

BERTRAND GAMBIER

**Transformations homographiques planes conservant la droite
de l'infini et un point à distance finie**

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4^e série, tome 2 (1938), p. 155-175

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1938_4_2__155_0

© Université Paul Sabatier, 1938, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

TRANSFORMATIONS HOMOGRAPHIQUES PLANES

CONSERVANT LA DROITE DE L'INFINI ET UN POINT A DISTANCE FINIE

PAR M. BERTRAND GAMBIER.

1. Introduction. — Le problème de Mathématiques Élémentaires d'Agrégation masculine (1937) se rapporte à la géométrie du triangle; il a été inspiré par une question traitée dans la *Géométrie* de Rouché et Comberousse (tome II, 7^e édition, Gauthier-Villars, 1900, p. 616-621); il s'agit d'un triangle ABC; sur la médiatrice de BC on prend un point A_φ tel que $(BA_\varphi, BC) = \varphi$, l'angle constant φ étant un angle de droites indéfinies; on construit de même, par permutations circulaires, mais avec le même φ , les points B_φ, C_φ . On doit montrer que le triangle $A_\varphi B_\varphi C_\varphi$ a même centre de gravité G que ABC, que les droites $AA_\varphi, BB_\varphi, CC_\varphi$ concourent en un point M_φ dont on demande de trouver le lieu si φ varie (hyperbole équilatère passant par A, B, C, G et l'orthocentre H de ABC); on doit montrer que $AA_{\frac{\pi}{2}-\varphi}, BB_{\frac{\pi}{2}-\varphi}, CC_{\frac{\pi}{2}-\varphi}$ ($A_{\frac{\pi}{2}-\varphi}, B_{\frac{\pi}{2}-\varphi}, C_{\frac{\pi}{2}-\varphi}$ correspondant à $\frac{\pi}{2} - \varphi$ au lieu de φ), sont perpendiculaires à $B_\varphi C_\varphi, C_\varphi A_\varphi, A_\varphi B_\varphi$; on demande de construire ABC connaissant le triangle $A_\varphi B_\varphi C_\varphi$ et l'angle φ ...; je me borne aux questions utiles pour ce qui suit : ce sont celles qui, m'ayant ramené à ce principe bien connu que le vin de Champagne et la géométrie du triangle sont d'excellentes choses, du moins à dose modérée, m'ont suggéré d'extraire la question du domaine de la géométrie du triangle pour la replacer dans le cadre véritable, à savoir le groupe des transformations homographiques du plan conservant la droite de l'infini et un point G à distance finie; ce cadre précis n'est peut-être pas évident a priori, mais dès que l'on essaie de trouver une solution satisfaisante de la construction de ABC à partir de $A_\varphi B_\varphi C_\varphi$ et φ , on se trouve obligé de revenir au groupe des transformations en jeu, si l'on ne veut pas se borner à une recette, ingénieuse peut-être, mais sans horizon; et en dernière analyse, nous arrivons au groupe des affinités relatives à deux droites rectangulaires fixes. J'ai publié d'autre part la solution du problème (*Enseignement Scientifique*, Eyrolles, t. 11, p. 272); mais le lecteur n'a pas besoin de s'y reporter pour la compréhension de ce qui suit. M. Ilievici m'a suggéré une représentation symbolique \vec{iV} pour représenter ce que devient un vecteur \vec{V} après rotation de $\frac{\pi}{2}$ (et translation arbitraire); ce symbole *vectoriel* se manipule dans certains calculs comme

une constante numérique, i^2 étant remplacé par (-1) ; mais ce symbole donne $(i\vec{V})\wedge(i\vec{W}) = \vec{V}\wedge\vec{W}$ et $(i\vec{V})\cdot(i\vec{W}) = \vec{V}\cdot\vec{W}$ [dans ma solution j'ai employé une notation $(z \wedge \vec{V})$, où z est un vecteur unité convenablement orienté, perpendiculaire au plan du dessin, pour représenter $-i\vec{V}$; cette notation m'avait été suggérée par M. Finikoff, de Moscou; moins maniable que la précédente pour les sommes géométriques, elle est préférable pour les produits vectoriels ou scalaires]. L'emploi du symbole $i\vec{V}$ présente quelques autres difficultés que je signalerai.

2. Étude d'une représentation symbolique. — Soient P_1, P_2, \dots, P_n des points en nombre arbitraire et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des constantes numériques; O étant un point arbitraire on peut convenir d'écrire \vec{P}_i , au lieu de \vec{OP}_i , pour représenter le point \vec{P}_i ; l'expression, où l'on suppose $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \neq 0$,

$$(1) \quad \vec{P} = \frac{\lambda_1 \vec{P}_1 + \lambda_2 \vec{P}_2 + \dots + \lambda_n \vec{P}_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n},$$

représente alors le centre des forces parallèles, d'intensité $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ appliquées en P_1, \dots, P_n ; si l'on a choisi deux axes $O\xi, O\tau$ et si l'on remplace chaque \vec{P}_k par la coordonnée ξ_k de P_k on déduit de (1) la coordonnée ξ de P ; on peut encore dire que les forces $\lambda_1 \vec{OP}_1, \lambda_2 \vec{OP}_2, \dots, \lambda_n \vec{OP}_n$ ont pour résultante $(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n) \vec{OP}$. Si, au contraire, $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 0$, l'expression $\lambda_1 \vec{P}_1 + \lambda_2 \vec{P}_2 + \dots + \lambda_n \vec{P}_n$ représente un vecteur défini à une translation près: en effet, O choisi, $\lambda_1 \vec{OP}_1 + \lambda_2 \vec{OP}_2 + \dots + \lambda_n \vec{OP}_n$ est un vecteur dont l'origine est O , mais qui reste équipollent à lui-même quand O est remplacé par un point O' différent; en effet

$$\vec{OP}_k = \vec{OO}' + \vec{O}'P_k, \quad \Sigma \lambda_k \vec{OP}_k = \vec{OO}' \Sigma \lambda_k + \Sigma \lambda_k \vec{O}'P_k.$$

Une expression $\vec{P} + \vec{V}$ où \vec{P} est le symbole vectoriel définissant le point P , et \vec{V} un vecteur, définit le point P' , extrémité du vecteur, d'origine P , équipollent à \vec{V} ; réciproquement, le vecteur \vec{PP}' sera représenté par $\vec{P}' - \vec{P}$. Ces résultats, bien connus, devaient être rappelés pour la clarté de ce qui suit. Nous avons défini plus haut $i\vec{V}$; on peut alors, pour le problème d'agrégation, écrire

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{A}_\varphi = \frac{\vec{B} + \vec{C}}{2} + i \operatorname{tg} \varphi \frac{\vec{B} - \vec{C}}{2}, \\ \vec{B}_\varphi = \frac{\vec{C} + \vec{A}}{2} + i \operatorname{tg} \varphi \frac{\vec{C} - \vec{A}}{2}, \\ \vec{C}_\varphi = \frac{\vec{A} + \vec{B}}{2} + i \operatorname{tg} \varphi \frac{\vec{A} - \vec{B}}{2}. \end{array} \right.$$

(Cela entraîne immédiatement $\vec{A}_\varphi + \vec{B}_\varphi + \vec{C}_\varphi = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$; autrement dit les deux triangles ABC , $A_\varphi B_\varphi C_\varphi$ ont même centre de gravité).

On remarquera que, dans toute égalité $\Sigma \lambda_k \vec{P}_k + \Sigma \mu_j \vec{V}_j = \mathbf{o}$, où les \vec{P}_k sont des points, les \vec{V}_j des vecteurs, on doit nécessairement avoir $\Sigma \lambda_k = \mathbf{o}$ et si les λ_k dépendent de i , la partie réelle et la partie imaginaire de $\Sigma \lambda_k$ sont nulles séparément.

