussinet, il n'y aura pas moyen d'éviter les vibrations ; mais il suffit d'appliquer au cylindre des masses additionnelles, qui transforment son axe de révolution en axe d'inertie maximum, pour que la rotation se produise très doucement, même si l'axe a un grand jeu.

Dans l'expérience que nous venons de décrire il arrive donc que, au lieu de trouver toutes les formes de mouvement prévues par la théorie de la rotation d'un corps libre, seule est stable la rotation autour de l'axe d'inertie maximum. Il va sans dire que l'on ne saurait en tirer comme conséquence qu'il y ait une contradiction entre la théorie et l'expérience, car il ne s'agit pas d'un corps libre, comme l'exige la première. Nous sommes donc en présence d'un fait qui demande une explication. Nous avons consulté les livres de Mécanique qui se trouvaient à notre portée, y compris le *Handbuch der Physik*, le livre classique de Paul Appell et quelques brochures du grand ouvrage de Sommerfeld-Klein, sans pouvoir trouver dans aucun d'eux la moindre allusion au problème qui nous occupe. C'est pourquoi nous

jugeons intéressant de rechercher son explication théorique, et nous allons en proposer une.

En résumant les résultats des expériences, nous pouvons dire que, si l'on suspend un corps par un point quelconque et on lui imprime, par l'autre bout du fil de suspension, une rotation rapide ω d'axe vertical, le corps tend à se placer de telle façon que son axe d'inertie maximum coïncide avec le dit axe de rotation, et, lorsque cela s'accomplit, il réalise une rotation simple.

Bien que notre essai prouve que le résultat précédent est valable pour des corps de forme quelconque, nous considérerons, pour plus de simplicité, le cas d'un corps de révolution suspendu par un point de son axe (*fig. 2*).

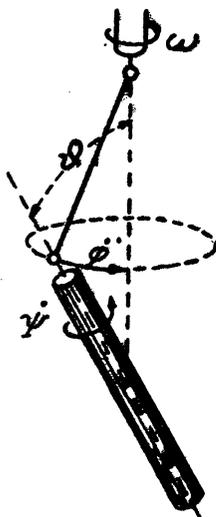


FIG. 2.

Afin de simplifier le problème, nous supposons que le fil est si long, et que le corps tourne si vite, que les changements d'énergie potentielle dûs aux mouvements du centre de gravité le long de la verticale sont négligeables par rapport à l'énergie cinétique. Ce que nous dirons sera, donc, inapplicable lorsque le corps tourne lentement.

Les forces qui agissent sur le corps sont, outre la pesanteur, celles développées par le fil et celles dues au frottement de l'air. Ces dernières forces sont très compliquées et, selon la forme du corps, peuvent donner lieu aux plus divers effets aérodynamiques. Nous allons supposer, pour simplifier la question, que la résistance de l'air ne produit pas de composante verticale, et qu'elle se borne à développer un couple de forces qui s'oppose à la rotation. Le fil agit par sa tension et par sa torsion, c'est-à-dire par une force et un couple, ayant, tous deux, le sens de la tangente au fil au point d'attache. Les composantes horizontales de la force et du couple

tournent rapidement, et l'inertie du corps fait que leurs effets sont négligeables si la rotation est suffisamment rapide.

Laissons de côté les premières phases du mouvement et considérons sa phase finale, dans laquelle, parce qu'existe l'équilibre entre les forces, le corps se comporte comme s'il tournait autour de son centre de gravité, *mais était soumis à la condition que le fil ne se torde plus*, car le couple de torsion devra être égal, à chaque instant, au couple développé par la résistance de l'air. Tout se passe, donc, comme si, entre l'arbre du moteur et le solide, il y avait un joint flexible mais très résistant à la torsion.

Quand le mouvement commence, le moteur fournira de l'énergie qui servira à accélérer le corps et à tordre le fil. Nous dirons que l'on a atteint un régime stationnaire, pour une vitesse donnée ω du moteur, lorsque celui-ci ne communique pas d'énergie au corps (dans la pratique, lorsqu'il communique l'énergie strictement indispensable pour vaincre les frottements). Lorsque ceci arrivera, l'énergie du corps ne pourra changer qu'aux dépens de l'énergie potentielle du fil, et cela arrivera lorsque l'énergie potentielle de celui-ci variera. Dans de telles conditions, le corps réalisera un mouvement que l'on peut considérer comme étant la superposition de deux autres : un qui se réaliserait autour du centre de gravité du corps si celui-ci était libre de toute action extérieure, et un autre dû aux changements de torsion du fil. Ce dernier mouvement consistera en oscillations torsionales qui s'amortiront plus ou moins rapidement, et en phase finale pour lesquelles le fil restera avec une torsion telle que le couple développé sera en tout instant égal et contraire à celui dû à la résistance de l'air. Il reste donc seulement le premier mouvement, ou mouvement libre, *soumis à la condition que la torsion du fil reste constante*. Tout se passe donc comme si le fil était remplacé par une tige rigide avec des articulations à la Cardan à ses extrémités.

