

H. BOUASSE

Formation des ondes et des rides, entraînement par l'eau en mouvement

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4^e série, tome 1 (1937), p. 249-332

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1937_4_1__249_0

© Université Paul Sabatier, 1937, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FORMATION DES ONDES ET DES RIDES ENTRAÎNEMENT PAR L'EAU EN MOUVEMENT

Par M. H. BOUASSE.



En 1870 Kelvin publia une formule qui relie la longueur d'onde λ à la vitesse de propagation Ψ des ondes dues à un ébranlement de fréquence N , se propageant sur la surface d'une eau tranquille.

L'expérience a vérifié cette formule pour les ondes dites capillaires dans les conditions de son établissement, c'est-à-dire pour des trains de vitesse Ψ uniforme; elle permet de mesurer la tension superficielle. Pour une source d'ébranlements ponctuels les ondes sont circulaires équidistantes; pour une source linéaire elles ont des portions rectilignes parallèles équidistantes; on suppose l'eau immobile et sa profondeur l uniforme ou très grande. En supprimant l'une de ces conditions ou les deux, on impose aux ondes des formes différentes du cercle ou de la droite.

Comme souvent aux ondes progressives sont associées des rides *immobiles*, on est conduit à déterminer comment les rides et les ondes se forment pour un obstacle oscillant normalement à la surface de l'eau ou parallèlement à cette surface; on peut remplacer l'obstacle matériel par un jet gazeux intermittent ou oscillant. La théorie classique des rides, établie sans tenir compte de leur mode de formation et de disparition, ni de leurs relations avec les ondes progressives, est incapable d'interpréter l'ensemble des phénomènes, outre qu'elle repose sur des hypothèses *a priori* invraisemblables.

1. — Formule de Kelvin.

1. — Je rappelle la formule de Kelvin :

$$(1) \quad \Psi^2 = \left(g \frac{\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi A}{\lambda \rho} \right) \operatorname{tgh} \frac{2\pi l}{\lambda} = \Psi_\infty^2 \operatorname{tgh} \frac{2\pi l}{\lambda};$$

$g = 981$ cm. : sec.; nous poserons $A =$ tension superficielle $= 75$ dynes : cm.; ρ est la densité du liquide, 1 pour l'eau.

Sur une surface d'eau immobile entre la fréquence N et les quantités Ψ, λ , existe la relation $\Psi = N\lambda$: pour Ψ et l donnés, λ et N sont déterminés ; cette relation exprime le fait que sur un point quelconque du plan d'eau passe par seconde un nombre de crêtes ou de creux égal à la fréquence N de la source.

Si la tangente hyperbolique porte sur un nombre $> 2,30$ ($l : \lambda > 0,37$), elle vaut 1 à moins de 1/50 près :

$$(2) \quad \Psi^2 = g \frac{\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi A}{\lambda} = 156\lambda + \frac{471}{\lambda}.$$

Ainsi quel que soit l , du côté des petits λ , la courbe (1) est asymptote à la courbe (2).

Cherchons la courbe asymptote pour les grands λ . Développons la tangente ; ne conservons que les deux premiers termes :

$$(3) \quad \Psi^2 = gl + \frac{4\pi^2 l}{\lambda^2} \left(A - \frac{gl^2}{3} \right).$$

Quand λ croît indéfiniment, Ψ tend vers la limite $\Psi_l = \sqrt{gl}$. Le crochet s'annule pour $l_0 = \sqrt{3A : g} = 0,479$ cm. Pour $l > l_0$, Ψ tend vers sa limite en montant ; pour $l < l_0$, Ψ tend vers sa limite en descendant. On prévoit que l_0 est l'épaisseur pour laquelle Ψ cesse d'avoir un minimum.

2. — CALCUL DES COURBES.

En prenant pour variable λ , la formule (2) donne Ψ_∞ et N ; d'où le tableau des vitesses et des fréquences *en eau profonde*. Avec une table des tangentes, en prenant pour variable le rapport $l : \lambda$, on dresse un tableau des valeurs de $\text{tgh}(2\pi l : \lambda)$.

Grâce à ces deux tableaux on trace point par point les courbes de la figure 1 relatives à une série d'épaisseurs *petites* ; dans leurs parties utiles pour des épaisseurs plus grandes les courbes se confondent pratiquement avec celle relative à l infini.

Vitesses Ψ et longueurs d'onde λ en eau profonde pour $A = 75$:

| λ | Ψ | N | | λ | Ψ | N |
|-----------|--------|------|--|-----------|--------|------|
| 1 mm. | 68,7 | 687 | | 11 | 24,5 | 22,3 |
| 2 | 48,8 | 244 | | 12 | 24,1 | 20,1 |
| 3 | 40,2 | 133 | | 13 | 23,8 | 18,3 |
| 4 | 35,2 | 88 | | 14 | 23,6 | 16,9 |
| 5 | 31,9 | 63,8 | | 15 | 23,4 | 15,6 |
| 6 | 29,6 | 49,3 | | 16 | 23,3 | 14,6 |
| 7 | 28,0 | 40,0 | | 17 | 23,1 | 13,6 |
| 8 | 26,7 | 33,8 | | 18 | 23,2 | 12,9 |
| 9 | 25,7 | 28,5 | | 19 | 23,3 | 12,3 |
| 10 | 25,0 | 25,0 | | 20 | 23,4 | 11,7 |

3. — MINIMUM DE LA VITESSE Ψ .

En eau profonde, c'est-à-dire pour des profondeurs l telles que, pour les λ réalisés, $\operatorname{tgh}(2\pi l : \lambda) = 1$, la courbe $\Psi = f(\lambda)$ possède un minimum déterminé par les relations : $\lambda_0 = 2\pi \sqrt{A : g}$, $\Psi_0^2 = 2 \sqrt{Ag}$. Cherchons au-dessous de quelle profondeur le minimum cesse d'exister. Posons $x = 4\pi l : \lambda$; dérivons la formule (1) par rapport à λ ; pour le minimum ($A = 75$) on trouve :

$$(4) \quad \frac{\sinh x}{x} = P = \frac{\lambda^2 + 4\pi^2 A : g}{\lambda^2 - 4\pi^2 A : g}, \quad \lambda^2 = 3,017 \frac{P+1}{P-1}.$$

Voici la marche du calcul. On prend arbitrairement x ; d'où la valeur de P ; ce qui donne λ , puis l , puisque x est connu.

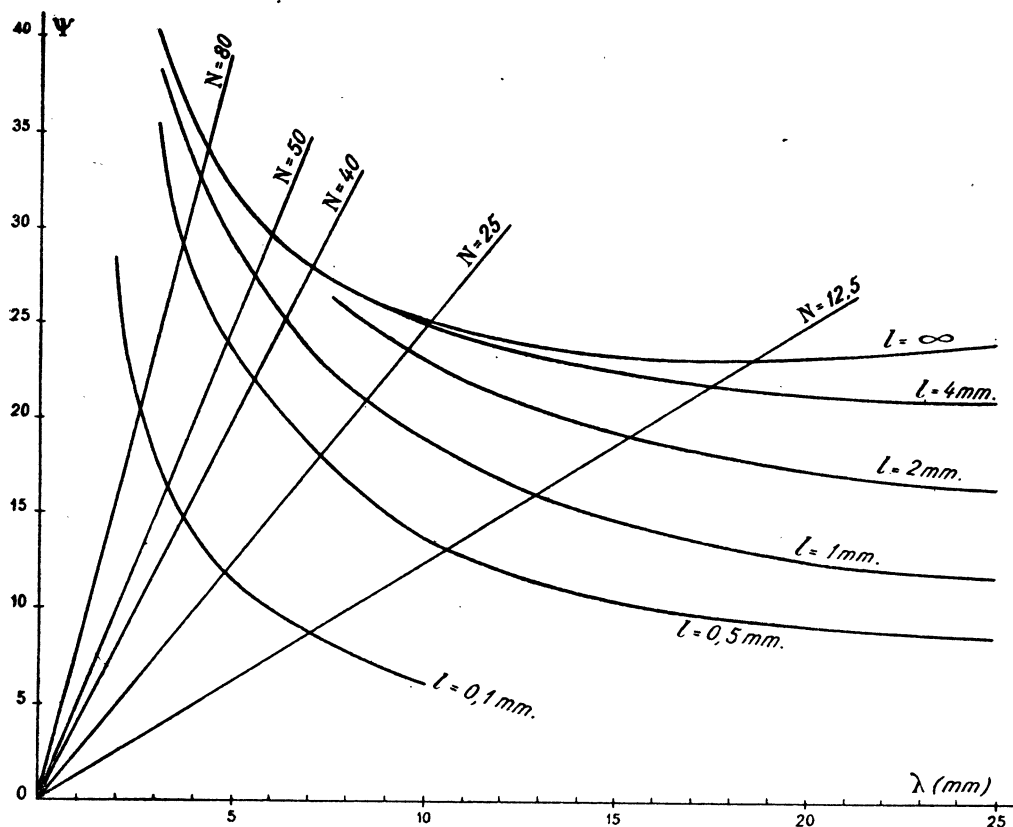


FIG. 1.

Pour $x > 10$, $P > 1100$. Avec une approximation du millième on a pour le minimum :

$$\lambda_0 = \sqrt{3,017} = 1,74 \text{ cm.}, \quad l = x\lambda_0 : 4\pi.$$

Ainsi pour $l > 1,39$ cm. il existe sûrement un minimum; le λ correspondant invariable est égal à 1,74 cm.

Cherchons ce que devient l'équation (4) pour les valeurs très petites de x . Développons $\sinh x : x$ en série; ne conservons que les deux premiers termes :

$$l_0 = \sqrt{3A : g} = 0,479 \text{ cm.}, \quad \lambda = 4\pi l_0 : x.$$

Le minimum cesse donc d'exister pour $l < l_0$; à mesure que x diminue, la formule (4) donne une épaisseur quasiment invariable et une longueur d'onde correspondante qui est en raison inverse de x .

Bornons-nous au calcul complet pour les valeurs de x ni petites ni grandes.

| | | | | | | |
|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x =$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $\lambda =$ | 6,13 | 3,23 | 2,37 | 2,02 | 1,86 | 1,74 |
| $\Psi_0 =$ | 21,8 | 22,2 | 22,6 | 22,9 | 23,1 | 23,2 |
| $l =$ | 0,488 | 0,514 | 0,566 | 0,641 | 0,740 | 0,831 |

Pour les épaisseurs supérieures à $l_0 = 0,479$ cm., il existe un minimum; pour $l > 0,831$ cm. (eau profonde) le λ correspondant est invariable et égal à 1,74 cm. Quand l'épaisseur diminue et tend vers l_0 , la longueur d'onde du minimum tend vers l'infini.

Voici les valeurs limites de la vitesse en cm. : sec. pour les épaisseurs qui ne donnent pas de minimum :

| | | | | | | |
|------------|-------|------|------|-----|-----|-----|
| $l =$ | 4 mm. | 3 | 2 | 1 | 0,5 | 0,2 |
| $\Psi_l =$ | 19,8 | 17,1 | 14,0 | 9,9 | 7,0 | 4,4 |

Pour la limite $l_0 = 4,79$ mm. la vitesse limite est $\Psi_0 = \Psi_l = 21,7$ cm. : sec. Ainsi la vitesse minima Ψ_0 reste la même, 23,3, pour toutes les épaisseurs $l > 1$ cm.; elle diminue ensuite jusqu'à la limite $l_0 = 0,479$, pour laquelle elle est égale à la vitesse limite 21,7 cm. : sec.

2. — Vibrateur : jet d'air intermittent.

1. — Pour obtenir des ondes progressives de fréquence N assez grande, on emploie généralement un fil vertical fixé normalement à l'une des branches d'un diapason. Un jet d'air intermittent constitue un vibrateur beaucoup plus commode et plus souple; les phénomènes sont exactement les mêmes qu'avec le fil, ce qu'ex-

plique le mécanisme de l'entretien. Ce n'est donc qu'exceptionnellement que j'utilise un fil oscillant.

Sur l'axe horizontal d'un moteur asynchrone synchronisé, recevant le courant alternatif de fréquence 50 et faisant 12,5 tours : seconde, est calé un disque de carton (diamètre 25 cm.) percé de n fenêtres identiques équidistantes limitées par des rayons. De part et d'autre du disque et normalement à lui, à une distance de l'axe égale à celle du milieu des fenêtres, sont deux tubes de laiton (diamètre 10 mm.) distants d'un cm. et dans le prolongement géométrique l'un de l'autre. Le tube amont est relié à une boîte (contenance 12 litres) où une soufflerie rotative mue par un moteur électrique entretient une surpression voisine de 10 cm. d'eau. Le tube aval est relié à un tube de verre, courbé à angle droit, étiré au bout libre vertical qu'un support à crémaillère permet de placer à la distance voulue de la surface liquide. La fréquence du jet intermittent est $N = 12,5.n$; dans mes expériences $n = 1, 2, 4$; on est sûr de la fréquence à la précision (1 : 50) de celle du courant alternatif. Le carton est généralement percé de 4 fenêtres; on en supprime 3 ou 2 en collant dessus du papier.

Pour photographier les phénomènes progressifs, on peut caler le disque stroboscopique D (*fig. 2*) sur l'axe d'un second moteur synchrone faisant aussi 12,5 tours : seconde; ils sont automatiquement arrêtés. Mais pour leur étude, il est préférable de leur laisser une petite vitesse, ce qui permet de les distinguer des rides immobiles. Du reste un petit moteur à collecteur se synchronise quand on règle l'intensité du courant alternatif de manière qu'il fasse par seconde un nombre de tours à peu près égal à un sous-multiple de la fréquence de ce courant. Avantageux pour la photographie, cet accrochage empêche d'obtenir une vitesse très petite des phénomènes progressifs réalisés avec un moteur synchrone.

2. — Le jet d'air vertical produit un ébranlement *de révolution*, irréalisable avec une pointe vibrante dans les conditions de mes expériences qui l'exigent assez longue. Son extrémité décrit un arc de cercle; d'où des courants liquides axifuges dans certaines directions, axipètes dans d'autres; ce que montrent les poussières déposées sur la surface.

Grâce aux jets intermittents, on peut superposer au même point des ébranlements de fréquences différentes; on peut aussi multiplier les lieux d'ébranlement.

Même pour un tube effilé dont le diamètre terminal est de l'ordre de 2 mm., s'il existe un bouchon liquide à son extrémité, la pression alternative de l'air est incapable de le refouler; on le supprime avec du papier filtre. Il ne se reforme pas au cours de l'expérience, malgré les inévitables projections d'eau; pour un tube de plus petit diamètre il se reforme de temps en temps, ce qui rend l'expérience moins régulière. En éclairant par transmission un vase de verre contenant l'eau et en regardant à peu près horizontalement un peu au-dessous ou au-dessus du plan

d'eau, on constate que chaque jet envoie dans l'eau un groupe de très petites bulles d'air qui remontent vite à la surface, et qu'il projette extérieurement de très petites gouttes d'eau.

3. — Observation et photographie des ondes progressives.

1. — Elles se propagent avec des vitesses de plusieurs dizaines de cm. : sec. pour les fréquences utilisées; on doit les observer et les photographier à travers un stroboscope qui diminue ou annule leur fréquence et leur vitesse, sans changer leur longueur d'onde. Les difficultés d'éclairage tiennent à ce que les ondes ont toutes les directions, alors que l'éclairage artificiel n'est commode que pour des fragments d'ondes quasi rectilignes et parallèles.

2. — PHOTOGRAPHIE DES ONDES.

Muni de sa lentille à portrait, le kodak K regarde le phénomène, à un mètre environ, sous une incidence quasi normale, grâce au gros prisme P à réflexion totale réglable au moyen de la vis v . Entre le kodak et le prisme passe le disque stroboscopique D. En bois plaqué noirci (épaisseur 4 mm., diamètre 50 cm.), il est percé de quatre fentes radiales équidistantes; occupant chacune environ 14° ($1 : 6,5$ du quadrant).

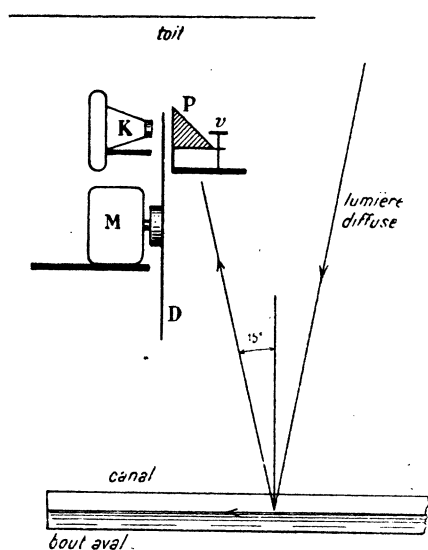


FIG. 2.

Seule la lumière diffusée par un ciel blanc permet de photographier un phénomène étendu où les rides et les ondes ont toutes les directions. Pour un tel éclairage

rage, aussi pour ne pas inonder le laboratoire, on opère dans un jardin : les appareils sont protégés par un toit qui laisse découverte la portion utile du ciel.

Pour étudier les phénomènes sans les photographier, on supprime le kodak. Pour arrêter les ondes, le kodak en place, on regarde par réflexion sur un miroir voisin du prisme et convenablement incliné. La vitesse du disque est réglée par un rhéostat.

Le grossissement du kodak est $1/7$ environ ; on étudie les clichés sur un grandissement qui ramène le plan de front à sa vraie grandeur. On regarde l'eau à peu près normalement pour réduire les corrections d'obliquité (les cosinus de 15° et de 20° sont respectivement 0,966 et 0,940). On utilise les films les plus sensibles (format 65×110 mm.); le temps de pose effectif est 6,5 fois plus petit que le temps d'ouverture de l'objectif (2 secondes).

4. — Eau en mouvement. Rides immobiles.

1. — CANAL D'EXPÉRIENCE.

Pour obtenir une couche d'eau dont la vitesse ψ soit à peu près uniforme, je me sers d'un canal de bois. Je ne dispose que d'un débit moyen de 1.600 cm^3 : sec.; pour avoir une vitesse assez grande sans trop réduire l'épaisseur de la couche d'eau, le canal doit être étroit (174 mm.). Il est formé de trois planches longues de 230 cm.; l'une sert de fond, les autres de parois latérales. Elles sont peintes en blanc, excepté la portion au-dessus de laquelle on regarde les rides immobiles ou les ondes progressives, qui est peinte en noir. A un mètre du bout aval le canal repose sur un étrier, tige transversale horizontale, dans les extrémités de laquelle sont fixés les bouts inférieurs de deux tiges filetées verticales. Elles passent dans des planches fixes à leurs bouts supérieurs; des écrous à oreilles permettent de modifier la pente de la tige inférieure et du canal.

Pour obtenir des couches liquides régulières, minces et de grandes vitesses, donnons au canal une inclinaison notable (*fig. 3*); coupons-le par un barrage de hauteur inférieure à celle du canal.

Sur le barrage repose le bout d'une plaque rectangulaire de verre large de 17 cm., longue de 76, dont la face inférieure est vernie en noir. Son inclinaison est réglée par la vis V traversant le fond du canal; son bord supérieur est nivelé en agissant sur le support du canal. L'eau envoyée près de son bout amont, vient former dans le canal, contre le barrage, un réservoir R où elle est tranquille; elle passe sur la plaque G où elle s'étale régulièrement.

Pour supprimer les rides obliques quasi rectilignes dues aux aspérités des parois du canal, contre elles sur la plaque reposent deux tubes de verre (diamètre 1 cm., longueur 1 m.) dont les bouts supérieurs dépassent le barrage à l'amont pour aboutir dans l'eau tranquille.

La variation rapide de vitesse a lieu dans une bande B qui débute sur le seuil SS. La surface de l'eau, quasi horizontale dans le réservoir R, devient un plan très incliné qui se raccorde à la surface d'une couche mince d'épaisseur beaucoup plus lentement décroissante, par suite de vitesse ψ beaucoup plus lentement croissante quand on se déplace vers l'aval. L'intersection de la surface d'eau avec la paroi a la forme représentée. Près du seuil le dispositif réalise une variation très grande dans un parcours de l'ordre du cm.

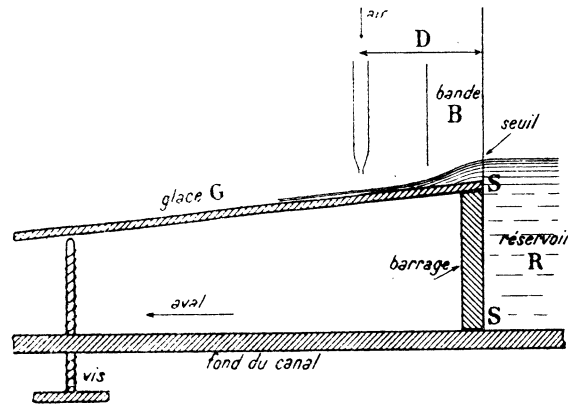


FIG. 3.

2. — RIDES IMMOBILES.

Je rappelle *ce qu'on admet* au sujet des rides *immobiles*, produites par un obstacle vertical disposé dans un courant profond de vitesse ψ uniforme. C'est un cas très particulier; dans un autre mémoire j'étudie le cas général d'une distribution quelconque de la vitesse du courant (*Annales de Physique* pour 1937).

A l'amont de l'obstacle (un cylindre vertical de petit diamètre), sur la droite de symétrie, on admet que les rides sont équidistantes; leur distance λ de crête à crête correspond à une vitesse de propagation Ψ égale à la vitesse ψ du courant. De là suit qu'en eau profonde les rides n'existent pas pour $\psi < \Psi_0 = 23,3$.

A mesure que ψ augmente, λ diminue. Par exemple pour $\psi = \Psi = 40,2$, on aurait $\lambda = 3$ mm.

On admet que les rides ont des asymptotes parallèles; la première ride amont se réduit quasiment à ces asymptotes. Soit β (*divergence*) l'angle des asymptotes avec la droite de symétrie aval; en eau profonde la relation $\Psi_0 = \psi \sin \beta = 23,3$, est vérifiée par l'expérience; elle peut servir à déterminer la vitesse ψ . A mesure que ψ croît, β diminue; par exemple pour $\beta = 30^\circ$, $\psi = 46,6$.

3. — Pour des vitesses ψ assez grandes on ne peut créer des ondes progressives par l'oscillation d'un fil vertical ou à l'aide d'un jet intermittent sans obtenir simul-

tanément des rides immobiles; leur production plus ou moins discontinue crée sur ces rides des phénomènes progressifs de nature à jeter quelque jour sur leur théorie et à rendre plus que douteuse la théorie classique. D'autre part à l'aval de l'obstacle immobile on voit généralement une ride (ressaut) qui, lâchée périodiquement par le vibreur, crée des ondes progressives hyperboliques, concavité tournée vers l'aval. Nous ne pouvons donc étudier les ondes progressives « normales » sans parler de ces phénomènes qui, du reste, amorcent une théorie des ondes immobiles plus conforme aux faits que la théorie classique. Même pour un obstacle immobile nous décrirons des phénomènes que cette théorie ne peut interpréter (vitesse uniforme sur la normale au canal, mais brusquement croissante de l'amont à l'aval).

DIVERS MODES D'ENTRETIEN DES ONDES

5. — Remarques sur l'emploi du stroboscope.

1. — Raisonons sur des ondes circulaires concentriques; à quelque distance du vibreur, la distance λ de crête à crête et la vitesse radiale Ψ sont uniformes. La fréquence N , inverse de la période T , est le nombre de crêtes qui par seconde passent en un point quelconque du plan: $N\lambda = \Psi$, $\lambda = \Psi T$.

Nous observons à travers un disque percé de fenêtres équidistantes et tournant avec une vitesse uniforme; $\tau = (1 + \alpha)T$, est la période des visions. Le phénomène est arrêté *avec son aspect instantané* (l'aspect *simple* que montrerait une étincelle de très courte durée) quand τ est un multiple exact de T : $\tau = pT$. D'une vision à la suivante, les ondes *indiscernables par hypothèse* se déplacent de $p\lambda$; l'œil croit voir toujours la même au même endroit. Même résultat quand Ψ , par suite λ , ne sont pas uniformes pourvu que la fréquence le soit.

2. — MESURE DE LA FRÉQUENCE DU VIBREUR.

Un compte tours appuie en permanence contre l'axe du moteur qui entraîne le stroboscope. Soit q le nombre des fenêtres, t la durée de 100 tours; la fréquence des visions est $100q:t$; la fréquence du phénomène arrêté *avec son aspect simple* est $100pq:t$. Produisons deux arrêts consécutifs *avec cet aspect*; c'est-à-dire pour v et $p+1$; mesurons les temps correspondants t_1 et t_2 ; on a: $p:t_1 = (p+1):t_2$. D'où la valeur exacte de p qui est entier.

On peut encore vérifier que pour une fréquence de vision le phénomène est arrêté avec son aspect instantané, et que pour une fréquence double il est doublé: la première fréquence est alors celle du phénomène, $\tau = T$. Mais outre qu'il faut vérifier que les deux fréquences de vision sont dans le rapport 1:2 (le phénomène

peut être doublé pour $\tau > T$), la condition $\tau = T : 2$ est parfois irréalisable en raison de la vitesse à donner au stroboscope.

Avec un jet intermittent et un moteur synchrone, la fréquence est déterminée par le nombre q des fenêtres.

3. — Quand τ n'est pas un multiple exact de T , posons $\tau = (p + \alpha)T$, $0 < \alpha < 1$. Pendant le temps τ les ondes se déplacent de : $\tau\Psi = (p + \alpha)T\Psi = (p + \alpha)\lambda$. Étant indiscernables, leur déplacement apparent est $\alpha\lambda$; d'où leur vitesse apparente Ψ' :

$$\Psi' = \frac{\alpha\lambda}{\tau} = \frac{\alpha}{p + \alpha} \frac{\lambda}{T} = \frac{\alpha}{p + \alpha} \Psi.$$

Comme la longueur d'onde n'est pas modifiée par la vision à travers le stroboscope et que la relation $\lambda = \Psi'T' = \Psi' : N'$, subsiste entre les quantités apparentes, on a pour la fréquence apparente :

$$N' = [\alpha : (p + \alpha)]N.$$

Pour α petit devant l'unité :

$$\Psi' = (\alpha : p)\Psi, \quad N' = (\alpha : p)N.$$

Représentons chaque onde par un point, le centre des ondes (circulaires) est à gauche; le mouvement axifuge des points est vers la droite. A un multiple près de la longueur d'onde, les points pour chaque vision sont sur une droite horizontale. Quelle que soit α , ils sont équidistants sur des droites D d'autant plus inclinées que α est plus voisin de 1. Les points représentent les lieux où l'on voit des ondes; p pouvant être quelconque, les points d'une même droite inclinée peuvent appartenir à des ondes différentes. Pour la première vision, soit a, d, g, i, \dots , les positions des points. Pour $p = 0$, les visions suivantes montreront l'onde a successivement en b, c, \dots ; pour $p = 1$, elles montreront l'onde a successivement en l, k, m ; pour $p = 2$, la seconde vision montrera a en h . Comme par hypothèse les ondes sont indiscernables, nous pouvons raisonner sur $p = 0$, c'est-à-dire ne conserver que la fraction α .

L'expérience montre que pour obtenir des mouvements continus l'œil associe les points qui se trouvent sur les droites Δ (munies de flèches) qui s'écartent le moins de la verticale, alors même qu'elles relient des points qui ne correspondent pas à des visions immédiatement consécutives. Étudions la marche du phénomène quand α varie de 0 à 1.

4. — Pour $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$, le phénomène est arrêté avec son aspect instantané simple. La figure 4 montre qu'il est encore arrêté pour $\alpha = 0,5$ avec une équidistance moitié moindre : dans ces trois cas, les droites Δ sont verticales. Pour $\alpha = 0,5$ les droites Δ sont doublées. Les visions successives montrent les points $d(\Delta_1)$, $\delta(\Delta_2)$, $c(\Delta_1)$, $\gamma(\Delta_2)$; bien que pour une vision sur deux rien n'existe sur les droites Δ , ce sont des droites d'association si les visions sont assez rapprochées pour que l'œil ne s'aperçoive pas du vide.