Comme conséquence logique des définitions, l'expression $i(\vec{V})$ ou $i^2 \vec{V}$ représente ce que devient \vec{V} après deux rotations successives de $+\frac{\pi}{2}$ (et translation arbitraire), donc $i^2 \vec{V} = -\vec{V}$, en opérant comme si i était une constante numérique et remplaçant i^2 par (-1) . Une relation linéaire (λ_i, μ_j constantes réelles ou imaginaires)

$$(3) \quad \Sigma \lambda_k \vec{P}_k + \Sigma \mu_j \vec{V}_j = \mathbf{o},$$

peut être multipliée par $a + ib$ où a et b sont des constantes numériques, en remplaçant i^2 par (-1) , mais, à part cela, opérant comme si i était une constante numérique. Mettons, en effet, en évidence la partie réelle et la partie imaginaire de chaque constance λ_k ou μ_j , la relation s'écrit

$$(3') \quad \Sigma \lambda'_k \vec{P}_k + \Sigma \mu'_j \vec{V}_j + i(\Sigma \lambda''_k \vec{P}_k + \Sigma \mu''_j \vec{V}_j) = \mathbf{o}.$$

Il faut bien se garder de croire que la partie réelle et la partie imaginaire sont nulles; $\Sigma \lambda'_k, \Sigma \lambda''_k$ sont nulles séparément; $\Sigma \lambda'_k \vec{P}_k + \Sigma \mu'_j \vec{V}_j$ représente un vecteur, $\Sigma \lambda''_k \vec{P}_k + \Sigma \mu''_j \vec{V}_j$ aussi et ce dernier est déduit du précédent par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$; finalement le premier membre de (3') représente un vecteur nul: en multipliant par a , on a donc encore un vecteur nul; en multipliant par bi , aussi et en faisant la somme géométrique de ces deux résultats nuls, on a encore un vecteur nul.

Une grosse faute, par exemple, serait d'exprimer que $A_\varphi, B_\varphi, C_\varphi$ sont en ligne droite, en écrivant que le déterminant de la substitution (2) qui fait passer de A, B, C , à $A_\varphi, B_\varphi, C_\varphi$ est nul: on trouverait $tg^2 \varphi = \frac{1}{3}$, $lA_\varphi + mB_\varphi + nC_\varphi = \mathbf{o}$ où $m = j^2 l$, $n = j^2 l$, où j est une racine cubique imaginaire de l'unité; la relation, $\vec{P} + j\vec{Q} + j^2 \vec{R} = \mathbf{o}$, exprime non pas que P, Q, R sont alignés, mais forment un triangle équilatéral, comme cela résulte de l'interprétation de la relation

$$\vec{P} - \frac{\vec{Q}}{2} - \frac{\vec{R}}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}(\vec{Q} - \vec{R}) = \mathbf{o}.$$

Dans le même ordre d'idées $\rho e^{i\omega} \vec{V}$, où ρ et ω sont des constantes réelles, est un

vecteur de composantes réelles et perpendiculaires entre elles, $(\rho \cos \omega) \vec{V}$, $(\rho \sin \omega) i \vec{V}$. On obtient ce nouveau vecteur en multipliant scalairement \vec{V} par ρ , puis faisant tourner de ω le vecteur ainsi obtenu. De la sorte, quand nous voudrions représenter une direction par un vecteur, il sera nécessaire de n'employer que des représentations ne contenant pas le symbole i . De même, quand nous voudrions exprimer que trois points sont alignés.

On voit ainsi que le symbole *vectorel* i ne coïncide pas avec le symbole de même nom employé en analyse pure comme unité imaginaire : nous avons montré les analogies, les différences de ces deux symboles représentés par i . Nous avons montré les dangers de la représentation vectorielle employée ici ; pourtant, nous avons su profiter des défauts de ce symbole, pour obtenir par voie presque intuitive, que si l'angle φ est égal à $\pm \frac{\pi}{6}$, le triangle $A_\varphi B_\varphi C_\varphi$ est équilatéral ; nous retrouverons cette propriété plus loin, par d'autres considérations.

3. Étude de la transformation φ . — J'appelle transformation φ la transformation définie plus haut qui fait passer du triangle ABC au triangle $A_\varphi B_\varphi C_\varphi$ ou $(ABC)_\varphi$. Du triangle $(ABC)_\varphi$ je peux, de même, avec une valeur angulaire ψ , déduire un nouveau triangle $(ABC)_{\varphi\psi}$ ou $A_{\varphi\psi} B_{\varphi\psi} C_{\varphi\psi}$, et ainsi de suite. Nous prouverons que ces opérations sont permutable, qu'elles ne forment pas un groupe [car en général $(ABC)_{\psi\varphi}$ ne peut se déduire de ABC par une seule opération d'angle convenablement choisi], mais que, néanmoins, si l'on introduit la transformation homographique plane où A, B, C, G sont respectivement remplacés par $A_\varphi, B_\varphi, C_\varphi, G$ on peut définir un groupe de transformations homographiques à 2 paramètres formant un sous-groupe de transformations homographiques à 4 paramètres conservant G et la droite de l'infini : même avec cette définition étendue, les opérations φ ne forment pas un groupe, bien qu'étant des transformations particulières (à un paramètre) de ce groupe ; mais l'opération (à deux paramètres) $\psi\varphi$ est l'élément définissant le groupe.

Écrivons de nouveau les formules (2)

$$(2') \quad \vec{A}_\varphi = \frac{\vec{B} + \vec{C}}{2} + i \operatorname{tg} \varphi \frac{\vec{B} - \vec{C}}{2}, \quad \vec{B}_\varphi = \dots, \quad \vec{C}_\varphi = \dots$$

On en déduit

$$(4) \quad \frac{\vec{B}_\varphi + \vec{C}_\varphi}{2} = \frac{\vec{B} + \vec{C}}{4} + \frac{\vec{A}}{2} + i \operatorname{tg} \varphi \frac{\vec{C} - \vec{B}}{4}, \quad \frac{\vec{B}_\varphi - \vec{C}_\varphi}{2} = \frac{\vec{C} - \vec{B}}{4} + i \operatorname{tg} \varphi \left(\frac{\vec{B} + \vec{C}}{4} - \frac{\vec{A}}{2} \right);$$

$$(5) \quad \vec{A}_{\varphi\psi} = \frac{\vec{B}_\varphi + \vec{C}_\varphi}{2} + i \operatorname{tg} \psi \frac{\vec{B}_\varphi - \vec{C}_\varphi}{2} = \frac{\vec{B} + \vec{C}}{4} (1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \psi) + \frac{\vec{A}}{2} (1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \psi) + i \frac{\vec{C} - \vec{B}}{4} (\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \psi).$$

La symétrie en φ, ψ prouve que *les opérations $\varphi\psi$ et $\psi\varphi$ sont équivalentes*. Il en résulte que, *dans une opération $\varphi_1\varphi_2\dots\varphi_n$ on peut intervertir à volonté l'ordre des opérations composantes* : en effet

$$\varphi_1\varphi_2\dots\varphi_n = [(\varphi_1\varphi_2\dots\varphi_{p-2})\varphi_{p-1}\varphi_p][\varphi_{p-1}\dots\varphi_n].$$

L'opération $\varphi_{p-1}\varphi_p$ appliquée au triangle $(ABC)_{\varphi_1\varphi_2\dots\varphi_{p-2}}$ peut être remplacée par $\varphi_p\varphi_{p-1}$, appliquée au même triangle; d'après le raisonnement classique, la possibilité d'échanger deux opérations composantes contiguës permet de changer à volonté l'ordre des opérations.

L'aspect de la formule (5) conduit à étudier les hypothèses particulières

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & 1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \psi = 0 & \text{ou} & \quad \psi = \frac{\pi}{2} + \varphi; \\ \text{b)} \quad & \operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \psi = 0 & \text{ou} & \quad \psi = -\varphi; \\ \text{c)} \quad & 1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \psi = 0 & \text{ou} & \quad \psi = \frac{\pi}{2} - \varphi. \end{aligned}$$

L'hypothèse (a) montre que l'on a

$$(6) \quad \left(\varphi, \frac{\pi}{2} + \varphi\right) = \left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi\right),$$

autrement dit : *la composition de deux opérations $\varphi, \frac{\pi}{2} + \varphi$ donne le même résultat que l'opération unique $\frac{\pi}{2} - 2\varphi$* ; il revient au même de dire que l'opération φ équivaut à deux opérations successives $\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$.

L'hypothèse (b) donne en plaçant l'origine en G

$$(7) \quad \vec{GA}_{(\varphi, -\varphi)} = \vec{GA} \frac{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \varphi}{4}.$$

Les deux opérations successives $\varphi, -\varphi$ équivalent donc à une homothétie de pôle G et rapport $\frac{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \varphi}{4}$; cela résoud la question proposée : *construire le triangle inconnu ABC connaissant $A_\varphi B_\varphi C_\varphi$ et l'angle φ* : on transforme $A_\varphi B_\varphi C_\varphi$ par l'angle $(-\varphi)$ et le nouveau triangle $A_{(\varphi, -\varphi)} B_{(\varphi, -\varphi)} C_{(\varphi, -\varphi)}$ est converti en ABC par homothétie de rapport $\frac{4}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \varphi}$ de pôle G (il est clair que l'on pourrait commencer par effectuer cette homothétie sur $A_\varphi B_\varphi C_\varphi$, puis transformer par $(-\varphi)$ le triangle obtenu.

