

PAUL VINCENSINI

**Sur une famille de congruences à angle des plans focaux constant**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4<sup>e</sup> série*, tome 6 (1942), p. 1-6

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1942\\_4\\_6\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1942_4_6__1_0)

© Université Paul Sabatier, 1942, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# ANNALES

DE LA

## FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE,

POUR LES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES.

---

### SUR UNE FAMILLE DE CONGRUENCES

A ANGLE DES PLANS FOCaux CONSTANT

Par PAUL VINCENSINI,

Professeur à la Faculté des Sciences de Besançon.

---

1. Dans un Mémoire des *Acta Mathematica* <sup>(1)</sup>, j'ai étudié les congruences rectilignes à angle des plans focaux constant, et les réseaux conjugués formés de courbes isogonales qui en dérivent.

Dans les lignes élémentaires qui suivent, je signale une famille de congruences à angle des plans focaux constant de définition géométrique particulièrement simple.

Cette famille constitue, en un certain sens, une généralisation des congruences des normales aux surfaces enveloppes d'une sphère à un paramètre dont l'une des deux nappes focales (au moins) se réduit à une courbe (la courbe lieu du centre de la sphère variable). Nous l'obtiendrons en cherchant les congruences ( $\Omega$ ) dont les plans focaux issus d'un même rayon font un angle constant,  $\omega$ , et dont l'une des deux nappes focales est une courbe C, l'autre nappe focale étant, soit une surface S, soit une autre courbe  $\Gamma$ .

2. Envisageons tout d'abord une congruence ( $\Omega$ ) admettant pour nappes focales une surface S et une courbe C. Soit MN un rayon quelconque de

---

(<sup>1</sup>) Sur les généralisations de quelques problèmes de Géométrie différentielle et sur certains cycles de congruences. *Acta Mathematica*, t. LXXI, 1939, p. 145-175.

cette congruence, touchant  $S$  en  $M$  et s'appuyant sur  $C$  en  $N$ . Si  $NT$  est la tangente à la courbe  $C$  en  $N$ , l'un des plans focaux issus de  $MN$  est le plan tangent en  $M$  à  $S$  et l'autre est le plan  $MNT$ . D'autre part, l'une des deux familles de développables de la congruence est constituée par les cônes ayant leurs sommets sur  $C$  et circonscrits à  $S$ .

Soit  $Q$  le cône de sommet  $N$  circonscrit à  $S$ ; le premier plan focal issu de  $MN$  est le plan tangent au cône  $Q$  le long de  $MN$ ; quant au second plan focal  $MNT$ , il doit, d'après la définition de la congruence  $(\Omega)$  envisagée, couper le cône  $Q$  sous l'angle donné  $\omega$  le long de la génératrice  $MN$ .

Le cône  $Q$  de sommet  $N$  jouit donc de la propriété suivante : les différents plans menés par la droite fixe  $NT$  issue du sommet, coupent le cône sous un angle constant. Cette propriété suffit à caractériser le cône. Si l'on imagine une sphère de rayon quelconque,  $\Sigma$ , centrée au sommet  $N$ , et si l'on désigne par  $\gamma$  la trace de  $Q$  sur  $\Sigma$ , l'angle sous lequel se coupent, sur  $\Sigma$ , la trace  $\gamma$  du cône  $Q$  et celle du plan  $TNM$ , est évidemment égal à  $\omega$ . Les traces, sur  $\Sigma$ , des différents plans  $TNM$ , sont des grands cercles passant par les deux points  $I, I'$  où la droite  $NT$  perce  $\Sigma$ . Il en résulte que  $\gamma$  est une loxodromie de  $\Sigma$ , admettant pour pôles les points  $I, I'$  qui viennent d'être définis, et coupant les méridiens issus de  $I$  et  $I'$  sous l'angle constant  $\omega$ .

La forme du cône  $Q$  est donc bien déterminée :  $Q$  est un cône dont le sommet est au centre d'une sphère et coupant celle-ci suivant une loxodromie; nous dirons que  $Q$  est un *cône loxodromique* (d'angle de loxodromie  $\omega$ ), et que son *axe* est la droite  $II'$  joignant les deux pôles  $I$  et  $I'$  de la loxodromie directrice.

La surface  $S$  [nappe focale non réduite à une courbe de la congruence  $(\Omega)$ ] apparaît ainsi comme l'enveloppe d'un cône loxodromique *de forme invariable*, lorsqu'on imprime au cône un mouvement quelconque à un paramètre, dans lequel l'axe constamment tangent à la courbe  $C$ , le point de contact étant à chaque instant le sommet du cône.