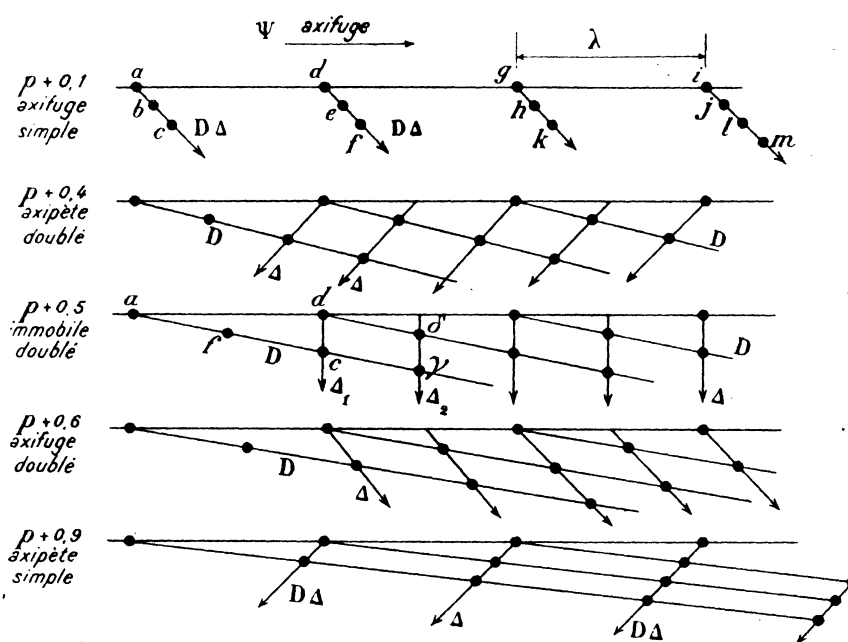


FIG. 4.

Pour α petit les droites Δ sont inclinées dans le sens du mouvement réel (*axifuge*); pour α voisin de 1 elles sont inclinées dans le sens du mouvement *axipète*. Les inclinaisons en sens inverses sont les mêmes pour α et $1 - \alpha$.

Pour $\alpha = 0,5 \pm \varepsilon$, les droites Δ sont inclinées de même en sens inverses; les rides *doublées* ont un mouvement *axipète* pour $0,5 - \varepsilon$, *axifuge* pour $0,5 + \varepsilon$. Au sens près les inclinaisons des droites Δ sont les mêmes pour $\alpha = \varepsilon, 0,5 - \varepsilon, 0,5 + \varepsilon, 1 - \varepsilon$.

En définitive les rides simples arrêtées pour $\alpha = 0$, prennent un mouvement *axifuge* qui s'accélère quand α croît; elles sont trépidantes au voisinage de $\alpha = 0,25$; elles doublent et prennent un mouvement *axipète* dont la vitesse diminue; elles s'arrêtent pour $\alpha = 0,50$, prennent un mouvement *axifuge* qui s'accélère, deviennent trépidantes au voisinage de $\alpha = 0,75$; redevenues simples, elles ont un mouvement *axipète* dont la vitesse décroît; elles s'arrêtent pour $\alpha = 1$.

Pour ε ou $1 - \varepsilon$ sous-multiple exact q de l'unité, il existe encore des points sur des verticales d'écartement $1 : q$ (figure 5 construite pour $q = 4, q = 3$). Mais ces verticales ne sont plus des droites d'association Δ parce qu'elles sont vides de points pour 3 et 2 visions (généralement $q - 1$). Par exemple pour $\varepsilon = 0,25 (q = 4)$, les visions successives montrent les points $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon + e, \dots$; l'œil n'associe pas les points α et e parce que dans l'intervalle de leurs apparitions se montrent les points β, γ, δ : on ne voit pas des ondes immobiles quadruplées. Les droites d'association Δ seraient plutôt les droites inclinées $abc, \dots, \alpha\beta\gamma, \dots$; toutefois le saut d'une vision à la suivante est assez grand pour rendre le phénomène trépidant.

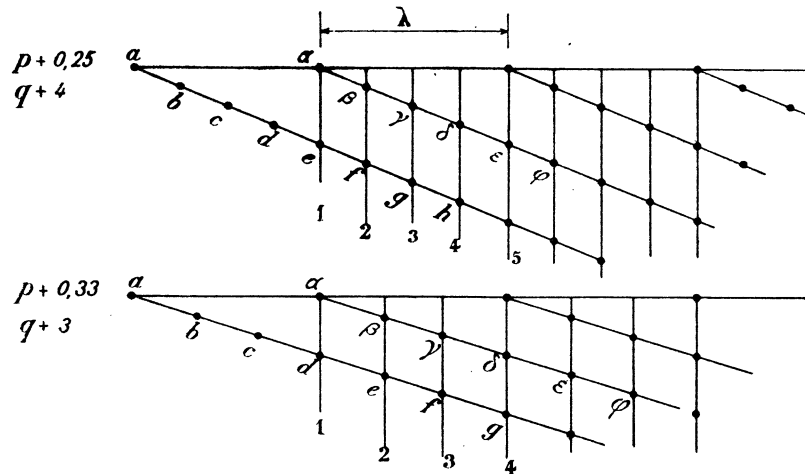


FIG. 5.

Insistons sur la nature du phénomène pour $\alpha = 0,5, q = 2$, cas pour lequel avec la fréquence 50 il est facile d'obtenir des ondes doublées immobiles. L'œil voit successivement les points d, δ, c, γ ; les droites d'association Δ_1 et Δ_2 ne contiennent un point qu'une vision sur deux; malgré quoi pour une fréquence assez grande l'œil les voit en permanence.

Mais utilisons (§ 11) un jet de fréquence 25 (période 0,04); faisons croître la période τ des visions de 0,08 à 0,04. Pour τ compris entre 0,08 et 0,06, les ondes ont un mouvement axipète; pour τ compris entre 0,06 et 0,04, leur mouvement est axifuge. Pour $\tau = 0,06$ (fréquence 16,7) le doublement est remplacé par un saut d'une demi période spatiale à chaque vision; on voit *successivement* les points $d(\Delta_1), \delta(\Delta_2), c(\Delta_1), \gamma(\Delta_2)$ de la figure 4 qui correspond à $p + 0,5$, le phénomène est trépidant, mais leurs ondes conservent leur écartement normal.

5. — Supposons $\tau < T$; pour ne pas compliquer inutilement je pose $T = 1$, et je fais varier τ de 1 à 0,50 (fig. 6). Pour τ peu inférieur à 1 les ondes sont simples;

leur mouvement est axipète. Pour $\tau = 0,50$, elles sont doubles et immobiles; les droites verticales Δ sont vides une vision sur deux. Pour τ un peu inférieur à $0,50$, les ondes doublées ont un déplacement axifuge.

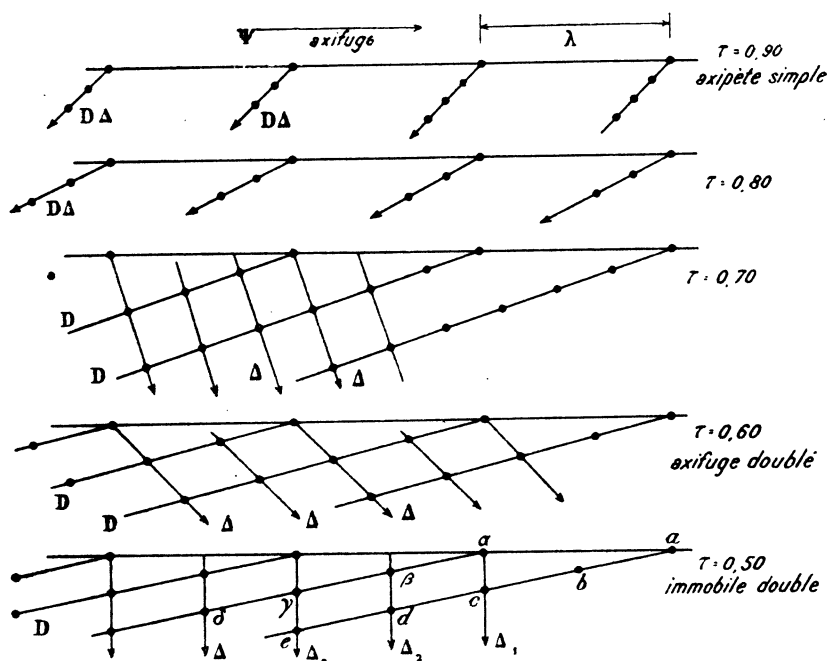


FIG. 6.

Ce que je dis au 4° s'applique ici. La première vision montre par exemple le point α ; les suivantes montrent les points β, c, d ; mais l'apparition de c sur Δ_1 est assez voisine de celle de a pour que l'œil associe ces deux points. Le cas $0,50$ ne diffère donc en rien du cas $p + 0,5$.

On trouverait encore des points sur les verticales pour certaines de τ comprises entre 1 et $0,50$. Par exemple pour $\tau = 0,75$ il existe quatre droites verticales; mais sont vides trois visions sur quatre, ce ne sont pas des droites d'association.

Pour $\tau = T : 3$, le phénomène est triplé, et ainsi de suite; quand $\tau < T$ diminue, on ne retrouve pas le phénomène simple. Ce qui différencie ce cas du cas $\tau = (p + 0,5)T$, pour lequel après doublement le phénomène redevient simple quand τ diminue.

6. — ON SUPERPOSE UN FONDAMENTAL ET L'HARMONIQUE n .

Leurs périodes ont T_1 et $T_n = T_1 : n$; d'où :

$$\tau = (p + \alpha)T_1 = n(p + \alpha)T_n.$$

En vertu du 3° on a pour les vitesses apparentes :

$$\Psi'_1 = \frac{\alpha \lambda_1}{\tau} = \frac{\alpha}{p + \alpha} \Psi_1, \quad \Psi'_n = \frac{n \alpha \lambda_2}{\tau} = \frac{\alpha}{p + \alpha} \Psi_n.$$

Les vitesses apparentes sont dans le rapport des vitesses vraies à la condition que $n\alpha$ positif ou négatif soit inférieur à 0,5. Pour fixer les idées soit $T_1 = 0,08$ ($N = 12,5$), $T_2 = 0,04$ ($N_2 = 25$). Soit $p = 0$, $\alpha = 0,3$; par suite $\tau = 0,3T_1 = 0,6T_2 = (1 - 0,4)T_2$. Les ondes fondamentales auront un mouvement axifuge, les ondes d'octave un mouvement axipète; il est clair que la proportionnalité aux vitesses vraies n'a plus lieu. L'expérience est facile avec la technique du § 11 qui permet de superposer le fondamental et l'octave avec les mêmes amplitudes. Comme il est difficile de distinguer les ondes qui se déplacent en sens inverses, on aidera l'œil en supprimant et rétablissant le fondamental (un levier permet d'aplatir le caoutchouc d'amenée de l'air). Même résultat avec des déplacements en sens inverses en prenant $p = 1$, $\alpha = -0,3$; $\tau = (1 - 0,3)T_1 = (2 - 0,6)T_2 = (1 + 0,4)T_2$.

Supposons donc α très petit devant l'unité : comme Ψ'_n est toujours plus grand que Ψ_1 , les ondes d'harmoniques vont plus vite que les ondes fondamentales et passent dessus. Toutefois on ne peut constater ces passages que si Ψ_1 et Ψ'_n diffèrent assez. Quelques nombres fixeront les idées :

| | | | | |
|-----------|---------------|----|----|------|
| N | 12,5 | 25 | 50 | 100 |
| Ψ | 23 cm. : sec. | 25 | 30 | 36,5 |
| λ | 19 mm. | 10 | 6 | 3,7 |

Pour les fréquences 25 et 50 le rapport des vitesses est 1,2. Il est voisin de 1 pour les fréquences 12,5 et 25.

Une manière plus commode de déceler l'octave repose sur les 4° et 5°. Soit 25 la fréquence fondamentale ($T_1 = 0,04$); soit 50 la fréquence de l'octave ($T_2 = 0,02$). Faisons varier τ de 0,04 à 0,02. Du 5° résulte que pour $\tau = 0,03$ les ondes fondamentales se déplaceront trop vite pour être visibles. Du 4° résulte que les ondes d'octave seront immobiles et doublées. Si l'octave existe dans l'ébranlement, en diminuant τ très lentement, on trouvera une valeur $\tau > T_2$ pour laquelle les ondes immobiles auront une équidistance λ'_2 moitié de celle λ_2 qu'on obtiendrait pour l'octave seul avec $\tau = 0,04 = 2T_2$, et $\tau = 0,02 = T_2$, qui arrêtent l'octave avec son aspect instantané.

7. — LONGUEURS D'ONDE ET VITESSE ABSOLUE.

Une comparaison fixera la nature du problème. D'un orifice laissons tomber des gouttes en chute libre avec la fréquence N : bien que la vitesse des gouttes ne soit

pas uniforme, nous pouvons régler le stroboscope pour l'arrêt *simultané* de la file entière, parce qu'il passe en chaque seconde le même nombre N de gouttes en tous les points de la verticale. Soit l la distance de deux gouttes consécutives, Φ leur vitesse; entre l et Φ existe la relation $Nl = \Phi$. Il est clair que Φ est indépendant de N ; chaque goutte n'est pas liée aux autres; pour une goutte unique la vitesse Φ resterait la même au même point; mais le stroboscope ne permettrait plus de voir la goutte, par suite de calculer sa vitesse à partir de l . Si le stroboscope n'est pas réglé pour l'arrêt, toutes les vitesses sont diminuées dans le même rapport.

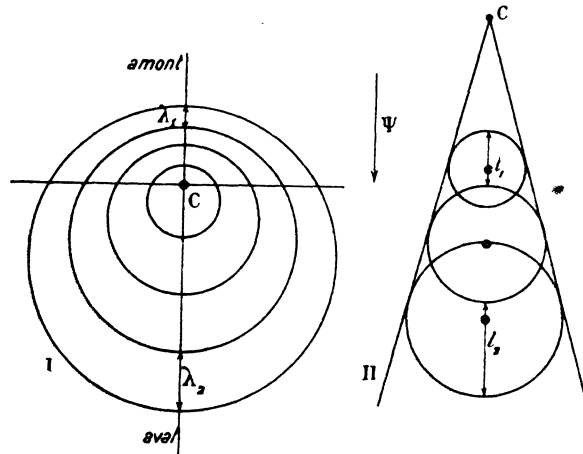


FIG. 7.

La figure 7 représente deux formes types d'ondes produites par un ébranlement de fréquence N dans un courant de vitesse ψ .

La figure I suppose une progression vers l'amont et vers l'aval; la vitesse absolue Φ est la résultante de la vitesse de propagation Ψ sur l'eau mobile et de la vitesse ψ du courant. A l'amont Ψ_1 et ψ sont de signes contraires avec la condition $\Psi_1 > \psi$; à l'aval les vitesses Ψ_2 et ψ sont de même signe. D'où $\lambda_2 > \lambda_1$, bien que $\Psi_2 < \Psi_1$.

La figure II suppose l'entraînement des trains indépendants (de la fréquence N) dus à chaque impact; cela signifie qu'ils grandissent par rapport à l'eau mobile comme ils feraient sur l'eau immobile. Ils sont constitués par un nombre fini d'ondes (la figure n'en représente qu'une). La vitesse Ψ de propagation *par rapport à l'eau mobile* est déterminée par la constitution du train; en général elle n'est pas la même dans toutes les directions ni pour toutes les ondes du train. Sur la droite de symétrie les vitesses absolues des parties amont et aval du train sont respectivement $\Phi_1 = \psi - \Psi_1$, $\Phi_2 = \psi + \Psi_2$. Appelons l_1 et l_2 les distances des parties amont et aval des ondes de même numéro de deux trains consécutifs; on a les relations $Nl_1 = \Phi_1$, $Nl_2 = \Phi_2$. Notons que l_1 et l_2 ne sont pas des longueurs d'onde puisque les trains sont indépendants (voir le § 25).

Ainsi grâce à la production d'un phénomène périodique de fréquence N , le stroboscope réglé pour l'arrêt permet de déterminer la vitesse absolue Φ à partir du déplacement l du phénomène dans le temps $T = 1 : N$, qu'il s'agisse du grandissement d'un train d'ondes autour d'une source immobile, ou de l'entraînement par le courant de trains indépendants.

6. — Entretien des ondes progressives par un jet intermittent qui ne passe que pendant une petite fraction de la période T .

1. — Les fenêtres sont de dimensions telles que le jet passe pendant la fraction $t = \varepsilon T$ de la période (ε petit devant l'unité). Par exemple $T = 0,04(N = 25)$, $\varepsilon = 1 : 15$, ou encore $T = 0,08(N = 12,5)$, $\varepsilon = 1 : 30$.

Quel que soit ε , le phénomène consiste en des ondes circulaires, arrêtées pour la période de vision $\tau = T$; il est donc formé d'un fondamental de période T , accompagné d'un nombre quelconque d'harmoniques. Chaque pulsation donne, à l'aplomb du tube, une cupule qui grandit et dont le bord se détache en un train d'ondes.

A quelque distance du jet les ondes fondamentales ont l'équidistance λ et la vitesse Ψ ; par définition $N\lambda = \Psi$. L'expérience montre que λ et Ψ sont liés par la formule de Kelvin; connaissant N nous pouvons calculer λ ; le λ expérimental coïncide avec le λ calculé.

2. — D'où le problème : comment des ébranlements qui ne durent (pour préciser) qu'un trentième de la période, entretiennent-ils un système d'ondes S déterminé par cette période? Une sorte d'élasticité de la surface liquide, fonction de la pesanteur et de la tension superficielle et agissant près du point d'impact, peut expliquer la production d'ondes d'une certaine fréquence, non pas celle d'ondes d'une fréquence quelconque. On entretient un diapason avec des chocs périodiques extrêmement brefs, mais sa fréquence est déterminée par son élasticité. D'autre part le phénomène élémentaire dû à chaque pulsation aérienne est indépendant de la fréquence N : comment un phénomène indépendant de la fréquence entretient-il un phénomène déterminé par elle?

Réglons le stroboscope à une vitesse peu inférieure à celle de l'arrêt. Chaque pulsation crée un train d'ondes très serrées dont la vitesse radiale initiale d'agrandissement est supérieure à celle du système *régulier* S déjà formé. Les ondes du train semblent venir buter contre le système S et s'y superposer en partie; le résultat est l'adjonction à ce système d'une nouvelle onde intérieure. Par suite pendant une grande partie de la période, entre le point d'impact et la dernière onde S_0 du système S la surface est vide d'ondes; au moment d'un impact le diamètre de l'onde S_0 est plus que double de l'équidistance normale. On comprend qu'un sys-

tème régulier S de fréquence N soit entretenu par des trains, à la vérité créés N fois par seconde, *mais dont la constitution est indépendante de la fréquence* : pour la même période T , ε peut avoir une valeur petite quelconque ; inversement des jets de même durée t peuvent entretenir des ondes de périodes T très différentes.

Utilisons d'abord deux fenêtres diamétralement opposées occupant chacune un $\frac{1}{3}$ de la circonférence moyenne (percées sur un cercle moyen de rayon $r = 10$ cm. et longues de 2 cm.). Le carton fait 12,5 tours par seconde ; d'où $T = 0,04$. Bouchons l'une des fenêtres ; les jets, dont la durée t reste la même, entretiennent un système S' de période $T = 0,08$. Il n'y a pas lieu de croire que les trains émis par chaque pulsation diffèrent dans les deux cas ; il suffit pour l'entretien des systèmes réguliers S et S' que la vitesse initiale de la propagation des trains soit supérieure à celle du système S le plus rapide ($N = 25$).

Je suppose le temps nécessaire à la formation du train produit par chaque jet égal à la durée t du jet ; il est vraisemblablement plus petit, le train apparaissant en son entier presque immédiatement après l'impact.

Cette explication de l'entretien des ondes régulières S les suppose déjà formées avec une vitesse Ψ inférieure à la vitesse initiale du train ; il faut expliquer comment le premier ébranlement est rattrapé par le second puisque, identiques par hypothèse, ils sont émis le second un temps notable après le premier. Si toutes les ondes du train se propagent avec la même vitesse, serait-elle décroissante, le second ne rattrapera pas le premier. Il faut donc que les ondes intérieures du train se propagent moins vite que les extérieures, ce qui permet aux ondes extérieures du second train de se superposer aux ondes intérieures du premier. Comme nous retrouverons le même problème au § 25, je n'insiste pas.

3. — Deux faits sont incontestables : l'existence du système S déterminé par la fréquence N ; la production à chaque impact d'un train d'ondes beaucoup plus serrées, de constitution indépendante de N , qui rattrape le système S déjà formé et lui ajoute une onde *a tergo*.

Que le train se propage très vite, s'explique par le resserrement de ses ondes et la proximité du centre d'émission. Il est toutefois difficile de comprendre comment le train change de constitution pour donner une onde S . L'équation classique qui régit les ondes est linéaire ; par suite les ondes peuvent se superposer sans se modifier, alors que de la superposition successive et partielle des trains résulte un système régulier de fréquence N .

4. — On règle aisément le temps t de passage du jet vertical intermittent et la fraction $\varepsilon = t : T$; toutefois le phénomène initial est le même pour un vibreur vertical de grande amplitude qui ne touche l'eau qu'au bout inférieur de sa course. C'est une sonnerie électrique dont on supprime le timbre et la boule, et dont on prolonge

l'armature par un fil convenablement plié (fréquence voisine de 14); elle est portée par un support à crémaillère.

Pour l'entretien d'un système d'ondes par un fil plongeant dans l'eau et oscillant horizontalement (§ 28), le phénomène initial produit à chaque oscillation n'a d'autre rapport avec le système régulier entretenu que d'être créé N fois par seconde; c'est encore un train d'ondes très serrées, se propageant très vite et rattrapant le système régulier.

7. — Jet permanent. Fraction ε voisine de l'unité.

1. — JET PERMANENT.

Autour du point d'impact on voit des rides circulaires, trépidantes *mais moyennement immobiles quelle que soit la vitesse du stroboscope*; leur λ diminue à mesure que cette vitesse croît. Tout se passe comme si dans un ébranlement extrêmement complexe le stroboscope extrayait les ondes progressives dont la fréquence est celle des visions. Il se conduit comme un résonateur recevant un *bruit acoustique*; la hauteur du son perçu est déterminée par le volume du résonateur supposé variable, volume jouant le rôle de la vitesse angulaire du stroboscope.

Objection : le stroboscope en tournant crée des vibrations qui se communiquent au tube de verre; d'où les ondes automatiquement synchronisées. L'expérience montre que telle n'est pas la cause du phénomène.

Contre le tube de verre et porté par le même support, disposons un fil métallique (diamètre 2 mm.) qui plonge dans l'eau. Faisons tourner le stroboscope; rien n'émane du fil. Faisons tourner le ventilateur, *sans rien envoyer dans le tube de verre* : le stroboscope montre autour du fil des ondes de fréquence bien déterminée, qu'on peut arrêter, rendre axipètes ou axifuges. Elles sont évidemment dues à la vibration produite par le ventilateur qui n'est jamais parfaitement équilibré. Par conséquent dans le cas du jet permanent, ce n'est pas le stroboscope qui, par les trépidations dont il peut être la cause, crée des ondes de la fréquence des visions : dans un ébranlement complexe il extrait les ondes de cette fréquence.

2. — Coupons le jet pendant 1 : 30 environ de la période $T = 0,08$ ($N = 12,5$) ε ne diffère de 1 que de 1 : 30. Nous obtenons des ondes de fréquence N que nous pouvons arrêter, et auxquelles nous pouvons imposer un mouvement uniforme axipète ou axifuge aussi lent que nous le voulons. Il est remarquable qu'une interruption aussi brève impose aux ondes une fréquence bien déterminée.

8. — Tube plongeant.

1. — Les expériences du § 6 n'excluent pas la possibilité d'obtenir un système régulier S de fréquence N *jusqu'au voisinage immédiat du centre* : pour le même ε les phénomènes décrits s'atténuent à mesure que N croît. L'impulsion due au jet de fréquence N se simplifie, en ce sens que le fondamental devient prédominant; d'où résulte une oscillation régulière de la surface jusque près du point d'impact.

Toutefois même pour $N = 12,5 (\varepsilon = 1 : 10)$, on obtient cette oscillation en immergeant le bout du tube effilé. Avec un éclairage convenable, sous une incidence assez oblique et à l'aide d'un viseur peu grossissant, on voit à travers le stroboscope les ondes, le ménisque E extérieur au tube et le ménisque I intérieur. Le gonflement de E et la descente de I sont synchrones; l'eau sortant du tube gonfle le ménisque E. Une crête s'en détache à l'instant où le ménisque I commence à remonter. Ainsi l'onde est due, non immédiatement à la sortie de l'eau hors du tube, mais à l'affaissement du ménisque E gonflé par cette sortie; l'entretien des ondes n'est pas localisé au bout du tube immergé; il est dû au changement de forme de la surface près de ce tube.

L'amplitude des ondes semble maxima quand l'eau n'adhère au tube que par capillarité; elle diminue quand augmente la plongée et s'annule pour une plongée de l'ordre de 6 mm.

2. — TUBE NON EFFILÉ.

De calibre 8 mm., il est mastiqué sous une lourde barre de fer reposant sur un support à crémaillère. Sa plongée doit être telle que l'air ne sorte pas. Pour une même vitesse du ventilateur, le maximum de pression à équilibrer par la pression hydrostatique augmente à mesure que ε croît pour une fréquence invariable; pour le même ε elle diminue quand N croît. Toutes choses égales d'ailleurs elle augmente à mesure que le ventilateur tourne plus vite. Or l'expérience montre que *des ondes régulières S ne sont entretenues que si la plongée est inférieure à une certaine limite.*

Pour $N = 25$, $\varepsilon = 14 : 15$, avec la plus grande vitesse du ventilateur, le tube doit plonger de 3 cm. environ pour que l'air ne sorte pas : les ondes ne sont pas entretenues. Pour une vitesse très petite du ventilateur, on peut réduire la plongée à quelques mm.; les ondes sont entretenues, à la vérité dans de mauvaises conditions. Pour $N = 25$, $\varepsilon = 2 : 9$, les ondes sont bien entretenues pour une vitesse petite du ventilateur; le tube plonge alors à peine dans l'eau. A mesure que cette vitesse croît, le tube doit plonger davantage; l'entretien est excellent pour la plus grande vitesse et la plus petite plongée telle que l'air ne sorte pas.

Dans ces conditions, cherchons la plongée π limite. On trouve que les ondes

sont plus nettes quand le tube atteint la même plongée en descendant que s'il l'atteint en montant; ce qui tient vraisemblablement à l'imparfait mouillage de sa surface: sur le tube, l'eau est plus haute dans le second cas que dans le premier. On supprime l'inégalité en vernissant le tube avec du bitume de Judée qui n'est pas mouillé. Les ondes sont encore nettes pour $\pi = 15$ mm.

Il est essentiel que le tube ne vibre pas. S'il est simplement suspendu, les ondes sont entretenues pour $\pi = 60$ mm.: les vibrations du caoutchouc se transmettent au tube; l'oscillation du ménisque dans le tube crée une oscillation du tube en sens inverse; il est donc gôlâzê contre une barre de fer (longueur 60 cm.; section droite 6 cm²; poids 2,5 kilogs environ), solidement fixé sur le support à crémaillère. Une échelle en mm. verticale, fixée sur la barre et regardée dans un viseur, donne la plongée.

Avec le tube non effilé, on ne voit pas le ménisque I intérieur. Comme pour le tube effilé, les ondes sont émises à l'instant où le ménisque E extérieur commence à s'affaisser, vraisemblablement quand le ménisque I commence à remonter.

3. — En eau profonde la théorie classique (*Houle, Rides, ...*, § 108) admet pour les ondes le potentiel des vitesses :

$$\varphi = \varphi_0 \exp\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\right) \cdot \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right), \quad \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

z est le déplacement vertical d'une particule; sa vitesse diminue donc suivant une exponentielle quand on descend de z à partir du plan d'eau. Le tableau suivant donne les valeurs de l'exponentielle en fonction du rapport $z : \lambda$.

| $z : \lambda$ | exp | $z : \lambda$ | exp | $z : \lambda$ | exp |
|---------------|-------|---------------|-------|---------------|-------|
| 0,1 | 0,533 | 0,4 | 0,081 | 0,7 | 0,012 |
| 0,2 | 0,284 | 0,5 | 0,043 | 0,8 | 0,007 |
| 0,3 | 0,152 | 0,6 | 0,023 | 0,9 | 0,004 |

Pour $N = 25$, la théorie donne $\lambda = 10$ mm.; pour $z = \lambda = 10$ mm., l'exponentielle vaut moins de 0,002; le déplacement z est quasi nul. Cependant les ondes sont entretenues avec une amplitude sensible pour $\pi = 15$ mm. Même résultat pour $N = 50$, $\lambda = 6$ mm., $\varepsilon = 1 : 3$; les ondes sont encore de grande amplitude pour des plongées telles que pour $z = \pi$ (par exemple 10 mm.) l'exponentielle soit quasi nulle.

Ces résultats contrediraient la théorie s'il fallait localiser l'entretien des ondes au bout du tube, puisque l'ébranlement périodique serait à un niveau que les ondes n'atteignent pas. Mais le phénomène est tout différent: l'ébranlement profond a

pour effet une déformation périodique de la surface liquide au voisinage du tube, déformation qui entretient les ondes.

