ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

M. MENDES

Sur une équation aux dérivées partielles du second ordre

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série, tome 6 (1942), p. 83-105
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1942_4_6__83_0>

SUR UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE

Par M. M. MENDES[1].

Nous étudions dans ce Mémoire l'équation

$$\Delta'_3 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0, \tag{1}$$

qui s'apparente à la fois à l'équation du potentiel à deux variables

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = 0, \tag{2}$$

à laquelle on la ramène par un changement de variables et à l'équation de M. Humbert

$$\Delta_3 U = \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial z^3} - 3\frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y \partial z} = 0, \tag{3}$$

qui admet toutes les intégrales de l'équation (1).

Dans une première partie, nous indiquons un certain nombre de propriétés de l'équation (1) qu'il sera intéressant de rapprocher de celles données pour l'équation (3) par M. Devisme dans sa Thèse [2]; dans une seconde partie nous associons à l'équation (1) un espace dans lequel l'élément linéaire serait donné par la formule

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dy\,dz - dz\,dx - dx\,dy;$$

cet espace présente la particularité, étant à trois dimensions, d'avoir un élément linéaire à deux dimensions.

---

(1) M. M. Mendes est l'auteur d'un intéressant et profond travail, *Sur le problème des* n *corps à masses variables* publié dans les présentes *Annales* en 1935. N. D. L. R.

(2) J. Devisme, *Sur l'équation de M. Pierre Humbert* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* 1933).

PREMIÈRE PARTIE

Propriétés de l'équation $\Delta'_2 U = 0$.

1. — Nous utiliserons, en plus des variables x, y, z, les variables u, v, w et ξ, η, ζ liées par les relations

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} u &= jx + j^2 y + z = -\xi + i\eta, \\ v &= j^2 x + jy + z = -\xi - i\eta, \\ w &= x + y + z = \zeta\sqrt{3}, \end{aligned} \right.$$

où j et j^2 représentent les racines cubiques imaginaires de l'unité, qui donnent lieu aux égalités

$$(5) \qquad \Delta'_2 U = 9\frac{\partial^2 U}{\partial u \partial v} = \frac{9}{4}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\right).$$

x, y, z sont réels en même temps que ξ, η, ζ et l'on a

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} \xi &= \frac{x+y}{2} - z, \\ \eta &= \frac{\sqrt{3}}{2}(x-y). \end{aligned} \right.$$

Nous poserons

$$p = x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy = uv = \xi^2 + \eta^2.$$

Notons également les identités

$$(7) \qquad 3w\frac{\partial U}{\partial w} = (x+y+z)\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\right),$$

$$(8) \qquad 3\left(u\frac{\partial U}{\partial u} + v\frac{\partial U}{\partial v}\right) = \mathbf{S}(2x - y - z)\frac{\partial U}{\partial x},$$

$$(9) \qquad 3\mathbf{S}\, vw\frac{\partial^2 U}{\partial v \partial w} = \mathbf{S}(x^2 - yz)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}\right).$$

2. — L'équation $\Delta'_2 U = 0$ écrite en variables u, v, montre que *son intégrale générale est de la forme*

$$U = f(u, w) + g(v, w),$$

f et g *étant deux fonctions arbitraires.*

On en déduit immédiatement que si U (x, y, z) est une intégrale de (1), il en est de même des fonctions

$$f(w)\mathrm{U} \qquad \text{et} \qquad f(w)\mathrm{V},$$

où $f(w)$ est une fonction arbitraire de w et V représente une dérivée quelconque de U.

Tout polynome en x, y, z se transforme en un polynome en u, v, w. Un polynome solution s'écrira

$$\mathrm{U} = \Sigma \mathrm{A} u^m w^n + \Sigma \mathrm{B} v^{m'} w^{n'}.$$

3. — Cherchons les intégrales de $\Delta'_2 \mathrm{U} = 0$ qui ne dépendent que de $p = u\,v$. Posons

$$p = e^q, \qquad \mathrm{U} = \mathrm{F}(q);$$

l'équation $\dfrac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial u \partial v} = 0$ devient $\dfrac{d^2 \mathrm{F}}{dq^2} = 0$, dont l'intégrale générale est

$$\mathrm{F} = a \log p + b.$$

Donc

THÉORÈME. — *La seule intégrale de* $\Delta'_2 \mathrm{U} = 0$ *qui ne dépend que de* p *est* $\log p$.

Ce théorème se démontre aussi immédiatement avec les variables ξ, η.

4. — La solution fondamentale de l'équation (2) étant $\log(\xi^2 + \eta^2)$, celle de $\Delta'_2 = 0$ sera $\log(x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy)$.

Plus généralement, $\log[(\xi - \alpha)^2 + \eta^2]$ est solution de (2), se développe sous la forme

$$\log[(\xi - \alpha)^2 + \eta^2] = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \mathrm{P}_n(\xi, \eta),$$

et sur le cercle $\xi^2 + \eta^2 = 1$ se réduit à

$$\log(1 - 2\alpha\xi + \alpha^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \mathrm{C}_n^0(\xi),$$

$\mathrm{C}_n^0(\xi)$ étant le polynome de Gegenbauer d'ordre zéro.

On a

$$(\xi - \alpha)^2 + \eta^2 = x^2 + y^2 + (z + \alpha)^2 - (x + y)(z + \alpha) - xy,$$

d'où

$$\log\left[x^2+y^2+(z+\alpha)^2-(x+y)(z+\alpha)-xy\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n Q_n(x, y, z),$$

les fonctions $Q_n(x, y, z)$ se réduisant sur la surface

$$x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy=1$$

aux polynomes $C_n^0\left(\frac{x+y}{2}-z\right)$ de Gegenbauer.