L'hypothèse (c) donne

$$(8) \quad \vec{A}_{\varphi, \frac{\pi}{2} - \varphi} = \vec{A} + i \frac{\vec{C} - \vec{B}}{2} \frac{1}{\sin 2\varphi}.$$

Imaginons donc le triangle A'B'C' tel que $\vec{GA}' = -2\vec{GA}$, $\vec{GB}' = -2\vec{GB}$, $\vec{GC}' = -2\vec{GC}$, autrement dit tel que A, B, C soient les milieux des côtés B'C', C'A', A'B'; on peut écrire

$$(8') \quad \vec{A}_{\varphi, \frac{\pi}{2} - \varphi} = \frac{\vec{B}' + \vec{C}'}{2} + i \frac{\vec{B}' - \vec{C}'}{4} \frac{1}{\sin 2\varphi}$$

et par suite, déterminant un angle φ' par $\operatorname{tg} \varphi' = \frac{1}{2 \sin 2\varphi}$ nous voyons que l'opération $\varphi, \frac{\pi}{2} - \varphi$ appliquée à ABC est l'opération φ' appliquée à A'B'C' (on peut, si l'on préfère, considérer le triangle $\alpha\beta\gamma$ formé par les milieux de BC, CA, AB et dire que l'opération φ appliquée à ABC équivaut à deux opérations $\psi, \frac{\pi}{2} - \psi$ appliquées successivement au triangle $\alpha\beta\gamma$, l'angle ψ étant calculé par la relation $2 \operatorname{tg} \psi \sin 2\psi = 1$). Cela montre la parfaite adaptation de notre représentation symbolique à la transformation en jeu : les dernières propositions démontrées exigeraient beaucoup de peine par une autre méthode.

Nous pouvons d'ailleurs remplacer les formules (2) par d'autres d'où le symbole i a disparu : en effet, en posant

$$\hat{A} = (\vec{AB}, \vec{AC}), \quad \hat{B} = (\vec{BC}, \vec{BA}), \quad \hat{C} = (\vec{CA}, \vec{CB}),$$

de façon que $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ soient les angles (au sens de la géométrie élémentaire, quand les angles ne sont pris qu'en valeur absolue) du triangle ABC quand le triangle ABC est de sens positif (circulation de A vers B puis vers C), et ces angles changés de signe, si le sens de ABC est négatif; le vecteur unité porté de C vers B est $\frac{\vec{B} - \vec{C}}{a}$, où a est la longueur (positive) du côté BC; et la hauteur abaissée de A sur le côté BC est mesurée algébriquement par $\frac{2S}{a}$ en prenant comme sens positif la direction du vecteur unité $\frac{i(\vec{B} - \vec{C})}{a}$; S est l'aire algébrique du triangle; cette hauteur est d'ailleurs la résultante des vecteurs

$$\frac{\vec{C} - \vec{A}}{\sin A} \frac{\sin C \cos B}{\sin A}, \quad \frac{\vec{B} - \vec{A}}{\sin A} \frac{\sin B \cos C}{\sin A}.$$

On a donc

$$(9) \quad \frac{2Si}{a^2} (\vec{B} - \vec{C}) = (\vec{C} - \vec{A}) \frac{\sin C \cos B}{\sin A} + (\vec{B} - \vec{A}) \frac{\sin B \cos C}{\sin A} \\ = \vec{B} \frac{\sin B \cos C}{\sin A} + \vec{C} \frac{\sin C \cos B}{\sin A} - \vec{A}.$$

On peut donc écrire

$$\vec{A}_\varphi = \frac{\vec{B} + \vec{C}}{2} + \frac{a^2}{4S} \operatorname{tg} \varphi \left(\vec{B} \frac{\sin B \cos C}{\sin A} + \vec{C} \frac{\sin C \cos B}{\sin A} - \vec{A} \right).$$

Si on tient compte de $a = 2R |\sin A|$, $abc = 4R |S|$ et $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$ (cette dernière formule est vraie en grandeur et signe) on a

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{A}_\varphi = -\frac{\operatorname{tg} \varphi (\cot B + \cot C)}{2} \vec{A} + \frac{1 + \cot C \operatorname{tg} \varphi}{2} \vec{B} + \frac{1 + \cot B \operatorname{tg} \varphi}{2} \vec{C}, \\ \vec{B}_\varphi = \frac{1 + \cot C \operatorname{tg} \varphi}{2} \vec{A} - \frac{\operatorname{tg} \varphi (\cot C + \cot A)}{2} \vec{B} + \frac{1 + \cot A \operatorname{tg} \varphi}{2} \vec{C}, \\ \vec{C}_\varphi = \frac{1 + \cot B \operatorname{tg} \varphi}{2} \vec{A} + \frac{1 + \cot A \operatorname{tg} \varphi}{2} \vec{B} - \frac{\operatorname{tg} \varphi (\cot A + \cot B)}{2} \vec{C}. \end{array} \right.$$

(J'ouvre ici une parenthèse pour démontrer quelques propositions intéressantes demandées ou non demandées dans le problème d'agrégation).

Les vecteurs *précis* (c'est-à-dire non transposés parallèlement) $\vec{A}\alpha$, $\vec{B}\beta$, $\vec{C}\gamma$, où α , β , γ sont les milieux de BC, CA, AB forment un système équivalent à zéro; les vecteurs $\vec{\alpha A}_\varphi$, $\vec{\beta B}_\varphi$, $\vec{\gamma C}_\varphi$, ont une somme géométrique nulle, d'après les formules (2); les vecteurs $\vec{A}\alpha'$, $\vec{B}\beta'$, $\vec{C}\gamma'$, équipollents à $\vec{\alpha A}_\varphi$, $\vec{\beta B}_\varphi$, $\vec{\gamma C}_\varphi$, forment un système *précis* équivalent à zéro, car ils sont concourants et ont une somme nulle; la résultante de $\vec{A}\alpha$ et $\vec{A}\alpha'$ est \vec{AA}_φ ; donc les trois vecteurs *précis* \vec{AA}_φ , \vec{BB}_φ , \vec{CC}_φ , forment un système équivalent à zéro, donc sont concourants en un point M_φ ; or la droite $\vec{AA}_\varphi M_\varphi$ perce BC, d'après les formules (10), au point

$$\frac{(1 + \cot C \operatorname{tg} \varphi) \vec{B} + (1 + \cot B \operatorname{tg} \varphi) \vec{C}}{(1 + \cot C \operatorname{tg} \varphi) + (1 + \cot B \operatorname{tg} \varphi)} = \frac{\frac{1}{1 + \cot B \operatorname{tg} \varphi} \vec{B} + \frac{1}{1 + \cot C \operatorname{tg} \varphi} \vec{C}}{\frac{1}{1 + \cot B \operatorname{tg} \varphi} + \frac{1}{1 + \cot C \operatorname{tg} \varphi}}.$$

Il en résulte que le point M_φ est

$$(11) \quad \vec{M}_\varphi = \frac{\frac{1}{1 + \cot A \operatorname{tg} \varphi} \vec{A} + \frac{1}{1 + \cot B \operatorname{tg} \varphi} \vec{B} + \frac{1}{1 + \cot C \operatorname{tg} \varphi} \vec{C}}{\frac{1}{1 + \cot A \operatorname{tg} \varphi} + \frac{1}{1 + \cot B \operatorname{tg} \varphi} + \frac{1}{1 + \cot C \operatorname{tg} \varphi}}.$$

Il en résulte que, φ variant, le point M_φ décrit une conique; on voit facilement que les valeurs $-\text{A}$, $-\text{B}$, $-\text{C}$, $\frac{\pi}{2}$, 0 de φ donnent les points A , B , C , H (orthocentre) et G ; cette conique est donc une hyperbole équilatère; les valeurs de φ qui annulent le dénominateur, racines de $\text{tg}^2 \varphi + 2(\cot \text{A} + \cot \text{B} + \cot \text{C}) \text{tg} \varphi + 3 = 0$, fournissent non plus un point à distance finie, mais une direction asymptotique, obtenue en égalant le numérateur à zéro.