Est-il possible de déterminer l'épaisseur de la couche où le déplacement z a une valeur sensible, en cherchant la plongée du bord horizontal inférieur d'une lame rigide qui n'arrête pas les ondes? La lame verticale de celluloïd (longueur 13 cm.) est fixée à un support qui permet de rendre horizontal son bord inférieur et de modifier sa plongée. Le tube d'où sort le jet intermittent, est à 3 cm. environ de la lame. Même pour une plongée de l'ordre du cm., on voit des ondes émaner de la face O de la lame qui ne regarde pas le tube; mais *rectilignes* elles sont dues à l'oscillation de la lame sous la poussée périodique produite par les ondes incidentes circulaires. De la face O ne partent des ondes *circulaires* qui prolongent les ondes incidentes (leur amplitude est beaucoup plus petite) que si la lame ne fait que toucher l'eau. De cette expérience, on peut seulement conclure qu'en détruisant la constitution superficielle on détruit la constitution profonde (comparer à l'action de la pluie sur la houle).

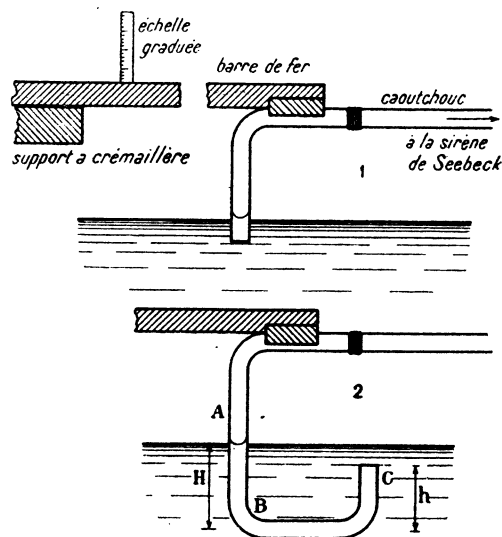


FIG. 8.

4. — Donnons au tube non effilé la forme que représente la figure 8, 2; l'oscillation de l'eau a lieu *au-dessus* de son bout ouvert. A la condition que sa plongée π soit assez petite, les ondes régulières sont entretenues jusque sur le prolongement géométrique de l'axe du tube. L'expérience réussit bien avec un tube de diamètre 8 ou 4 mm.; il ne faut ni trop diminuer son diamètre, ni prendre trop longue sa partie horizontale B, pour ne pas trop augmenter les frottements ou l'inertie de l'eau qui oscille. La pression hydrostatique qui empêche l'air de pénétrer dans les

tubes B et C, est égale à H; la plongée $\pi = H - h$, restant petite, on peut toujours prendre H assez grand à la condition d'augmenter simultanément h; mais on augmente l'inertie et les frottements. Cela revient à dire que pour N donné, il ne faut pas prendre ε trop grand. Pour ε très petit l'entretien n'a pas lieu.

La plongée limite d'entretien est plus petite qu'avec le dispositif du 2°. Pour les deux tubes (N = 25, $\lambda = 10$ mm.), les ondes ne sont plus entretenues pour $\pi = 7$ mm.

L'eau qui sort du tube, produit un gonflement superficiel dans le prolongement du tube. L'onde est émise quand l'eau commence à rentrer dans le tube, quand le gonflement commence à s'affaisser, le mécanisme d'entretien est le même que dans les cas précédents.

Avec cette technique l'amplitude maxima des ondes est plus petite qu'avec celle du 2°, vraisemblablement parce que l'ébranlement n'est plus dirigé par le tube.

9. — Fil vertical oscillant verticalement.

1. — La production des ondes par un fil plongeant en permanence et dont le bout reste toujours à distance notable du plan d'eau, n'est pas due à ce bout, puisqu'un ébranlement profond est incapable d'entretenir les ondes. L'entretien électromagnétique du genre sonnerie ne permet pas d'obtenir que le fil oscille suivant sa propre direction avec une grande amplitude; d'où une oscillation horizontale de son intersection avec le plan d'eau, oscillation à laquelle on peut attribuer les ondes. Il faut donc utiliser une tige verticale bien guidée; la figure 9 montre schématiquement le dispositif. Un fléau, deux bielles en bois plaqué et un goujon excentrique calé sur l'axe du moteur synchrone, imposent une course voisine de 2 cm. à une tige d'acier polie (diamètre 2,5 mm. : grosse aiguille à tricoter) dont la pointe, à plus de 6 cm. du plan d'eau, ne peut entretenir les ondes. La fréquence est 12,5. Les ondes sont dues à l'adhérence de l'eau et de la tige; en montant celle-ci entraîne un ménisque qui disparaît dès qu'elle descend et auquel se substitue une cupule : l'entretien est superficiel. Au début de chaque descente l'eau est renvoyée radialement; d'où émission d'une onde dont la vitesse est plus grande que la vitesse de propagation radiale du système régulier de fréquence N. Du reste il suffit de faire tourner l'excentrique à la main (vitesse très petite) pour voir le changement de forme de l'eau près de la tige; celle-ci ne produit en son voisinage rien d'analogue à une oscillation sinusoïdale de la surface liquide.

Le phénomène semble le même que la tige soit huilée ou non; aussi je parle non de mouillage mais d'adhérence : on sait combien il est difficile d'obtenir que du verre ou de l'acier soit *mouillé* au sens strict de la théorie de la capillarité.

Le phénomène est le même quand le fil ne touche l'eau qu'au bout de sa course;

ce qu'on vérifie de la manière suivante. Contre la tige guidée on mastique un fil f convenablement plié et de longueur telle que son bout ne touche l'eau qu'un instant. On réalise ainsi simultanément les deux modes d'entretien : les phénomènes sont identiques.

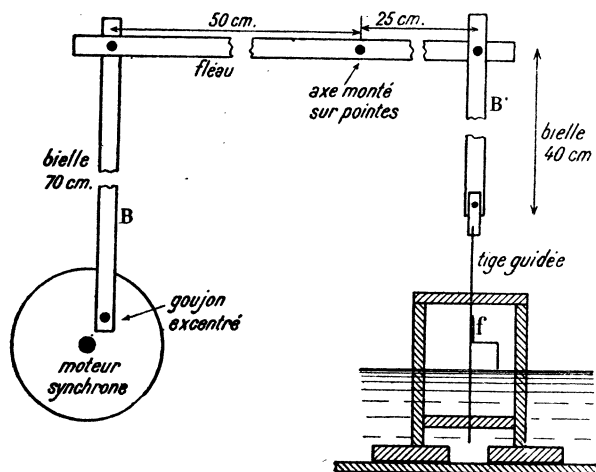


FIG. 9.

2. — Modifions le dispositif conformément à la figure 10. La bielle B' s'articule sur une planchette qui tourne autour d'un axe fixe et qui porte le fil $ABCDE$ (diamètre 2 mm.), au milieu duquel est soudé le fil CF . Des vis de serrage A, E , permettent de modifier son enfoncement. Des plaques P qui plongent d'un cm. environ, arrêtent les ondes dues aux fils AB, ED . La course du bout F est de 7 mm.; la fréquence est 12,5.

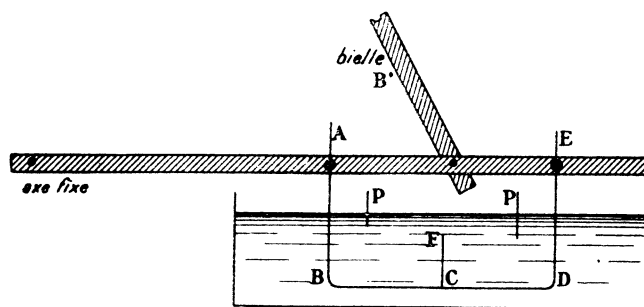


FIG. 10.

Que le point F émerge pendant une partie de sa course, ou que toujours immergé il parvienne à une distance du plan d'eau de l'ordre de quelques mm., des ondes circulaires sont entretenues. Suivant que F émerge ou reste immergé, pen-

dant son ascension il soulève un ménisque ou gonfle la surface; les ondes sont émises quand il descend. Le mode d'entretien est le même que pour l'oscillateur du 1^o qui émerge et plonge en permanence.

Coiffons le fil avec un disque mince (diamètre 1 cm.; une punaise). L'enfoncement minimum qui permet encore l'entretien des ondes, dépasse 1 cm. En montant le disque crée un gonflement de la surface; les ondes sont émises quand il descend, par retombée du gonflement. Toutefois celui-ci étant moins localisé, les ondes sont complexes.

10. — Ondes progressives spiraloïdes.

1. — Utilisons la tige et son support guide du § 9, 1^o. A son bout supérieur fixons une poulie (diamètre 24 mm.). Sur la tige mastiquons un fil f (diamètre 0,7 mm.) plié comme l'indique la figure 9; soit r la distance de son bout inférieur à l'axe de rotation. A l'aide du moteur synchrone faisons tourner la tige avec une fréquence voisine de 20.

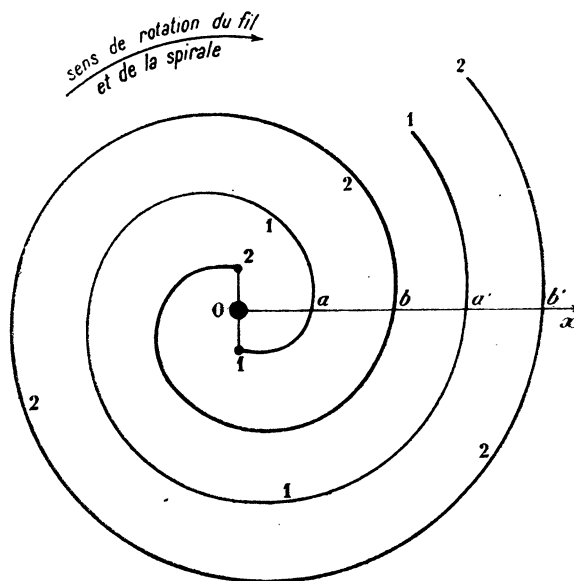


FIG. 11.

Soit d'abord r de quelques mm. : le fil entraîne une spirale d'Archimède (voir *fig. 11*) qui tourne avec la même vitesse angulaire dans le même sens. D'où sur chaque rayon vecteur tel que Ox une propagation radiale uniforme. Pour la position 1 du fil, la droite Ox est coupée aux points a, a', \dots , équidistants; pour la posi-

tion 2, après un demi-tour du fil et de la spirale, la droite Ox est coupée aux points b, b', \dots Et ainsi de suite. La longueur d'onde est $\lambda = aa' = bb'$. Toutefois l'onde progressive spiraloïde de fréquence N et de longueur d'onde liée à N par la formule de Kelvin, ne devient régulière qu'à une certaine distance de l'axe au-dessous de laquelle le pas ou, ce qui revient au même, la vitesse radiale sont plus grands.

2. — J'étudie dans un autre mémoire (*Annales de Physique* pour 1937) les *rides immobiles par rapport à l'obstacle* dues à un obstacle tournant dans une eau tranquille. La technique est la même que ci-dessus, excepté qu'ici l'obstacle est très-voisin de l'axe et la fréquence considérable. Sa vitesse linéaire v reste grande : si le fil est à 5 mm. de l'axe, pour la fréquence 20, on a $v = 62$ cm. : sec. Dans ces conditions à quelque distance de l'axe, la *ride immobile* spiraloïde devient une *onde progressive régulière* dont le pas λ et la fréquence N sont liés par la formule de Kelvin. Tandis qu'un obstacle situé assez loin de l'axe et animé de la même vitesse v , entraîne un train complexe de rides amont et aval, ici le train se réduit à une spirale unique.

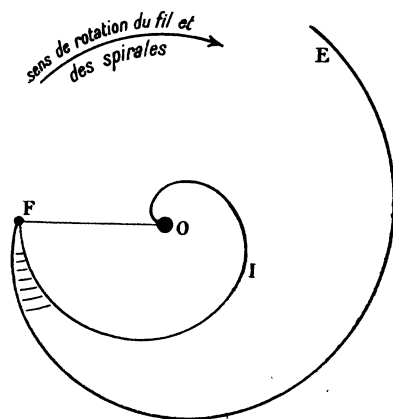


FIG. 12.

3. — Augmentons la distance r du bout du fil à l'axe de rotation. Pour une distance de l'ordre de 10 mm. (le fil ne doit plonger qu'à peine pour ne pas trop agiter l'eau), le phénomène est constitué par deux spirales enroulées en sens contraires, qui aboutissent à angle vif sur le fil (angle double de la divergence β) et qui sont entraînées par lui. D'où sur un rayon vecteur quelconque, une propagation radiale axipète pour la spirale intérieure I, axifuge pour la spirale extérieure E.

Pour $r = 29$ mm. ($v = 364$ cm. : sec.), les deux spirales se raccordent sur le fil quasi tangentiellement (divergence-quasi nulle). Les spirales principales sont bordées de trois ou quatre spirales très serrées à l'extérieur de l'espace qu'elles limitent.

La fréquence N demeurant invariable, le pas λ de l'onde progressive régulière (spirale d'Archimède) doit être indépendant de r ; N et λ doivent être liés par la formule de Kelvin ($\lambda = 12$ mm. pour $N = 20$). Toutefois la spirale devient régulière d'autant plus loin du fil que r est plus grand; ce qui pour $r = 29$ mm. rend la vérification incertaine vu les dimensions de mon appareil.

Sans stroboscope le cercle décrit par le bout du fil semble discontinu; entre les deux spirales près de la pointe, le stroboscope montre une stratification quasi normale aux spirales: la cause de ce phénomène est vraisemblablement la formation d'enroulements alternés.

4. — La fréquence restant 20, disposons 6 fils à 60° l'un de l'autre, autant que possible à la même distance de l'axe et plongeant de même dans l'eau. Ils passent dans une rondelle de liège enfilée sur la tige axiale. La fréquence du phénomène progressif est-elle encore 20 ($\lambda = 12$ mm.) ou devient-elle 120 ($\lambda = 3,3$ mm.)? L'expérience montre qu'elle reste 20: indépendamment des autres, chaque fil crée une onde progressive; ces ondes s'additionnent pour donner à quelque distance des fils une onde de fréquence 20.

11. — Fondamental et harmoniques.

1. — DÉDOUBLEMENT DES ONDES PROGRESSIVES.

Les traits lumineux donnés par les ondes sont dus aux réflexions sur certaines portions de la surface jouant le rôle des miroirs. Le profil possédant une inflexion, de part et d'autre on trouve les mêmes inclinaisons, allant de 0 sur les crêtes et les creux, à l'inclinaison maxima de l'inflexion: d'où généralement pour chaque onde deux miroirs possibles, par suite deux systèmes de traits S_1, S_2 . Les conditions de l'éclairage peuvent supprimer l'un des systèmes, plus généralement changer la position des traits S_2 par rapport aux traits S_1 . Comme l'incidence de la lumière varie pour les traits S_1 , la position relative des traits S_2 peut changer avec leur distance au vibreur. De ce que les traits se dédoublent il ne faut pas conclure la présence de vibrations indépendantes, en particulier d'un fondamental et de son octave.

Avec certains éclairages on voit deux systèmes de demi cercles, équidistants de λ , mais décalés l'un par rapport à l'autre; ils s'arrêtent sur l'horizontale normale à la ligne de visée que cependant ils peuvent dépasser en s'intercalant: le phénomène tient à ce qu'on voit la moitié des ondes de dos et l'autre moitié de face.

2. — Quel que soit le mode d'entretien des ondes, que le système régulier aille jusqu'au voisinage immédiat du centre ou débute plus loin, il existe toujours à quel-

que distance. L'équation classique *linéaire* qui régit sa propagation, permet la superposition d'un fondamental et d'un nombre quelconque d'harmoniques qui ont des existences indépendantes et des vitesses de propagation différentes. *A priori* on ne voit pas de raison pour que le fondamental existe seul, même quand le système régulier débute près du centre.

Si les ondes d'octave O se propagent indépendamment de l'existence des ondes fondamentales F, leur vitesse étant plus grande, elles doivent passer sur les ondes F. Mais le dédoublement des ondes F rend difficile cette constatation : en raison de la variation de l'incidence de visée par suite de la variation de l'éclairage, la position relative des deux traits sombres qui en général constituent une période du fondamental, peut varier avec la distance au point d'impact; d'où un déplacement relatif qu'il est facile de confondre avec le mouvement des ondes O, à supposer leur existence. Cependant avec la technique du 3°, en supprimant alternativement les ondes de fondamentaux 25 ou 50, de manière à se mettre dans l'œil leurs écartements et leurs vitesses réduites, on constate la superposition des deux systèmes de vitesses différentes (25 ou 30 cm. sec.) quand on superpose les ébranlements de fréquences 25 et 50, et même quand on produit seulement les ébranlements de fondamental 25, preuve qu'il contient l'octave.

3. — La technique suivante permet de superposer deux ébranlements dont les fondamentaux ont les fréquences 25 et 50 (rapport d'octave). Le disque est percé de deux séries de fenêtres, longues de 30°, disposées de manière à rendre autant que possible les pulsations indépendantes (*fig. 13*, à droite). A l'amont du disque deux tubes, coupés par des tubes de caoutchouc C, débouchent dans la boîte à vent; leur distance est telle que les fenêtres passent devant. A l'aval du disque un tube en Y est relié par un tube de caoutchouc au tube de verre effilé d'où sort le jet. En pinçant l'un des tubes C on supprime l'action du tube *octave* ou du tube *fondamental*.

Faisons varier la fréquence de vision de 25 ($\tau = 0,04$) à 50 ($\tau = 0,02$); on se reportera au § 5, 6°. La formule de Kelvin donne 10 mm. pour longueur d'onde du fondamental, 6 mm. pour celle de l'octave.

Tube octave ($T = 0,02$) : ondes simples arrêtées pour $\tau = 0,04$ ($\lambda = 6$ mm.); ondes doublées arrêtées pour $\tau = 0,03$ ($\lambda = 3$ mm.); ondes simples arrêtées pour $\tau = 0,02$ ($\lambda = 6$ mm.).

Tube fondamental $T = 0,04$: ondes simples arrêtées pour $\tau = 0,04$ ($\lambda = 10$ mm.); mouvement axipète rapide pour $\tau = 0,03$; ondes doublées arrêtées pour $\tau = 0,02$ ($\lambda = 5$ mm.).

Avec la période de vision $\tau = 0,03$, arrêtons les ondes de 3 mm. obtenues avec le tube octave *seul*. Débouchons le tube fondamental : ces ondes subsistent, preuve

que l'adjonction de l'ébranlement de fondamental 25 ne gêne pas la production de l'ébranlement de fondamental 50.

Supprimons le tube octave, les ondes de 3 mm. subsistent; l'ébranlement de fondamental 25 est donc accompagné de son octave 50. Ces deux ébranlements se comportent indépendamment l'un de l'autre.

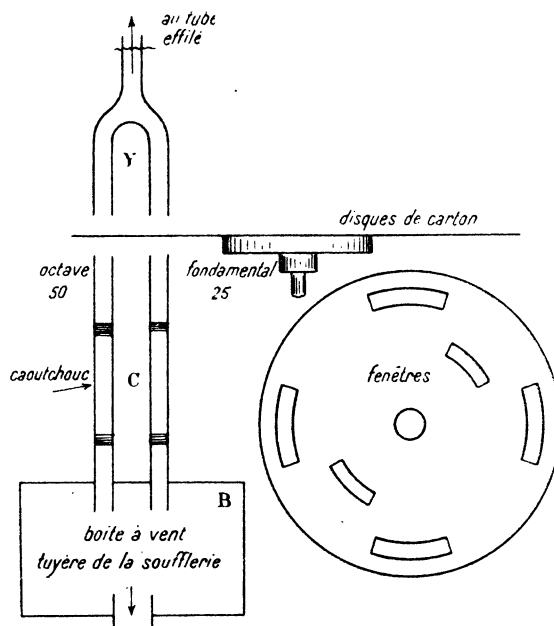


FIG. 13.

12. — Ondes stationnaires circulaires dues à la présence des harmoniques.

1. — Quand un vibreur de fréquence N oscille dans un vase cylindrique de forme quelconque, assez grand pour qu'on puisse négliger les ondes réfléchies, on voit sans stroboscope des ondes stationnaires circulaires, centrées sur le vibreur, dont l'écartement est plus grand que la longueur d'onde λ des ondes de fréquence N . Comme elles sont visibles jusqu'à une distance du vibreur d'un grand nombre de λ , on ne peut invoquer un phénomène localisé près de lui. Elles semblent dues à l'existence des harmoniques et au fait que la vitesse de propagation croît à mesure qu'augmente la fréquence.

Pour simplifier remplaçons les ondes par des mobiles qui coïncident avec les crêtes. Les mobiles fondamentaux partent de l'origine (vibreur) aux temps $0, T, 2T, \dots$; les mobiles relatifs à l'harmonique n partent aux temps $qT : n$, où q est entier. Cherchons suivant quelle loi se superposent ces deux séries de mobiles.

Soit t le temps de la superposition du mobile fondamental qui part au temps 0

(vitesse de propagation Ψ), et d'un mobile harmonique n qui part après le précédent, puisque sa vitesse Ψ_n est plus grande. D'où la condition :

$$t\Psi = \left(t - q\frac{T}{n}\right)\Psi_n, \quad \frac{t}{T} = q\frac{\Psi_n}{n(\Psi_n - \Psi)} = p.$$

Le mobile fondamental parcourant une longueur d'onde dans le temps T , p détermine, en longueurs d'onde λ de ce mobile, la distance à l'origine des cercles où il se superpose au mobile harmonique n . Les rayons de ces cercles sont en progression arithmétique de raison : $\Lambda = \lambda\Psi_n : n(\Psi_n - \Psi)$.

Le raisonnement vaut pour tous les mobiles fondamentaux; ils se superposent aux mobiles harmoniques sur les mêmes cercles qui par suite sont visibles sans stroboscope.

2. — Appliquons ce qui précède au fondamental 50 ($\lambda = 6$ mm.) et aux harmoniques octave et douzième :

| | | | |
|---------------------|----|--------|---------|
| N | 50 | 100 | 150 |
| Ψ | 30 | 36 | 42 |
| $\Lambda : \lambda$ | | 3,0 | 1,2 |
| Λ | | 18 mm. | 7,2 mm. |

Sur le fond du vase posons une plaque noircie sur laquelle sont tracés des traits blancs parallèles, équidistants de 18 mm. : on vérifie que les cercles les plus visibles ont bien cet écartement.

ONDES PROGRESSIVES SUR L'EAU IMMOBILE RÉFLEXION SUR LES PAROIS

Dans les pages suivantes je reprends l'étude de quelques phénomènes classiques pour en préciser la description et la technique, et pour en décrire des particularités jusqu'à présent négligées.

13. — Épaisseur non uniforme de la couche d'eau.

1. — Sans préjuger la valeur numérique de la formule de Kelvin pour les couches très minces, employons-la pour interpréter l'expérience suivante. Utilisons la fréquence $N = 25$ obtenue avec un jet d'air intermittent. En eau « profonde » (en

réalité pour une épaisseur l supérieure à 5 mm.), puis pour des épaisseurs $l = 2 - 1 - 0,5$ mm., on a le tableau suivant :

| | $l > 5$ mm. | $l = 2$ | $l = 1$ | $l = 0,5$ |
|-----------|---------------|---------|---------|-----------|
| λ | 10 mm. | 9,5 | 8,4 | 7,2 |
| Ψ | 25 cm. : sec. | 23,8 | 21,0 | 18,0 |
| n | 1 | 1,05 | 1,19 | 1,39 |

L'indice de réfraction n , quotient de la vitesse de propagation en eau profonde par la vitesse sur la couche mince, croît de plus en plus vite à mesure que l diminue. Pour la même épaisseur il croît quand diminue la fréquence; mais les phénomènes sont moins nets. Les ondes s'amortissent d'autant plus vite que l'épaisseur est moindre.

Sur le fond d'un vase cylindrique constitué par un disque de glace sur lequel est mastiqué coaxialement un cylindre (diamètre 43 cm., hauteur 13 mm.) formé d'un morceau de ressort de petit pendule soudé bout sur bout, posons un disque haut de 6 à 10 mm., de rayon R , d'épaisseur uniforme et de paroi latérale normale aux faces. Nivelons la glace et versons de l'eau dans le vase de manière que l'épaisseur de la couche au-dessus du disque soit de l'ordre du mm. : nous constituons un dioptré cylindrique d'indice n . Regardons à travers le stroboscope sous une incidence assez oblique.

2. — Supposons correcte l'assimilation au phénomène optique correspondant : dans les conditions où le dioptré est un appareil stigmatique, si p est la distance de la source au sommet du dioptré, nous obtenons une image à la distance p' donnée par la formule :

$$\frac{1}{p} + \frac{n}{p'} = \frac{n-1}{R}.$$

Le foyer dans l'espace objet est à la distance $f = R : (n - 1)$, du sommet du dioptré. Par suite pour $p < f$ (image virtuelle), les ondes R réfractées visibles sur le disque sont concaves vers la source; pour $p = f$, elles sont rectilignes; pour $p > f$ elles sont convexes vers la source. La source restant immobile, diminuons l'épaisseur l de la couche à partir d'une épaisseur telle que l'indice soit d'abord égal à 1 ($f = \infty$). Au début ($p < f$) les ondes R sont concaves vers la source; leur courbure diminue; elles deviennent rectilignes, puis convexes vers la source, si p est choisi assez grand pour qu'on ait $p > f$, alors que l'épaisseur est encore suffisante pour que les ondes R ne soient pas trop amorties.

À la vérité le système n'est pas stigmatique jusqu'aux rayons tangents ST ;

voyons ce qui résulte de là pour les ondes réfractées R. Pour rendre facile le tracé de la figure 14 prenons $n = 1,5$, $p = f$. A supposer le dioptré stigmatique, les ondes R seraient rectilignes jusqu'au pourtour du disque. Posons qu'à l'instant considéré la crête d'une onde incidente I_1 tangente le disque. La longueur d'onde λ des ondes I étant prise pour unité, celle des ondes R est $\lambda' = \lambda : n = 2 : 3$.

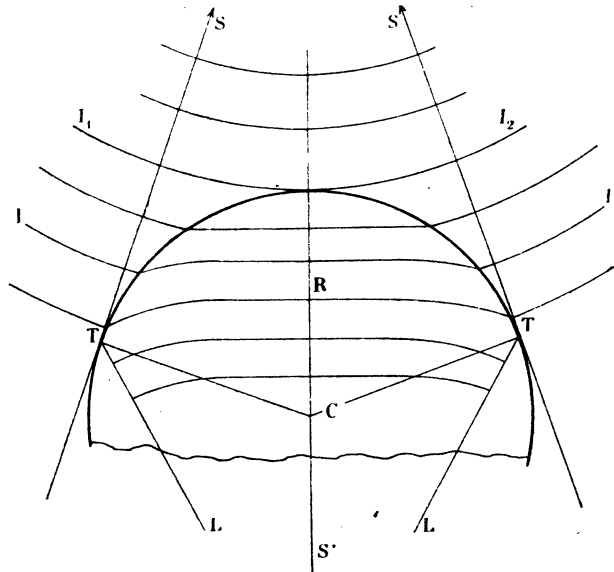


FIG. 14.

Traçons le faisceau des ondes I jusqu'aux points de contact des tangentes ST; sur le disque traçons les droites d'écartement (λ'). Pour le stigmatisme les droites rencontreraient les cercles sur le pourtour. Or il n'en est à *peu près* ainsi que pour la première droite dont la distance à l'axe est les 5 : 6 du rayon. Comme les ondes I et R se rencontrent nécessairement (à angle vif) sur le pourtour, les ondes R ne sont rectilignes qu'au voisinage de la droite de symétrie SL, conformément à la proposition classique que le dioptré n'est stigmatique que pour les incidences assez petites, ou, ce qui revient au même, que si l'angle des ondes I avec le pourtour est assez petit.

Dans le cas général des ondes R circulaires, la formule donne la position de l'image de la source à travers le dioptré pour des incidences très petites; on tracera des cercles R équidistants de λ' ayant cette image pour centre; le dioptré n'est stigmatique qu'autant que les cercles R rencontrent sur le pourtour les cercles I de centre S et d'équidistance λ .

L'intérêt du phénomène est qu'ici les ondes sont visibles, tandis qu'en optique elles ne le sont pas.

3. — EMPLOI D'UN PRISME.

Rectangle isocèle (voir *fig. 15*; l'hypothénuse est longue de 14 cm.), il est découpé dans une plaque de laiton épaisse d'un cm.; les faces sont polies sur du papier émeri fin; celle qui sera couverte par la couche mince d'eau, est noircie avec du bitume de Judée, puis de nouveau polie. Le prisme est posé sur le fond de glace du vase cylindrique (bien nivelé) de manière que le prolongement de la médiane MA passe par le point d'impact du jet gazeux. Les ondes incidentes I pénètrent symétriquement dans la couche mince. Remplissons le vase jusqu'au bord de manière que l'épaisseur de la couche soit notable; à l'aide d'un siphon évacuons l'eau *très lentement*: l'épaisseur diminue, l'indice de réfraction croît; pendant cette opération regardons à travers le stroboscope réglé pour l'arrêt.