5. — Si l'on pose

$$\xi=\rho\cos\varphi, \qquad \eta=\rho\sin\varphi,$$

l'équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial\eta^2}=0$$

admet les intégrales

$$U=\rho^m \, {}^{\cos}_{\sin} \, m\varphi \qquad \text{et} \qquad U=\sin(n\log\rho)\, {}^{sh}_{ch}\, n\varphi.$$

Pour avoir des solutions de l'équation (1) qui soient symétriques en $x, y, z,$ nous poserons

$$\left\{\begin{aligned}\xi_1&=\frac{y+z}{2}-x,\\ \eta_1&=\frac{\sqrt{3}}{2}(y-z),\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned}\xi_2&=\frac{z+x}{2}-y,\\ \eta_2&=\frac{\sqrt{3}}{2}(z-x),\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned}\xi_3&=\frac{x+y}{2}-z,\\ \eta_3&=\frac{\sqrt{3}}{2}(x-y),\end{aligned}\right.$$

et définirons $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ par les relations

$$\xi_i=\rho\cos\varphi_i, \qquad \eta_i=\rho\sin\varphi_i, \qquad (i=1, 2, 3).$$

Nous aurons alors par exemple les intégrales

$$U=\sum_{i=1}^{3}\rho^m \, {}^{\cos}_{\sin} \, m\varphi_i.$$

Les égalités

$$\sum\sin\varphi_i=0, \qquad \sum\cos\varphi_i=0,$$

montrent que l'on a

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_1 - \varphi_3 = \frac{2\pi}{3}.$$

On en déduit

$$\sum \sin m\varphi_i = 2 \sin m\varphi_1 \left(\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{2m\pi}{3}\right).$$

Les intégrales $\Sigma\rho^m \sin m\varphi_i$ ne seront différentes de zéro que pour $m = 3\,k$, ce qui donne

$$\mathrm{U} = \rho^{3k} \sin 3k\varphi_1.$$

$k = 1$ fournit l'intégrale

$$\rho^3 \sin 3\varphi_1 = (y - z)\,(z - x)\,(x - y).$$

De même, on a les intégrales

$$\mathrm{U} = \rho^{3k} \cos 3k\varphi_1,$$

qui pour $k = 1$ donnent

$$\mathrm{U} = (y + z - 2x)\,(z + x - 2y)\,(x + y - 2z).$$

6. — Nous représenterons par $\Delta'^k_2\mathrm{U}$ l'opérateur $\Delta'_2\mathrm{U}$ itéré k fois. Posons comme au paragraphe 3 :

$$q = \log \rho, \qquad \mathrm{U} = \mathrm{F}(q).$$

L'équation $\Delta'_2\mathrm{F} = 0$ s'écrit $e^{-q}\dfrac{d^2\mathrm{F}}{dq^2} = 0$ et fournit une équation linéaire à coefficients constants dont l'équation caractéristique est $r^2 = 0$.

L'équation $\Delta'^2_2\mathrm{F} = 0$ s'écrit

$$e^{-q}\frac{d^2}{dq^2}\left(e^{-q}\frac{d^2\mathrm{F}}{dq^2}\right) = 0$$

ou

$$e^{-2q}\left(\frac{d^4\mathrm{F}}{dq^4} - 2\frac{d^3\mathrm{F}}{dq^3} + \frac{d^2\mathrm{F}}{dq^2}\right) = 0,$$

et fournit une équation linéaire à coefficients constants dont l'équation caractéristique est $r^2\,(r - 1)^2 = 0$.

On voit de proche en proche que l'équation $\Delta'^k_2 F = 0$ fournit une équation de même forme dont l'équation caractéristique est

$$r^2(r-1)^2 \ldots (r-k+1)^2 = 0.$$

On en déduit que *les intégrales de l'équation* $\Delta'^k_2 U = 0$ *qui ne dépendent que de p sont données par la formule générale*

$$p^i \log^j p \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, k-1;\ j = 0, 1).$$

7. — THÉORÈME : *L'équation différentielle donnant les intégrales de l'équation* $\Delta'^k_2 U = 0$ *qui ne dépendent que de p, peut se mettre sous la forme*

$$\frac{d^k}{dp^k}\left(p^k \frac{d^k F}{dp^k}\right) = 0.$$

Cette formule est vraie pour $k = 1$. Admettons qu'elle le soit pour l'indice $k - 1$. La relation

$$\Delta'_2 F = \frac{d}{dp}\left(p \frac{dF}{dp}\right)$$

appliquée à la fonction

$$\Delta'^{k-1}_2 F = \frac{d^{k-1}}{dp^{k-1}}\left(p^{k-1} \frac{d^{k-1} F}{dp^{k-1}}\right)$$

donnera

$$\begin{aligned} \Delta'^k_2 F &= \frac{d}{dp}\left[p \frac{d^k}{dp^k}\left(p^{k-1} \frac{d^{k-1} F}{dp^{k-1}}\right)\right] \\ &= p \frac{d^{k+1}}{dp^{k+1}}\left(p^{k-1} \frac{d^{k-1} F}{dp^{k-1}}\right) + \frac{d^k}{dp^k}\left(p^{k-1} \frac{d^{k-1} F}{dp^{k-1}}\right), \end{aligned}$$

et l'on doit vérifier que l'on a également

$$\Delta'^k_2 F = \frac{d^k}{dp^k}\left(p^k \frac{d^k F}{dp^k}\right).$$

L'égalité des deux expressions de $\Delta'^k_2 F$ résulte du calcul des dérivées au moyen de la formule de Leibnitz relative à la dérivée d'un produit. La formule annoncée est donc établie.

8. — THÉORÈME : *Si U (x, y, z) est une intégrale de l'équation* $\Delta'_2 U = 0$, *il en est de même de la fonction*

$$V(x, y, z) = U\left(\frac{\partial \log p}{\partial x}, \frac{\partial \log p}{\partial y}, \frac{\partial \log p}{\partial z}\right).$$

On a, en effet,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \log p}{\partial x} &= \frac{j}{u} + \frac{j^2}{v} = \mathrm{X}, \\ \frac{\partial \log p}{\partial y} &= \frac{j^2}{u} + \frac{j}{v} = \mathrm{Y}, \\ \frac{\partial \log p}{\partial z} &= \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \mathrm{Z}. \end{aligned}\right.$$

Prenons pour nouvelles variables

$$\left\{\begin{aligned} u' &= j\mathrm{X} + j^2\mathrm{Y} + \mathrm{Z}, \\ v' &= j^2\mathrm{X} + j\mathrm{Y} + \mathrm{Z}, \\ w' &= \mathrm{X} + \mathrm{Y} + \mathrm{Z}, \end{aligned}\right.$$

d'où les relations

$$u'v = uv' = 3;$$

on en déduit

$$\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial u\, \partial v} = \frac{9}{p^2} \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial u'\, \partial v'},$$

ce qui démontre le théorème.