La seconde formule (4) peut s'écrire

$$i \cot \varphi (\vec{C}_\varphi - \vec{B}_\varphi) = \left(\frac{\vec{B} + \vec{C}}{2} + i \cot \varphi \frac{\vec{B} - \vec{C}}{2} \right) - \vec{A} = \vec{A}_{\frac{\pi}{2} - \varphi} - \vec{A}.$$

Cela prouve que le vecteur $\vec{AA}_{\frac{\pi}{2} - \varphi}$ s'obtient en multipliant scalairement $\vec{B}_\varphi \vec{C}_\varphi$ par $\cot \varphi$, puis faisant tourner le vecteur produit de l'angle $\frac{\pi}{2}$; il en résulte que si, pour une valeur de φ , le point M_φ est à l'infini, les vecteurs \vec{AA}_φ , \vec{BB}_φ , \vec{CC}_φ sont parallèles, les vecteurs $\vec{B}_{\frac{\pi}{2} - \varphi} \vec{C}_{\frac{\pi}{2} - \varphi}$, $\vec{C}_{\frac{\pi}{2} - \varphi} \vec{A}_{\frac{\pi}{2} - \varphi}$, $\vec{A}_{\frac{\pi}{2} - \varphi} \vec{B}_{\frac{\pi}{2} - \varphi}$ sont portés par une même droite; le triangle $(\text{ABC})_{\frac{\pi}{2} - \varphi}$ dégénère donc alors en une droite perpendiculaire à la direction asymptotique \vec{AA}_φ de l'hyperbole signalée, donc parallèle à l'autre direction asymptotique; or l'équation qui exprimerait que $\vec{A}_{\frac{\pi}{2} - \varphi}$, $\vec{B}_{\frac{\pi}{2} - \varphi}$, $\vec{C}_{\frac{\pi}{2} - \varphi}$ sont alignés est obtenue en égalant à zéro le déterminant de la substitution linéaire définie par (10), où φ serait remplacé par $\frac{\pi}{2} - \varphi$; on en conclut donc, en vertu du résultat trouvé plus haut pour M_φ ,

$$\begin{vmatrix} -\text{tg} \varphi (\cot \text{B} + \cot \text{C}) & 1 + \cot \text{C} \text{tg} \varphi & 1 + \cot \text{B} \text{tg} \varphi \\ 1 + \cot \text{C} \text{tg} \varphi & -\text{tg} \varphi (\cot \text{C} + \cot \text{A}) & 1 + \cot \text{A} \text{tg} \varphi \\ 1 + \cot \text{B} \text{tg} \varphi & 1 + \cot \text{A} \text{tg} \varphi & -\text{tg} \varphi (\cot \text{A} + \cot \text{B}) \end{vmatrix} \equiv 2[1 + 2(\cot \text{A} + \cot \text{B} + \cot \text{C}) \text{tg} \varphi + 3 \text{tg}^2 \varphi].$$

Le facteur de proportionnalité 2 s'obtient en faisant $\varphi = 0$; le calcul direct conduit au même résultat, mais avec quelques longueurs (on peut réduire la première ligne du déterminant à 2, 2, 2, en lui ajoutant les deux autres lignes).

On a de même

$$\vec{A}_{-\varphi} = \frac{\vec{B} + \vec{C}}{2} + i \text{tg} \varphi \frac{\vec{C} - \vec{B}}{2}, \quad \vec{B}_\varphi = \frac{\vec{C} + \vec{A}}{2} + i \text{tg} \varphi \frac{\vec{C} - \vec{A}}{2}, \quad \vec{A}_{-\varphi} - \vec{B}_\varphi = \frac{\vec{B} - \vec{A}}{2} (1 - i \text{tg} \varphi) = \vec{C}_\varphi - \vec{A}.$$

Cela prouve que la figure $\text{A}_{-\varphi} \text{B}_\varphi \text{AC}_\varphi$ est un parallélogramme.

Si l'on cherche le point où $B_{\frac{\pi}{2}-\varphi}C_{\frac{\pi}{2}-\varphi}$ perce BC , on trouve d'après (10) le point

$$\frac{(1 + \cot B \operatorname{tg} \varphi) \vec{B}_{\frac{\pi}{2}-\varphi} - (1 + \cot C \operatorname{tg} \varphi) \vec{C}_{\frac{\pi}{2}-\varphi}}{(\cot B - \cot C) \operatorname{tg} \varphi} = \frac{\left(\cot A + \cot B + \frac{1}{\sin 2\varphi} \right) \vec{C} - \left(\cot A + \cot C + \frac{1}{\sin 2\varphi} \right) \vec{B}}{\cot B - \cot C}$$

Ceci prouve que $B_{\frac{\pi}{2}-\varphi}C_{\frac{\pi}{2}-\varphi}$ et $B_{\frac{\pi}{2}-\psi}C_{\frac{\pi}{2}-\psi}$ percent BC au même point : or les triangles $ABC, (ABC)_{\frac{\pi}{2}-\varphi}, (ABC)_{\frac{\pi}{2}-\psi}$ sont deux à deux homologues, les centres d'homologie étant $O, M_{\frac{\pi}{2}-\varphi}, M_{\frac{\pi}{2}-\psi}$ (O est le centre du cercle circonscrit à ABC); donc, comme les trois axes d'homologie sont confondus, les *trois centres d'homologie sont alignés et la droite $M_{\frac{\pi}{2}-\varphi}M_{\frac{\pi}{2}-\psi}$ passe constamment par O* . On voit aussitôt que cet axe d'homologie commun découpe sur les côtés respectifs BC, CA, AB à partir des points $\frac{\vec{B} \cot B - \vec{C} \cot C}{\cot B - \cot C}$... des divisions semblables : il enveloppe donc une parabole : quand $(ABC)_{\frac{\pi}{2}}$ se réduit à une droite, cette droite est l'axe d'homologie, donc la parabole que nous venons de trouver a sa directrice issue de G .

4. Groupe des transformations (h, k) . — Revenons maintenant au point de vue adopté ici, à savoir la théorie des groupes. Écrivons la formule (5) et celles qui en dérivent par permutations circulaires sous la forme (avec lettres *françaises* h, k au lieu de lettres *grecques* φ, ψ)

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{A}_{h,k} = \vec{A}h + \frac{\vec{B} + \vec{C}}{2}(1-h) + i \frac{\vec{B} - \vec{C}}{2}k, \\ \vec{B}_{h,k} = \vec{B}h + \frac{\vec{C} + \vec{A}}{2}(1-h) + i \frac{\vec{C} - \vec{A}}{2}k, \\ \vec{C}_{h,k} = \vec{C}h + \frac{\vec{A} + \vec{B}}{2}(1-h) + i \frac{\vec{A} - \vec{B}}{2}k. \end{array} \right.$$

Cela revient à avoir posé

$$(14') \quad h = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \psi), \quad k = -\frac{1}{2}(\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \psi).$$

La connaissance des éléments angulaires φ, ψ (en caractères grecs) fournit h, k (en caractères français). Inversement, la connaissance de h, k fournit le couple φ, ψ symétriquement; on remarque d'ailleurs que $\operatorname{tg} \varphi, \operatorname{tg} \psi$ ne sont réelles que si $k^2 - 2h + 1$ est positif, de sorte que, au point de vue réel, l'introduction des quantités h, k permet de définir des transformations inaccessibles comme composi-

tion de deux transformations *angulaires* (réelles)¹. On remarque que $h = 0$ conduit à retrouver cette propriété déjà signalée, à savoir que l'unique transformation *angulaire* φ est l'opération résultant d'une double transformation *angulaire* $\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$.

Nous allons maintenant prouver que les transformations à deux paramètres $[h, k]$ forment un groupe; pour simplifier momentanément les notations, écrivons \vec{A}' pour $\vec{A}_{h,k}$ et \vec{A}'' pour \vec{A}'_{h_1, k_1} . On a

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{A}'' = \vec{A}'h_1 + \frac{\vec{B}' + \vec{C}'}{2}(1 - h_1) + i\frac{\vec{B}' - \vec{C}'}{2}k_1, \\ \frac{\vec{B}' + \vec{C}'}{2} = \frac{\vec{A}}{2}(1 - h) + \frac{\vec{B} + \vec{C}}{4}(1 + h) + i\frac{\vec{C} - \vec{B}}{4}k, \\ \frac{\vec{B}' - \vec{C}'}{2} = \frac{\vec{B} - \vec{C}}{4}(3h - 1) + i\frac{\vec{B} + \vec{C} - 2\vec{A}}{4}k. \end{array} \right.$$

On en conclut aisément

$$(15) \quad \vec{A}'' = \vec{A} \frac{1 + 3hh_1 - h - h_1 + kk_1}{2} + \frac{\vec{B} + \vec{C}}{2} \frac{1 - 3hh_1 + h + h_1 - kk_1}{2} + i \frac{\vec{B} - \vec{C}}{2} \frac{3(hk_1 + hk_1) - k - k_1}{2}.$$

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} (h, k)(h_1, k_1) = (H, K); \\ H = \frac{1 + 3hh_1 - h - h_1 + kk_1}{2}, \quad K = \frac{3(hk_1 + hk_1) - k - k_1}{2}. \end{array} \right.$$

Les transformations (h, k) forment donc un groupe dont les formules (16) indiquent la structure; les deux transformations $(h, k), (h_1, k_1)$ sont *permutables*. Nous allons maintenant donner une explication géométrique de la transformation (h, k) . On peut évidemment, au lieu de (14) écrire

$$(17) \quad \vec{A}_{h,0} = \vec{A}h + \frac{\vec{B} + \vec{C}}{2}(1 - h), \quad \vec{A}_{h,k} = \vec{A}_{h,0} + i\frac{\vec{B} - \vec{C}}{2}k.$$

La transformation $(h, 0)$ est une homothétie de pôle G et rapport $\frac{3h - 1}{2}$, comme on le voit en mettant l'origine en G

$$\vec{GA}_{h,0} = \frac{3h - 1}{2} \vec{GA}.$$

1. Mais nous verrons que toute opération réelle $[h, k]$ est composition, dans un ordre quelconque, d'une homothétie de pôle G et d'une opération angulaire φ .