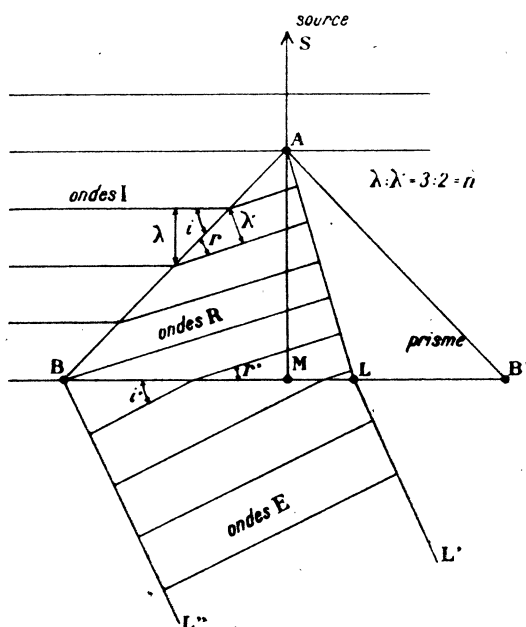


FIG. 15.

La source est par hypothèse assez éloignée pour que les ondes incidentes I, par suite les ondes réfractées R et émergentes E soient rectilignes. Les longueurs d'ondes hors du prisme et sur lui sont dans le rapport $\lambda:\lambda' = n$; d'où la figure 15 qui suppose $n = 3:2$. Elle convient à l'un des côtés du prisme. Les ondes sont limitées latéralement par les rayons extrêmes ALL' et BL'' sur lesquels elles aboutissent normalement. Les ondes I et R se rencontrent à angle vif sur le côté AB, les ondes R et E sur la base du prisme. A mesure que l'eau s'écoule, les rayons limites tournent *sinistrorsum*; la déviation augmente.

Le phénomène est compliqué par la proximité de la source S: les ondes inci-

dentés I sont courbes. Quel que soit l'indice, à supposer qu'à l'instant considéré une crête soit sur le sommet A, les autres rencontrent le côté AB en des points invariables d'où partent les ondes R. Au début ($n = 1$) ces ondes (circulaires) prolongent les ondes I; à mesure que l'épaisseur décroît, elles rencontrent les ondes I sous des angles croissants et tournent *sinistrorsum*; simultanément leur courbure diminue en conservant son signe. Toutefois comme les deux côtés AB, AB' du prisme agissent simultanément et donnent des ondes qui se couperaient sur la médiane pour n assez grand, l'ensemble paraît constituer des ondes uniques qui près de cette médiane sont concaves vers le bas. Quand la couche est très mince, les ondes émergentes disparaissent.

14. — Théorie classique; ondes progressives.

1. — Pour les ondes progressives en eau profonde elle admet le potentiel des vitesses :

$$\varphi = \varphi_0 \exp \frac{2\pi z}{\lambda} \cdot \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

Les z sont comptés positivement vers le haut; la propagation a lieu dans le sens des x croissants. Soit u et w les vitesses parallèlement aux axes de coordonnées; ξ et ζ les déplacements corrélatifs d'une particule. On a :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{d\xi}{dt} = u, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{d\zeta}{dt} = w.$$

On trouve aisément pour $x = 0$:

$$\begin{aligned} u &= 2\pi NR \sin 2\pi Nt, & \xi &= -R \cos 2\pi Nt; \\ w &= 2\pi NR \cos 2\pi Nt, & \zeta &= R \sin 2\pi Nt. \end{aligned}$$

$R = R_0 \exp 2\pi(z : \lambda)$, est le rayon du cercle décrit par la particule; quand on s'enfonce dans le liquide ($z < 0$), il diminue suivant une exponentielle. La figure 16 montre les relations entre les vitesses u , w , et les déplacements ξ , ζ . La vitesse horizontale u est maxima dans le sens de propagation quand une crête passe sur la particule superficielle P ($R = R_0$) considérée; u et z sont synchrones.

Le déplacement ξ de la particule est maximum dans le sens de propagation un quart de période après que la crête est passée sur le point P.

Le parcours superficiel $2R$ de la particule est égal à la distance verticale d'une crête à un creux.

Au même instant voyons ce qui se passe pour les particules qui sont à des distances x variées de l'origine. Reprenons les formules générales; pour simplifier l'écriture posons $t = 0$:

$$\begin{aligned} u &= -2\pi NR \sin 2\pi(x:\lambda), & \xi &= -R \cos 2\pi(x:\lambda); \\ w &= 2\pi NR \cos 2\pi(x:\lambda), & \zeta &= -R \sin 2\pi(x:\lambda). \end{aligned}$$

Appelons *lignes neutres* celles pour lesquelles $\zeta = 0$; elles sont équidistantes des crêtes et des creux. Entre deux lignes neutres consécutives les particules ont des vitesses horizontales u de même sens; ces vitesses changent de signe quand on traverse une ligne neutre. Deux particules qui sont au même instant dans des intervalles adjacents (limités par des lignes neutres), ont des vitesses horizontales u de sens contraires.

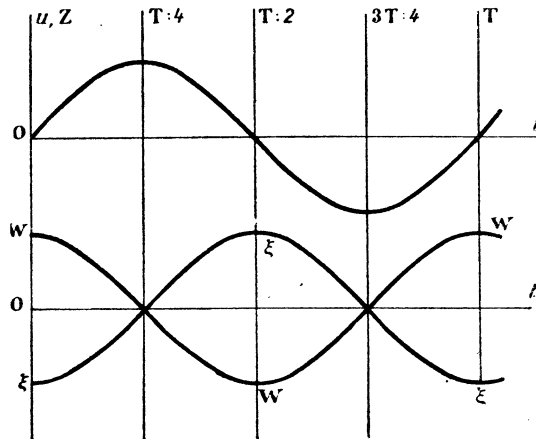


FIG. 16.

2. — Déterminons l'ordre de grandeur de l'amplitude R_0 de l'oscillation verticale ζ . Sous une incidence très oblique, à travers le stroboscope et un viseur assez grossissant, regardons une pointe et son image. La pointe est à 1 mm. environ de la surface immobile, sur une droite D passant par l'axe du jet d'air intermittent et normale à la ligne de visée; près de la pointe les ondes sont vues tangentiellement. Au passage sous la pointe d'une crête puis d'un creux, elle se réfléchit sur des miroirs horizontaux de distance $2R_0$; l'extrémité de la pointe réfléchi se déplace de $4R_0$. La surface liquide est éclairée par la lumière diffusée par un verre dépoli, lui-même éclairé par une lampe à incandescence. Le réticule du viseur est constitué par deux fils parallèles dont la distance correspond à 2 mm. environ de l'objet pour la distance de visée. On les rend parallèles à la droite D; ils encadrent la pointe

réfléchi. Pour $N = 25$ et des ondes aussi creuses que le mode d'entretien le permet, le déplacement vertical alternatif de la pointe réfléchi ne dépasse pas un mm. à peu de distance du jet; R_0 est de l'ordre de 0,25 mm. Le déplacement diminue quand on s'éloigne du jet. Ainsi à une amplitude de l'ordre de $R_0 = 0,1$ mm. correspond des ondes aisément photographiées en lumière diffuse avec une pose de l'ordre de la seconde.

Vu le nombre des paramètres définissant l'expérience (fréquence N , diamètre du tube effilé, distance du tube au plan d'eau, distance de la pointe à l'axe du jet, pression dans la boîte à vent, fraction $\varepsilon = t : T$ de la durée du jet à sa période), il est illusoire de chercher autre chose qu'un ordre de grandeur.

Pour d'aussi petites amplitudes il est paradoxal que les ondes soient aussi visibles *en lumière diffuse*. Assimilons en effet le profil de l'onde à une sinusoïde; l'angle de la tangente d'inflexion avec l'horizon est $\alpha = 2\pi R_0 : \lambda$. Pour $N = 12,5$ la théorie donne $\lambda = 19$ mm. Soit $R_0 = 0,1$ mm.; on trouve $\alpha = 0,628 : 19 = 0,033$, un peu moins de 2° . Pour $N = 25$, $\lambda = 10$ mm., $\alpha = 0,63$, soit $3^\circ 35'$. Ces très petites inclinaisons maxima suffisent pour modifier l'éclairage de manière à montrer des bandes noires séparées par des bandes claires.

3. — De la théorie résulte qu'en eau profonde l'amplitude R_0 du mouvement horizontal est égale à l'amplitude du mouvement vertical. On comprend qu'il soit difficile de le vérifier. Le vase cylindrique (diamètre 30 cm.) est noirci au bitume de Judée. De petits carrés de papier blanc (aire 1 mm² environ) conviennent comme flotteurs. On les regarde *quasi verticalement* à travers un viseur assez grossissant dont le réticule est disposé tangentiellement aux ondes assez loin du jet d'air intermittent qui donne des ondes de relativement grande amplitude. Les points lumineux du fond du vase, vus à travers les ondes progressives, éprouvent des déplacements périodiques considérables; on les distingue des flotteurs parce qu'ils sont moyennement immobiles, tandis qu'avec l'eau bien propre on ne peut éviter un déplacement continu des flotteurs en raison du vent superficiel et du fait que le jet n'est jamais exactement vertical. Ils décrivent leur trajectoire avec une vitesse peu variable à laquelle doit se superposer la vitesse radiale u alternative de fréquence N que le stroboscope ralentit. Si leur trajectoire est tangentielle, ils doivent décrire approximativement une sinusoïde dont le pas dépend de la vitesse du stroboscope. Comme on voit simultanément passer les ondes, on peut comparer la fréquence de l'oscillation des flotteurs à celle des ondes, de manière à éliminer les trépidations étrangères au phénomène.

S'il n'est pas douteux qu'avec de l'eau bien propre et récemment versée dans le vase, les flotteurs, supposés moyennement immobiles, oscillent radialement, il est impossible d'affirmer l'égalité des amplitudes des oscillations horizontale et verticale, ne serait-ce qu'en raison du déplacement continu des flotteurs.

4. — La théorie suppose une surface liquide parfaitement mobile. Or remplaçons l'eau par une solution de saponine qui donne une véritable membrane superficielle. Malgré le vent que produit le jet d'air intermittent, et malgré la non verticalité parfaite du tube (d'où résulte une circulation pour l'eau en l'absence de saponine), les flotteurs sont moyennement immobiles; cependant les ondes progressives restent bien visibles. Les flotteurs semblent ne plus osciller radialement; reste à savoir si cela tient à l'immobilité de la membrane superficielle pour les mouvements horizontaux ou à la diminution simultanée des amplitudes verticales et horizontales.

15. — Ondes stationnaires.

1. — Pour les ondes stationnaires la théorie admet le potentiel des vitesses.

$$\varphi = 2R_0 N \lambda \exp \frac{2\pi z}{\lambda} \cdot \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cdot \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$

D'où sur la surface ($z = 0$) :

$$u = 4\pi R_0 N \cos 2\pi(x:\lambda) \cdot \cos 2\pi(t:T),$$

$$\xi = 2R_0 \cos 2\pi(x:\lambda) \cdot \sin 2\pi Nt;$$

$$w = 4\pi R_0 N \sin 2\pi(x:\lambda) \cdot \cos 2\pi(t:T),$$

$$\zeta = 2R_0 \sin 2\pi(x:\lambda) \cdot \sin 2\pi Nt.$$

Les composantes ξ , ζ , de l'oscillation des particules sont synchrones. L'oscillation, par suite rectiligne, a l'amplitude uniforme :

$$r = \sqrt{\xi^2 + \zeta^2} = 2R_0 \sin 2\pi Nt.$$

L'oscillation est verticale dans des plans équidistants de $\lambda : 2$; elle est horizontale dans les plans intermédiaires. La réflexion totale d'une onde progressive sur un mur vertical donne une onde stationnaire déterminée par la condition $\xi = 0$, contre le mur; cela suppose que l'eau n'adhère pas au mur, que les frottements sont nuls.

2. — Le potentiel des vitesses ci-dessus utilisé suppose les ondes rectilignes; à la condition que leur courbure soit petite, on admet qu'il s'applique à des ondes stationnaires non rectilignes. Leur vision ne dépend que du profil déterminé par la dénivellation ζ ; on peut donc raisonner comme si le mouvement oscillatoire ξ n'existait pas. Pour simplifier admettons que seules les crêtes sont visibles en clair sur fond sombre. Les *lignes neutres*, définies par la condition identique $\zeta = 0$, for-

ment un faisceau plus ou moins compliqué; si d'un côté d'une ligne neutre, au voisinage d'un de ses points P, existe une crête $\zeta > 0$, de l'autre côté existe un creux $\zeta < 0$; au voisinage de P l'onde n'est visible que d'un côté de la ligne neutre.

Je note +, —, les intervalles limités par les lignes neutres en changeant le signe à la traversée d'une ligne neutre. Trois cas fondamentaux.

a) On a pour l'amplitude verticale :

$$\zeta = \sin [\pi \varphi(x, y)] \cdot \sin 2\pi(t : T).$$

Le faisceau des lignes neutres est défini par la condition $\varphi(x, y) =$ un nombre entier $= k$. Tant que le second sinus est positif, pendant une demi-période, les ondes *ininterrompues* sont entre les lignes neutres $k = 0$ et 1, 2 et 3, 4 et 5, . . ., dans les intervalles où le premier sinus est positif. Tant que le second sinus est négatif, pendant une demi-période, les ondes sont visibles entre les lignes neutres $k = 1$ et 2, 3 et 4, . . ., dans les intervalles où le premier sinus est négatif. Toutes les demi-périodes, quand le second sinus s'annule (surface plane, $\zeta = 0$, identiquement), les ondes disparaissent dans les intervalles qu'elles occupent, et apparaissent dans les intervalles adjacents.

b) Il existe deux faisceaux de lignes neutres.

$$\zeta = \sin [\pi \varphi(x, y)] \cdot \sin [\pi \chi(x, y)] \cdot \sin 2\pi(t : T).$$

Ils déterminent un quadrillage. Notons +, —, les intervalles entre les lignes neutres de chaque faisceau pour lesquels les sinus correspondants sont respectivement positifs ou négatifs. Tant que le troisième sinus est positif, les ondes *interrompues* et qui se réduisent à des taches discontinues, sont dans les quadrilatères ++ ou -- (points noirs de la *fig. 17*); tant que le troisième sinus est négatif, les taches sont dans les quadrilatères +- ou -+ (petits cercles). A chaque demi-période, quand le troisième sinus s'annule, les taches disparaissent dans les quadrilatères qu'elles occupent, et apparaissent dans le système adjacent.

c) L'équation définissant ζ est de la forme :

$$\zeta = \sin [\pi \varphi(x, y)] \cdot \sin \pi[2Nt - \psi(x, y)].$$

Il n'existe qu'un faisceau de lignes neutres avec lequel le faisceau $\psi(x, y) =$ constante, détermine un quadrillage. Donnons au temps une valeur constante : le second sinus sera alternativement positif et négatif entre des valeurs de ψ en progression arithmétique de raison 1. Les ondes ne sont visibles que dans des quadrilatères opposés par le sommet, comme dans le cas précédent. Voici en quoi se distingue le

phénomène actuel : quand le temps croît, le second sinus correspond à une propagation ; les taches qui se trouvent entre deux lignes neutres, restent entre ces lignes et se déplacent d'une manière continue. Toutefois, si l'on reste sur la même courbe $\psi(x, y) = \text{constante}$, à ce mouvement continu correspond toutes les demi-périodes (comme dans le cas *a*), la disparition des taches entre les lignes neutres qu'elles occupent, et leur apparition entre les lignes neutres adjacentes.

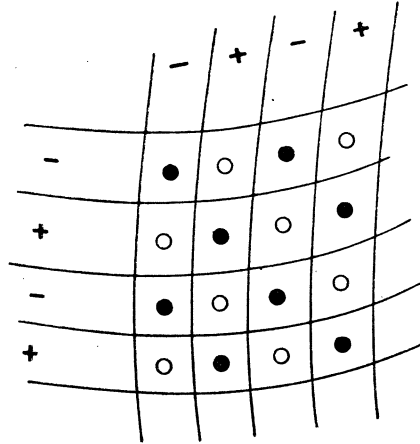


FIG. 17.

16. — Réflexion des ondes progressives sur la paroi d'un vase cylindrique circulaire (vibrateur sur l'axe du vase).

1. — Je suppose le facteur de réflexion égal à l'unité ; j'admets que l'onde n'est éclairée que sur les crêtes. Les ondes incidentes (divergentes) et réfléchies (convergentes) sont représentées par les équations (r est la distance à l'axe) :

$$I = \cos 2\pi(Nt - r:\lambda), \quad R = \cos 2\pi(Nt + r:\lambda);$$

$$(1) \quad \zeta = 2 \cos 2\pi(r:\lambda) \cdot \cos 2\pi Nt.$$

Les lignes neutres d'équidistance $\lambda : 2$ satisfont à la condition

$$r = (k + 0,5)\lambda : 2.$$

Sans stroboscope, grâce à la persistance des impressions lumineuses, on voit en permanence les deux séries de cercles équidistants des lignes neutres :

$$(A) \quad r = 0, \quad \lambda, \quad 2\lambda, \dots \quad (B) \quad r = \lambda : 2, \quad 3\lambda : 2, \dots$$

Avec la période de vision $\tau = (1 + \alpha)T$, sans changer la longueur d'onde, le stroboscope donne une fréquence apparente αN (α petit). L'équation (1) devient :

$$\zeta = 2 \cos 2\pi(r : \lambda) \cdot \cos 2\pi\alpha Nt.$$

Pendant une demi-période (*déterminée par le stroboscope*) on voit les cercles A, pendant la demi-période suivante les cercles B, et ainsi de suite (cas *a* du § 15 : les ondes sont ininterrompues).

Ainsi toutes les demi-périodes, les cercles visibles sur les lignes A disparaissent et apparaissent sur les lignes B ou inversement; ils semblent se déplacer brusquement de $\lambda : 2$; la continuité est satisfaite du fait que la surface devenant plane, les cercles disparaissent sur toute la surface.

2. — Pour réaliser le phénomène dans sa pureté, il faut un facteur de réflexion voisin de 1. De ce qu'on voit toujours sans stroboscope les ondes stationnaires d'écartement $\lambda : 2$, on ne peut rien conclure sur la valeur de ce facteur qui peut être très petit. Il n'est voisin de 1 que si le liquide ne mouille pas la paroi; c'est le cas pour un enduit pas trop ancien de ripolin blanc ou de vernis au bitume de Judée. Le phénomène est pur avec le mercure nettoyé à l'acide azotique étendu, dans un vase cylindrique nettoyé de même, ou avec une large goutte circulaire dans une soucoupe bien nettoyée.

3. — Si l'amplitude de l'onde réfléchie est inférieure à celle de l'onde incidente, aux ondes précédentes se superpose une onde divergente non réfléchie :

$$I' = k \cos 2\pi(Nt - r : \lambda).$$

D'où au total :

$$\gamma = (2 + k) \cos 2\pi Nt \cdot \cos 2\pi(r : \lambda) + k \sin 2\pi Nt \cdot \sin 2\pi(r : \lambda).$$

A chaque instant les maximums et minimums sont obtenus en dérivant cette équation par rapport à r ; d'où la condition :

$$(1) \quad \operatorname{tg} 2\pi \frac{r}{\lambda} = \frac{k}{2+k} \operatorname{tg} 2\pi \frac{t}{T}.$$

Pour la réflexion quasi nulle (k très grand), l'équation (1) est représentée par la droite OB; la vitesse axifuge des cercles est uniforme. Pour la réflexion totale étudiée ci-dessus (k très petit), elle est représentée par le polygone OCDEFG... Enfin pour la réflexion partielle (k ni très grand, ni très petit), on obtient la courbe ondulée construite pour $k = 2$.

Le disque tournant avec une vitesse peu différente de celle de l'arrêt, les traits lumineux d'équidistance λ n'ont pas une vitesse uniforme : minima au voisinage des lignes A et B ($t = 0, T : 2, T, \dots$), elle est maxima à égales distances de ces

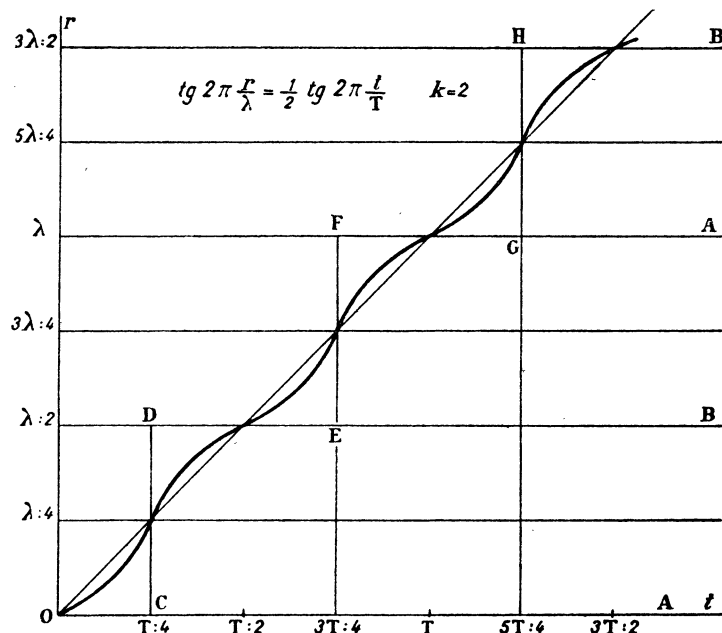


FIG. 18.

lignes ($t = T : 4, 3T : 4, \dots$). L'intensité est alternativement maxima et minima sur les lignes A et B. Quand les traits ont un déplacement rapide, tout se passe comme si le facteur de réflexion était nul, comme si l'onde progressive divergente existait seule. En diminuant leur vitesse sans l'annuler, on met en évidence sa non uniformité, par suite l'existence d'une onde progressive réfléchie.

Pour simplifier je suppose que les cercles lumineux coïncident avec les crêtes. Quel que soit le profil des ondes, il existe des tangentes d'inflexion de part et d'autre desquelles l'inclinaison redevient la même : d'où dédoublement possible des traits lumineux. L'allure des phénomènes reste la même où que se fassent les réflexions que donnent les cercles lumineux.

4. — J'insiste sur ces phénomènes parce que le stroboscope permet souvent de réaliser deux systèmes d'ondes de λ très voisins et animés de vitesses apparentes égales et de sens contraires. Il semble que l'on verra les deux systèmes se déplacer en sens inverses avec des vitesses uniformes, comme sur la figure 19 qui représente par de gros points les lieux de superposition des crêtes, par de petits points et des croix leurs positions successives pour les deux systèmes. Le phénomène est tout dif-

fèrent à supposer les profils sinusoidaux. Si les amplitudes sont égales, il n'existe pas de propagation : les crêtes résultantes restent pendant une demi période sur les lignes A, disparaissent pour reparaitre sur les lignes B et y demeurer pendant la demi période suivante, et ainsi de suite; elles ne sont jamais dédoublées. Si les amplitudes sont inégales, il n'existe pas davantage de dédoublement; en effet quel que soit le temps t , les racines de l'équation (1) sont de la forme $r = r_0 \pm \lambda : 2$; dans une longueur d'onde n'existent que deux racines, l'une qui correspond à la crête, l'autre au creux : dans une longueur d'onde n'existe qu'une crête qui se meut dans le sens de propagation de l'onde de plus grande amplitude, de manière à se

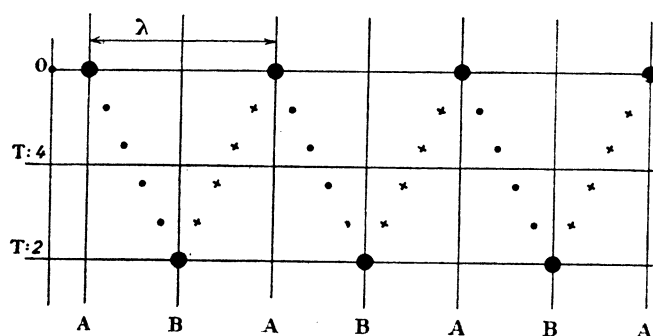


FIG. 19.

déplacer de λ pendant une période; sa vitesse n'est pas uniforme. Tout cela suppose un profil sinusoidal; si le profil se composait de crêtes et de creux abrupts séparés par des portions quasi planes, on verrait les crêtes se mouvoir en sens inverses, d'où le dédoublement que montre la figure 19. Le lecteur trouvera en Optique pour les franges d'interférence l'équivalent de ces deux cas.

A la vérité un système unique d'ondes sinusoidales peut être dédoublé en raison de l'éclairage (même inclinaison de part et d'autre de l'inflexion). Mais si les deux systèmes sinusoidaux sont de même amplitude, comme à chaque instant ils forment un système unique sinusoidal, il n'existe pas de propagation apparente.

17. — Deux vibrateurs synchrones.

1. — Deux jets d'air intermittents P, P', sortent de deux tubes effilés verticaux. Pour réaliser le synchronisme des jets, dans la figure 13 on remplacera le tube en Y par deux tubes reliés aux tubes effilés. Le disque de carton est percé de fenêtres équidistantes, identiques et limitées par des rayons, assez longues pour que les tubes représentés soient simultanément démasqués. Les planchettes sur lesquelles sont mastiqués les tubes de verre, sont fixées sur deux supports à crémaillère indépen-

dants, ce qui permet de régler la distance des pointes entre elles et au plan d'eau. Je reprends la discussion du § 115 de mon Cours *Houle, Rides,...* pour préciser ce qu'on voit à l'œil nu et à travers un stroboscope.

Les pointes P, P', sont à la distance $Q\lambda$; pour simplifier, Q sera un nombre entier (6 dans la *figure 20*).

2. — Soit r et r' les distances aux pointes; le mouvement vertical en un point de la surface est représenté par l'équation :

$$\zeta = \cos 2\pi\left(Nt - \frac{r}{\lambda}\right) + \cos 2\pi\left(Nt - \frac{r'}{\lambda}\right) = 2 \cos \pi \frac{r-r'}{\lambda} \cdot \cos 2\pi\left(Nt - \frac{r+r'}{2\lambda}\right).$$

Les lignes neutres sont les hyperboles $r - r' = (k + 0,5)\lambda$. Dans un vase assez grand pour que les réflexions sur ses parois soient négligeables, le phénomène *visible à l'œil nu* se réduirait à ces lignes ou, si l'on veut, aux lignes intermédiaires pour lesquelles le premier cosinus est ± 1 . Toutefois même avec un vase cylindrique circulaire de diamètre 35 cm. (les pointes sont symétriquement placées à 7 cm. l'une de l'autre), la réflexion suffit pour découper ces lignes intermédiaires en arcs immobiles d'équidistance $\lambda : 2$. Ces arcs sont interrompus par les lignes neutres puisqu'à la rencontre de ces lignes avec la paroi il n'y a pas réflexion.

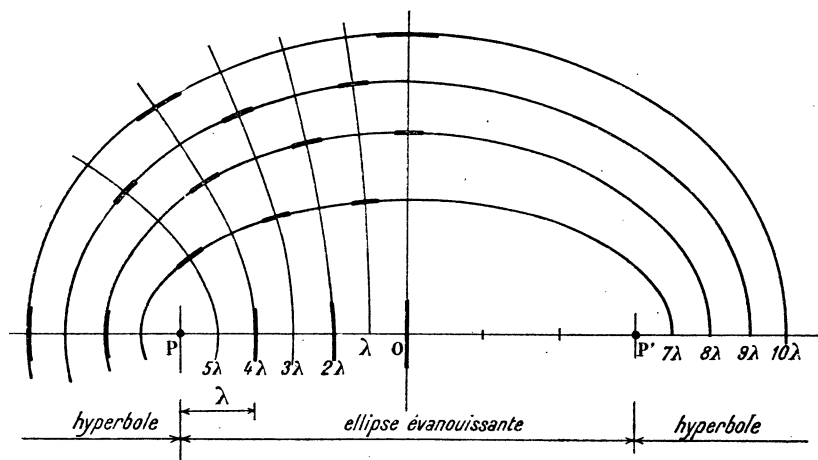


FIG. 20.

3. — Passons à ce que donne le stroboscope. La figure 20 montre les hyperboles $r - r' = k\lambda$, et les ellipses homofocales $r + r' = k'\lambda$; k et k' sont des entiers. Par hypothèse les ondes ne sont visibles que pour $\zeta > 0$.

Pour $t = 0$, le maximum de visibilité correspond aux traits noirs tracés sur la figure. Faisons croître le temps. Les crêtes qui se trouvent sur une hyperbole $r - r' = k\lambda$, seront sur des ellipses telles que $r + r'$ croisse proportionnellement

au temps, et de manière que l'argument du second sinus conserve la même valeur. Les crêtes auront donc sur les hyperboles un mouvement *continu* tel qu'au bout d'une période on retrouve le phénomène initial, puisque Nt croît d'une unité, $r + r'$ croît de 2λ . Si l'on reste sur la même ellipse $r + r' = \text{constante}$, toutes les demi-périodes, les taches qui se meuvent sur une hyperbole, disparaissent et reparaissent sur les hyperboles adjacentes. En particulier sur l'ellipse évanouissante PP' (qui est une ligne double), les ondes semblent se déplacer brusquement de $\lambda : 2$.