Si ω est la vitesse angulaire constante que l'on imprime au bout du fil (*fig. 2*), la précédente condition, ou liaison, s'exprimera comme suit :

$$\begin{array}{lll} \dot{\varphi} + \dot{\psi} = \omega & \text{si} & \theta \ll \pi/2 \\ \dot{\varphi} - \dot{\psi} = \omega & \text{si} & \theta \gg \pi/2 \end{array} \quad (1)$$

où $\dot{\varphi}$ représente la précession, et $\dot{\psi}$ la rotation, du corps autour de son axe de révolution^(*).

S'il n'y avait pas de joint et s'il s'agit d'un solide de révolution qui part du repos, l'angle de nutation θ resterait constant et, entre les vitesses $\dot{\varphi}$ et $\dot{\psi}$, qui, elles aussi, seraient constantes, il existerait la relation :

$$(I_3 - I_1) \dot{\varphi} \cos \theta + I_3 \dot{\psi} = 0 \quad (2)$$

(*) Voir mon travail déjà cité.

de sorte qu'il serait possible avoir des formes de mouvement en nombre infini, et l'on en obtiendrait l'une ou l'autre selon la position du solide quand le mouvement commence. Il s'agit de rechercher parmi ces formes celle qui est compatible avec la liaison.

Le critérium que nous appliquerons, analogue au principe des travaux virtuels, sera le suivant : pour constater si une forme de mouvement est stable, nous donnerons à l'angle de nutation θ [qui est la seule variable indépendante, en vertu de (1) et (2)], un accroissement virtuel $d\theta$. Si l'énergie cinétique T croît (l'énergie potentielle n'intervient pas), cela prouvera que la force de liaison, ce à quoi équivaut la condition d'être constante pour la torsion du fil, a réalisé un travail positif et, par conséquent, la dite modification du mouvement sera réelle. Autrement dit, le mouvement sera stationnaire lorsque l'énergie cinétique atteindra son maximum. Or, l'énergie cinétique est donnée par

$${}^2 T = I_1 (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2$$

ou bien, en vertu de (1) et (2), et puisque $\dot{\theta} = 0$, par

$${}^2 T = \frac{I_1 \cos^2 \theta + I_3 \sin^2 \theta}{[I_3 \mp (I_3 - I_1) \cos \theta]^2} \omega^2 I_1 I_3 \quad (3)$$

où l'on doit prendre le signe du haut si $2\delta \leq \pi$, et celui du bas si $2\delta > \pi$,

Il résulte, donc, que le signe de $dT/d\theta$ est le même que celui de

$$[I_3 \mp (I_3 - I_1) \cos \theta]^3 (I_3 - I_1) \sin \theta \cos \theta \mp (I_1 \cos^2 \theta + I_3 \sin^2 \theta) [I_3 \mp (I_3 - I_1) \cos \theta] (I_3 - I_1) \sin \theta$$

ou bien de

$$(I_3 - I_1) (\mp 1 + \cos \theta) \sin \theta. \quad (4)$$

De la discussion de cette expression il résulte immédiatement que :

a) Cas du disque, $I_3 > I_1$.

$$\frac{dT}{d\theta} \text{ est } \begin{cases} < 0 & \text{si } \theta \leq \pi/2 \\ > 0 & \text{si } \theta \geq \pi/2 \end{cases} \quad \theta \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } \theta \leq \pi/2 \\ \pi & \text{si } \theta \geq \pi/2 \end{cases}$$

Cette dernière forme de mouvement, dans laquelle le solide reste au-dessus de son point d'attache, est irréalisable avec un fil. Il faudrait recourir à une tige flexible.

b) Cas du cylindre allongé, $I_3 < I_1$.

$$\frac{dT}{d\theta} \text{ est } \begin{cases} > 0 & \text{si } \theta \leq \pi/2 \\ < 0 & \text{si } \theta \geq \pi/2 \end{cases} \quad \theta \rightarrow \pi/2.$$

Dans les deux cas, la rotation est stable autour de l'axe d'inertie maximum et instable dans toutes les autres formes de mouvement. L'expérience est, donc, expliquée dans le cas d'un solide de révolution suspendu par un point de son axe.

Madrid. Instituto Alonso de Santa Cruz.