Du sommet $A_{h,0}$ nous abaissons la perpendiculaire sur le côté BC (ou le côté parallèle $B_{h,0} C_{h,0}$) et prenons une longueur $A_{h,0} A_{h,k}$ égale à $\frac{k}{2} BC$: pour $h = 0$, $A_{h,0}$ est le point z et en posant $k = \operatorname{tg} \varphi$, on retrouve la transformation φ appliquée à ABC; nous pouvons, si nous voulons, prendre le triangle $A' B' C'$ dont $A_{(h,0)}$, $B_{(h,0)}$, $C_{(h,0)}$ sont les milieux : ce triangle est homothétique de ABC relativement à G et $\vec{GA}' = (1 - 3h) \vec{GA}$, $\vec{A}_{h,0} = \frac{\vec{B}' + \vec{C}'}{2}$; d'autre part $\frac{\vec{B} - \vec{C}}{2} = \frac{1}{2(1 - 3h)} (\vec{B}' - \vec{C}')$, donc

$$\vec{A}_{h,k} = \frac{\vec{B}' + \vec{C}'}{2} + \frac{ik}{1 - 3h} \frac{\vec{B}' - \vec{C}'}{2}.$$

On voit donc que l'on passe de ABC à $A' B' C'$ par une homothétie de rapport $1 - 3h$: c'est une transformation $(h_1, 0)$ avec $\frac{3h_1 - 1}{2} = 1 - 3h$ ou $h_1 = 1 - 2h$; on passe ensuite de $A' B' C'$ à $(ABC)_{h,k}$, c'est une opération φ appliquée à $A' B' C'$, avec $\operatorname{tg} \varphi = \frac{k}{1 - 3h}$ ou une opération (h_2, k_2) avec $h_2 = 0$, $k_2 = \frac{k}{1 - 3h}$; finalement

$$(18) \quad (h, k) = (1 - 2h, 0) \left(0, \frac{k}{1 - 3h} \right) = \left(0, \frac{k}{1 - 3h} \right) (1 - 2h, 0).$$

On peut donc prendre comme opérations élémentaires du groupe à deux paramètres (h, k) les homothéties du pôle G, dont le symbole est $(h, 0)$, et les opérations φ précédemment étudiées dont le symbole est $(0, \operatorname{tg} \varphi)$; les homothéties forment un groupe à un paramètre, mais non les opérations φ .

[L'opération $(1 - 2h, 0)$ est une homothétie de rapport $(1 - 3h)$.]

Si donc nous voulons retourner d'un triangle donné $(ABC)_{h,k}$ au triangle inconnu ABC, on doit opérer sur $(ABC)_{h,k}$ la transformation (h_1, k_1) inverse de (h, k) , (et cette opération inverse appartient au groupe, comme l'on sait). On détermine donc h_1, k_1 par les équations déduites de (16) en écrivant $H = 1$, $K = 0$ et cela donne par un calcul aisé

$$h_1 = \frac{(3h - 1)(h + 1) - k^2}{(3h - 1)^2 - 3k^2}, \quad k_1 = \frac{-4k}{(3h - 1)^2 - 3k^2}.$$

En vertu de la formule (18) cette opération inverse peut se réduire à la composition des opérations élémentaires

$$(19) \quad \left(0, \frac{k}{3h - 1} \right) \left[\frac{(3h - 1)(h - 3) - k^2}{(3h - 1)^2 - 3k^2}, 0 \right].$$

La circonstance remarquable à signaler est que les deux opérations φ intervenant dans les opérations (h, k) et (h_1, k_1) inverses l'une de l'autre correspondent à des angles égaux et de signe contraire [les opérations (h, k) , (h_1, k_1) ayant été ramenées chacune à une homothétie et une transformation angulaire].

Nous avons quelques cas remarquables à signaler; d'abord pour $h = \frac{1}{3}$, la décomposition en deux opérations élémentaires de la nature choisie est impossible: les formules (14) deviennent

$$\vec{A}_{\frac{1}{3}, k} = \vec{G} + i \frac{\vec{B} - \vec{C}}{2} k, \dots$$

On mène par le point G les perpendiculaires aux côtés de ABC et l'on porte sur elles (dans des sens convenables) des segments proportionnels aux côtés de ABC; le triangle A'B'C' qui est intervenu dégénère en le point G; le triangle $(ABC)_{\frac{1}{3}, k}$ est semblable à ABC.

Si maintenant on suppose $3h - 1 \pm k\sqrt{3}$ nul, il n'existe pas de transformation du groupe permettant de revenir de $(ABC)_{hk}$ au triangle ABC; si le triangle $(ABC)_{hk}$ est donné ainsi que h, k (liées par la relation $3h - 1 \pm k\sqrt{3} = 0$) il n'existe aucun triangle ABC, sauf si le triangle $(ABC)_{hk}$ est équilatéral (et de sens convenable) et alors il existe ∞^2 solutions, le point A pouvant être choisi arbitrairement. Remar-

quons d'abord que, si l'on avait en même temps $h = \frac{1}{3}$, on aurait $k = 0$: la transformation serait sans intérêt, chaque point $A_{(h, k)}$, $B_{(h, k)}$, $C_{(h, k)}$ coïnciderait en effet avec G. Nous écartons ce cas. Nous remplaçons ABC par le triangle A'B'C' [$\vec{GA}' = (1 - 3h)\vec{GA}$] puis nous appliquons au triangle A'B'C' l'opération angulaire φ définie par $\operatorname{tg} \varphi = \frac{k}{1 - 3h} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}$ en supposant $3h - 1 = \varepsilon k\sqrt{3}$ et $\varepsilon = \pm 1$; nous devons maintenant appliquer au triangle $A'_{\varphi} B'_{\varphi} C'_{\varphi}$ [qui est $(ABC)_{hk}$] l'opération $(-\varphi)$; nous nous rappelons la formule (7) qui est ici

$$\vec{GA}'_{(\varphi, -\varphi)} = \vec{GA}' \frac{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \varphi}{4}.$$

Donc puisque $\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{1}{3}$, le point $A'_{\varphi, \pm \varphi}$ coïncide avec G; il en est de même de $B'_{\varphi, -\varphi}$ et $C'_{\varphi, -\varphi}$; d'après la définition géométrique, cela prouve que, φ étant égal à $\varepsilon \frac{\pi}{6}$, le triangle $A'_{\varphi} B'_{\varphi} C'_{\varphi}$ déduit de A'B'C' est équilatéral, avec la relation précise $(\vec{A}'_{\varphi} B'_{\varphi}, \vec{A}'_{\varphi} C'_{\varphi}) = \varepsilon \frac{\pi}{3}$.

Si donc $3h - 1 + \varepsilon k\sqrt{3} = 0$, le triangle $(ABC)_{hk}$ est équilatéral avec $(\vec{A}_{hk} B_{hk}, \vec{A}_{hk} C_{hk}) = \varepsilon \frac{\pi}{3}$; si cette double condition n'est pas remplie, le retour du triangle

$(ABC)_{hk}$ à ABC est un problème sans solution; si la double condition est remplie, on remarque que l'angle $(B'_{\frac{\pi}{3}}A', B'_{\frac{\pi}{3}}C')$ est égal à $2\varepsilon\frac{\pi}{3}$; on se donne donc le point A' arbitrairement et par rotation de $2\varepsilon\frac{\pi}{3}$ autour de $B'_{\frac{\pi}{3}}$, A' donne C' ; connaissant A', C' et G on en déduit B' ; on remonte ensuite de $A'B'C'$ à ABC par l'homothétie $\vec{GA} = \frac{\vec{GA'}}{1-3h}$. Si les formules (19) cessent de s'appliquer, cela tient à ce que le triangle $[(ABC)_{hk}]_{(-\frac{\pi}{3})}$ est réduit à un point; comme dans le cas général, ce triangle est bien transformé de ABC , mais par une homothétie de rapport nul, de sorte que l'homothétie inverse, pour remonter de $[(ABC)_{hk}]_{(-\frac{\pi}{3})}$ à ABC n'existe pas.