Ces phénomènes sont invisibles sans stroboscope en raison de la grandeur des vitesses. En particulier la distance comptée sur les hyperboles de deux ellipses telles que $r + r'$ croisse de 2λ , est toujours plus grande que 2λ ; la vitesse de progression des ondes sur les hyperboles est donc toujours plus grande que $2\lambda N = 2\Psi$, soit 60 cm. : sec. pour $N = 50$.

Utilisons donc un stroboscope. Soit $\tau = (1 + \alpha)T$, la période de vision; T est la période du phénomène. Pour α petit, tout se passe (§ 5, 3°) comme si la fréquence devenait $N\alpha$; la longueur d'onde ne change pas. D'où :

$$\zeta = 2 \cos \pi \frac{r - r'}{\lambda} \cdot \cos 2\pi \left(\alpha Nt - \frac{r + r'}{2\lambda} \right).$$

Le déplacement des arcs visibles sur les hyperboles est maintenant aussi lent qu'on le désire. Les ondes stationnaires dues à la réflexion imposent aux arcs qui se déplacent d'une manière continue un changement périodique de visibilité.

Insistons sur la forme des portions visibles. La figure 20 est construite pour $PP' = 2c = 6\lambda$; d'où pour le petit axe b des ellipses :

$$r + r' = k\lambda, \quad b = \sqrt{k'^2 - 36}(\lambda : 2).$$

Le radical, nul pour $k' = 6$ (ellipse évanouissante) vaut 3,60 pour $k' = 7$, et 5,29 pour $k' = 8$. Pour k' grand, il tend vers une progression arithmétique de raison 1. Par exemple pour $k' = 19$, il vaut 18,03; pour $k' = 20$, il vaut 19,08. D'autre part à mesure qu'on s'éloigne des pointes, l'intervalle entre les hyperboles $r = r' = k\lambda$, augmente vite. D'où résulte que les quadrilatères déterminés par les deux faisceaux sont très allongés normalement aux ellipses près de PP' , deviennent de pseudo carrés, puis sont de plus en plus allongés tangentiellement aux ellipses.

Plaçons-nous sur une hyperbole telle que le premier cosinus vaille $+1$. Au temps $t = 0$, le maximum de ζ est sur les ellipses telles que $r + r' = 2k\lambda$; mais ζ est encore positif à quelque distance de ces points. On comprend que près de PP' les ondes apparaissent comme de relativement longs traits dirigés suivant les hyperboles, qu'elles deviennent des taches quasi carrées à quelque distance, et soient enfin des traits de plus en plus longs normaux aux hyperboles. Le déplacement continu dont il est parlé ci-dessus, est accompagné d'un changement de forme.

4. — En définitive n'existent que deux systèmes d'ondes circulaires divergentes ($\alpha > 0$) ou convergentes ($\alpha < 0$) qui se coupent en donnant un quadrillage mobile déterminant les parties visibles. De ces parties la discussion précédente localise le déplacement sur des hyperboles et détermine les variations de forme. Toutefois alors qu'à l'œil nu les hyperboles sont bien visibles quelle que soit l'incidence, on est surpris de la difficulté de les reconnaître à travers le stroboscope, excepté loin des pointes où elles sont très écartées.

Sur la ligne PP' pour constater les déplacements brusques de $\lambda : 2$, il faut éloigner les pointes et regarder quasi normalement; on voit alors les ondes apparaître toutes les demi-périodes avec la distance λ et reparaitre avec un déplacement de $\lambda : 2$ pendant la demi-période suivante. Mais en général les cercles ne cessent pas d'être visibles; ils se déplacent d'un mouvement continu; entre les pointes alternativement ils se superposent et s'intercalent. Le profil des ondes semble plus abrupt que suivant une sinusoïde, vraisemblablement en raison de l'existence des harmoniques. Peu importe que l'éclairage montre des traits plus ou moins étroits; sur la droite PP' à supposer le profil sinusoïdal, tout devrait disparaître à chaque demi-période.

Je suppose que les sources de même fréquence n'ont pas de différence de phase et sont distantes d'un nombre entier de λ : l'hyperbole évanouissante est un lieu de maximum d'amplitude. En modifiant la distance des sources on peut la rendre intermédiaire en un tel lieu et une ligne neutre; si $\overline{PP'}$ contient un nombre impair de $\lambda : 2$, c'est une ligne neutre.

On généralise autrement le problème en donnant aux jets une différence de phase. Soit $2\pi\delta$ le retard du vibreur P' par rapport au vibreur P .

$$\zeta = 2 \cos \pi \left(\frac{r - r'}{\lambda} - \delta \right) \cdot \cos 2\pi \left(Nt - \frac{r + r'}{2\lambda} - \frac{\delta}{2} \right).$$

Les phénomènes sont les mêmes avec un changement de cote pour les ellipses et pour les hyperboles. Les jets intermittents permettent la réalisation facile de ce cas; il suffit de mettre les tubes de la figure 20 en face de fenêtres percées dans le même disque, en même nombre et décalées suivant le retard qu'on veut obtenir.

Dans tous les cas les phénomènes sont différents sur le segment PP' (ellipse évanouissante) et en dehors de ce segment (hyperbole évanouissante).

5. — ÉQUATION POLAIRE DES HYPERBOLES.

La figure 21 donne les notations; Ω est le centre, O et O' sont les foyers; le segment $\overline{\Omega O}$ est divisé en n parties; par hypothèse les hyperboles le coupent en des points équidistants; p est le nombre des divisions compté à partir de Ω .

L'équation des hyperboles homofocales est :

$$(1) \quad \frac{\xi^2}{p^2} - \frac{\eta^2}{n^2 - p^2} = 1.$$

Le rayon de courbure au sommet est $\rho = (n^2 - p^2) : p$.

Les asymptotes font avec $\Omega\xi$ l'angle tel que $\text{tg } \alpha = \sqrt{n^2 - p^2} : p$.

Pour $\xi = ns$, on a : $\eta = \sqrt{(s^2 n^2 - p^2)(n^2 - p^2)} : p$.

Il est dès lors facile de construire la courbe; la figure suppose $n = 12$, $p = 6$.
 On trouve immédiatement : $\rho = 18$, $\text{tg } \alpha = 1,73$; pour $s = 1$ (droite Oy), $\eta = 18$;
 pour $s = 3/4$, $\eta = 11,6$.

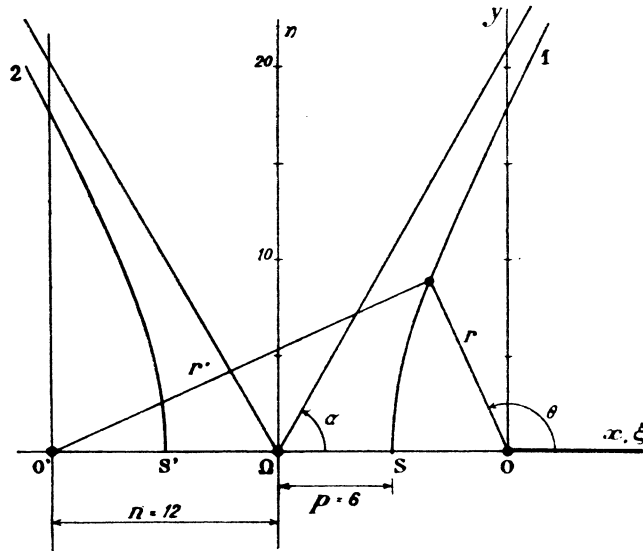


FIG. 21.

Les deux hyperboles limites du faisceau sont la droite $\Omega\eta$ ($p = 0$), le segment de l'axe Ox extérieur à O ($p = n$).

Les hyperboles rencontrent la droite Oy qui passe par le foyer, en des points dont les ordonnées $s = 1$, $\eta = (n^2 - p^2) : p$, qui croissent très vite.

Transportons l'origine au point O ; l'équation (1) devient :

$$(2) \quad \frac{(x + n)^2}{p^2} - \frac{y^2}{n^2 - p^2} = 1.$$

Pour trouver l'équation de l'hyperbole en coordonnées polaires en prenant pour origine le foyer O, partons de la définition

$$(3) \quad r' - r = \pm 2p :$$

$$r' = \sqrt{r^2 + 4n^2 + 4nr \cos \theta} = (r \pm 2p),$$

$$r^2 + 4n^2 + 4nr \cos \theta = r^2 \pm 4pr + 4p^2,$$

$$(4) \quad r = (n^2 - p^2) : (\pm p - n \cos \theta).$$

Le signe + correspond à la branche 1, le signe - à la branche 2. Pour retrouver l'équation (2) relative à l'hyperbole complète, on résoudra (4) par rapport à $\pm p$ et l'on élèvera au carré pour faire disparaître le double signe.

Les directions asymptotiques sont données par la condition $r = \infty$, $\cos \theta = \pm p : n$; d'où l'angle α ci-dessus calculé.

6. — UN VIBRATEUR, UN FIL IMMOBILE.

Supprimons le tube effilé P'; remplaçons-le par un fil vertical immobile : au voisinage de P', entre P et P', on voit sans stroboscope les mêmes hyperboles (à la vérité très pâles) que si P' oscillait en synchronisme avec P; à travers le stroboscope on voit les ondes issues de P passer sur P', d'où émanent des ondes *circulaires complètes* : le fil immobile P' devient donc une source de révolution synchrone de P. Son diamètre peut être inférieur au mm. Pour qu'il ne trépide pas, il est porté par un support indépendant reposant sur le sol et ne touchant aucune pièce du bâti; il ne touche pas le fond du vase qui contient l'eau.

Parler de réflexion est inadmissible : les ondes issues de P ne sont ni arrêtées ni sensiblement déformées par leur rencontre avec P' supposé de petit diamètre; les ondes issues de P' sont aussi visibles en dehors du segment PP' qu'en dedans; le phénomène dont la netteté n'augmente pas quand le diamètre croît jusqu'à 5 ou 6 mm., perd sa symétrie de révolution pour des diamètres plus grands, alors qu'on peut invoquer la réflexion.

Voici l'explication du phénomène. Un fil vertical *oscillant toujours immergé* produit des ondes grâce à des variations de niveau de la surface liquide en son voisinage; or le passage sur P' des ondes issues de P produit le même effet : au passage d'une crête, P' est un peu plus immergé; l'eau retombe au passage d'un creux. De là résultent des ondes *circulaires complètes*, la direction des ondes incidentes n'intervenant pas sur la retombée de l'eau le long du cylindre P'. Corrélativement son mouillage ne peut avoir qu'un rôle favorable pour l'amplitude des ondes qu'il émet (fil recouvert de coton). Même résultat quand on associe un vibreur métallique et un cylindre P' immobile de petit diamètre.

Remplaçons le cylindre P' par un jet permanent; associé au jet intermittent de

fréquence N , il donne des hyperboles. En raison des phénomènes décrits au § 7, l'existence des hyperboles n'exige plus que les ondes créées par le jet intermittent induise un ébranlement de fréquence N autour du jet permanent, puisque cette fréquence préexiste dans l'ébranlement complexe dû à ce sujet.

Un très petit flotteur donne les hyperboles.

7. — LES JETS SYNCHRONES NE PASSENT QUE PENDANT UNE PETITE FRACTION ε DE LA PÉRIODE.

Dans ce cas (§ 6) chaque impact crée un train d'ondes serrées qui se propagent avec une grande vitesse; le système régulier de fréquence N se forme de plus en plus loin à mesure que ε diminue. Utilisons deux jets de fréquence $N = 12,5$. La formule de Kelvin donne $\lambda = 18,6$; sur la droite PP' la distance des lignes neutres serait $\lambda = 9,3$ mm.; pour $PP' = 9$ cm. leur nombre serait voisin de 9. Mais rendons les jets très brefs $\varepsilon = 1 : 40$: il existe des lignes neutres visibles sans stroboscope; mais leur nombre est beaucoup plus grand; l'interférence porte sur les ondes des trains.

Corrélativement pour un vase cylindrique de diamètre relativement petit (35 cm.), les trains se réfléchissent en donnant des ondes stationnaires, visibles sans stroboscope, dont l'écartement est égal à la distance des hyperboles sur le segment PP' .

18. — Généralisation.

1. — UN MUR, DEUX MURS PARALLÈLES INDÉFINIS.

En remplaçant le vibreur P' par un mur vertical qui coïncide avec l'hyperbole évanouissante normale à PP' , nous supprimons la moitié du phénomène; mais grâce à la réflexion sur le mur, l'autre moitié n'est pas modifiée. Conformément au § 16 il est bon que le mur ne soit pas mouillé.

Ne conservant qu'un vibreur, plaçons-le entre deux murs verticaux indéfinis. Ces murs sont les parois verticales du canal qui sert à étudier l'entraînement des ondes progressives par un courant d'eau. Bouché à ses extrémités il joue le rôle d'un vase rectangulaire de grande longueur par rapport à sa largeur (174 mm.). Le vibreur P est sur la médiane longitudinale M du canal. Les murs jouent le rôle de miroirs plans; tout se passe comme si l'on associait au vibreur P deux vibrateurs synchrones P_1, P_2 , symétriques de P par rapport aux murs. D'où trois faisceaux d'hyperboles homofocales respectivement dues aux sources PP_1, PP_2, P_1P_2 .

Les faisceaux PP_1, PP_2 , sont symétriques par rapport à M ; les hyperboles tournent leur concavité vers P . Leurs axes imaginaires sont respectivement sur les murs. Elles se coupent sur la médiane M .

Le troisième faisceau P_1P_2 admet M pour axe imaginaire; les hyperboles tournent leur convexité du côté de la médiane.

2. — Nous ne modifions pas la partie du phénomène qui subsiste, en remplaçant le vibreur P' par un miroir hyperbolique de génératrices verticales qui passe par l'une quelconque des hyperboles d'amplitude verticale maxima (oscillation verticale de l'eau).

Éloignons le vibreur P' à l'infini, les hyperboles et les ellipses deviennent des paraboles. Nous pouvons supprimer le vibreur P' quitte à lui substituer un miroir parabolique au foyer duquel se trouve le vibreur P . Comme toutes les paraboles confocales sont homothétiques par rapport au foyer, les lignes neutres sont des paraboles homothétiques; les courbes d'amplitude maxima sont les paraboles homothétiques intermédiaires. Les ellipses de l'expérience où P' existe à distance finie, deviennent les paraboles orthogonales aux précédentes. Pour rappeler le rôle des faisceaux de paraboles, j'indique sur la figure 22 quel faisceau est la limite des hyperboles ou des ellipses.

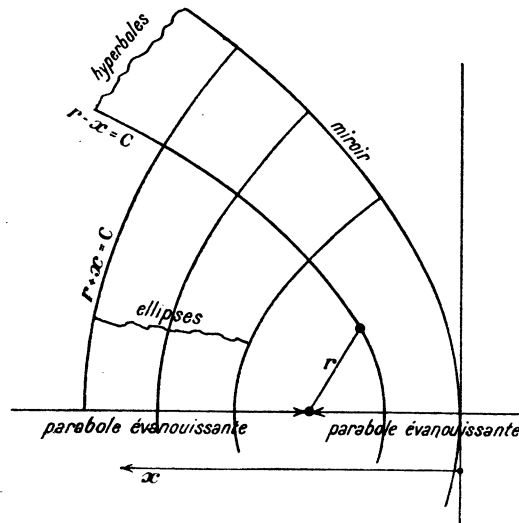


FIG. 22.

De P émanent des ondes circulaires divergentes; de P' émanent des ondes planes qui se propagent vers les x croissants. D'où l'expression de ζ pour la réflexion totale :

$$\zeta = \cos 2\pi(Nt - r : \lambda) + \cos 2\pi(Nt - x : \lambda);$$

$$\zeta = \cos \pi \frac{r-x}{\lambda} \cdot \cos 2\pi \left(Nt - \frac{r+x}{2\lambda} \right).$$

Le miroir, les lignes neutres et les lignes d'amplitude maxima rentrent dans le faisceau $r-x = \text{constante}$. Les courbes orthogonales sont les paraboles $r+x = \text{constante}$. La discussion est identique à celle du paragraphe précédent :

sur les paraboles $r - x = \text{constante}$, les ondes se déplacent d'un mouvement continu visible à travers le stroboscope réglé au voisinage de l'arrêt.

Pour répéter l'expérience on trace sur du papier la parabole qui doit servir de miroir; on colle le papier sur une planche que l'on découpe; elle est limitée par une normale N à l'axe du miroir. On cloue une bande de carton sur la planche de manière à obtenir la paroi cylindrique, et l'on vernit le tout au bitume de Judée. Voici les dimensions convenables : en cm. l'équation de la parabole est $y^2 = 12x$; le foyer est à 3 cm. du sommet. La distance de la droite N au sommet est $x = 20$ cm.; c'est dire que la paroi plane opposée au sommet est longue de 31 cm.

Il faut prendre petite la distance du foyer au sommet, pour éloigner suffisamment la paroi N du foyer sans donner à l'ordonnée correspondante une valeur trop grande.

Sans stroboscope les paraboles neutres sont bien visibles; à travers le stroboscope on constate l'alternance des ondes visibles au passage des lignes neutres. Les fréquences convenables sont 25 ($\lambda = 10$ mm.) et 50 ($\lambda = 6$ mm.); la distance du foyer au sommet (30 mm.) contient respectivement 6 et 10 demi-longueurs d'onde.

19. — Deux vibrateurs de fréquences différentes.

1. — Deux jets d'air intermittents sont obtenus au moyen de deux disques de carton percés de fenêtres équidistantes et calés sur les axes de deux moteurs. L'un 1 synchrone fait 12,5 tours par seconde; la vitesse de l'autre 2 est réglée par une résistance : on peut ainsi modifier arbitrairement la différence des fréquences. Les jets intermittents sortent de deux tubes de verre effilés, verticaux, l'un de l'autre à la distance voulue; les distances de leurs pointes à la surface liquide sont réglables par les supports à crémaillère.

Le carton du moteur synchrone 1 est percé de quatre fenêtres; d'où la fréquence $N_1 = 50$. L'expérience consiste à faire varier d'une manière continue la fréquence N_2 du jet 2 qui est peu supérieure à N_1 ou inférieure d'une quantité quelconque. Soit T_1, T_2 , les périodes des jets, τ la période de vision à travers le stroboscope.

2. — JETS DE FRÉQUENCES VOISINES.

Au jet P donnons la fréquence $N_1 = N + n$; au jet P' la fréquence $N_2 = N - n$ (n petit devant N). Quand la fréquence croît, la longueur λ diminue; d'où les longueurs $\lambda : (1 + \varepsilon)$, $\lambda : (1 - \varepsilon)$.

La superposition des ondes est exprimée par l'équation :

$$z = \cos 2\pi \left[(N+n)t - \frac{r}{\lambda}(1+\varepsilon) \right] + \cos 2\pi \left[(N-n)t - \frac{r'}{\lambda}(1-\varepsilon) \right];$$

$$z = 2 \cos 2\pi \left[\frac{r-r'}{2\lambda} + \frac{r+r'}{2\lambda} \varepsilon - nt \right] \cdot \cos 2\pi \left[\frac{r+r'}{2\lambda} + \frac{r-r'}{2\lambda} \varepsilon - Nt \right].$$

Les lignes neutres ($z = 0$) satisfont à la condition :

$$r - r' + (r + r')\varepsilon = 2n\lambda t + (k + 0,5)\lambda.$$

Entre les pointes sur l'axe Ox :

$$r + r' = 2c, \quad r - r' = 2x;$$

$$x + c\varepsilon = n\lambda t + (k + 0,5)\lambda : 2.$$

C'est le résultat du § 118, 1° du Cours *Houle, Rides, ...*; on notera que sur l'axe Ox les ondes se propagent en sens inverses.

Restons sur la même ellipse $r + r' = \text{constante}$; la différence $r - r'$ croît proportionnellement au temps; les points neutres se déplacent sur l'ellipse dans un sens tel que leur distance r à la pointe *aiguë* P augmente, que leur distance r' à la pointe *grave* P' diminue.

A chaque instant (t invariable) les points neutres sont distribués sur l'ellipse de manière que de l'un au suivant k varie d'une unité; corrélativement pour que la distribution de ces points sur l'ellipse redevienne la même, le temps doit croître d'une quantité τ telle que $2n\tau = 1$; le temps τ est donc l'inverse de la différence $2n$ des fréquences.

A chaque instant les lignes neutres sont les ovales de Descartes :

$$r(1+\varepsilon) - r'(1-\varepsilon) = \text{constante};$$

ces courbes n'ont pas de points à l'infini; elles se ferment autour de la pointe rapide; mais on ne les voit qu'à quelque distance de cette pointe. Quand le temps varie, leur déplacement est évidemment accompagné d'un changement de forme, puisqu'une courbe telle que 2 (*fig. 23*) prend successivement les formes 3, 4, ...

3. — Plaçons les pointes des tubes effilés à une petite distance l'une de l'autre, 1 cm. par exemple. Les deux systèmes de fréquences différentes se forment bien, malgré la proximité des pointes. Les lignes neutres sont approximativement des droites, visibles seulement à quelque distance des jets. Elles tournent symétriquement de part et d'autre de la ligne L des jets et vont de la pointe aiguë à

la pointe grave. En modifiant la fréquence N_2 toujours voisine de N_1 , on intervertit leur sens de rotation ; leur vitesse angulaire s'annule et change de signe pour $N_2 = N_1$. Quand la ligne neutre apparaît du côté de la pointe aiguë, sa vitesse angulaire est grande ; cette vitesse diminue, est minima quand la ligne est normale à L ; puis croît jusqu'à ce que la ligne disparaisse du côté de la pointe grave.

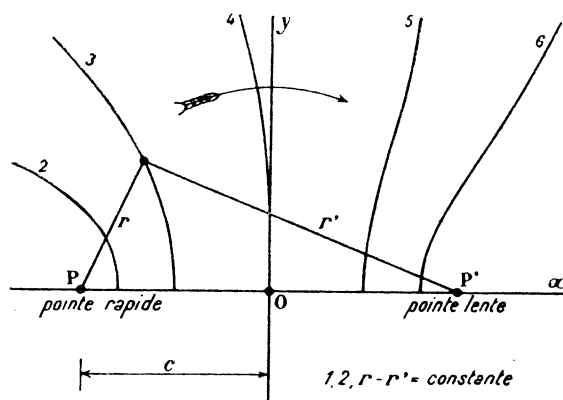


FIG. 23.

Le nombre des lignes neutres diminue à mesure que diminue la distance des pointes ; si cette distance est de 10 mm., la demi-longueur d'onde pour $N = 50$ étant 3 mm., il existe trois lignes neutres. Elles sont bien visibles à travers le stroboscope en raison de la discontinuité d'éclairement des ondes circulaires progressives arrêtées.

Toutefois pour les petites distances des pointes, le nombre des droites convergentes qu'on voit courir sur les ondes circulaires, est plus grand que le quotient par $\lambda : 2$ de la distance des pointes.

4. — En inclinant les tubes de verre on peut superposer les cupules produites par les deux jets. Pour des fréquences assez différentes on arrête les ondes relatives aux deux fréquences avec des vitesses différentes du stroboscope. Pour supprimer toute incertitude, grâce à des miroirs on s'arrange de manière à voir à travers le stroboscope les ondes et les disques ; on vérifie que l'arrêt des ondes correspond à l'arrêt de l'un des disques et que leurs déplacements de sens inverses correspondent à ses rotations apparentes de sens inverses. Pour des fréquences qui diffèrent d'une quantité ν de l'ordre de l'unité, on ne voit qu'un système d'ondes auquel le stroboscope peut donner une immobilité moyenne. Mais avec la fréquence $\nu = N_2 - N_1$, le système se déplace brusquement ; autrement dit les ondes disparaissent de leurs positions actuelles pour reparaître dans d'autres positions, cela périodiquement.

Ces résultats iraient de soi si le jet d'air intermittent créait une oscillation sinu-

soïdale de l'eau autour de son point d'impact; mais le mode d'entretien est très différent (§ 6). Les phénomènes restent les mêmes quand les jets ne passent que pendant 1 : 10 de la période; $N_1 = 50$. Mêmes résultats pour $N_1 = 25$.

On ne peut soutenir qu'il existe un système unique de fréquence intermédiaire à N_1 et N_2 dont l'intensité d'entretien varie périodiquement; ce qu'on réalise avec un seul jet intermittent quand on pince périodiquement le caoutchouc d'amenée de l'air. Le nombre et la largeur des traits lumineux varient périodiquement; mais on n'observe rien qui ressemble aux sauts de $\lambda : 2$. A noter qu'à l'instant où l'on desserre le caoutchouc d'abord complètement aplati, on voit les ondes apparaître de proche en proche, ce qui donne immédiatement l'ordre de leur vitesse de propagation si le vase est assez grand.

5. — FRÉQUENCES TRÈS DIFFÉRENTES.

Le phénomène pour des fréquences voisines est connu depuis longtemps. Il existe encore pour des fréquences très différentes.

Sans stroboscope on voit des lignes neutres nettes, formant un faisceau unique; elles ont généralement le mouvement d'ensemble avec déformation ci-dessus décrit; elles vont du jet *aigu* au jet *grave* définis comme suit. On a :

$$N_1 = (p \pm \alpha)N_2, \quad 0 < \alpha < 0,5, \quad p = 1, 2, 3, \dots$$

Soit α petit, $p = 1$: nous sommes dans le cas du 2° : pour le signe +, le jet 2 est *grave*; pour le signe —, il est *aigu*. Nous conservons cette définition quel que soit l'entier p ; voyons ce que cela signifie.

La fréquence de l'harmonique p du jet 2 est pN_2 . Pour $\alpha = 0$, cet harmonique coïncide donc avec le fondamental du jet 1; pour le signe + il est *plus grave*; pour le signe — il est *plus aigu* : la définition consiste à comparer le fondamental du jet 1 avec l'harmonique p du jet 2 qui en est le plus voisin.

Pour connaître le signe de α , réglons le stroboscope de manière à arrêter les ondes circulaires issues du jet 2. Pour le signe + les ondes issues du jet 1 sont axifuges; elles sont axipètes pour le signe —. Les lignes neutres et les ondes issues du jet 1 ont (dans ces conditions) des mouvements de même sens. Il faut arrêter les ondes issues du jet 2, de manière que les ondes issues de 1 conservent le même aspect, quel que soit p .

En prenant $N_1 = 50$ et en diminuant la fréquence variable N_2 à partir d'une valeur un peu supérieure à N_1 , on constate aisément six interversions; ce qui suppose dans l'ébranlement 2 l'existence des harmoniques 2 et 3.

Pour que le nombre de tours : sec. du moteur 2 correspondant ne devienne pas trop petit, on colle du papier sur deux fenêtres diamétralement opposées; les nombres de tours qui correspondent aux fréquences 50, 50 : 2, 50 : 3, sont alors 25, 25 : 2, 25 : 3. Le réglage du moteur devient facile.

Ce qui précède suppose le phénomène déterminé par le fondamental du jet 1 et l'harmonique du jet 2 qui en est le plus voisin; corrélativement le nombre des lignes neutres entre les jets ne doit pas changer quand N_2 varie; ce que l'expérience confirme autant qu'il est possible de compter un nombre de lignes *mobiles* supérieur à 10 quand les pointes sont distantes à 4 à 7 cm. En tout cas le phénomène n'est certainement pas réglé par le fondamental du jet 2.

Les équations aux dérivées partielles sur lesquelles repose la formule de Kelvin, étant linéaires, rien n'empêche le fondamental et ses harmoniques de se propager indépendamment les uns des autres avec leurs vitesses propres (à la vérité peu différentes pour des fréquences de 10 à 50). Toutefois la théorie précédente suppose à ces harmoniques des amplitudes suffisantes pour produire des lignes neutres bien visibles, même quand il s'agit de l'harmonique 3 ou 4 (le fondamental est noté 1). Certes le jet 2 émet à chaque pulsation une onde complexe, formée (suivant la distance du tube à l'eau) de 2, 3, 4 cercles lumineux; mais on ne peut analyser directement ce train dont l'aspect varie beaucoup avec l'éclairage.

20. — Ébranlements de fréquences peu différentes produits par le même jet.

Battements.

1. — BATTEMENTS VISIBLES SANS STROBOSCOPE.

Pour superposer des ébranlements de fréquences différentes, dans le dispositif de la figure 13 on supposera les branches de l'Y beaucoup plus éloignées l'une de l'autre, de manière que les tubes d'amenée de l'air se trouvent en face de cartons montés sur deux moteurs indépendants. Ces moteurs tournent avec des vitesses telles que les fréquences N_1 et N_2 des jets intermittents diffèrent peu.