La courbe  $C$  pouvant évidemment être choisie arbitrairement, on voit que la description géométrique des congruences  $(\Omega)$  cherchées est la suivante :

*Ces congruences sont engendrées par les génératrices d'un cône loxodromique  $Q$ , lorsqu'on soumet celui-ci à un mouvement au cours duquel l'axe du cône reste tangent à une courbe arbitraire  $C$ , le point de contact de l'axe et de  $C$  étant constamment le sommet du cône.*

3. Si l'angle de loxodromie  $\omega$  est nul, la loxodromie  $\gamma$  base du cône  $Q$  est un grand cercle de la sphère  $\Sigma$  dont il est question au numéro précé-

dent, et le cône Q se réduit au faisceau des diamètres de ce grand cercle, son axe étant l'une des droites du faisceau. Les congruences obtenues dans ce cas particulier sont engendrées par un faisceau plan de droites, dont le sommet décrit une courbe fixe arbitraire C à laquelle le plan P du faisceau reste constamment tangent (le point de contact étant le sommet). Ces congruences ne sont pas, à proprement parler, des congruences du type envisagé dans cet article; leurs développables se réduisent aux plans P relatifs aux différents points de C et à la développable (singulière) d'arête de rebroussement C.

Si l'angle de loxodromie  $\omega$  est droit, une circonstance spéciale se présente. La forme du cône loxodromique dont le déplacement engendre la congruence n'est plus déterminée, puisque celui-ci a pour base, sur la sphère  $\Sigma$ , un parallèle quelconque d'axe NT. Les congruences ( $\Omega$ ) obtenues dans le cas particulier actuel, sont les congruences des normales aux enveloppes d'une sphère de rayon variable dont le centre décrit une courbe quelconque C, congruences que l'on peut en effet définir au moyen des génératrices d'un cône de révolution Q d'angle variable dont le sommet N décrit une courbe quelconque C, l'axe restant constamment tangent à C en N.

On voit que le degré de généralité des congruences ( $\Omega$ ), correspondant à une valeur déterminée (autre que  $\frac{\pi}{2}$ ), de l'angle constant ( $\omega$ ) des plans focaux, n'est pas altéré lorsqu'on attribue à  $\omega$  la valeur  $\frac{\pi}{2}$ ; lorsque  $\omega = \frac{\pi}{2}$ , le cône mobile étant de révolution, les rotations autour de son axe sont sans effet sur la congruence, mais, par contre, à chaque loi de variation de l'angle au sommet correspond une congruence particulière.

4. La détermination, dans le cas général (angle  $\omega$  quelconque), de la nappe focale S d'une congruence ( $\Omega$ ) correspondant à une nappe curviligne C donnée, et pour un mouvement donné du cône loxodromique générateur, est un problème d'enveloppe (enveloppe du cône loxodromique) qui peut être très délicat. Voyons ce que sont les surfaces S dans le cas particulièrement simple où la focale curviligne C est une droite D, et où le mouvement imprimé au cône loxodromique est un mouvement hélicoïdal d'axe D de pas déterminé  $h$ , mouvement au cours duquel l'axe du cône glisse le long de D.

S est alors un hélicoïde d'axe D et de pas  $h$ . La détermination du profil méridien de cet hélicoïde n'offre pas de difficulté. Envisageons un système de trois axes rectangulaires Oxyz, Oz étant confondu avec l'axe D du mou-

vement hélicoïdal. Lorsque le sommet N du cône loxodromique est en O, l'équation du cône en coordonnées sphériques est

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\operatorname{sh} m \theta},$$

où  $\varphi$  est la colatitude d'une génératrice quelconque rapportée au plan  $xOz$ ,  $\theta$  la longitude, et  $m$  une constante.

Le profil méridien (dans le plan  $xOz$ ) de l'hélicoïde S enveloppé par le cône est l'enveloppe, dans le plan  $xOz$ , de la génératrice d'intersection du cône mobile avec le plan fixe  $xOz$ . L'équation de cette génératrice est évidemment

$$z = h \theta + x \cdot \operatorname{cotg} \varphi = h \theta + x \cdot \operatorname{sh} m \theta,$$

et son enveloppe dans le plan  $xOz$ , lorsque  $\theta$  varie, est une tractrice d'asymptote Oz et de tangente  $\frac{h}{m}$ .

S est donc engendrée par le mouvement hélicoïdal d'une tractrice autour de son asymptote D; c'est, par suite, un *hélicoïde pseudosphérique de Dini* d'axe D. (Cf. A. BUHL, *Nouveaux Éléments d'Analyse*, t. I, chap. vi, *Exercices*).

Ainsi, dans le cas envisagé, les congruences ( $\Omega$ ) ne sont autres que les congruences pseudosphériques (que l'on devait *a priori* rencontrer comme solutions particulières du problème), constituées par les tangentes à un hélicoïde quelconque de Dini s'appuyant sur l'axe de l'hélicoïde.