Nous avons ainsi découvert cette propriété remarquable que l'opération angulaire $\frac{\pi}{6}$, ou $-\frac{\pi}{6}$, transforme un triangle arbitraire en un triangle équilatéral (ces deux triangles équilatéraux sont de sens de rotation opposé; si le triangle ABC est de sens direct, $\frac{\pi}{6}$ donne un triangle de sens direct; si ABC est de sens non direct, c'est $(-\frac{\pi}{6})$ qui donne un triangle de sens direct; d'après ce qui a été expliqué les droites $AA_{\frac{\pi}{3}}$, $BB_{\frac{\pi}{3}}$, $CC_{\frac{\pi}{3}}$ sont concourantes et, puisqu'elles sont perpendiculaires aux côtés du triangle équilatéral $(ABC)_{\frac{\pi}{6}}$, elles sont inclinées les unes sur les autres à 60° ou 120° , de sorte que les points de concours ainsi trouvés sont l'un ou l'autre des deux points ω, ω' d'où l'on voit les côtés du triangle sous un angle égal à 60° ou 120° . (Si l'on considère l'équation de degré 3 qui a pour racines les affixes imaginaires de A, B, C , les deux points ω, ω' sont les racines du hessien.)

Ce qui a été dit sur la permutabilité des opérations (h, k) prouve que si l'une d'elles est telle que $3h - 1 + \varepsilon k\sqrt{3}$ est nulle, l'opération résultante est du même type: en effet, plaçant cette opération spéciale en tête, on obtient au premier coup un triangle équilatéral, que toutes les autres opérations transforment toujours en triangle équilatéral. Et en effet on constate sans peine, en composant (h, k) et (h_1, k_1) d'après les formules (16), l'identité

$$3H - 1 + \varepsilon K\sqrt{3} = \frac{(3h - 1 + \varepsilon k\sqrt{3})(3h_1 - 1 + \varepsilon k_1\sqrt{3})}{2}$$

Plus généralement si l'on pose

$$(20) \quad (h, k)(h_1, k_1) \dots (h_n, k_n) = (H, K),$$

on a

$$(21) \quad (3H - 1 + \varepsilon K\sqrt{3}) = \frac{(3h - 1 + \varepsilon k\sqrt{3})(\dots) \dots (3h_n - 1 + \varepsilon k_n\sqrt{3})}{2^n}$$

et en changeant ε en $-\varepsilon$, on a deux équations donnant *explicitement* H, K au moyen des éléments composants; cela donne l'idée de poser $3h - 1 = h'\sqrt{3}$ et l'on a ainsi, au lieu de (21),

$$(21') \quad H' + \varepsilon K = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n (h' + \varepsilon k)(h'_1 + \varepsilon k_1) \dots (h'_n + \varepsilon k_n),$$

égalité dans laquelle, une fois le second membre calculé, on égalera les termes indépendants de ε et les coefficients de ε . Nous allons voir d'ici peu la raison profonde qui explique la simplicité de cette formule (21').

5. Groupe des transformations homographiques planes conservant un point à distance finie et la droite de l'infini. Groupe des affinités relatives à deux axes rectangulaires. — Le triangle ABC étant transformé en $(ABC)_{hk}$, il est naturel de considérer la transformation homographique du plan, telle que A, B, C, G aient respectivement pour homologues $A_{hk}, B_{hk}, C_{hk}, G$; le milieu de BC se transforme en le milieu de $B_{hk}C_{hk}$, donc le point à l'infini de BC se transforme en le point à l'infini de $B_{hk}C_{hk}$, donc la droite de l'infini se conserve.

Réciproquement, soit une transformation homographique plane conservant la droite de l'infini; elle conserve, en général, un point à distance finie, que nous appellerons G ; on voit aussitôt qu'un triangle ayant G pour centre de gravité se transforme en un triangle ayant encore G pour centre de gravité (parce qu'un parallélogramme reste un parallélogramme). Or les transformations qui conservent à la fois la droite de l'infini et un point fixe G forment manifestement un groupe à quatre paramètres; le groupe à deux paramètres (h, k) étudié au paragraphe précédent forme un sous-groupe du précédent: il s'agit de caractériser, par des propriétés géométriques, ce sous-groupe.

Le groupe à 4 paramètres est caractérisé par les équations de transformation

$$(22) \quad X = ax + by, \quad Y = b'x + a'y,$$

en prenant deux axes Gx, Gy rectangulaires. Parmi les ∞^4 triangles ayant G pour centre de gravité, cherchons-en un: $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(-x_1 - x_2, -y_1 - y_2)$, dont le transformé soit avec ABC dans la relation géométrique (h, k) , où h, k seront des nombres convenables; il suffit manifestement qu'il existe un triangle $A'B'C'$ homothétique de ABC relativement à G ($\vec{GA}' = -\lambda \vec{GA}$), tel que $\vec{A_1A'}, \vec{B_1B'}, \vec{C_1C'}$, soient perpendiculaires aux côtés $B'C', C'A', A'B'$ et proportionnels à ces côtés (avec orientations convenables); or $\vec{GA}' - \vec{GA_1} = \vec{A_1A'}$, et comme $\vec{GA'}, \vec{GB'}, \vec{GC'}$ d'une part, $\vec{GA_1}, \vec{GB_1}, \vec{GC_1}$ sont des systèmes équivalents à zéro, le système $\vec{A_1A'}, \vec{B_1B'}, \vec{C_1C'}$ se compose, quel que soit λ , de trois vecteurs concourants; si donc

$\vec{A_1 A'}$, $\vec{B_1 B'}$, sont portés par les hauteurs de $A' B' C'$ issues de A' et B' , le troisième vecteur sera porté par la hauteur issue de C' ; de plus l'équivalence à zéro entraînera que les vecteurs soient proportionnels à $B' C'$, $C' A'$, $A' B'$, il y a donc seulement deux conditions à écrire; en éliminant λ , il reste une *unique* condition entre les coordonnées $x_1, y_1; x_2, y_2$; *mais nous devons bien nous garder de croire que toutes les transformations à 4 paramètres (22) contiennent des transformations h, k .*

Écrivons en effet que le vecteur $\vec{A' A_1}$ de composantes $[(a + \lambda)x_1 + by_1, b'x_1 + (a' + \lambda)y_1]$ est perpendiculaire au vecteur \vec{CB} $[x_2 - x_3, y_2 - y_3]$; on a, en adjoignant les deux conditions semblables

$$(23) \quad \begin{cases} (a + \lambda)x_1(x_2 - x_3) + by_1(x_2 - x_3) + b'x_1(y_2 - y_3) + (a' + \lambda)y_1(y_2 - y_3) = 0, \\ (a + \lambda)x_2(x_3 - x_1) + \dots = 0, \\ (a + \lambda)x_3(x_1 - x_2) + \dots = 0. \end{cases}$$

Par addition on obtient

$$(b - b')[y_2 x_3 - x_2 y_3] + (y_3 x_1 - x_3 y_1) + (y_1 x_2 - x_1 y_2) = 0.$$

La nullité du second facteur exprime que les points A, B, C sont en ligne droite : nous écartons ce cas; il faut donc annuler le premier facteur; ce qui spécialise les transformations homographiques; l'interprétation géométrique de la condition $b = b'$ est aisée; les droites, issues de G , qui se correspondent à elles-mêmes, sont données par l'équation

$$by^2 + (a - a')xy - b'x^2 = 0;$$

elles doivent donc être rectangulaires. En les choisissant comme axes Gx, Gy , on peut supposer $b = b' = 0$ et les équations (22) deviennent

$$(24) \quad X = ax, \quad Y = a'y.$$

Nous écrivons les équations (23), en explicitant $x_3 = -(x_1 + x_2)$, $y_3 = -(y_1 + y_2)$, $b = b' = 0$; elles se réduisent à deux, la première et la dernière par exemple :

$$(23') \quad \begin{cases} (a + \lambda)x_1(2x_2 + x_1) + (a' + \lambda)y_1(2y_2 + y_1) = 0, \\ (a + \lambda)(x_1^2 - x_2^2) + (a' + \lambda)(y_1^2 - y_2^2) = 0. \end{cases}$$