Concentriquement au point d'impact du jet, on voit toujours sans stroboscope des cercles immobiles (§ 12) que j'attribue à la présence des harmoniques. Leur visibilité croît à mesure que le vibreur produit des ondes plus creuses. Or quel que soit le mécanisme d'entretien des ondes, il va de soi que l'ébranlement résultant est intense quand les fenêtres des deux disques passent simultanément devant les tubes correspondants, et qu'il est quasi nul quand leurs passages sont alternés. Les deux disques tournant avec des vitesses différentes, on se trouve alternativement dans les cas précédents; par suite on voit des cercles concentriques, de rayons invariables, dont la visibilité varie périodiquement. Soit ω_1 et ω_2 les vitesses angulaires des fenêtres en nombre n sur chaque disque; soit ν la fréquence de leur retour simultané devant les tubes :

$$n\omega_1 = 2\pi N_1, \quad n\omega_2 = 2\pi N_2, \quad n(\omega_2 - \omega_1) = 2\pi\nu, \quad \nu = N_2 - N_1.$$

Comme nous connaissons la fréquence $N_1 = 12,5.n$, de l'ébranlement relatif au moteur synchroné, la mesure de ν (de l'ordre de la seconde) détermine N_2 .

2. — Voici le problème : de la superposition des ébranlements de fréquences N_1 et N_2 résulte-t-il deux systèmes d'ondes indépendants qui correspondent à ces fréquences ? Dans cette hypothèse quel est le phénomène à travers le stroboscope ?

Aux fréquences N_1 et N_2 correspondent des vitesses Ψ_1 et Ψ_2 . Supposons $N_1 = 50$ et N_2 peu différent de 50. Dans ces conditions la formule de Kelvin en eau profonde donne $\Delta\Psi : \Delta N = 0,164$; pour une variation $\Delta N = 1$, la vitesse ne varie que de 0,164 cm. : sec.

Soit

$$T_1 = T(1 + \beta), \quad T_2 = T(1 - \beta), \quad \tau = T(1 + \alpha),$$

les périodes des deux ébranlements superposés et la période de vision; α et β sont petits. On a pour les fréquences :

$$N_1 = (1 - \beta) : T, \quad N_2 = (1 + \beta) : T, \quad N_2 - N_1 = 2\beta : T = \nu.$$

Les vitesses apparentes deviennent (§ 5, 2°) :

$$\Psi'_1 = (\alpha - \beta)\Psi_1, \quad \Psi'_2 = (\alpha + \beta)\Psi_2.$$

Posons qu'à l'origine des temps les deux systèmes d'ondes sont superposés, bien que leurs longueurs d'onde ne soient pas exactement les mêmes. C'est légitime parce que la variation $\Delta\lambda : \lambda$ au voisinage de la fréquence 50 n'est que de 1 : 71 pour une variation $\nu = 2$. Autrement dit si deux ondes appartenant aux deux systèmes sont superposées, il faut se déplacer de 35,5 ondes pour que deux ondes soient intercalées, de 71 ondes pour qu'elles soient de nouveau superposées. Cherchons au bout de quel temps t les deux systèmes sont de nouveau superposés; il faut écrire que le produit de t par la différence des vitesses apparentes égale une longueur d'onde :

$$(1) \quad t(\Psi'_2 - \Psi'_1) = t[\alpha(\Psi_2 - \Psi_1) + \beta(\Psi_1 + \Psi_2)] = \lambda.$$

Or Ψ_1 et Ψ_2 diffèrent très peu; le premier terme de la parenthèse est négligeable devant le second. Appelons Ψ la moyenne des vitesses; l'équation se réduit à :

$$t \cdot 2\beta\Psi = t\nu \cdot \Psi T = t\nu\lambda = \lambda, \quad t\nu = 1.$$

Ainsi les coïncidences ont pour fréquence $N_2 - N_1 = \nu$. Précisons le rôle du stroboscope. Pour $\alpha = 0$, il impose aux deux systèmes des vitesses *en sens contraires*

$\beta\Psi_1, \beta\Psi_2$. Nous sommes dans le cas du § 16, 4°; à supposer les profils sinusoidaux, il n'existe plus de propagation; le phénomène se réduit à des sauts de $\lambda : 2$.

Pour nous placer dans ce cas réglons le stroboscope sur le disque 1 synchrone de manière qu'il semble avoir une petite vitesse, ce qui détermine $T_1 - \tau = T(\beta - \alpha)$. Les deux disques tournent dans le même sens; par suite leurs bords voisins qui passent sous les tubes se meuvent *en sens inverses*. Réglons le moteur 2 de manière qu'à travers le stroboscope et par réflexion sur un miroir, on voie les bords voisins se déplacer dans le même sens [d'où $\tau - T_2 = T(\beta + \alpha)$], avec des vitesses égales, ce qui entraîne $\alpha = 0$. Dans ces conditions on voit les ondes sauter de $\lambda : 2$ avec la fréquence ν ; par suite les ondes de fréquence N_1 et N_2 coexistent. Il est toutefois nécessaire que les fenêtres soient assez étroites pour que l'air ne passe que pendant une petite fraction de la période, de manière que les impacts de fréquence N_1 et N_2 soient bien séparés. On regarde à travers un viseur peu grossissant muni d'un réticule; comme pour $\alpha = 0$ les lieux de superposition sont immobiles, il est facile de constater qu'à chaque saut le déplacement est de $\lambda : 2$. Par exemple le réticule se trouve successivement sur un trait noir ou à égales distances de deux traits noirs.

Pour $\alpha = \beta$, le stroboscope arrête les ondes du système 1; il donne à l'autre système la vitesse $2\beta\Psi_2$ dans le sens de Ψ_2 puisque $\tau > T_2$. La période de superposition t reste la même; le déplacement des ondes mobiles et leur vitesse sont doublées. Les sauts sont alors de λ ; toutefois comme les amplitudes ne sont généralement pas égales, nous sommes dans le cas du § 16, 3°: il existe une propagation continue avec une vitesse périodiquement variable. Même résultat pour $\alpha = -\beta$, *mutatis mutandis*.

21. — Deux pointes synchrones; l'eau est animée d'une vitesse ψ dans le sens des γ croissants.

1. — Admettons que les ondes émises par les pointes P, P', placées à la distance $2n$ l'une de l'autre sur une normale au canal, sont entraînées *sans déformation* par l'eau; l'hypothèse (*certainement inexacte*) servira de schème de comparaison.

Soit T la période des vibreurs; posons $\alpha = \psi T$, $\beta = \Psi T$; Ψ est la vitesse de propagation des ondes. Dans notre hypothèse après p périodes le centre de l'onde émise au temps 0 se trouve à la distance $p\alpha$ de la pointe émettrice; son rayon est $p\beta$. Les pointes ayant les abscisses $\pm n$, les équations des deux systèmes de crêtes sont (§ 17, 5°):

$$(y - p\alpha)^2 + (x - n)^2 = p^2\beta^2, \quad (y - q\alpha)^2 + (x + n)^2 = q^2\beta^2.$$

Les mouvements sont synchrones pour $q - p = \text{constante}$. Pour trouver les équations

tions des courbes ainsi définies (ondes stationnaires), résolvons les équations précédentes par rapport à q et p , faisons la différence des expressions trouvées :

$$(\beta^2 - \alpha^2)(q - p) = \pm \sqrt{\beta^2 y^2 + (x + n)^2 (\beta^2 - \alpha^2)} \pm \sqrt{\beta^2 y^2 + (x - n)^2 (\beta^2 - \alpha^2)}.$$

Posons $\eta = y\beta : \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$; l'équation précédente devient :

$$\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}(q - p) = \sqrt{\eta^2 + (x + n)^2} - \sqrt{\eta^2 + (x - n)^2}.$$

Les courbes η , x , sont des hyperboles homofocales dont les pointes P, P', sont les foyers.

Ainsi malgré le mouvement de l'eau, à supposer les ondes entraînées sans déformation, les ondes stationnaires sont encore des hyperboles symétriques par rapport à la droite PP'.

Les intersections des cercles avec l'axe des x entre les points P et P' sont ($y = 0$) :

$$\begin{aligned} \text{pour le point P} \dots\dots & x = n - p \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}; \\ \text{pour le point P'} \dots\dots & x' = -n + q \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}. \end{aligned}$$

D'où pour les intersections des ondes :

$$x = x', \quad 2x = (q - p) \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}.$$

$$\text{Pour } \alpha \text{ nul,} \quad 2x_0 = (q - p)\beta.$$

$$\text{D'où pour la même différence } q - p, \quad x : x_0 = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} : \beta.$$

Pour $\psi = 0$, $\alpha = 0$, traçons les hyperboles (courbes η) dont P et P' sont les foyers, en leur donnant sur PP' l'équidistance $\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} : \beta^2$ et en conservant l'axe des ordonnées pour la première de ces courbes. Nous obtenons les hyperboles relatives à ψ non nul (courbes y) en réduisant les ordonnées des courbes η dans le rapport $\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} : \beta$.

2. — Les courbes qui correspondent à $q - p$ constant (même phase aux points d'intersection des ondes progressives), ne sont nettes que pour des vitesses $\psi < 23,3$ cm. : sec. assez petites pour ne pas donner les rides immobiles de Poncelet. Pour ces vitesses et dans le cas $\beta > \alpha$, les ondes progressives ont des formes analogues à celles déduites d'un entraînement sans déformation (voir *fig. 7*, à gauche); cependant les courbes précédentes ne sont manifestement pas symétriques par rapport à PP'; elles sont plus courbes à l'amont qu'à l'aval : l'hypothèse est donc incorrecte. J'en développe une plus correcte au § 23.

22. — Vase cylindrique elliptique.

1. — Appelons P, P', les foyers de l'ellipse section droite du cylindre; leur distance est $2c$. Soit a le grand axe de l'ellipse; posons $2a = P\lambda$; admettons pour simplifier que P est entier. A l'intérieur de cette ellipse $r + r' = 2a = P\lambda$, traçons les ellipses homofocales : $r + r' = p\lambda$, $p = Q, Q + 1, \dots, P$. L'hyperbole homofocale évanouissante $r - r' = Q\lambda$, est constituée par les deux segments de la droite PP' extérieurs aux points P et P'; l'ellipse évanouissante $r + r' = Q\lambda$, l'est par le segment compris entre ces points foyers.

Deux vibreurs synchrones et de même amplitude déterminent des ondes progressives *divergentes* ayant respectivement pour centres les foyers P et P'. La paroi elliptique crée des ondes *convergentes* de mêmes centres P, P'. En définitive l'amplitude ζ résulte de la superposition des quatre ondes (on suppose la réflexion totale) :

$$\zeta = \cos 2\pi(Nt - r : \lambda) + \cos 2\pi(Nt + r\lambda) + \cos 2\pi(Nt - r' : \lambda) + \cos 2\pi(Nt + r'\lambda);$$

$$\zeta = 4 \cos \pi \frac{r+r'}{\lambda} \cdot \cos \pi \frac{r-r'}{\lambda} \cdot \cos 2\pi Nt.$$

Il existe deux séries de lignes neutres, ellipses et hyperboles homofocales, *qui jouent exactement le même rôle*; nous sommes dans le cas *b*) du § 15. Le signe de ζ change quand on traverse une de ses lignes, excepté le segment PP' (ellipse évanouissante) et les segments de la droite AA' extérieurs au segment PP' (hyperbole évanouissante) qui sont des lignes doubles; d'où la symétrie du phénomène par rapport à la droite AA'. La figure 24 montre les ellipses et les hyperboles pour lesquelles les cosinus sont égaux à ± 1 ; elle est construite pour $\overline{PP'} = 2c = 6\lambda$, $\overline{AA'} = 10\lambda = 2a$. Les courbes tracées ont les équations :

(1) ellipses..... $r + r' = 6\lambda$ (évanouissante), $7\lambda, \dots, 10\lambda$;

(2) hyperboles..... $r - r' = 0, \lambda, 2\lambda, \dots, 6\lambda$ (évanouissante).

Les lignes neutres sont intermédiaires. J'ai marqué sur les courbes tracées le facteur de λ . Leurs intersections correspondent à des amplitudes ± 1 de ζ (crêtes ou creux). Quand le troisième cosinus est positif, les crêtes sont à l'intersection des courbes de même parité; quand il est négatif, elles sont à l'intersection des courbes de parités différentes.

On se reportera au § 17 où j'explique le changement de forme des quadrilatères courbes déterminés par les intersections des courbes (1) et (2), ou par les intersections des courbes intermédiaires (lignes neutres); au reste la figure 24 montre schématiquement de quoi il s'agit.

2. — *Sans stroboscope* on voit le phénomène moyen. Les lignes neutres sont continues, puisque ζ est identiquement nul. Les courbes (1) et (2) sont interrompues à la traversée des lignes neutres. Dans chaque quadrilatère déterminé par l'intersection des lignes neutres n'existe une crête que pendant la moitié de la période, mais en raison de la persistance des impressions lumineuses, et dans l'hypothèse que la vision exige que ζ soit positif, bien qu'il ne le soit dans chaque quadrilatère que la moitié du temps, on voit quelque chose autour de toutes les intersections des courbes (1) et (2).

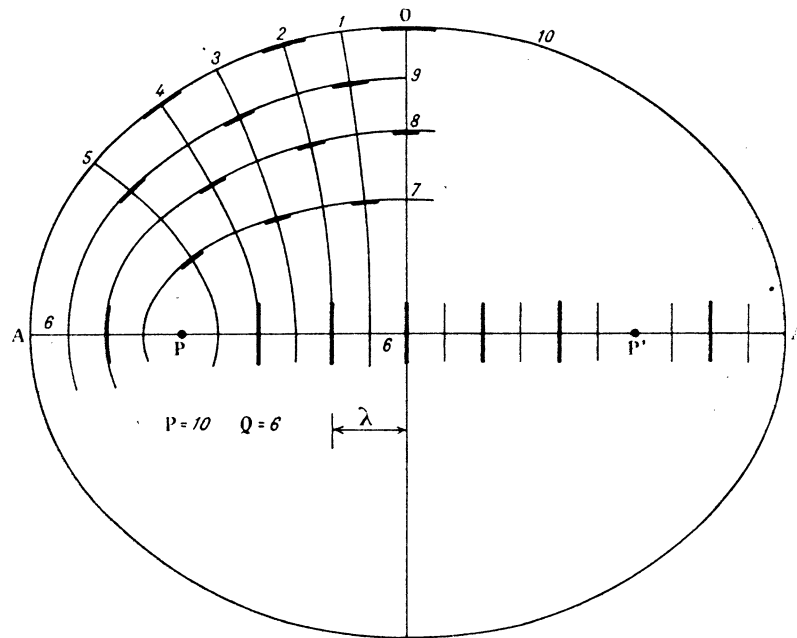


FIG. 24.

En raison de la forme des quadrilatères, près de la droite AA' les ondes stationnaires, équidistantes de $\lambda : 2$, sont constituées par de relativement longs traits normaux à AA'; ils existent de part et d'autre de cette droite double. Ceux qui coupent le segment PP' sont interrompus par la première ellipse neutre simple; ceux qui coupent la droite AA' hors du segment PP', sont interrompus par la première hyperbole neutre simple. A mesure qu'on s'éloigne du centre de la figure, les ellipses neutres deviennent équidistantes de $\lambda : 2$ (voir le § 17) et les hyperboles s'écartant les unes des autres, les ondes deviennent des traits allongés tangentielllement aux ellipses (1).

A travers le stroboscope le phénomène se dédouble. Pendant une demi-période on voit les ondes autour des intersections des ellipses (1) et des hyperboles (2) de même parité (fig. 24); pendant la demi période suivante on les voit autour des inter-

sections des courbes de parités différentes; et ainsi de suite. En particulier les ondes qui coupent la droite AA' et sont équidistantes de λ , disparaissent quand le troisième cosinus s'annule, et reparaissent sur les droites intermédiaires.

En choisissant l'incidence de vision et l'orientation du vase, arrangeons-nous de manière de voir à travers le stroboscope les ellipses ou les hyperboles. Pour une vitesse du stroboscope peu différente de l'arrêt, on voit la moitié des lignes d'intensité maxima pendant une demi-période; l'autre moitié pendant la demi-période suivante, et ainsi de suite: d'où l'apparence des sauts. Vu l'écartement des premières ellipses, le phénomène est particulièrement net pour ces courbes.

3. — Cette expérience est due à Weber; il obtenait les ondes en faisant tomber du mercure goutte à goutte sur la verticale d'un foyer d'un vase cylindrique elliptique contenant du mercure. Certes on voit ainsi les ellipses et les hyperboles; toutefois il est impossible d'analyser le phénomène. La figure 51 du tome V de ses œuvres souvent reproduite en donne une idée très incomplète.

On répète commodément l'expérience avec l'eau et le dispositif décrit au § 17 (soufflerie, disque tournant, tubes effilés d'où sortent des jets d'air intermittents synchrones); la distance des pointes est celle des foyers. On regardera le phénomène à l'œil nu ou à travers un stroboscope. On construira le vase à l'aide d'une planche découpée suivant une ellipse; les dimensions suivantes sont bonnes: $2a = 20$ cm., $2b = 16$, $2c = 12$. Contre la planche on cloue une bande de carton large de 5 cm., de longueur telle que ses bouts viennent en contact; du papier collé extérieurement sur le joint rend la paroi continue. On vernit le tout au bitume de Judée qui est imperméable à l'eau. On obtient ainsi à peu de frais un vase meilleur que ceux du commerce. Les fréquences 25 et 50 donnent des ellipses et des hyperboles d'écartements convenables.

ENTRAÎNEMENT DES ONDES PROGRESSIVES PAR LES COURANTS

23. — Hypothèse sur l'entraînement des ondes progressives.

1. — L'épaisseur de la couche d'eau animée de la vitesse ψ (par hypothèse uniforme) étant assez grande pour que la tangente hyperbolique soit pratiquement égale à 1, la vitesse de propagation est donnée par la formule:

$$(1) \quad \Psi^2 = 156\lambda + 471 : \lambda.$$

Si l'eau est immobile, du vibreur (fréquence N) émanent des ondes progressives circulaires; leur vitesse Ψ et leur longueur d'onde λ ont leurs valeurs nor-

males Ψ_n et λ_n . Cherchons ce qui arrive quand on donne à l'eau une vitesse uniforme ψ . Bornons-nous d'abord aux phénomènes sur la médiane du canal qui contient le vibreur; je généralise au § 27.

Le phénomène progressif est totalement arrêté par une vitesse convenable du stroboscope; ce qui ne préjuge rien quant aux vitesses, mais exige que la fréquence soit partout la même et égale à celle N du vibreur; le nombre de crêtes ou de creux qui par seconde passent en un point, est égal à N . Soit Φ leur vitesse *absolue*; on doit avoir $N\lambda = \Phi$.

Introduisons l'hypothèse la plus simple : la vitesse de propagation Ψ *relative à l'eau mobile* est déterminée par la longueur d'onde λ et donnée par la formule (1). Pour avoir la vitesse *absolue* Φ , à la vitesse *relative* Ψ il faut superposer la vitesse *d'entraînement* ψ prise avec un signe convenable. D'où :

$$(2) \quad \begin{array}{ll} \text{à l'amont.} & N\lambda_1 = \Phi_1 = \Psi_1 - \psi, \\ \text{à l'aval.} & N\lambda_2 = \Phi_2 = \Psi_2 + \psi. \end{array}$$

A ces équations il faut ajouter les suivantes :

$$(3) \quad \Psi_1^2 = 156\lambda_1 + 471 : \lambda_1, \quad \Psi_2^2 = 156\lambda_2 + 471 : \lambda_2.$$

Pour $\psi = 0$, on a :

$$(4) \quad N\lambda_n = \Psi_n.$$

2. — Par hypothèse nous connaissons N et ψ . Sur le cliché grandis mesurons λ_1 et λ_2 ; les formules (2) donnent Ψ_1 et Ψ_2 . Si nos hypothèses sont exactes, les formules (3) sont satisfaites.

Inversement N et ψ étant donnés, nous pouvons calculer λ_1 et λ_2 en utilisant le tableau du § 1 qui donne Ψ en fonction de λ . Pour chaque valeur de λ transportons dans les équations (2) la valeur correspondante de Ψ ; il en résulte une valeur de ψ positive pour les ondes progressives amont, négative pour les ondes progressives aval. D'où le tracé d'une courbe qui, pour la fréquence N choisie, donne les longueurs d'ondes λ_1 amont, λ_2 aval, en fonction de la vitesse ψ . La figure 25 montre le résultat pour $N = 25$, $N = 50$. On vérifiera que $\lambda_1 + \lambda_2$ croît d'abord très lentement quand ψ croît à partir de zéro, puis de plus en plus vite.

3. — De ce qui précède résulte que les ondes progressives contiennent le vibreur, quelle que soit la vitesse ψ et la fréquence N .

Autrement dit, nous trouverons toujours des solutions aux équations :

$$N = \frac{\Psi_1 - \psi}{\lambda_1} = \frac{\Psi_n}{\lambda_n} = \frac{\Psi_2 + \psi}{\lambda_2}.$$

En effet, partons de $\psi = 0$ (valeurs normales Ψ_n, λ_n); comme Ψ et λ varient en sens inverses, nous sommes certains en diminuant λ par suite en augmentant Ψ de satisfaire la première condition, en augmentant λ par suite en diminuant Ψ de satisfaire la dernière.

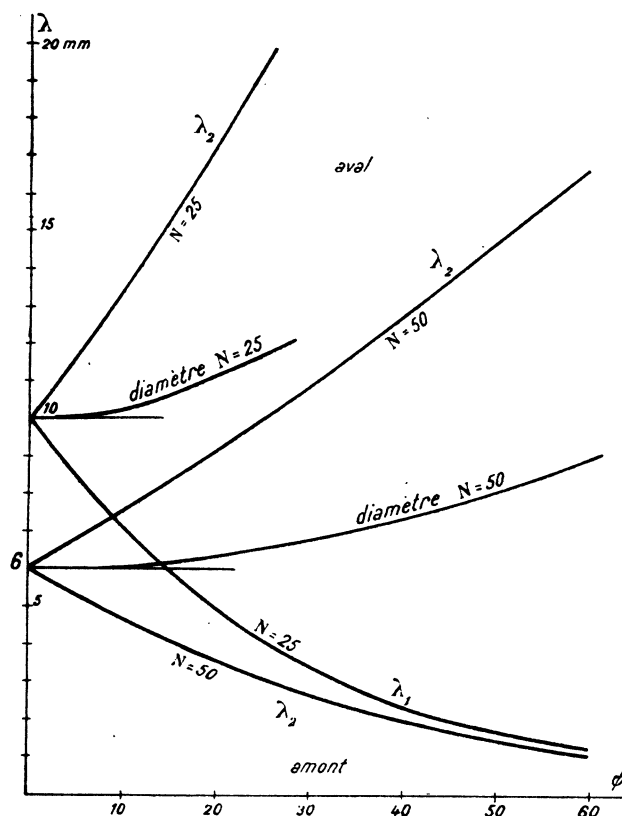


FIG. 25.

Toutefois si $\lambda_2 > 17$ mm. (ondes dites de gravité), Ψ et λ varient dans le même sens; mais comme λ_2 croît alors beaucoup plus vite que Ψ_2 , qui est voisine du minimum, il existe une solution.

4. — ENTRAÎNEMENT DES TRAINS.

Pour ψ assez grand et quand le jet ne passe que pendant une fraction $\varepsilon = t : T$, assez petite de la période, les trains formés à chaque impact sont complètement entraînés par le courant dès que le jet cesse de passer. Supposons que le jet ne dure qu'un temps extrêmement court : le train entraîné serait formé de cercles *concentriques*, se propageant autour de leur centre entraîné avec la vitesse ψ du courant; leur vitesse de propagation Ψ par rapport à l'eau mobile serait indépendante de la

direction, mais ne serait pas nécessairement uniforme; autrement dit, l'écartement des ondes pourrait varier du fait du grandissement du train. Le phénomène serait semblable à celui qu'on observe quand on jette une pierre dans l'eau en apparence immobile; pierre et eau sont également entraînés par le mouvement de la Terre sur son orbite. Sur la droite parallèle au courant passant par le centre, les vitesses absolues à l'amont et à l'aval seraient respectivement $\psi \mp V$.

Une complication résulte de ce que le jet dure un temps beaucoup plus grand que celui nécessaire à la formation du train; par suite lors de son entraînement, les ondes sont plus serrées à l'amont qu'à l'aval: le train n'est plus formé de cercles concentriques. Je reviens là-dessus au § 25.

24. — Résultats.

1. — Supposons ψ inférieur à la vitesse $\psi_0 = 23,3$ cm. : sec. qui donne des rides immobiles ($N = 50$). Les ondes semblent des ellipses (grands axes parallèles au courant) qui diffèrent d'autant moins de cercles que ψ est plus petit. Leurs centres sont déplacés vers l'aval de manière que l'équidistance λ_1 sur la médiane amont soit inférieure à l'équidistance λ_2 sur la médiane aval. La figure 7, à gauche, montre l'allure du phénomène.

Les ondes sont déformées au voisinage de la médiane aval par la diminution de vitesse qui résulte du vibreur, même quand les rides immobiles ne se forment pas. Au voisinage de cette médiane, sans stroboscope on voit une traînée; à travers le stroboscope sur cette traînée les ondes montrent une partie rentrante; dans un angle très aigu elles ont des segments quasi rectilignes formant comme une échelle. Même phénomène pour toutes les vitesses ψ .

2. — Sans changer l'inclinaison du canal augmentons *très lentement* le débit, ce qui augmente la vitesse ψ . Pour ψ peu supérieur à ψ_0 , les rides immobiles apparaissent très larges; la divergence β est voisine de 90° . Les ondes sont encore complètes à l'amont, par suite passent sur les rides; λ_1 diminue, λ_2 croît.

Augmentons le débit, par suite la vitesse ψ . Au-dessus d'une valeur de cette vitesse, les ondes ne vont plus jusqu'à la médiane amont; elles passent sur le V et s'arrêtent sur la première ride. A l'aval les ondes précédentes (notées S) sont complètes et bien visibles; ce sont des ovales ouverts à l'amont dont la figure 27 (on en supprimera la partie supérieure) montre l'allure. Ces ondes sont déformées près de la médiane aval comme il est dit ci-dessus.

Pour ψ assez grand, sur les rides immobiles apparaît un phénomène progressif (courbes P) qui a pour cause leur entretien discontinu. Par définition ces rides se produisent quand un obstacle immobile (dans l'espèce un cylindre vertical de petit

diamètre) plonge en permanence dans un courant; on peut remplacer l'obstacle par un jet vertical gazeux permanent. A l'œil nu rien n'est modifié quand ce jet devient intermittent; le stroboscope montre que les rides sont alors divisées en des segments qui glissent sur les courbes I décrites par les rides pour le jet permanent. Les lieux des extrémités des segments sont les courbes P. Quand le stroboscope n'est pas réglé pour l'arrêt, elles se déplacent dans le même sens que les ondes S; ondes et courbes sont arrêtées simultanément: elles ont même fréquence. Voici ce qui distingue les ondes S et les courbes P. Ondes et courbes se coupent sur la première ride sous un angle qui croît quand ψ augmente. Les ondes S prolongées par continuité passeraient sur la médiane amont près du vibreur, tandis que les courbes P sont visibles à une distance notable du vibreur sur lequel elles sont approximativement centrées. D'où résulte que l'ensemble d'une onde S et d'une courbe P qui se coupent sur la première ride, a l'aspect d'une calebasse.

A l'amont les courbes P cessent d'être visibles à partir d'une ride d'un certain numéro n . Comme quelles que soient leurs dimensions, elles s'arrêtent sur cette ride qu'elles rencontrent quasi normalement, fermées à l'amont pour de petites dimensions, elles sont ouvertes pour les grandes: les grandes calebasses sont incomplètes à l'amont; les petites sont complètes.

Ondes S et courbes P apparaissent à l'instant où le jet creuse la surface liquide en rejetant l'eau vers le bord de la cuvette.

25. — Jet n'occupant qu'une petite fraction de la période; grande vitesse ψ .

1. — Comme conséquence de l'hypothèse du § 23, montrons que si pour de grandes vitesses ψ des ondes S se propageaient sur la médiane amont, la présence des rides immobiles ne devrait pas empêcher de les voir.

Soit $\psi = 40$, vitesse pour laquelle existent des rides immobiles avec une divergence β voisine de 35° . La théorie classique admet que sur la médiane amont leur λ correspond à la vitesse de propagation $\Psi = \psi$; d'où $\lambda = 3$ mm.; en fait l'écartement est un peu plus grand. Soit $N = 50$; du § 23 résulte que pour les ondes progressives on a $\lambda_1 = 1,92$ mm.; la vitesse correspondante de propagation est $\Psi_1 = 50$ environ. Ainsi non seulement les ondes pourraient se propager ($\Psi_1 > \psi$), mais encore le λ_1 serait du même ordre que le λ des rides immobiles.