9. — Nous introduirons les fonctions suivantes, qui ne diffèrent des cosinus d'Appell que par un même facteur :

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{P}_1(\theta, \varphi) &= e^{\frac{\theta+\varphi}{2}} \frac{e^{\theta+\varphi} + j^2 e^{j\theta + j^2\varphi} + j e^{j^2\theta + j\varphi}}{3}, \\ \mathrm{Q}_1(\theta, \varphi) &= e^{\frac{\theta+\varphi}{2}} \frac{e^{\theta+\varphi} + j e^{j\theta + j^2\varphi} + j^2 e^{j^2\theta + j\varphi}}{3}, \\ \mathrm{R}_1(\theta, \varphi) &= e^{\frac{\theta+\varphi}{2}} \frac{e^{\theta+\varphi} + e^{j\theta + j^2\varphi} + e^{j^2\theta + j\varphi}}{3}. \end{aligned}\right.$$

Ces fonctions vérifient les identités

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{P}_1^2(\theta, \varphi) - \mathrm{Q}_1(\theta, \varphi)\mathrm{R}_1(\theta, \varphi) &= e^{\frac{3}{2}(\theta+\varphi)} \mathrm{Q}_1(-\theta, -\varphi), \\ \mathrm{Q}_1^2(\theta, \varphi) - \mathrm{R}_1(\theta, \varphi)\mathrm{P}_1(\theta, \varphi) &= e^{\frac{3}{2}(\theta+\varphi)} \mathrm{P}_1(-\theta, -\varphi), \\ \mathrm{R}_1^2(\theta, \varphi) - \mathrm{P}_1(\theta, \varphi)\mathrm{Q}_1(\theta, \varphi) &= e^{\frac{3}{2}(\theta+\varphi)} \mathrm{R}_1(-\theta, -\varphi), \end{aligned}\right.$$

d'où

$$(11)\qquad \mathrm{P}_1^2 + \mathrm{Q}_1^2 + \mathrm{R}_1^2 - \mathrm{Q}_1\mathrm{R}_1 - \mathrm{R}_1\mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1 = 1.$$

10. — Effectuons le changement de variables

$$x = \rho P_1(\theta, \varphi), \qquad y = \rho Q_1(\theta, \varphi), \qquad z = \rho R_1(\theta, \varphi).$$

Les quantités

$$\begin{cases} u^n = (jx + j^2 y + z)^n = \rho^n e^{n\frac{\theta+\varphi}{2}} e^{n(j\theta + j^2\varphi)} = \rho^n \left[j P_1(n\theta, n\varphi) + j^2 Q_1(n\theta, n\varphi) + R_1(n\theta, n\varphi) \right], \\ v^n = (j^2 x + jy + z)^n = \rho^n e^{n\frac{\theta+\varphi}{2}} e^{n(j^2\theta + j\varphi)} = \rho^n \left[j^2 P_1(n\theta, n\varphi) + j Q_1(n\theta, n\varphi) + R_1(n\theta, n\varphi) \right], \\ w^n = (x + y + z)^n = \rho^n e^{n\frac{\theta+\varphi}{2}} e^{n(\theta+\varphi)} = \rho^n \left[P_1(n\theta, n\varphi) + Q_1(n\theta, n\varphi) + R_1(n\theta, n\varphi) \right], \end{cases}$$

sont des intégrales de $\Delta'_3 U = 0$. Par des combinaisons linéaires immédiates, on en déduit les intégrales

$$\rho^n P_1(n\theta, n\varphi), \qquad \rho^n Q_1(n\theta, n\varphi), \qquad \rho^n R_1(n\theta, n\varphi).$$

On a, de même, les intégrales

$$(uw)^n, \qquad (vw)^n, \qquad (w^2)^n,$$

d'où l'on déduit les intégrales

$$\rho^{2n} e^{\frac{3n}{2}(\theta+\varphi)} P_1(n\theta, n\varphi), \qquad \rho^{2n} e^{\frac{3n}{2}(\theta+\varphi)} Q_1(n\theta, n\varphi), \qquad \rho^{2n} e^{\frac{3n}{2}(\theta+\varphi)} R_1(n\theta, n\varphi),$$

puis les intégrales

$$(uw^2)^n, \qquad (vw^2)^n, \qquad (w^3)^n,$$

d'où l'on déduit les intégrales

$$\rho^{3n} e^{3n(\theta+\varphi)} P_1(n\theta, n\varphi), \qquad \rho^{3n} e^{3n(\theta+\varphi)} Q_1(n\theta, n\varphi), \qquad \rho^{3n} e^{3n(\theta-\varphi)} R_1(n\theta, n\varphi),$$

et ainsi de suite.