En éliminant λ , on a

$$x_1(2x_2 + x_1)(y_2^2 - y_1^2) - y_1(2y_2 + y_1)(x_2^2 - x_1^2) = 0.$$

En posant $\frac{y_2}{y_1} = m$, $\frac{x_2}{x_1} = \mu$, cette relation

$$(m^2 - 1)(2\mu + 1) - (\mu^2 - 1)(2m + 1) = 0$$

contient évidemment le facteur $m - \mu = 0$, que nous éliminons (sinon les points A, B, C seraient encore alignés avec G); il reste donc $2m\mu + m + \mu + 2 = 0$ ou

$$(25) \quad 2x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_1y_1 = 0.$$

Sur les ∞^4 triangles ayant G pour centre de gravité, il en existe donc ∞^3 tels que ABC étant l'un, la transformation (24), où a, a' ont reçu des valeurs *déterminées*, donne un triangle $A_1B_1C_1$ susceptible de se déduire de ABC par une transformation (h, k) ; la relation (25) est *indépendante* de a, a' [et subsiste pour les sommets transformés des primitifs par l'homographie (24)]: ABC étant donné, ainsi que a, a' l'une ou l'autre équation (23') fournit λ ; si au lieu du triangle $A'B'C'$ on considère le triangle $A''B''C''$ tel que $\vec{GA''} = 2\lambda \vec{GA}$, les points A', B', C' sont les milieux des côtés $B''C'', C''A'', A''B''$ et l'on passe de $A''B''C''$ à $A_1B_1C_1$ par une opération angulaire φ ; comme $2\lambda = 1 - 3h$, on voit que les nombres h, k correspondant à deux nombres a, a' donnés dépendent non seulement de a, a' , mais aussi du choix particulier du triangle ABC parmi les ∞^3 triangles pouvant jouer le même rôle que ABC: en effet, si A est choisi arbitrairement une fois pour toutes, x_1, y_1 sont connus et l'équation (25) fournit comme lieu de B l'hyperbole équilatère d'asymptotes $x = -\frac{x_1}{2}$ et $y = -\frac{y_1}{2}$, passant par le point $(x = -2x_1, y = 0)$; si l'on fait varier le point B de cette hyperbole⁽¹⁾, le rapport $(a + \lambda) : (a' + \lambda)$ varie, donc aussi λ ; mais le choix particulier du triangle ABC ne change pas la transformation $X = ax, Y = a'y$, dont la représentation avec les axes Gx, Gy est plus simple qu'avec l'un des triangles ABC et les nombres h, k ; cette dernière représentation exige que l'on fasse connaître 5 constantes, 3 pour choisir A, B, C, 2 pour fixer h et k , tandis que la première ne fait intervenir que deux constantes a, b ; il n'y a aucune contradiction parce que, pour chaque choix de a, b on peut se borner à un triangle ABC choisi une fois pour toutes⁽²⁾ (indépendamment des valeurs a, b).

Nous avons ainsi reconnu que toute transformation $[h, k]$ est une affinité par rapport à deux axes rectangulaires Gx, Gy d'orientation convenable G issus du centre de

1. Cette hyperbole contient les symétriques de A relativement à Gx, Gy , puis les deux points $(-2x_1, 0)$ et $(0, -2y_1)$, puis les deux sommets, autres que A, du triangle équilatéral de centre G et avant A pour sommet.

2. Il faut, pour des raisons faciles à apercevoir et analogues à celles qui ont été exposées déjà pour $\varphi = \varepsilon \frac{\pi}{6}$, éviter de choisir un triangle ABC équilatéral de centre G; le calcul de λ est en effet impossible si $a \neq b$ et λ est indéterminé si $a = b$.

gravité G ; nous allons voir que $[h, k]$ variant de façon à obtenir toutes les transformations du groupe à 2 paramètres étudié précédemment, ces axes Gx, Gy ne changent pas et sont les parallèles, issues de G , aux asymptotes de l'hyperbole (GABCH) relative au triangle ABC ; autrement dit, tous les triangles définis par l'équation (25) donnent les mêmes axes de Steiner, puisque, dans la géométrie du triangle, les deux axes qui viennent d'être définis ont reçu ce nom.

Essayons en effet de composer deux affinités

$$(26) \quad \begin{cases} X = ax, & Y = a'y, \\ X' = AX + BY, & Y' = BX + A'Y, \end{cases}$$

dont chacune est relative à un couple d'axes rectangulaires; on trouve

$$(27) \quad X' = Aax + Ba'y, \quad Y' = Bax + A'a'y.$$

Pour que la transformation résultante soit aussi une affinité relative à un couple d'axes rectangulaires, on doit avoir

$$B(a - a') = 0.$$

Le second facteur correspond au cas écarté d'une homothétie $(X, Y; x, y)$; il reste donc $B = 0$, et ceci prouve que toutes les affinités doivent être relatives aux mêmes directions rectangulaires Gx, Gy ; nous avons retrouvé notre groupe à deux paramètres.

Nous devons retrouver ces résultats directement. D'abord, quand la transformation, au lieu d'être définie par deux équations $X = ax, Y = a'y$ est définie au moyen du triangle ABC et du triangle $(ABC)_{hk}$, comment obtient-on le point P_{hk} qui correspond à un point P donné? On peut représenter le point P par une expression à coefficients réels

$$(28) \quad \vec{P} = l\vec{A} + m\vec{B} + n\vec{C} \quad (l + m + n = 1)$$

et alors on a, avec les mêmes coefficients

$$(29) \quad \vec{P}_{hk} = l\vec{A}_{hk} + m\vec{B}_{hk} + n\vec{C}_{hk},$$

comme cela est évident en remarquant que BC est coupée par PA en un point p tel que $\vec{p} = \frac{m\vec{B} + n\vec{C}}{m + n}$ et que l'on a $m\vec{pB} + n\vec{pC} = 0$ (il suffit de prendre \vec{p} comme origine pour retrouver cette relation); comme les rapports des segments se conservent pour des segments portés par une même droite, on doit avoir aussi $m\vec{p}_{hk}\vec{B}_{hk} + n\vec{p}_{hk}\vec{C}_{hk} = 0$ et ceci suffit à établir la proposition.

S'il s'agit d'une direction définie par

$$(30) \quad \vec{V} = l\vec{A} + m\vec{B} + n\vec{C} \quad (l + m + n = 0),$$

on peut écrire

$$\vec{V} = m(\vec{B} - \vec{A}) + n(\vec{C} - \vec{A})$$

et dire que le vecteur \vec{V} (à un transport parallèle près) est la résultante des vecteurs $m\vec{AB}$, $n\vec{AC}$; or ces deux vecteurs, dans la transformation homographique, si l'on suppose l, m, n réels, sont remplacés par $m\vec{A}_{hk}\vec{B}_{hk}$ et $n\vec{A}_{hk}\vec{C}_{hk}$, de sorte que la direction (30) a pour transformée la direction

$$(31) \quad \vec{V}_{hk} = l\vec{A}_{hk} + m\vec{B}_{hk} + n\vec{C}_{hk},$$

exactement comme quand il s'agit de points à distance finie.

D'ailleurs la droite qui joint \vec{A} et $\vec{B} + \vec{V}$ perce BC au point p défini par la même formule que plus haut.

Mais il faut bien se garder d'introduire ici des coefficients dépendant de i : cela tient à ce que le vecteur $\vec{B} - \vec{A}$ a pour transformée $\vec{B}_{hk} - \vec{A}_{hk}$, mais que le vecteur $i(\vec{B} - \vec{A})$ perpendiculaire à $(\vec{B} - \vec{A})$ n'est pas remplacé par un vecteur perpendiculaire à $\vec{B}_{hk} - \vec{A}_{hk}$, l'affinité ne conservant pas les angles; aux paragraphes précédents, nous ne passions que des sommets du triangle ABC aux sommets du triangle $(ABC)_{hk}$ et l'inconvénient qui vient d'être signalé n'existait pas, car nous ne faisons que des opérations métriques.