Or, regardées à travers un viseur peu grossissant près de la médiane amont, les rides montrent des bords tranquilles et lisses; rien ne permet de croire que sur elles et quasi tangentiellement passent des ondes progressives.

On ne peut cependant pas dire que la présence des rides empêche *toujours* la propagation amont des ondes progressives, puisque ces ondes existent *complètes* quand les rides immobiles sont assez larges; à la vérité à l'amont de la première ride elles sont incomparablement plus pâles qu'à l'aval.

2. — Voyons comment agissent les jets intermittents quand on modifie le rapport $\varepsilon = t : T$ de leur durée t et de la période T .

a) Utilisons une couche d'eau mince et de grande vitesse ψ , avec un carton percé d'une fenêtre occupant le $1/25$ de la circonférence qui passe par son milieu. La fréquence du jet est $T = 0,08$ sec.; il passe pendant le temps $t = 0,0032$ sec. ($\varepsilon = 1 : 25$).

Regardons à travers le stroboscope, percé de deux fenêtres diamétralement opposées et dont la vitesse est un peu inférieure à celle de l'arrêt. Chaque pulsation crée un train d'ondes très serrées à l'amont, qui croissent avec une grande vitesse autour du point d'impact (§ 6). Dès que le jet cesse, le train est entraîné par le courant; les ondes qui le forment, diffèrent peu de cercles *non concentriques*, plus serrés à l'amont qu'à l'aval. A chaque instant sur la médiane ils semblent équidistants; leur équidistance λ_1 amont est inférieure à leur équidistance aval λ_2 ; λ_1 et λ_2 croissent à mesure que le train se déplace; simultanément croît le cercle limité par l'onde de plus petit rayon; à l'intérieur de ce cercle n'existe aucune onde appartenant au train qui semble grandir en demeurant semblable à lui-même.

Considérons ce qui se passe au voisinage de la droite de symétrie; les raisonnements s'appliquent aux parties amont du train et aux parties aval. Numérotions les crêtes en notant 1 la plus intérieure; n sera le numéro de la $n^{\text{ième}}$. Soit L la largeur du train, distance des crêtes extrêmes. Si la vitesse de propagation était la même pour toutes les crêtes, L et λ ne changeraient pas. De ce que L augmente, résulte qu'à chaque instant la vitesse est plus grande à mesure que le numéro augmente. Explicitons la vitesse Ψ de la crête 1 par rapport à l'eau mobile à l'instant du lâcher. Raisonnons sur les ondes aval; la vitesse absolue sera $\Psi + \psi$ (origine des temps t); il y a lieu de croire que Ψ diminue à mesure que son déplacement D augmente. Dans l'hypothèse la plus simple, vraisemblablement insuffisante, sa vitesse absolue est $\Phi_1 = \Psi + \psi - aD$.

Pour la crête n : $\Phi_n = \Psi + \psi - aD + b(n - 1)$. Pour a assez grand devant b , toutes les vitesses absolues diminuent, toutefois moins vite à mesure que n augmente. Le déplacement total de la crête n au temps t est :

$$\int_0^t \Phi_n dt = \int_0^t (\Psi + \psi - aD) dt + b(n - 1)t.$$

La différence des chemins pour les crêtes consécutives n et $n + 1$ est par suite bt . A l'origine des temps si les crêtes sont équidistantes de λ_0 , au bout du temps t elles le sont de $\lambda = \lambda_0 + bt$. Ainsi l'hypothèse implique que l'écartement des crêtes qui grandit, est le même à chaque instant. Le raisonnement vaut pour la partie amont des trains (il faut changer le signe de ψ); mais à l'origine des temps λ_0 est plus petit, d'où vraisemblablement des paramètres Ψ , a et b différents.

Soit T_1 et T_2 deux trains consécutifs (*fig. 26*); notons M leurs régions amont,

V leurs régions aval; V_2 passe sur M_1 : les trains se coupent à angle vif. Les régions V_1 et V_2 sont toujours loin l'une de l'autre; les régions M_1 et M_2 sont voisines et peuvent se superposer partiellement. En effet numérotons les ondes des trains dont je représente les extrêmes. Par rapport à l'eau mobile la vitesse Ψ_1 de l'onde 1 du train est plus petite que la vitesse Ψ_n de l'onde n du train 2 : ces vitesses sont diri-

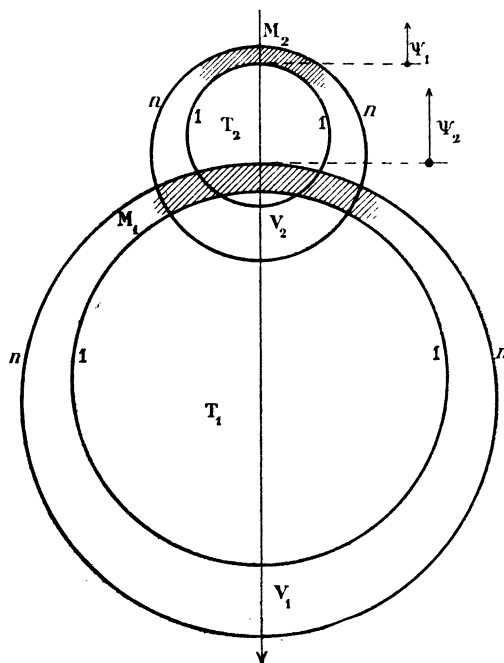


FIG. 26.

gées vers l'amont. Les ondes extérieures de T_1 peuvent donc rattraper les ondes intérieures de T_2 . Je décris ci-dessous des ondes stationnaires que cette superposition permet d'expliquer. On relira le 2° du § 6 où j'invoque l'inégalité de vitesse des ondes d'un train pour expliquer la formation d'un système régulier qui correspond à la fréquence N des jets.

Les rides immobiles, visibles sans stroboscope, ont mêmes formes que pour le jet permanent; elles sont toutefois moins nettes. A travers le stroboscope on ne voit que les trains ci-dessus décrits. Conclusion : numérotons les ondes des trains et les rides; chaque ride est l'enveloppe immobile des ondes de même numéro.

b) Découpons dans le carton une fenêtre qui occupe le quart de la circonférence moyenne; la période demeurant la même ($T = 0,08$), le jet passe pendant le temps $t = 0,02$ sec. Mêmes phénomènes sauf que le jet défend les ondes qui se forment à son amont, contre l'entraînement par le courant; comme les ondes aval sont entraî-

nées, de là résultent des ondes ovales, petit bout à l'amont. Quand le jet cesse de passer, les ondes amont sont entraînées; mais le nombre de celles qui passent à l'aval du point d'impact jusqu'au rétablissement du jet est plus petit.

D'une parfaite netteté sans stroboscope, les rides immobiles sont encore invisibles à travers lui; on ne distingue que les ondes progressives ovales dont elles sont les enveloppes.

c) Découpons le carton de manière que le jet passe pendant les $3/4$ de la période ($t = 0,06$ sec.). Les rides immobiles sont visibles à travers le stroboscope.

A l'instant que le jet s'établit, se forme encore un train d'ondes ovales; pour de grandes vitesses ψ une partie amont du train passe à l'aval du point d'impact. Toutefois à quelque distance du point d'impact ne sont nettes que les parties aval des trains; elles s'arrêtent sur la première ride; sur les rides immobiles suivantes on ne distingue que les courbes P décrites au § 24.

Le phénomène reste le même, toutefois de moins en moins net, quand le temps t de passage croît jusqu'à occuper les $24/25$ de la période.

d) ONDES STATIONNAIRES AVAL.

Pour $t = 0,0032$, $t = 0,02$, et même pour $t = 0,06$ ($T = 0,08$) quand la vitesse ψ est grande, sans stroboscope on voit à l'aval des arcs immobiles dont l'écartement diminue à mesure que ψ décroît. Comme pour t très petit, n'existent que des trains circulaires, on doit admettre que les ondes stationnaires aval sont dues à la superposition partielle des régions M amont des trains.

On comprend dès lors que pour $t = 0,06$, elles n'existent qu'avec des vitesses ψ assez grandes pour permettre à quelques ondes de passer à l'aval du point d'impact.

e) Mêmes phénomènes avec la fréquence $N = 50$ ($T = 0,02$). Pour des jets passant pendant $1/5$ de la période et pour une vitesse ψ assez grande, les trains se forment autour du point d'impact, puis passent à l'aval de ce point. Comme la fréquence des trains est quatre fois plus grande que dans l'expérience précédente, ils sont quatre fois plus rapprochés, ce qui rendrait le phénomène difficile à débrouiller s'il n'était pas connu pour la fréquence $N = 12,5$.

3. — ONDES PROGRESSIVES ET RIDES IMMOBILES.

Résumons ce qu'apprennent les expériences précédentes.

Quand les rides sont très larges (vitesse ψ peu supérieure à $\Psi_0 = 23,3$ cm.), les ondes se propagent à l'amont, par conséquent passent sur les rides qu'elles coupent à angle vif.

Supposons la vitesse ψ très supérieure à Ψ_0 (divergence β petite). Pour $\varepsilon = t : T$ petit, invisibles à travers le stroboscope, les rides sont les enveloppes des ondes progressives complètes et plus ou moins ovales. Pour $t : T$ assez grand, les rides sont

visibles à travers le stroboscope; les ondes progressives s'arrêtent sur la première ride. Sur les rides suivantes progressent les courbes P dont les formes diffèrent beaucoup de celles qu'auraient des ondes amont entraînées par le courant; en particulier ces courbes aboutissent à angle vif sur les ondes progressives.

Dans tous les cas les rides ont les mêmes formes que le jet soit permanent ou intermittent.

4. — VITESSE ψ DE L'EAU NON UNIFORME.

En amont du seuil SS (§ 4, *fig. 3*), ψ est quasi nul. Dans la bande BB, ψ croît très vite; quand la distance D au seuil croît, ψ croît plus lentement. Utilisons un jet de fréquence $N = 12,5$, passant pendant la fraction $\varepsilon = 1 : 40$ de la période. Faisons varier la distance D du point d'impact au seuil.

Pour D grand les ondes progressives sont circulaires et entraînées par le courant. Pour D assez petit les ondes sont ovales; les parties qui lors de l'impact sont créées à l'amont du point d'impact, ne passent pas à l'aval et ne se propagent pas à l'amont.

Diminuons encore D. Les parties amont des ondes extérieures du train créé par l'impact parviennent dans une région où la vitesse ψ est petite; elles passent sur le seuil et se propagent à son amont sur la surface de l'eau tranquille du réservoir R où elles deviennent des arcs de cercle. Numérotions les ondes du train en commençant par celle de plus petit diamètre. A l'aval les ondes de petits numéros deviennent des ovales; à l'amont elles ne se propagent pas. A partir d'un certain numéro elles se propagent à l'amont et à l'aval. A l'amont du seuil elles deviennent des arcs de cercle qui à travers la bande BB se raccordent à des ondes aval de forme ovale.

Quand D est quasi nul, nul ou négatif, toutes les ondes du train se propagent à l'amont et à l'aval; ce sont des arcs de cercle à l'amont du seuil et des ovales à l'aval de la bande BB; le raccordement se fait à travers cette bande.

La forme des ondes à l'aval du seuil (ondes « ovales » de la description précédente) dépend de l'inclinaison de la glace qui détermine l'augmentation de la vitesse ψ de l'amont à l'aval. En particulier pour $D < 0$ et une grande inclinaison, les ondes sont formées d'une partie circulaire raccordée à travers la bande BB à une partie d'allure parabolique, sommet à l'aval sur la ligne de plus grande pente passant par le vibreur.

Les phénomènes sont modifiés quand on change la fraction ε . Prenons $\varepsilon = 1 : 4$, ce qui augmente le nombre des ondes du train donné par chaque impact. Pour une distance D convenable les ondes O_1 de petits numéros sont complètement entraînées; puis viennent des ondes O_2 arrêtées à l'amont par l'impact suivant et qui se propagent à l'aval; enfin les ondes O_3 de grands numéros se propagent à l'amont sur l'eau du réservoir R et à l'aval en donnant des ondes ovales. De là résulte qu'à l'aval, à l'intérieur des ondes ovales dues aux ondes O_2 et O_3 du train, se trouvent

un ou plusieurs cercles concentriques qui sont les ondes O_1 entraînées : toutes ces ondes grandissent du fait de leur propagation. Les cercles sont peu à peu déformés en raison de la non uniformité de la vitesse ψ d'amont en aval.

26. — Conséquences du mécanisme de formation des ondes.

1. — Pour $\psi = 0$, et pour des jets passant pendant une très petite fraction $\varepsilon = t : T$ de la période, la constitution des trains dus à chaque impact est indépendante de leur fréquence $N = 1 : T$. Ce n'est qu'à quelque distance du point d'impact, en raison du recouvrement partiel des trains de fréquence N , que se forme le système régulier pour lequel Ψ , λ , N sont liés par la formule de Kolvin.

Pour $\psi > 0$, près du point d'impact les trains doivent être modifiés par le courant en raison de leur constitution propre et indépendamment de leur fréquence; ce n'est qu'à quelque distance que se formerait le système régulier de fréquence N auquel (sur la droite de symétrie) s'appliquent les relations :

$$N\lambda_1 = \Phi_1 = \Psi_1 - \psi, \quad N\lambda_2 = \Phi_2 = \Psi_2 + \psi.$$

D'autre part pour ε très petit et ψ grand, les ondes sont abandonnées et entraînées par le courant. Devenant indépendantes les unes des autres, leur propagation doit rester indépendante de N et uniquement déterminée par leur constitution; seul le nombre de trains dépend de N .

2. — Découpons le carton de manière que les jets 1 et 2 de même fréquence $N = 12,5$, passent respectivement pendant les fractions $\varepsilon_1 = 1 : 4$ et $\varepsilon_2 = 1 : 40$ de la période $T = 0,08$. Les jets commencent à passer au même instant. Les bouts des tubes effilés sont à quelques cm. l'un de l'autre sur la normale au canal. Les ondes progressives partent simultanément, preuve que leur départ suit immédiatement l'impact. Elles n'ont pas la même forme. Les ondes 1 sont ovales; seules quelques ondes amont passent à l'aval du vibreur. Les ondes 2 sont circulaires et complètement entraînées par le courant qui est de grande vitesse. Bien que les fréquences soient égales, les parties aval des ondes 2 se propagent plus vite que celles des ondes 1. Visibles sans stroboscope, les rides immobiles ne le sont pas à travers lui, par suite elles existent comme enveloppes des ondes progressives.

3. — Découpons le carton de manière que les jets 1, 2 aient respectivement les fréquences 12,5 et 50 auxquelles correspondent pour des ondes régulières les vitesses de propagation très différentes 23 et 30 cm. : sec. Le jet 1 passe pendant la fraction $\varepsilon_1 = 1 : 40$ de la période $T = 0,08$, le jet 2 passe pendant la fraction $\varepsilon_2 = 1 : 20$ de la période $T = 0,02$; fractions assez petites pour que les ondes soient circulaires

(complètement entraînées par le courant). Elles se propagent avec la même vitesse qui par conséquent n'est pas déterminée par la fréquence.

On compare les vitesses réduites par le stroboscope; mais il résulte du § 5, 6°, que les vitesses apparentes sont proportionnelles aux vitesses vraies pourvu que 4α soit petit devant 0,5; c'est dire que le stroboscope impose aux deux systèmes une très petite vitesse centrifuge ou centripète, ce qui du reste est nécessaire pour vérifier qu'elle est la même pour les deux.

La divergence β de la première ride semble exactement la même pour les deux jets; or cette ride est l'enveloppe des ondes circulaires progressives. Admettons que le centre des cercles est entraîné avec la vitesse ψ du courant; soit Ψ la vitesse de propagation radiale; on a $\psi \sin \beta = \Psi$. Si β est le même pour les deux systèmes, les vitesses Ψ sont égales, c'est-à-dire indépendantes de la fréquence.

A la vérité dans l'expérience du 2°, les rides semblent avoir même divergence; mais on ne peut pas conclure l'égalité des vitesses de propagation, les rides étant ovales pour le jet 1, circulaires pour le jet 2.

27. — Conséquence de l'hypothèse du § 23 pour une direction quelconque.

1. — Cherchons la forme des ondes, à supposer que la proximité du vibreur ne les trouble pas : la solution suivante ne vaut donc en tout cas que pour la partie aval des ondes. Posons que du vibreur émanent des ondes rectilignes de longueurs d'onde λ donnés par les équations :

$$(1) \quad N\lambda = \Psi - \psi \cos \theta, \quad (2) \quad \Psi^2 = 156\lambda + 471 : \lambda.$$

θ est l'angle que fait avec la médiane amont la normale à l'onde auxiliaire rectiligne; N et ψ sont les paramètres de l'expérience. Par hypothèse l'onde est l'enveloppe des ondes auxiliaires issues du vibreur au même instant; autrement dit, la courbe (λ, θ) est la podaire de l'onde; nous la construirons en prenant pour rayon vecteur un multiple arbitraire de λ .

J'explique la marche des calculs sur un exemple numérique.

Soit $\lambda = 4 \text{ mm.} = 0,4 \text{ cm.}$, $N = 40$. L'équation (2) donne $\Psi = 35,2$. De l'équation (1) on tire $\psi \cos \theta = 19,2$.

Soit $\psi = 40,8$ (je prends ce nombre parce qu'il se trouve dans le tableau du § 1); $\lambda = \text{mm.}$ correspond donc à l'angle tel que $\cos \theta = 19,2 : 40,8 = 0,471$, $\theta = 62^\circ$.

Soit $\lambda = 12 \text{ mm.} = 1,2 \text{ cm.}$ L'équation (1) donne $\Psi = 24,1$. De l'équation (2) on tire $\psi \cos \theta = 24,1 - 48 = -23,9$. Soit $\psi = 40,8$; $\lambda = 1,2$ correspond donc à l'angle tel que $\cos \theta = -23,9 : 40,8 = -0,586$, $\theta = 126^\circ$.

2. — En définitive les calculs sont faits à l'aide du tableau de nombres du § 1 ou des courbes de la figure 1 qui le représentent. Admettons la vitesse $\psi = 40,8$ et la fréquence $N = 40$. Pour $\theta = 0$, $\theta = 90$, $\theta = 180$, le tableau donne respectivement $\lambda = 2$ mm., $\lambda = 7$ mm., $\lambda = 16$ mm.

Pour $\theta = 45$ et 135 , les valeurs de $\psi \cos \theta$ sont respectivement :

$$\pm 40,8 \times 0,707 = \pm 28,8.$$

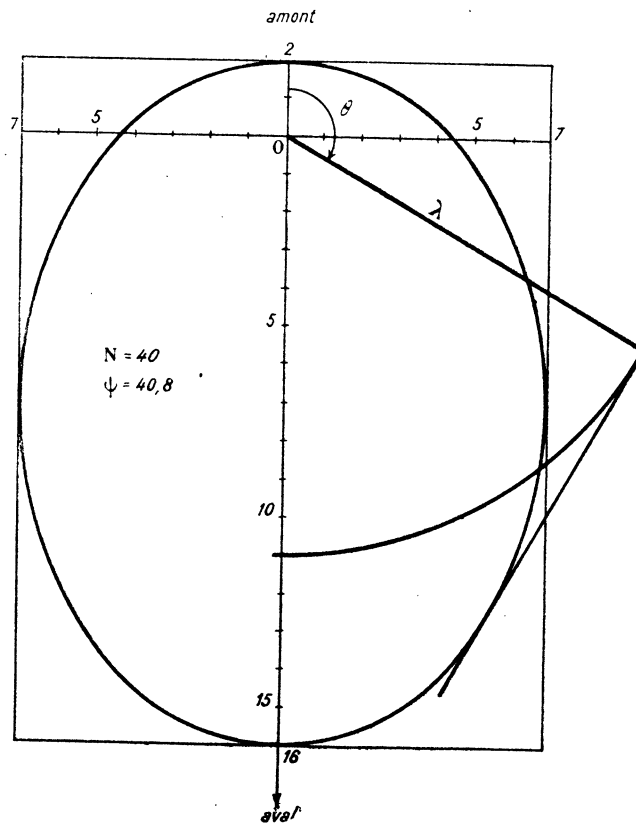


FIG. 27.

D'où approximativement $\lambda = 3$ et 13 mm.; une interpolation proportionnelle fournit les valeurs plus exactes $\lambda = 2,95$, $\lambda = 13,14$ mm. Et ainsi de suite pour les angles faciles à construire graphiquement $\theta = 30, 60, 120, 150$. Nous avons ainsi neuf tangentes de l'onde; d'où la figure 27.

28. — Oscillation horizontale.

1. — OSCILLATION HORIZONTALE D'UN FIL VERTICAL DANS L'EAU IMMOBILE.

A quelque distance de l'obstacle oscillant le stroboscope montre des ondes circulaires qui semblent constituer un faisceau unique, bien que, la production des ondes exigeant le rejet de l'eau, il existe deux sources de même fréquence N , liées aux déplacements de sens contraires du fil, par conséquent décalées d'une demi-période et donnant respectivement des ondes dont l'amplitude est maxima du côté où l'eau est rejetée.

Comme le plus souvent les ondes arrêtées montrent deux traits par période, on ne peut affirmer qu'à distance de l'obstacle le phénomène est constitué par deux systèmes d'ondes semi circulaires intercalées ; tout se passe comme pour l'oscillation verticale du fil.

L'oscillation horizontale pose un problème analogue à celui du § 6. En donnant au fil une vitesse horizontale ψ uniforme nous créons les rides *immobiles par rapport à l'obstacle* relatives à cette vitesse ψ . Arrêtons brusquement le fil : ces rides se propagent dans le sens du mouvement antérieur ; elles grandissent, leurs écartements augmentent, leurs vitesses diminuent. Quand le fil oscille, à quelle condition obtient-on des ondes progressives de λ déterminé par la fréquence N de l'oscillation ?

Le dispositif de la figure 28 réalise une oscillation d'amplitude a connue, avec une fréquence $N = 12,5$. Une bielle moyennement horizontale est mue par un goujon excentrique E , calé à 2 cm. de l'axe d'un moteur synchrone faisant 12,5 tours : sec. La bielle actionne la planchette BAC qui tourne autour de l'axe vertical A ; sur sa partie AC sont fixés des goujons verticaux distants de 2 cm. ; leur course $2a$ est 1 — 3 — 5 ... mm. La planchette ab qui porte le fil vertical oscillant, est percée à l'un des bouts d'un trou où pénètre à frottement le goujon choisi ; l'autre bout est convenablement guidé. Des guides empêchent tout fouettement des pièces oscillantes. L'eau est dans un vase cylindrique de diamètre 30 cm., profond de 6 cm.

On regarde à travers un disque percé d'une fenêtre, calé sur l'axe d'un second moteur synchrone faisant 12,5 tours : sec. ; le phénomène est automatiquement arrêté. La vitesse maxima horizontale du fil est $v = \pi N(2a) = 38,25(2a)$; en une période $T = 1 : N$, un mobile animé de cette vitesse parcourt le chemin $D = 2\pi a$. Pour que v soit de 23,1 cm. : sec., $2a$ doit être sensiblement égal à 6 mm.

2. — Pour une vitesse *uniforme* de l'obstacle, on n'obtient des rides que pour $\psi > 23,1$. Il semble donc nécessaire pour l'entretien d'un phénomène progressif qui

vraisemblablement débute par la formation de rides, que $2a$ soit au moins égal à 6 mm. Cependant pour $2a = 3$ mm., $v = 11,5$, $D = 9,4$, existent des ondes circulaires. En posant sur le fond du vase une plaque noircie sur laquelle sont tracés des traits blancs équidistants, on vérifie que le λ de ces ondes est voisin de 18 mm. Or pour le système régulier de fréquence $N = 12,5$, la formule de Kelvin donne $\lambda = 18,5$ mm., $\Psi = 23,3$ cm. : sec. Conclusion : le fil oscillant horizontalement entretient ce système.

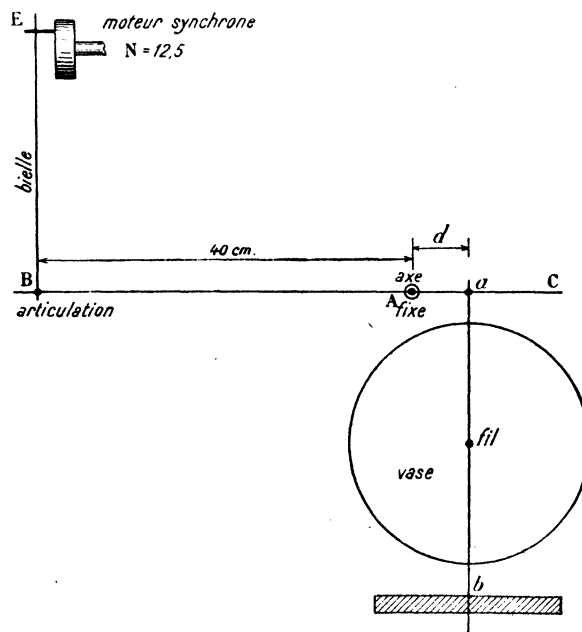


FIG. 28.

Un obstacle animé de la vitesse *uniforme* 11,5, ne donne pas de rides; mais quand il oscille avec cette vitesse *maxima*, non seulement il donne des rides, mais il devient la source d'un phénomène progressif de vitesse Ψ quasiment double. Comme pour l'entretien des ondes progressives il paraît nécessaire que le phénomène créé près le fil à chaque période rattrape le système régulier de fréquence N , il faut admettre que sa vitesse est *supérieure* à celle $\Psi = 23,3$ de ce système.

Même résultat (avec des ondes d'amplitude très petite) pour $2a = 1$ mm., $v = 3,8$ cm. : sec. Manifestement la vitesse maxima v n'intervient pas dans la formation des rides, par suite dans celle des ondes progressives régulières : les phénomènes près de l'obstacle sont très différents pour une vitesse uniforme ou pour une vitesse variable.

Si l'on augmente la course $2a$, l'amplitude des ondes augmente; leur équidistance reste voisine de 18 mm. : l'oscillation du fil (diamètre 2 mm.) crée toujours le système régulier d'ondes circulaires qui correspond à la fréquence $N = 12,5$.

3. — Voici l'intérêt de ces résultats. *A priori* il n'existe aucune relation entre la vitesse ψ d'un corps et la vitesse de propagation Ψ de l'ébranlement qu'il produit : une oscillation de très petite vitesse maxima d'un piston au bout d'un long tuyau crée une perturbation qui dans l'air se propage avec une vitesse de l'ordre de 340 m. : sec.

Mais on a toujours expliqué l'existence des rides immobiles en leur supposant une vitesse Ψ à l'amont égale à la vitesse uniforme ψ de l'obstacle, que la formule de Kelvin s'applique ou non au calcul de la longueur d'onde ; du reste si l'on arrête l'obstacle, les rides continuent à se propager : il existe donc ici une relation entre ψ et Ψ . D'autre part quand l'obstacle oscille horizontalement et produit des ondes progressives dont la constitution est déterminée par sa fréquence, le phénomène initial élémentaire semble la production des rides amont : les expériences précédentes montrent qu'il n'existe plus aucune relation entre la vitesse de l'obstacle oscillant et la vitesse de propagation des ondes.

4. — UN JET GAZEUX VERTICAL OSCILLE HORIZONTALEMENT.

La planchette *ab* est percée d'un trou dans lequel passe un tube vertical de verre effilé que prolonge un long tube de caoutchouc, de petit diamètre, très flexible, fixé à sa partie supérieure de manière qu'il ne soit pas tendu et que sa direction soit quasi verticale. Un tube de plus grand diamètre le relie à un robinet de gaz d'éclairage ; il passe à portée de la main ; une pince à vis règle l'arrivage du gaz de manière que le jet immobile forme dans l'eau une très petite cuvette. Même pour $2a = 1$ mm., $v = 3,8$ cm. : sec., on obtient le système d'ondes circulaires qui correspond à $N = 12,5$; l'amplitude des ondes est beaucoup plus grande qu'avec le fil de diamètre 2 mm.

Ce dispositif permet une expérience intéressante. Remplaçons le vase profond par un vase obtenu en mastiquant avec de la cire vierge, sur un disque de glace, un cylindre circulaire (hauteur 1 cm.) obtenu en soudant les bouts d'un fragment de ressort de petite pendule (diamètre 265 mm., aire 550 cm²). Si dans ce vase bien nivelé nous versons 55p grammes d'eau, nous obtenons une couche épaisse de *p* mm.

Reportons-nous à la figure 1 ; déplaçons-nous sur la droite $N = 12,5$. De 18,5 mm. pour l'épaisseur *l* supérieure à 5 mm., la longueur d'onde λ est de 12,7 mm. pour $l = 1$ mm. (épaisseur qu'il est possible d'obtenir à peu près uniforme). Ce qu'on vérifie en posant sur le bord du vase un cadre mince sur lequel sont tendus des fils blancs équidistants. Le jet ne doit pas assécher la glace autour du point d'impact ; toutefois le phénomène ne semble pas modifié si l'aire asséchée est très petite. Même résultat avec le fil oscillant ; mais le réglage est plus facile avec le jet.