11. — THÉORÈME : *Si $U(x, y, z)$ est une intégrale de l'équation $\Delta'_3 U = 0$, il en est de même des fonctions*

$$(x+y+z)\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\right), \qquad \mathbf{S}(2x - y - z)\frac{\partial U}{\partial x},$$

$$\mathbf{S}\, x\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad \mathbf{S}(x^2 - yz)\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}\right).$$

Les identités (7), (8), (9) donnent en effet les égalités

$$\Delta'_2\left[(x+y+z)\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}\right)\right]=27\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\left(w\frac{\partial U}{\partial w}\right)=27\,w\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial u\,\partial v}\right),$$

$$\Delta'_2\left[\mathbf{S}(2x-y-z)\frac{\partial U}{\partial x}\right]=27\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\left(u\frac{\partial U}{\partial u}+v\frac{\partial U}{\partial v}\right)=27\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(u\frac{\partial^2 U}{\partial u\,\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(v\frac{\partial^2 U}{\partial u\,\partial v}\right)\right],$$

d'où, par addition,

$$3\Delta'_2\left[\mathbf{S}\,x\frac{\partial U}{\partial x}\right]=27\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(u\frac{\partial^2 U}{\partial u\,\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(v\frac{\partial^2 U}{\partial u\,\partial v}\right)+w\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial u\,\partial v}\right)\right],$$

puis

$$\Delta'_2\left[\mathbf{S}(x^2-yz)\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z}\right)\right]=27\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\,\mathbf{S}\,vw\frac{\partial^2 U}{\partial v\,\partial w}$$

$$=27\left\{\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\left(uv\frac{\partial^2 U}{\partial u\,\partial v}\right)+w\left[\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial w}\left(u\frac{\partial^2 U}{\partial u\,\partial v}\right)+\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial w}\left(v\frac{\partial^2 U}{\partial u\,\partial v}\right)\right]\right.$$

qui démontrent le théorème.

12. — THÉORÈME : *Si U (x, y, z) est une intégrale de l'équation* $\Delta'_2 U=0$, *la fonction*

$$V(x,y,z)=p^n U(x,y,z) \qquad (p=uv)$$

est intégrale de l'équation $\Delta_2'^{n+1}U=0$.

On a, en effet

$$\Delta'_2(p^n U)=n^2p^{n-1}U+np^{n-1}\left(u\frac{\partial U}{\partial u}+v\frac{\partial U}{\partial v}\right)+p^n\frac{\partial^2 U}{\partial u\,\partial v},$$

d'où

$$\Delta_2'^{n+1}(p^n U)=n^2\Delta_2'^{n}(p^{n-1}U)+n\Delta_2'^{n}\left[p^{n-1}\left(u\frac{\partial U}{\partial u}+v\frac{\partial U}{\partial v}\right)\right]+\Delta_2'^{n}\left(p^n\frac{\partial^2 U}{\partial u\,\partial v}\right),$$

et le thorème se démontre par récurrence, en tenant compte du théorème du paragraphe 11 (2ᵉ partie).

Remarque : Ce théorème reste évidemment exact, si l'on remplace p par $P = u\,v\,w$.

13. — THÉORÈME : Soient α, β, γ *trois constantes telles que*

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma-\gamma\alpha-\alpha\beta=0$$

et $f(t)$ une fonction arbitraire assujettie seulement à posséder une dérivée seconde $f''(t)$. Si l'on pose

$$t_1 = \alpha x + \beta y + \gamma z,$$
$$t_2 = (2\alpha - \beta - \gamma)x + (2\beta - \gamma - \alpha)y + (2\gamma - \alpha - \beta)z,$$
$$t_3 = (2\alpha - \beta - \gamma)(x^2 - yz) + (2\beta - \gamma - \alpha)(y^2 - zx) + (2\gamma - \alpha - \beta)(z^2 - xy),$$

$f(t_1)$, $f(t_2)$, $f(t_3)$ sont des intégrales de l'équation $\Delta'_2 U = 0$.

Démonstration : 1° Si l'on pose

$$F(x, y, z) = f(\alpha x + \beta y + \gamma z),$$

on a, en effet

$$\Delta'_2 F = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma - \gamma\alpha - \alpha\beta) f''(t_1) = 0.$$

2° La seconde partie résulte de l'identité

(12) $$(2\alpha - \beta - \gamma)^2 + (2\beta - \gamma - \alpha)^2 + (2\gamma - \alpha - \beta)^2 - (2\beta - \gamma - \alpha)(2\gamma - \alpha - \beta)$$
$$-(2\gamma - \alpha - \beta)(2\alpha - \beta - \gamma) - (2\alpha - \beta - \gamma)(2\beta - \gamma - \alpha) = 9(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma - \gamma\alpha - \alpha\beta).$$

3° Si l'on pose

$$\left\{\begin{aligned} a &= j^2\alpha + j\beta + \gamma, \\ b &= j\alpha + j^2\beta + \gamma, \\ c &= \alpha + \beta + \gamma, \end{aligned}\right.$$

on a

$$t_3 = w(au + bv),$$

avec

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma - \gamma\alpha - \alpha\beta = ab = 0.$$

Selon que $a = 0$ ou $b = 0$, t_3 sera fonction de v et w ou de u et w; donc $f(t_3)$ sera une intégrale de $\Delta'_2 U = 0$.

Remarque : L'identité

$$(2\alpha - \beta - \gamma)^2 + (2\beta - \gamma - \alpha)^2 + (2\gamma - \alpha - \beta)^2 = 6(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma - \gamma\alpha - \alpha\beta)$$

montre que $f(t_2)$ est en même temps intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

14. — COROLLAIRE : *Si* α, β, γ *sont les trois racines cubiques d'un même nombre et que l'on pose*

$$t = \alpha(x^2 - yz) + \beta(y^2 - zx) + \gamma(z^2 - xy),$$

f (t) est une intégrale de l'équation $\Delta'_2 U = 0$.

On pourra, en effet, poser

$$\left\{\begin{aligned} \alpha &= 2\alpha_1 - \beta_1 - \gamma_1, \\ \beta &= 2\beta_1 - \gamma_1 - \alpha_1, \\ \gamma &= 2\gamma_1 - \alpha_1 - \beta_1, \end{aligned}\right.$$

et l'on retombe sur le théorème précédent.

On peut aussi remarquer que l'on a

$$\text{soit} \left\{\begin{aligned} \alpha &= j\gamma, \\ \beta &= j^2\gamma, \end{aligned}\right. \qquad \text{soit} \left\{\begin{aligned} \alpha &= j^2\gamma, \\ \beta &= j\gamma, \end{aligned}\right.$$

d'où

$$t = \gamma u w \qquad \text{ou} \qquad t = \gamma v w,$$

ce qui démontre le théorème.