Cherchons donc les deux directions qui restent invariables quand on effectue la transformation homographique (h, k) ; comme (h, k) équivaut à une homothétie et à une transformation angulaire φ , il suffit d'étudier le triangle ABC et le triangle $(ABC)_{\varphi}$, en utilisant les formules réelles (10) : il s'agit de trouver trois nombres $l_{\varphi}, m_{\varphi}, n_{\varphi}$ de somme nulle, tels que

$$(32) \quad l_{\varphi}\vec{A}_{\varphi} + m_{\varphi}\vec{B}_{\varphi} + n_{\varphi}\vec{C}_{\varphi} = \frac{\rho_{\varphi}}{2}(l_{\varphi}\vec{A} + m_{\varphi}\vec{B} + n_{\varphi}\vec{C}),$$

où ρ_{φ} est un certain facteur de proportionnalité. Cela donne les trois équations

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{lll} -l_{\varphi}[\operatorname{tg} \varphi (\cot B + \cot C) + \rho_{\varphi}] + m_{\varphi}(1 + \cot C \operatorname{tg} \varphi) & + n_{\varphi}(1 + \cot B \operatorname{tg} \varphi) & = 0, \\ l_{\varphi}(1 + \cot C \operatorname{tg} \varphi) & - m_{\varphi}[\operatorname{tg} \varphi (\cot C + \cot A) + \rho_{\varphi}] + n_{\varphi}(1 + \cot A \operatorname{tg} \varphi) & = 0, \\ l_{\varphi}(1 + \cot B \operatorname{tg} \varphi) & + m_{\varphi}(1 + \cot A \operatorname{tg} \varphi) & - n_{\varphi}[\operatorname{tg} \varphi (\cot A + \cot B) + \rho_{\varphi}] = 0. \end{array} \right.$$

Si on additionne ces trois équations on trouve

$$(l_{\varphi} + m_{\varphi} + n_{\varphi})(2 - \rho_{\varphi}) = 0.$$

[Si l'on prenait $\rho_{\varphi} = 2$, on aurait loisir de prendre $l_{\varphi} + m_{\varphi} + n_{\varphi}$ non nul et en effet on trouverait $l_{\varphi} = m_{\varphi} = n_{\varphi}$ et cette propriété que le centre de gravité se conserve.]

Le somme $l_{\varphi} + m_{\varphi} + n_{\varphi}$ est nulle; nous pouvons, dans chaque équation (33), ajouter au premier membre le produit $\rho_{\varphi}(l_{\varphi} + m_{\varphi} + n_{\varphi})$ et cela donne, en n'écrivant que la première équation

$$-l_{\varphi} \operatorname{tg} \varphi (\cot B + \cot C) + m_{\varphi} (1 + \rho_{\varphi} + \cot C \operatorname{tg} \varphi) + n_{\varphi} (1 + \rho_{\varphi} + \cot B \operatorname{tg} \varphi) = 0.$$

Si l'on pose, avec une inconnue auxiliaire ω ,

$$1 + \rho_{\varphi} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \omega},$$

on obtient au lieu de (33) le système

$$(33') \begin{cases} -l_{\varphi} \operatorname{tg} \omega (\cot B + \cot C) + m_{\varphi} (1 + \cot C \operatorname{tg} \omega) + n_{\varphi} (1 + \cot B \operatorname{tg} \omega) = 0, \\ l_{\varphi} (1 + \cot C \operatorname{tg} \omega) - m_{\varphi} \operatorname{tg} \omega (\cot C + \cot A) + n_{\varphi} (1 + \cot A \operatorname{tg} \omega) = 0, \\ l_{\varphi} (1 + \cot B \operatorname{tg} \omega) + m_{\varphi} (1 + \cot A \operatorname{tg} \omega) - n_{\varphi} \operatorname{tg} \omega (\cot A + \cot B) = 0. \end{cases}$$

Si l'on annule le déterminant de ces équations linéaires et homogènes $l_{\varphi}, m_{\varphi}, n_{\varphi}$ on trouve justement ce déterminant qui a été obtenu au paragraphe 3 : l'angle ω est déterminé par l'équation indépendante de φ

$$(35) \quad 1 + 2(\cot A + \cot B + \cot C) \operatorname{tg} \omega + 3 \operatorname{tg}^2 \omega = 0.$$

Il en résulte que les rapports $l_{\varphi} : m_{\varphi} : n_{\varphi}$ sont indépendants de φ ; nous retrouvons donc, par voie purement analytique, les deux directions invariantes au cours des transformations du groupe $[h, k]$; dans les équations (33') nous pourrions écrire l, m, n au lieu de $l_{\varphi}, m_{\varphi}, n_{\varphi}$ et alors nous voyons que les points $A_{\omega}, B_{\omega}, C_{\omega}$ sont alignés; si l'on se sert des deux dernières équations (33') pour déterminer le rapport $m : n$ on trouve

$$\frac{m}{1 + 2(\cot A + \cot B) \operatorname{tg} \omega + \operatorname{tg}^2 \omega} = \frac{n}{1 + 2(\cot A + \cot C) \operatorname{tg} \omega + \operatorname{tg}^2 \omega},$$

ce qui en tenant compte de (35) peut s'écrire

$$\frac{m}{-2 \operatorname{tg} \omega (\operatorname{tg} \omega + \cot C)} = \frac{n}{-2 \operatorname{tg} \omega (\operatorname{tg} \omega + \cot B)}$$

ou encore

$$m(\operatorname{tg} \omega + \cot B) = n(\operatorname{tg} \omega + \cot C).$$

Si donc on calculait de la même façon le rapport $l : m$ en se servant de la première et seconde équation (33'), ce qui revient à des permutations circulaires, on trouverait le résultat définitif

$$l(\operatorname{tg} \omega + \cot A) = m(\operatorname{tg} \omega + \cot B) = n(\operatorname{tg} \omega + \cot C),$$

ce qui prouve que nous avons obtenu le point à l'infini

$$\vec{M}_{\frac{\pi}{2}-\omega} = \frac{\vec{A}}{\operatorname{tg} \omega + \cot A} + \frac{\vec{B}}{\operatorname{tg} \omega + \cot B} + \frac{\vec{C}}{\operatorname{tg} \omega + \cot C}$$

[voir équation (11) où l'on remplacerait φ par $\frac{\pi}{2} - \omega$]; ω est une racine de 35 et es points A_ω , B_ω , C_ω sont alignés. La seconde racine de 35, ω' , fournit l'autre direction invariante, perpendiculaire à la première, parallèle à la droite $(A_\omega B_\omega C_\omega)$.

6. Conclusion. — Nous avons donc démontré ce théorème, un peu imprévu, que *le groupe (h, k) rencontré naturellement à l'occasion de la transformation angulaire φ appliquée à un triangle est le groupe des affinités relatives aux deux axes de Steiner du triangle*; le triangle primitif et les ∞^2 nouveaux triangles obtenus par les transformations du groupe ont tous même centre de gravité et mêmes axes de Steiner. Ce résultat permet de trouver *en bloc* tous les résultats trouvés *en détail* par les géomètres qui ont étudié la figure, sans songer au groupe des homographies en jeu : malgré l'ingéniosité de ces divers chercheurs, leurs démonstrations sont plutôt des *constatations* que des *démonstrations*. Par exemple, pour $\varphi = \pm \frac{\pi}{6}$, ils ont bien constaté que le triangle transformé est équilatéral, mais nous l'avons *démontré* en étudiant la transformation inverse d'une première transformation et cherchant les transformations exceptionnelles dont la transformation inverse est indéterminée. La considération des affinités $X = ax$, $Y = a'y$ montre que $a = a'$ donne une simple transformation par *homothétie* ($\varphi = 0$), et que $a + a' = 0$ donne une *homothétie complétée par une symétrie relativement à un axe de Steiner*; on constate sans peine que le centre des symédianes de ABC est intérieur au triangle et fournit, par ses projections sur les médiatrices, les sommets d'un triangle transformé de ABC par un certain angle φ , car les distances du centre des symédianes aux côtés sont précisément proportionnelles aux côtés mêmes; ce triangle transformé particulier est celui qui est semblable à ABC (et de sens contraire) : on remarquera que les divers chercheurs ont bien signalé ce triangle spécial, sans remarquer qu'il est semblable au triangle

ABC. Les hyperboles (ABCGH) relatives à un triangle et à ses ∞^2 transformés ont en commun G et les deux points à l'infini sur les axes de Steiner : elles forment bien un système ∞^2 ; d'autre part, il existe ∞^3 triangles ayant en commun avec ABC le point G et les axes de Steiner; chacun d'eux peut remplacer ABC pour définir une transformation particulière de notre groupe : chacune des ∞^2 hyperboles que nous avons signalées contient ∞^1 triangles de cette espèce; quand on transforme chacun des ∞^3 triangles en jeu par les affinités $X = ax$, $Y = a'y$, le triangle transformé vient se placer successivement sur chacune des ∞^2 hyperboles en jeu.

Le lecteur peut aussi se demander pourquoi le rôle des triangles équilatéraux ne paraît pas aussi exceptionnel, en prenant la forme $X = ax$, $Y = a'y$, au lieu de la forme $[h, k]$. Mais en réfléchissant il verra que, pour un triangle équilatéral, H et G sont confondus, l'hyperbole (ABCGH) cesse d'être bien déterminée, puisque l'on n'en connaît plus que quatre points ; il y a une infinité d'axes de Steiner; pour pouvoir continuer, il faut indiquer les deux axes rectangulaires Gx , Gy que l'on choisit.