5. Il nous reste à nous demander s'il existe des congruences ( $\Omega$ ), à angle des plans focaux constant, dont les deux nappes focales sont réduites à des courbes C et  $\Gamma$ . Il en est bien ainsi si l'angle constant  $\omega$  sous lequel se coupent les plans focaux est droit; les congruences sont alors constituées par les normales aux cyclides de Dupin, normales qui, comme l'on sait, s'appuient sur deux coniques focales l'une de l'autre  $C_1$  et  $C_2$ .

Dans ce dernier cas, la figure constituée par l'ensemble invariable ( $C_1$ ,  $C_2$ ), jouit de cette propriété que dans une perspective quelconque on voit toujours  $C_1$  et  $C_2$  se couper à angle droit. Le problème que nous posons actuellement revient évidemment à celui de la recherche de tous les couples de deux courbes (C,  $\Gamma$ ), invariablement liées l'une à l'autre, et telles que, dans une perspective de point de vue quelconque, on voie toujours C et  $\Gamma$  se couper sous le même angle  $\omega$ . Il résulte immédiatement de ce qui précède que la seule solution de ce problème est celle qui est fournie par deux coniques focales l'une de l'autre.

Les différents cônes dont les sommets sont sur C et admettant  $\Gamma$  pour directrice doivent être en effet (tant que  $\omega \neq \frac{\pi}{2}$ ) des cônes loxodromiques *de forme invariable*. Considérons dès lors deux quelconques de ces cônes, Q et  $Q_1$ , ayant pour sommets deux points quelconques N et  $N_1$  de C. On peut passer de  $Q_1$  à Q par un certain déplacement hélicoïdal qui amène  $N_1$  en N et  $\Gamma$  en  $\Gamma_1$ . Lorsque, maintenant le cône Q fixe, on fait décrire à  $N_1$  la courbe C, on obtient, sur Q, une infinité de courbes  $\Gamma_1$ , toutes égales entre elles et égales à  $\Gamma$ , et l'on peut dire que le cône Q (ou tout au moins une portion de ce cône) est engendré par le déplacement d'une courbe invariable autre qu'une génératrice rectiligne. Cela exige que Q soit un cône de révolution, ou bien admette pour directrice une courbe spirale, plane (spirale logarithmique) ou gauche (tracée sur un cône de révolution et se projetant sur un plan perpendiculaire à l'axe du cône suivant une spirale logarithmique). Or, les cônes loxodromiques ne rentrent dans aucun des deux types de cônes indiqués.

Nous avons admis que les courbes  $\Gamma_1$ , déduites de  $\Gamma$  par le déplacement hélicoïdal qui amène  $Q_1$  sur Q, étaient distinctes. Si elles étaient confondues, le déplacement hélicoïdal amenant un cône quelconque  $Q_1$  sur Q laisserait fixe  $\Gamma$ . Au cours du mouvement continu, faisant passer le cône Q par la succession des différents cônes  $Q_1$  ayant pour sommets les différents points de C, la courbe C glisserait donc sur elle-même, et serait par suite une hélice circulaire. Or, une hélice circulaire ne saurait être tracée sur un cône loxodromique.

Il n'existe donc pas, en dehors des couples formés par deux coniques focales l'une de l'autre, de systèmes de deux courbes que l'on voit toujours se couper sous le même angle quel que soit le point de vue choisi.

Si l'on revient au problème de la recherche des congruences rectilignes à angle des plans focaux constant ( $\neq \frac{\pi}{2}$ ), le résultat précédent nous prouve, *qu'en dehors des congruences rectilignes formées par les normales aux cyclides de Dupin, il n'existe pas de congruences à angle des plans focaux constant et dont les deux nappes focales sont des courbes*, tout au moins si, comme nous l'avons implicitement supposé plus haut, aucune des deux courbes focales ne doit se trouver dans le plan de l'infini.

Le cas où l'une des deux courbes focales,  $\Gamma$  par exemple, serait dans le plan de l'infini, se traite d'ailleurs sans difficulté. Les différents cônes loxodromiques ayant leurs sommets N sur C et s'appuyant sur  $\Gamma$  se déduisent de l'un d'eux, Q, par une translation continue. Dans cette translation

l'axe  $NT$  du cône  $Q$  conserve une direction invariable, et comme cet axe doit être constamment tangent à  $C$  en  $N$ ,  $C$  est une droite fixe le long de laquelle glisse  $NT$ . La congruence lieu des génératrices du cône mobile  $Q$  est un cas très particulier de celles obtenues par le procédé général indiqué au numéro 2.