15. — THÉORÈME : *Si U est une fonction de x, y, z définie par l'une des relations*

$$Ax + By + Cz = 1,$$

$$(2A - B - C)x + (2B - C - A)y + (2C - A - B)z = 1,$$

$$(2A - B - C)(x^2 - yz) + (2B - C - A)(y^2 - zx) + (2C - A - B)(z^2 - xy) = 1,$$

où A, B, C sont trois fonctions de U vérifiant l'égalité

$$A^2 + B^2 + C^2 - BC - CA - AB = 0,$$

U est une intégrale de l'équation $\Delta'_2 U = 0$.

Démonstration : 1° Si l'on pose

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{A} &= j^2 A + jB + C, \\ \mathcal{B} &= jA + j^2 B + C, \\ \mathcal{C} &= A + B + C, \end{aligned}\right.$$

on a

$$Ax + By + Cz = \frac{1}{3}(\mathcal{A}u + \mathcal{B}v + \mathcal{C}w) = 1,$$

avec

$$A^2 + B^2 + C^2 - BC - CA - AB = \mathcal{A}\mathcal{B} = 0.$$

Soit $\mathcal{B} = 0$; on a alors

$$\mathcal{A}u + \mathcal{C}w = 3.$$

Cette équation définit U comme fonction de u et w seulement, ce qui démontre la première partie du théorème.

2° La seconde partie résulte de la première en vertu de l'identité (12) appliquée aux lettres A, B, C.

3° Le changement de variables du 1° donne

$$w(\mathcal{A}u + \mathcal{B}v) = 1,$$

avec $\mathcal{A}\mathcal{B} = 0$.

Pour $\mathcal{B} = 0$, on a la relation

$$\mathcal{A}uw = 1,$$

qui définit U comme fonction de u et w seulement.

16. — Dans le théorème du numéro 13, prenons $f(t_1) = e^{t_1}$. Comme

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma - \gamma\alpha - \alpha\beta = (j\alpha + j^2\beta + \gamma)(j^2\alpha + j\beta + \gamma),$$

on en déduit les intégrales

$$e^{j\lambda x + j^2\mu y - (\lambda+\mu)z} \quad \text{et} \quad e^{j^2\lambda x + j\mu y - (\lambda+\mu)z},$$

d'où l'on déduit les nouvelles intégrales

$$e^{(\lambda+\mu)(x+y+z)}\, e^{j\lambda x + j^2\mu y - (\lambda+\mu)z} = e^{(\mu - j^2\lambda)x + (\lambda - j\mu)y}$$

et

$$e^{(\lambda+\mu)(x+y+z)}\, e^{j^2\lambda x + j\mu y - (\lambda+\mu)z} = e^{(\mu - j\lambda)x + (\lambda - j^2\mu)y},$$

qui ne dépendent que de deux variables.

17. — Le changement de variables défini par

$$\frac{x}{P_1(\theta, \varphi)} = \frac{y}{Q_1(\theta, \varphi)} = \frac{z}{R_1(\theta, \varphi)} = e^{\frac{3r}{2}},$$

donne

$$9uv\frac{\partial^2 U}{\partial u \partial v} = uv\Delta'_2 U = e^{3r}\Delta'_2 U$$

$$= \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial \varphi} - \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi \partial r} - \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta}.$$

On en déduit le théorème suivant :

THÉORÈME : *Si $U(x, y, z)$ est une intégrale de l'équation $\Delta'_2 U = 0$, il en est de même de la fonction $U(r, \theta, \varphi)$, où les nouvelles variables sont définies par rapport aux anciennes par le changement de variables précédent.*

SECONDE PARTIE

Étude d'un espace attaché à l'équation $\Delta'_2 U = 0$.

18. — Nous considérons l'espace où l'élément linéaire est donné par la formule

$$(13) \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dy\,dz - dz\,dx - dx\,dy.$$

M_1, M_2 étant deux points de coordonnées x_1, y_1, z_1 est x_2, y_2, z_2, leur *distance* $\overline{M_1 M_2}$ sera donnée par la formule

$$\overline{M_1M_2}^2 = (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2 - (y_1-y_2)(z_1-z_2) - (z_1-z_2)(x_1-x_2) - (x_1-x_2)(y_1-y_2).$$

A chaque point $M(x, y, z)$ de cet espace nous associerons dans un plan $\Pi(\xi, \eta)$ le point μ dont les coordonnées sont données par les formules (6) et appellerons $d\sigma$ l'élément linéaire dans ce plan.

L'identité

$$x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy = \xi^2 + \eta^2$$

montre que l'on a

$$\text{distance } \overline{M_1M_2} = \mu_1\mu_2,$$

$\mu_1\mu_2$ représentant la distance euclidienne des correspondants μ_1, μ_2 de M_1, M_2.

Nous appellerons plan l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient une équation du premier degré, droite l'intersection de deux plans ; on en déduit la notion du parallélisme des plans et des droites comme dans l'espace euclidien.

Si on donne à ξ, η des valeurs fixes, les équations (6) représentent une droite parallèle à la droite D d'équations $x = y = z$. Appelons P le plan d'équation $x + y + z = 0$. Les parallèles à D menées par deux points M_1, M_2 perçant P en m_1, m_2, on a

$$\overline{M_1M_2} = \overline{m_1m_2}.$$

Donc, *si M_1 et M_2 se déplacent respectivement sur deux parallèles à D, la distance $\overline{M_1 M_2}$ ne varie pas.*

A une droite du plan P correspond une droite dans le plan Π. Si nous voulons réaliser le minimum de l'intégrale $\int_{M_1}^{M_2} ds$, il nous faudra réaliser le minimum de $\int_{m_1}^{m_2} ds$, ou celui de $\int_{\mu_1}^{\mu_2} d\sigma$; il faut pour cela que μ décrive la droite $\mu_1\mu_2$, donc que m décrive la droite $m_1 m_2$, donc que M décrive une courbe quelconque contenue dans le plan m_1 M_1 m_2 M_2.