Remarque. — On peut répéter l'expérience du 2° avec un pendule long d'un mètre environ, terminé par une pointe qui plonge dans l'eau. Connaissant la fré-

quence et mesurant l'amplitude, on détermine la vitesse maxima v . Les résultats sont les mêmes qu'au 2°, avec cette différence qu'en raison de la période T voisine de 2 sec., on n'obtient plus le système régulier de période T : les trains lâchés à chaque oscillation se comportent comme des rides quand on arrête l'obstacle qui les forme.

5. — EAU EN MOUVEMENT.

Comme vibreur utilisons une sonnerie dont on a supprimé le timbre et la boule; un fil (diamètre 2 mm.) convenablement replié et mastiqué sur le prolongement de l'armature, oscille dans la direction de la vitesse ψ d'une couche assez épaisse pour qu'il ne sorte pas de l'eau. La vitesse ψ est de l'ordre de 50 cm. : sec.; sans stroboscope on voit les mêmes rides que pour le fil non oscillant. Voici ce qu'on observe pour le parcours amont-aval du fil.

On est encore tenté de croire que les rides aval (concaves vers l'amont) et les ondes progressives liées à leur production, n'apparaissent que si le mouvement relatif du fil et de l'eau est supérieur à 23,1 cm.; d'où $v > \psi + 23,3$, soit pour $\psi = 50$, $v > 73$ cm. : sec. Or la fréquence N de la sonnerie est certainement inférieure à 15, $2a$ l'est certainement à 1 cm., par suite $v \ll 47$ cm. : sec. Cependant au bout de chaque parcours amont-aval, on voit des ondes progressives concaves vers l'amont comme lancées par le fil.

Quand le fil va de l'aval à l'amont, il donne aux rides un déplacement vers l'amont; elles suivent le mouvement du fil; leur courbure augmente quand le fil remonte le courant. Il n'existe pas d'ondes progressives amont.

EAU TOURNANT EN BLOC

29. — Ondes progressives sur l'eau tournant en bloc.

1. — Le support tournant est un disque de diamètre 30 cm. fixé sur le bout d'un axe coaxial bien guidé par un cadre métallique; le cadre est vissé sur une planche traversée par trois vis calantes au moyen desquelles on rend l'axe vertical. Sur l'axe est enfilée une poulie qu'actionne un moteur synchrone (12,5 tours : sec.) par l'intermédiaire d'un train de poulies qui permet d'imposer au plateau un nombre de tours : sec. très voisin de 0,8 ou de 0,5.

Sur le plateau repose coaxialement une bassine tronc-conique (diamètre inférieur 30 cm., supérieur 40 cm.; hauteur de la paroi 20 cm.), qu'on remplit de manière que pour $n = 0,8$ l'eau, dont la surface est un parabolôïde, n'arrive pas jusqu'au bord (masse d'eau de l'ordre de 25 kilogs). Quand l'eau tourne en bloc (ce qui demande un temps notable), la vitesse linéaire à la distance r de l'axe est

$\psi = 2\pi nr = 5r$; au bord du disque ($r = 20$) elle est de 100 cm. : sec.; elle est 23,1 pour $r = 46$ mm. Avec l'eau tournant en bloc on connaît la vitesse linéaire à toute distance de l'axe, ce qui est un grand avantage.

2. — Utilisons un jet intermittent $N = 50$, $\varepsilon = 1 : 3$.

a) Plaçons le point d'impact P sur l'axe géométrique C de rotation : les ondes sont circulaires avec le même λ que pour l'eau immobile. Ainsi la propagation radiale des ondes progressives n'est pas modifiée par les courants tangentiels dont la vitesse linéaire est proportionnelle à la distance de l'axe.

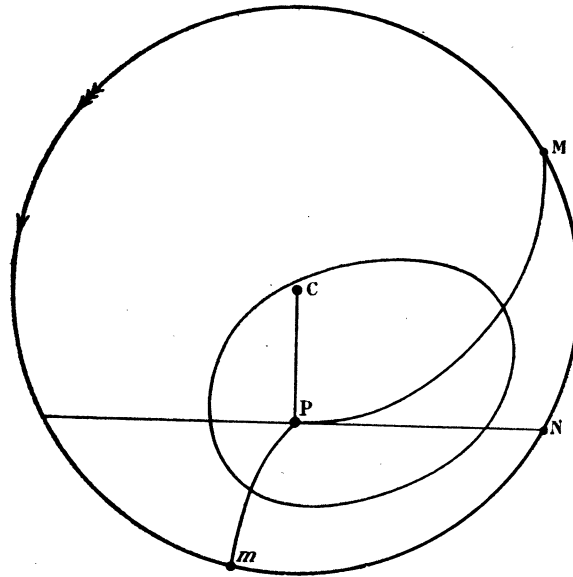


FIG. 29.

b) Le point d'impact est à une distance r de l'axe assez petite pour qu'il ne se forme pas de rides immobiles : les ondes divergentes se propagent à l'amont et à l'aval sur toute la surface parabolique; elles se réfléchissent sur la paroi. Leurs minimums m et leurs maximums M d'écartements sont sur deux courbes telles que mP et PM . Comme à l'intérieur de l'onde tracée, le nombre des ondes est partout le même, elle permet de juger des écartements. Pour r très petit la courbe PM semble se confondre avec la normale PN à la droite CP . La courbe Pm reste inclinée dans le sens représenté.

Les ondes stationnaires visibles sans stroboscope, qu'au § 12 j'attribue à l'existence des harmoniques, sans encore visibles, mais ovales.

c) Pour les distances r telles qu'il existe des rides immobiles, on prévoit la forme des ondes par analogie avec ce qui a lieu pour une vitesse ψ uniforme. Soit $\varepsilon = t : T$ la fraction de la période $T = 1 : N$ pendant laquelle passe le jet. Pour ψ pas trop grand, les ondes progressives S sont des ovales qui s'arrêtent quasi tangentiellement sur la première ride; en raison de leur entretien discontinu sur les rides se propagent des courbes P qui se raccordent à angle vif aux ondes S . Pour ψ assez grand et d'autant plus grand que ε est lui-même plus grand, les trains formés à chaque impact sont complètement entraînés sous forme d'ondes circulaires qui, abstraction faite de l'entraînement, grandissent comme sur une eau tranquille. Les rides encore visibles sans stroboscope sont les enveloppes de ces cercles.

Dans un autre mémoire j'étudie la forme des rides pour l'eau tournant en bloc. Traçons le cercle dont le centre est sur l'axe de rotation et qui passe par le vibreur. Notons I et E les parties des rides qui sont respectivement à l'intérieur et à l'extérieur de ce cercle. Dans un vase indéfini les parties E s'étendraient indéfiniment; elles se réfléchissent sur la paroi du vase; d'où une complication dont je ne tiens pas compte. Les parties I se développent entre le vibreur et un cercle γ tel que la vitesse ψ linéaire y soit *approximativement* égale à 23,3 cm. : sec.; elles s'y réfléchissent; je néglige cette complication et ce qui résulte des réflexions multiples entre la paroi et le cercle γ tant pour les parties E que pour les parties I .

On prévoit que les ondes S se propagent sur la surface parabolique entre les premières rides I et E . Dans un vase indéfini elles se prolongeraient jusqu'à la ride E qui est indéfinie; le vase étant fini, elles sont extérieurement limitées par sa paroi qu'elles rencontrent sous un angle qui serait déterminé par leur forme complète, et sur laquelle elles se réfléchissent. Du côté intérieur elles sont limitées par la première ride I ; mais comme elles ne subissent pas de réflexion sur le cercle γ , elles continuent leur propagation après avoir dépassé l'extrémité de la ride I qui se termine brusquement.

Quand r croît à partir de la limite inférieure pour laquelle les rides immobiles apparaissent, les parties I d'abord réduites quasiment à rien, augmentent de longueur. Dans un vase indéfini, les parties E seraient indéfinies; dans le vase fini, jusqu'à leur rencontre avec la paroi leur longueur diminue; elles se réduiraient à rien pour le vibreur au voisinage immédiat de la paroi.

Après qu'elles ont dépassé le bout a de la première ride I , extérieurement limitées par le vase, les ondes S semblent aboutir intérieurement sur une courbe ab qui prolonge la ride. En raison de la grande vitesse linéaire de l'eau sur la paroi, leur écartement y est beaucoup plus grand que sur la courbe ab . On est tenté de conclure de là que la courbure des ondes qui près du vibreur tournent leur concavité vers l'amont, diminuera (ce qui est vrai), s'annulera et changera de signe (ce qui est faux). En effet, à la vitesse d'entraînement qui est proportionnelle à la distance r à l'axe, il faut superposer la vitesse de propagation sur l'eau mobile qui diminue à

mesure que l'écartement des ondes croît. Aussi loin qu'on peut suivre les ondes, elles tournent leur concavité vers l'amont. Dans la figure 30 je ne trace que quelques ondes pour montrer leur allure.

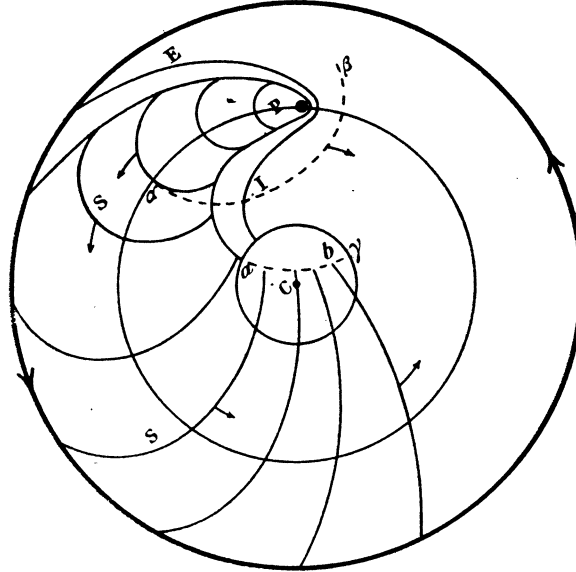


FIG. 30.

d) Près du bord de la bassine, pour $n=0,8$ la vitesse linéaire atteint 1 m. : sec. : même pour ε notable, les trains produits à chaque impact sont complètement entraînés sous forme d'ondes quasi circulaires : le phénomène est semblable à celui du 2° du § 25, sauf qu'ici les courants sont circulaires. Les cercles grandissent entre les parties I et E des rides immobiles encore visibles sans stroboscope. Toutefois les parties amont des cercles (concaves vers l'aval) cessent vite d'être distinctes; ne restent que les parties aval, d'abord concaves vers l'amont, mais qui subissent ensuite les changements de forme ci-dessus décrits.

e) Pour une distance \overline{CP} assez grande, diminuons la fréquence n de manière à réduire à presque rien la longueur des rides I, tout en maintenant les rides E (vibrateur sur le cercle γ). Les ondes, qui maintenant ne sont pas arrêtées par les rides intérieures inexistantes, se prolongent jusqu'à l'amont du vibrateur, en dehors de la région où débutent les rides E; elles s'y propagent vers l'amont. Elles aboutissent donc à l'un de leurs bouts quasi tangentiellement sur la première ride E au voisinage de laquelle leur courbure est maxima; leur courbure diminue, passe par un minimum, puis croît de nouveau quand elles reviennent derrière le vibrateur où leur écartement est minimum. La courbe $\alpha\beta$ de la figure 30 montre leur allure. Pour n assez petit, le cercle γ coïncide avec la paroi; les ondes vont de la paroi amont à la paroi aval en entourant le vibrateur.

f) Sur les rides on voit courir les courbes P. J'ai dit que les ondes aboutissent sur une courbe *ab* prolongement de la première ride I; cependant à l'intérieur de cette courbe, avec une variation brusque de direction, elles se prolongent par des ondes qui semblent émaner des rides I comme suite des courbes progressives P. Le fait est intéressant comme montrant que les courbes P sont distinctes des ondes notées S.

Remarque. — Les expériences précédentes ont d'abord été faites à l'aide de la *stroboscopie par diffusion*, commode pour observer l'ensemble d'un phénomène étendu. Elle consiste à regarder, par réflexion sur la surface liquide, un grand disque calé sur l'axe d'un moteur (réglé par une résistance) et sur lequel sont peints en noir des angles égaux et équidistants. Les intervalles entre ces angles sont peints avec de la poudre d'aluminium en suspension dans de l'eau gommée. On s'arrange de manière à ne voir que la moitié du disque, de manière que sa vitesse soit partout de même sens. Les résultats sont les mêmes qu'avec la stroboscopie ordinaire (visions à travers des fenêtres); l'éclairage est beaucoup plus facile.

30. — État variable.

1. — L'eau de la bassine étant au repos, mettons le moteur en marche. Comme je le montre dans le Mémoire n° 67 du Ministère de l'Air, ou moins pour un vase cylindrique et dans les meilleures conditions de réglage, la vitesse de rotation définitive débute sur la paroi et se propage vers l'axe; à chaque instant l'eau est immobile à l'intérieur d'un cercle Γ dont le rayon décroît. Les rides immobiles n'existent qu'après que le cercle Γ a passé sur le vibreur P: la partie E apparaît jusqu'à la paroi; d'abord nulle, la partie I s'allonge à mesure que décroît le rayon du cercle Γ ; elle s'arrête sur le cercle γ . Ici le cercle Γ n'est pas un lieu de discontinuité rigoureuse, parce que le vase est tronconique et non exactement de révolution, que son fond n'est pas une section droite, que le plateau tournant n'est pas exactement normal à l'axe de rotation, toutes circonstances qui, peu importantes pour l'état permanent, troublent l'état variable.

Avant la mise en marche, les ondes progressives sont circulaires; quand l'état permanent est atteint, elles ont la forme ci-dessus décrite. Cherchons comment se fait le passage.

2. — Quand le cercle Γ contient le vibreur, les ondes circulaires ne le traversent pas; ce qu'explique la brusque augmentation de la vitesse. Si les ondes sont formées entre Γ et la paroi (ce que je suppose), elles entrent dans le cercle Γ . Le phénomène diffère de celui du 2°, e, du § 29, en ce qu'à l'intérieur du cercle γ la vitesse de l'eau a sa valeur définitive, tandis qu'à l'intérieur du cercle Γ elle est quasi nulle.

Si le cercle Γ était de discontinuité pour la vitesse, les ondes S_1 propagées sur la couronne extérieure à Γ , et les ondes S_2 à l'intérieur de Γ ne se raccorderaient pas; les premières auraient la forme ci-dessus décrite; la forme des secondes serait déterminée par leurs conditions d'entrée, elles-mêmes déterminées par les terminaisons des rides immobiles I. En fait les deux systèmes se raccordent, mais seulement sur un certain arc du cercle Γ , ce que la figure 31 fait comprendre: tandis que les ondes S_1 se propagent dans le sens de la rotation, les ondes S_2 ont au début une direction quasi normale à la droite CP, de sorte qu'au voisinage du point N, les deux systèmes se propagent en sens inverses. Du reste en raison de la brusque augmentation de vitesse, les ondes S_1 ne peuvent traverser Γ à gauche de la figure; à l'intérieur d'une courbe telle que $abNa$ on ne voit rien de distinct. Il est possible que les ondes S_1 se prolongent à l'intérieur de Γ et se superposent aux extrémités gauches des ondes S_2 ; mais les propagations étant inverses, il est impossible de préciser.

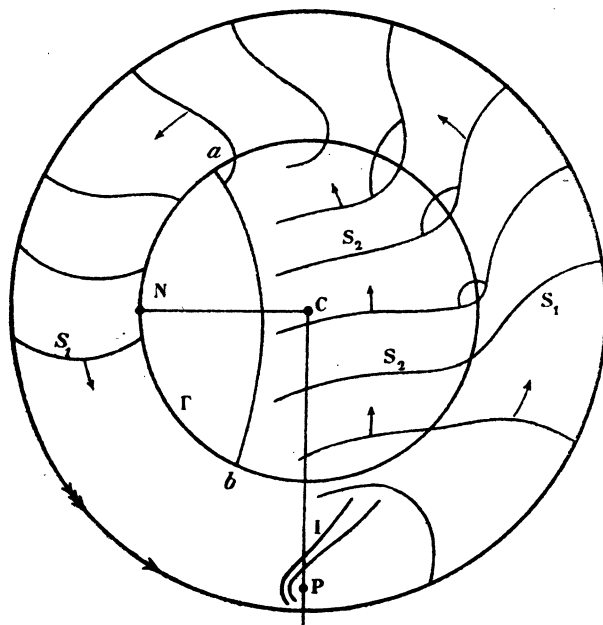


FIG. 31.

A mesure que décroît le rayon du cercle Γ , la courbure de raccordement décroît, les ondes S_2 deviennent plus verticales; les rides immobiles I s'allongent et l'on retombe sur la figure 30.

3. — Pour un certain stade de l'évolution, au delà de l'onde S_1S_2 pour laquelle la courbure du raccordement est maxima, apparaît un phénomène inattendu: c'est une onde concave vers l'amont qui se développe entre les ondes S_1 et S_2 ; il semble que le raccordement de très grande courbure se comporte comme une source.

31. — Deux vibrateurs synchrones.

Deux vibrateurs synchrones P, P' ($N = 50$) sont placés symétriquement par rapport à l'axe de rotation à une distance telle qu'il ne se forme pas de rides immobiles (on prend $n = 0,5$ pour ne pas trop diminuer cette distance). Les hyperboles du § 17 sont déformées par l'entraînement qui croît à mesure qu'on s'éloigne du centre C . L'hyperbole évanouissante normale à PP' en C devient une courbe en S symétrique par rapport à ce point où elle possède une tangente d'inflexion. La déformation est remarquable pour les hyperboles voisines de P ou de P' . Sur la droite PP' , pas trop près des pointes les courbes sont sensiblement équidistantes et parallèles. Droit pour $n = 0$, l'angle α diminue quand n augmente et quand on augmente la distance des pointes.

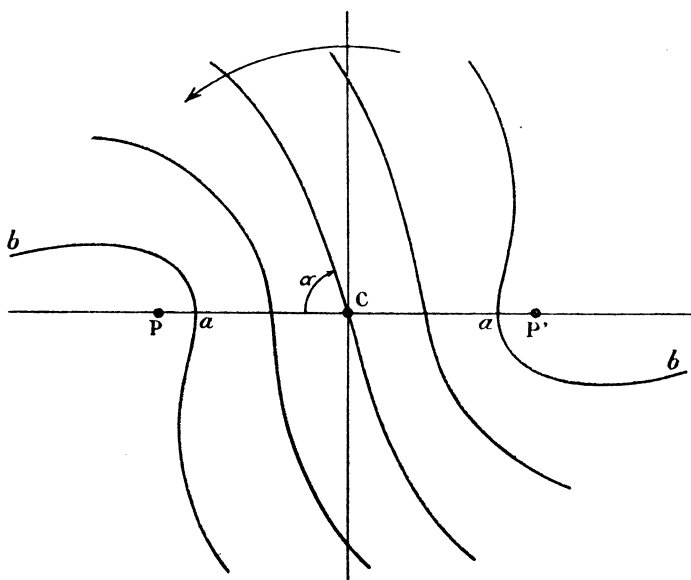


FIG. 32.

A travers le stroboscope on voit les ondes progressives ovales issues de P et de P' se propager en s'éloignant des pointes (§ 29, b). Alternativement sur PP' elles se superposent et s'intercalent, tangentiellement aux ondes stationnaires (indistinctes à travers le stroboscope).

Pendant l'état variable, alors que la vitesse angulaire de l'eau se propage de la paroi du vase à l'axe, les déformations des hyperboles et des ondes progressives qui les forment en interférant, progressent dans le même sens.

Plaçons les pointes à une distance telle (16 cm.) que les rides immobiles E existent et que les rides I soient réduites à presque rien. L'allure du phénomène reste la même; les parties très courbes *ab* des premières ondes stationnaires sont visibles à l'amont des rides E. Sur la droite PP', pas trop près des pointes, les ondes très inclinées sont parallèles et équidistantes. Cette équidistance est environ moitié moindre que pour $n = 0$. Tandis que pour $n = 0$, les hyperboles s'éloignent vite les unes des autres quand on s'éloigne de la droite PP', à mesure que n augmente, leur écartement tend à devenir uniforme.

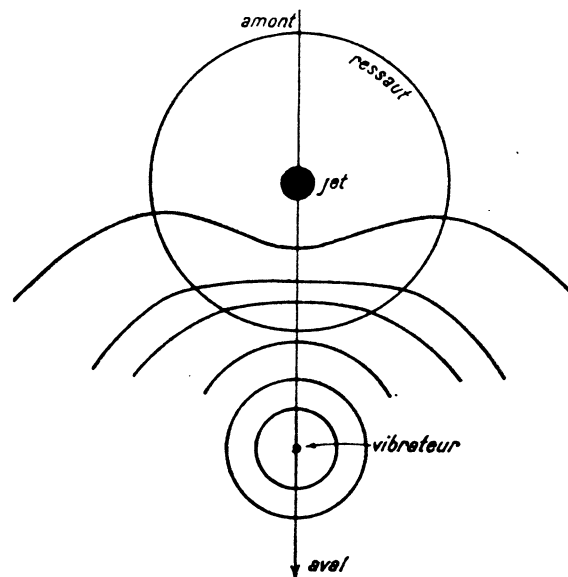


FIG. 33.

Écartons encore les pointes de manière que les rides I s'étendent assez loin. Les ondes stationnaires sont invisibles près des pointes; elles passent sur les rides I, mais seulement près de leurs extrémités; elles vont moins loin à l'amont des rides E. Il va de soi que l'existence de ces ondes est liée au développement des ondes progressives qui les créent par leurs interférences.

COUCHE D'ÉTALEMENT D'UN JET VERTICAL

32. — Ondes progressives sur la couche d'étalement d'un jet vertical.

1. — Par étalement d'un jet vertical sur une glace horizontale ou quasi telle on obtient des couches très minces, de vitesses divergentes très grandes. A quelque distance du jet se forme un ressaut circulaire à travers lequel l'épaisseur croit, corré-

lativement la vitesse diminue. Pour éviter qu'il se forme près du jet, inclinons de quelques degrés la glace sur laquelle il s'étale; du côté haut le ressaut se rapproche du jet, il s'en éloigne du côté bas. Le fil oscillant F (diamètre 2 mm.) est de ce côté, dans le plan vertical de la ligne L de plus grande pente. Pour régler automatiquement sa longueur, une paille est enfilée dessus à frottement doux; elle s'enfonce de manière que dans la position la plus basse du fil, son bout vienne en contact de la glace. Le fil est fixé sur une des branches du diapason $N \doteq 40$ entretenu. On regarde à travers le disque stroboscopique.

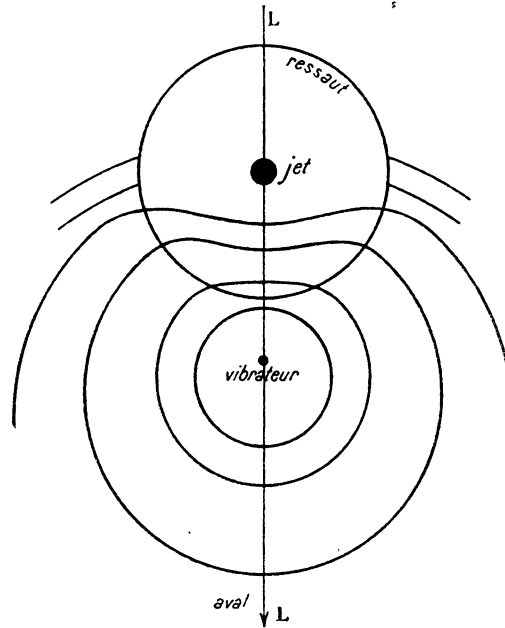


FIG. 34.

L'eau sort d'un tube vertical (diamètre 12 mm.); on peut faire varier la distance γ à la glace de son bout inférieur; un robinet permet de modifier le débit Q . Le tube est alimenté par une grande bassine, située à deux mètres du sol, qu'on maintient pleine en permanence; un trop plein enlève l'excès d'eau envoyé dans la bassine.

2. — POINT D'IMPACT DU VIBRATEUR A L'AVAL DU RESSAUT.

Plaçons ce point à l'aval du ressaut; la vitesse ψ est trop petite pour donner des rides immobiles. Autour du fil se forment des ondes progressives quasi circulaires, cependant plus serrées à l'amont (ψ n'est pas nul). Voyons comment leurs parties amont traversent le ressaut et ce qu'elles deviennent après la traversée.

Notons que le ressaut (*bourrelet*; voir un mémoire dans les *Annales de la Faculté de*

Toulouse pour 1936) est relativement large et que la vitesse ψ varie dessus d'une manière continue; en général le bourrelet proprement dit est intérieurement bordé de rides immobiles, plus ou moins serrées et en nombre plus ou moins grand suivant le débit et la vitesse d'impact du jet. Les ondes progressives passent dessus sans discontinuités. Comme à l'intérieur du ressaut la vitesse ψ est beaucoup plus grande qu'à l'extérieur, sur la ligne L elles sont beaucoup plus serrées à l'amont du ressaut qu'à l'aval; comme à l'amont du ressaut la vitesse ψ croît quand on se rapproche du jet, leur écartement diminue vers l'amont. De là résulte la variation de leur forme.

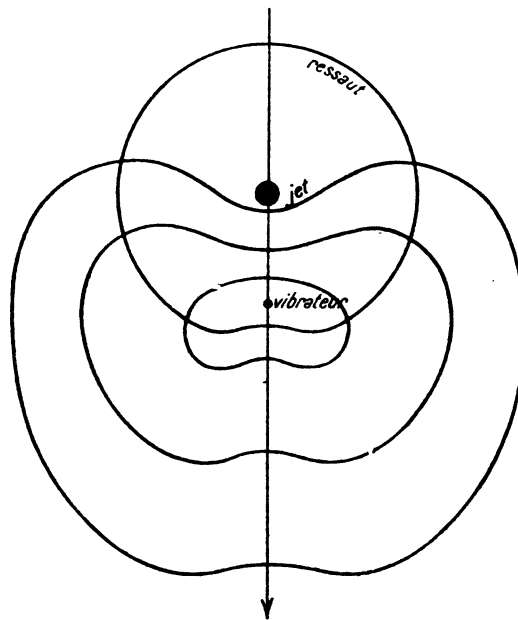


FIG. 35.

Au voisinage de la droite de symétrie L et à l'amont du vibrateur, leur concavité est vers l'aval à l'aval du ressaut. Dans la traversée du ressaut leur courbure diminue; quand on se déplace vers l'amont, leur courbure s'annule puis change de signe, de sorte que les plus voisines du jet tournent leur concavité vers l'amont (du côté du jet). Elles cessent d'être visibles à quelque distance du jet, soit qu'elles deviennent trop serrées, soit que l'accroissement d'épaisseur de la couche gêne leur propagation.

Extérieurement au ressaut elles peuvent couvrir toute la glace; mais sur le ressaut elles ne sont visibles que jusqu'à la normale N à la ligne L passant par l'axe du jet. Conformément à ce que je dis ci-dessus, à l'intérieur du ressaut on ne voit pas les prolongements des dernières ondes visibles sur le ressaut même; ils seraient trop voisins du jet.

D'une régularité admirable, ces phénomènes sont aisément arrêtés et photographiés à travers le stroboscope (pose 1 seconde). Leur allure reste la même quels que soient le diamètre du ressaut et sa distance au vibreur qui peut se trouver sur le ressaut. Le nombre des ondes photographiées peut dépasser 20; je n'en représente que quelques-unes pour préciser leurs formes.

3. — POINT D'IMPACT DU VIBREUR A L'EXTÉRIEUR DU RESSAUT.

Pour une vitesse d'impact du jet liquide et pour un débit assez petit, la vitesse ψ au niveau du vibreur peut être incapable de donner des rides immobiles; on voit les ondes se propager sur la ligne L à l'aval et à l'amont du vibreur, plus serrées à l'amont qu'à l'aval. Quasi circulaires près du vibreur, elles se déforment en progressant de manière que leur courbure sur la ligne L amont décroisse, s'annule et change de signe; leur concavité est alors tournée vers le jet; elles possèdent deux tangentes d'inflexion.

A mesure que le débit diminue, leurs distances sur la ligne L tendent vers la même valeur de part et d'autre du vibreur. Mais pour petite que soit la vitesse ψ , elle reste divergente et diminue quand on s'éloigne du jet: les ondes arrêtées conservent la même allure; les plus voisines du jet tournent sur lui leur concavité.

Arrêtons brusquement le débit: l'épaisseur de la couche dont la vitesse est alors très petite, diminue lentement. Les ondes deviennent instantanément des cercles, centrés sur le vibreur, dont l'équidistance diminue (la vitesse de propagation décroît) en même temps que l'épaisseur.