Par deux points M_1, M_2 il passe une infinité de géodésiques, toutes contenues dans le plan mené par M_1, M_2 parallèlement à la droite D.

Nous appellerons ce plan *le plan géodésique relatif à* M_1, M_2. Par deux points il passe en général un plan géodésique et un seul. Il y a exception si M_1 et M_2 sont sur une même parallèle à D. Dans ce cas, le morceau de droite $M_1 M_2$ constitue une *ligne géodésique de longueur nulle.*

La distance entre deux points situés sur une même parallèle à D est nulle.

Les parallèles à D jouent donc dans notre espace le rôle des *droites isotropes.*

Les équations (6) montrent que pour tout point du plan P on a

$$\xi^2 + \eta^2 = 3(x^2 + xy + y^2).$$

Les droites de ce plan vérifiant $x^2 + xy + y^2 = 0$ fournissent deux directions isotropes. Les plans imaginaires menés par ces directions parallèlement à D sont tels que la distance entre deux points situés sur eux est nulle. Nous appellerons *plans isotropes* ces plans. Leur intersection avec un plan quelconque fournira les directions isotropes de ce plan. Ces plans contiennent comme droites réelles des parallèles à D.

19. — Les équations (6) mettent en évidence la parallèle à D sur laquelle se trouve le point M. Pour fixer sur cette droite la position de M, nous nous donnerons la distance euclidienne ζ de M au plan P par la relation

$$x + y + z = \zeta\sqrt{3}.$$

x, y, z et ξ, η, ζ seront alors liées par les relations (4) qui établissent une correspondance ponctuelle entre l'espace E (x, y, z) et l'espace $\mathcal{E}(\xi, \eta, \zeta)$; cette correspondance est univoque et réciproque.

A un point M de l'espace E nous ferons donc correspondre le point $\mathcal{M}$ de l'espace $\mathcal{E}$ et le point μ du plan Π, projection de $\mathcal{M}$ sur Π.

A une droite $\mathcal{D}$ de l'espace E pous ferons de même correspondre la droite Δ de l'espace $\mathcal{E}$ et la projection δ de Δ sur le plan Π.

20. — Cherchons les formules qui définissent le déplacement le plus général du point M (x, y, z). Soit M' (x', y', z') la nouvelle position de M. Les homologues de M et M' dans l'espace $\mathcal{E}$ ont pour coordonnées ξ, η, ζ et ξ', η', ζ'. La seule condition à réaliser pour la conservation des distances est l'invariance de la quantité $\xi^2+\eta^2$. Le point μ du plan Π doit donc subir un déplacement au sens euclidien, ce qui exige que ξ, η et ξ', η' soient liées par des relations de la forme

$$\left\{\begin{array}{l} \xi' = \xi_0 + \xi \cos\varphi + \eta \sin\varphi, \\ \eta' = \eta_0 - \xi \sin\varphi + \eta \cos\varphi. \end{array}\right.$$

Quant à la cote ζ', elle pourra être prise quelconque. Eu égard aux relations (6), on aura donc, ξ_0, η_0, φ étant des constantes qui définissent le déplacement de μ et ζ' une fonction arbitraire de x, y, z, les relations

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x'+y'}{2} - z' = \xi_0 + \left(\dfrac{x+y}{2} - z\right)\cos\varphi + \dfrac{\sqrt{3}}{2}(x-y)\sin\varphi, \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}(x'-y') = \eta_0 - \left(\dfrac{x+y}{2} - z\right)\sin\varphi + \dfrac{\sqrt{3}}{2}(x-y)\cos\varphi, \\ x'+y'+z' = \zeta'\sqrt{3}, \end{array}\right.$$

qui permettront de calculer x', y', z' en fonction de x, y, z.

La transformation précédente conserve les distances; elle ne conserve pas en général les angles tels que nous les définirons.

21. — Considérons un plan $\mathcal{L}$ et un point M. La parallèle $\mathcal{D}$ menée par M à D coupe en général $\mathcal{L}$ en un point H, et la distance $\overline{\text{MH}}$ est nulle. Il n'y aurait exception que si $\mathcal{L}$ était parallèle à D, M étant quelconque : dans ce cas, $\mathcal{D}$ ne couperait plus $\mathcal{L}$, mais une droite infiniment voisine de $\mathcal{D}$ le couperait en un point H infiniment voisin de M (avec notre notion de distance). Les distances de M aux différents points de $\mathcal{L}$ auraient alors *zéro* comme limite inférieure, mais cette limite ne serait pas atteinte.

Si donc nous appelons distance d'un point à un plan la limite inférieure des distances de ce point aux différents points du plan, cette limite pouvant ne pas être atteinte, nous pourrons dire que *la distance d'un point à un plan est toujours nulle.*

22. — Plaçons-nous dans le plan $x\,0\,y$. Les équations (6), dans lesquelles on fait $z = 0$, donnent

$$\xi = \frac{x+y}{2}, \qquad \eta = (x-y)\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Soient, dans ce plan, la droite

$$(\mathfrak{D}) \qquad Ax + By + C = 0$$

et le point M (x_0, y_0).

δ et μ étant les homologues dans le plan Π de $\mathfrak{D}$ et M, la distance de M à $\mathfrak{D}$ est égale à la distance euclidienne de μ à δ. Or les coordonnées dans Π de μ sont

$$\xi_0 = \frac{x_0+y_0}{2}, \qquad \eta_0 = (x_0 - y_0)\frac{\sqrt{3}}{2},$$

et la droite δ a pour équation

$$(A+B)\xi + (A-B)\frac{\sqrt{3}}{3}\eta + C = 0.$$

On en déduit pour la distance de M à $\mathfrak{D}$ la formule

$$\frac{(A+B)\xi_0 + (A-B)\dfrac{\sqrt{3}}{3}\eta_0 + C}{\sqrt{(A+B)^2 + \dfrac{(A-B)^2}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + AB + B^2}}.$$

23. — Si M a pour coordonnées x, y, z, posons

$$x = \rho P_1(\theta, \varphi), \qquad y = \rho Q_1(\theta, \varphi), \qquad z = \rho R_1(\theta, \varphi),$$

P_1, Q_1, R_1 étant les fonctions définies au paragraphe 9.

L'équation (14) montre que ρ n'est autre que la distance $\overline{OM}$, et l'on aura pour *cosinus directeurs* de la droite OM

$$\left\{\begin{aligned}P_1(\theta, \varphi) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy}},\\ Q_1(\theta, \varphi) &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy}},\\ R_1(\theta, \varphi) &= \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy}}.\end{aligned}\right.$$

24. — Considérons deux vecteurs de composantes a, b, c et a', b', c', ou de cosinus directeurs $P_1(\theta, \varphi)$, ..., $P_1(\theta', \varphi')$, ...

Nous définirons l'angle V de ces deux directions par la relation

$$\cos V = \frac{a(2a'-b'-c')+b(2b'-c'-a')+c(2c'-a'-b')}{2\sqrt{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab}\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2-b'c'-c'a'-a'b'}}.$$

Si l'on considère les directions homologues dans le plan Π des deux directions données, V représentera également l'angle de ces homologues.

On voit facilement que l'on a

$$\cos V = \left(R_1 - \frac{P_1+Q_1}{2}\right)_{(\theta+\varphi', \theta'+\varphi)}.$$

Deux directions sont, par définition, orthogonales si l'on a $\cos V = 0$.

25. — Considérons la droite

$$\text{(14)} \qquad \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

Les droites menées par l'origine, orthogonales à celle-là, ont pour équations

$$\frac{x}{a'} = \frac{y}{b'} = \frac{z}{c'},$$

a', b', c' vérifiant la relation

$$(2a-b-c)a'+(2b-c-a)b'+(2c-a-b)c' = 0,$$

et sont situées dans le plan

$$(2a-b-c)x+(2b-c-a)y+(2c-a-b)z = 0.$$

Ce plan, orthogonal à la droite (14), peut s'écrire

$$Ax+By+Cz = 0,$$

avec $A + B + C = 0$; c'est un *plan géodésique*.

Il est indéterminé si l'on a

$$a = b = c,$$

c'est-à-dire si la droite donnée est parallèle à D.

Inversement, donnons-nous un plan

$$Ax + By + Cz = 0.$$

La direction perpendiculaire a des paramètres directeurs a, b, c qui vérifient

$$\frac{2a - b - c}{A} = \frac{2b - c - a}{B} = \frac{2c - a - b}{C} = \frac{0}{A + B + C}.$$

Si $A + B + C \neq 0$, les équations

$$2a - b - c = 2b - c - a = 2c - a - b = 0$$

se réduisent à deux et donnent $a = b = c$: on obtient une direction paralèle à D.

Si $A + B + C = 0$, les équations se réduisent à une :

$$B(a + b - 2c) + C(2b - c - a) = 0$$

par exemple, qui donne une infinité de droites situées dans le plan parallèle à

$$(B - C)x + (B + 2C)y - (2B + C)z = 0$$

ou

$$(B - C)x + (C - A)y + (A - B)z = 0.$$

En définitive :

Une droite quelconque admet en chacun de ses points un plan perpendiculaire qui est un plan géodésique; une droite parallèle à D admet n'importe quel plan comme plan perpendiculaire.

Un plan quelconque admet en chacun de ses points une droite perpendiculaire qui est parallèle à D; un plan géodésique admet une infinité de droites perpendiculaires, toutes situées dans un même plan, lui-même géodésique.

26. — *Remarques :* I. On ne peut pas définir l'angle de deux plans comme l'angle de leurs normales, puisque celles-ci sont parallèles entre elles. Nous pourrons dire que l'angle V des deux plans

$$\begin{gathered} Ax + By + Cz = 0, \\ A'x + B'y + C'z = 0, \end{gathered}$$

est défini par l'égalité

$$\cos V = \frac{A(2A' - B' - C') + B(2B' - C' - A') + C(2C' - A' - B')}{2\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - BC - CA - AB}\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2 - B'C' - C'A' - A'B'}}.$$

On définira de même l'angle V de la droite

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$$

et du plan

$$Ax + By + Cz = 0$$

par l'égalité

$$\cos V = \frac{A(2\alpha - \beta - \gamma) + B(2\beta - \gamma - \alpha) + C(2\gamma - \alpha - \beta)}{2\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - BC - CA - AB}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma - \gamma\alpha - \alpha\beta}}.$$

II. La recherche de la distance d'un point à une droite revient à chercher la distance euclidienne d'un point du plan des $\xi\eta$ à une droite de ce plan, ou, ce qui revient au même, à abaisser de ce point la perpendiculaire sur cette droite. Donc, dans notre espace également, *la plus courte distance d'un point à une droite s'obtient en abaissant de ce point la perpendiculaire sur la droite.*

27. — Remarquons qu'avec notre définition de l'angle de deux directions, les axes de coordonnées font entre eux un angle égal à $\frac{2\pi}{3}$. Considérons alors un nouveau trièdre pareil $Ox'\ y'\ z'$. Si les cosinus directeurs des nouveaux axes avec les anciens sont donnés par le tableau suivant :

	x'	y'	z'
x	a	a'	a''
y	b	b'	b''
z	c	c'	c''

on a les formules de changement d'axes

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= ax' + a'y' + a''z', \\ y &= bx' + b'y' + b''z', \\ z &= cx' + c'y' + c''z', \end{aligned}\right.$$

et l'on en déduit, en tenant compte des relations telles que

$$a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab = 1,$$
$$a'(2a'' - b'' - c'') + b'(2b'' - c'' - a'') + c'(2c'' - a'' - b'') = 2\cos\frac{2\pi}{3} = -1,$$

la relation

$$x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy = x'^2 + y'^2 + z'^2 - y'z' - z'x' - x'y'.$$

La distance de M à l'origine est invariante par le changement de variables précédent.

Ce changement de variables conserve également les angles. Soient, en effet, deux directions de cosinus directeurs α, β, γ et α_1, β_1, γ_1 par rapport au premier système d'axes, α', β', γ' et α'_1, β'_1, γ'_1 par rapport au second système.

Les relations

$$\left\{\begin{aligned} \alpha &= a\alpha' + a'\beta' + a''\gamma', \\ \beta &= b\alpha' + b'\beta' + b''\gamma', \\ \gamma &= c\alpha' + c'\beta' + c''\gamma', \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \alpha_1 &= a\alpha'_1 + a'\beta'_1 + a''\gamma'_1, \\ \beta_1 &= b\alpha'_1 + b'\beta'_1 + b''\gamma'_1, \\ \gamma_1 &= c\alpha'_1 + c'\beta'_1 + c''\gamma'_1, \end{aligned}\right.$$

donnent

$$\alpha(2\alpha_1-\beta_1-\gamma_1)+\beta(2\beta_1-\gamma_1-\alpha_1)+\gamma(2\gamma_1-\alpha_1-\beta_1)$$
$$=\alpha'(2\alpha'_1-\beta'_1-\gamma'_1)+\beta'(2\beta'_1-\gamma'_1-\alpha'_1)+\gamma'(2\gamma'_1-\alpha'_1-\beta'_1),$$

ce qui démontre la proposition.

Nous dirons que le système (15) définit une *rotation autour de l'origine.*

Le déplacement le plus général qui conserve à la fois les distances et les angles est défini par une *translation* et une *rotation*, au moyen des formules

$$\left\{\begin{aligned} x &= x_0+ax'+a'y'+a''z',\\ y &= y_0+bx'+b'y'+b''z',\\ z &= z_0+cx'+c'y'+c''z'.\end{aligned}\right.$$

28. — La surface qui dans notre espace joue le rôle d'une sphère a pour équation

$$f(x,y,z)\equiv x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy=\rho_0^2.$$

Elle est engendrée par une droite parallèle à D. On peut la représenter paramétriquement par les équations

$$\left\{\begin{aligned} x &= \rho_0 P_1(\theta,\varphi),\\ y &= \rho_0 Q_1(\theta,\varphi),\\ z &= \rho_0 R_1(\theta,\varphi).\end{aligned}\right.$$

Le plan tangent au point (x, y, z) a pour équation

$$(2P_1-Q_1-R_1)X+(2Q_1-R_1-P_1)Y+(2R_1-P_1-Q_1)Z-2\rho_0=0.$$

La normale en un point est la génératrice passant en ce point.

Si l'on mène par un point fixe M (x_0, y_0, z_0) une sécante

$$\left\{\begin{aligned} x &= x_0+\alpha\lambda,\\ y &= y_0+\beta\lambda, \qquad (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma-\gamma\alpha-\alpha\beta=1),\\ z &= z_0+\gamma\lambda,\end{aligned}\right.$$

l'intersection de cette droite et de la surface est donnée par

$$f(x_0+\alpha\lambda,\ y_0+\beta\lambda,\ z_0+\gamma\lambda)=f(x_0,y_0,z_0)+\lambda(\alpha f'_{x_0}+\beta f'_{y_0}+\gamma f'_{z_0})+\lambda^2=\rho_0^2,$$

d'où, entre les deux racines λ_1, λ_2 de cette équation, la relation

$$\lambda_1\lambda_2=f(x_0,y_0,z_0)-\rho_0^2=\rho_1^2-\rho_0^2,$$

ρ_1 représentant la distance $\overline{OM}$.

On a ainsi défini la *puissance de M par rapport à la surface.*

29. — Considérons une courbe gauche

$$x = x(s), \qquad y = y(s), \qquad z = z(s),$$

où s désigne l'abcisse curviligne.

Les cosinus directeurs de la tangente sont

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \beta = \frac{dy}{ds}, \qquad \gamma = \frac{dz}{ds},$$

avec

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma - \gamma\alpha - \alpha\beta = 1.$$

Le plan normal au point (x, y, z) a pour équation

$$(2x' - y' - z')(X - x) + (2y' - z' - x')(Y - y) + (2z' - x' - y')(Z - z) = 0,$$

ou

$$(2x' - y' - z')X + (2y' - z' - x')Y + (2z' - x' - y')Z - \frac{d\rho^2}{ds} = 0,$$

avec

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy.$$

Le plan osculateur a pour équation

$$(y'z'' - z'y'')(X - x) + (z'x'' - x'z'')(Y - y) + (x'y'' - y'x'')(Z - z) = 0.$$

On en déduit que la normale principale a pour paramètres directeurs

$$x'', \qquad y'', \qquad z''.$$

Si l'on désigne par α', β', γ' les cosinus directeurs de la normale principale, on a les relations

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha'}{R}, \qquad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\beta'}{R}, \qquad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\gamma'}{R},$$

avec

$$\frac{1}{R^2} = x''^2 + y''^2 + z''^2 - y''z'' - z''x'' - x''y''.$$

On pourrait définir la torsion, puisque nous avons défini l'angle de deux plans, mais les formules seraient compliquées.

Si nous considérons la courbe comme trajectoire d'un certain mouvement d'équations

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t),$$

on aura, en posant $v = \frac{ds}{dt}$:

$$x' = \alpha v, \qquad y' = \beta v, \qquad z' = \gamma v,$$

$$x'' = \alpha' \frac{v^2}{R} + \alpha \frac{dv}{dt}, \qquad y'' = \beta' \frac{v^2}{R} + \beta \frac{dv}{dt}, \qquad z'' = \gamma' \frac{v^2}{R} + \gamma \frac{dv}{dt}.$$

L'accélération Γ *peut donc être considérée comme résultant d'une accélération* ***tangentielle*** $\Gamma_t = \frac{dv}{dt}$ *et d'une accélération normale* $\Gamma_n = \frac{v^2}{R}$.