

H. PAILLOUX

Contribution à l'étude des systèmes déformables

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4^e série, tome 1 (1937), p. 1-125

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1937_4_1__1_0

© Université Paul Sabatier, 1937, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE,

POUR LES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES.

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES SYSTÈMES DÉFORMABLES

Par M. H. PAILLOUX.

I. — ÉTUDE DES PERCUSSIONS DANS LES FILS

Notations. — Soit \mathcal{L} un arc de courbe AB d'extrémités A et B, et de longueur l . A l'instant θ , un point M de la courbe est défini par son abscisse curviligne s comptée à partir de l'extrémité A. Nous désignerons par t, n, b les vecteurs unitaires du trièdre principal en M; par R et T les rayons de courbure et de torsion; par τ, V, Γ , la tension, la vitesse et l'accélération au point M; par Fds et ρds la résultante des forces agissant sur l'élément ds , et sa masse.

Condition nécessaire à laquelle doivent satisfaire les vitesses à un instant donné.
Rappelons les équations vectorielles du mouvement des fils :

$$(1) \quad \rho \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \theta^2} = \mathbf{F} + \frac{\partial}{\partial s} (t\tau),$$

$$(2) \quad \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s} \right)^2 = 1.$$

Dérivons la dernière par rapport au temps :

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial s \partial \theta} = 0$$

ou avec d'autres notations :

$$(3) \quad t \cdot \frac{\partial V}{\partial s} = 0.$$

Cette équation est donnée par Routh dans sa dynamique (§ 574) et il la transforme seulement dans le cas où le fil est plan (§ 575). Nous allons écrire la relation obtenue en faisant intervenir les composantes de la vitesse sur les axes de Frenet :

$$V = tV_t + nV_n + bV_b,$$

$$\frac{\partial V}{\partial s} = t \left(\frac{\partial V_t}{\partial s} - \frac{V_n}{R} \right) + n(\dots) + b(\dots);$$

d'où

$$(3') \quad \frac{\partial V_t}{\partial s} = \frac{V_n}{R}.$$

On obtient encore cette condition, sous la forme (3) en écrivant qu'un élément MM' du fil se déplace comme un corps solide, c'est-à-dire que les projections des vitesses de M et M' sur la droite MM' sont égales, le calcul étant fait en négligeant les infiniment petits du second ordre :

$$t \cdot (V + dV) = t \cdot V \quad \text{ou} \quad t \cdot dV = 0.$$

La formule (3') montre que la composante suivant la binormale peut être choisie arbitrairement, ainsi que V_t , quand on connaît la forme du fil; il en résulte la connaissance de V_n . On peut ainsi, au moyen de deux fonctions arbitraires avoir toutes les vitesses possibles pour un arc de courbe donné.

La condition trouvée est nécessaire, mais nous ne savons pas si elle est suffisante, car il faut faire intervenir les liaisons du fil. Voici différents cas qui peuvent se produire : fil complètement libre; fil libre sauf en une ou deux extrémités qui peuvent être fixes, ou de mouvement connu, ou se déplacer sur une courbe ou une surface fixe ou de mouvement connu; fil se déplaçant sur une surface; fil s'appuyant en partie sur une surface; fil s'appuyant sur une courbe ou passant par un point fixe. Nous pouvons aussi avoir le cas d'un fil formant une courbe fermée.

Recherche de la tension à l'instant initial. — Nous supposerons données la forme du fil et la distribution des vitesses. Nous supposerons qu'elles sont toujours

compatibles avec la forme du fil. Dérivons (1) par rapport à s , et (2) deux fois par rapport à θ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial s} \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial s \partial \theta} &= 0, & \frac{\partial M}{\partial s} \cdot \frac{\partial^3 M}{\partial s \partial \theta^2} + \left(\frac{\partial^2 M}{\partial s \partial \theta} \right)^2 &= 0, \\ \rho \frac{\partial^3 M}{\partial s \partial \theta^2} + \frac{\partial \rho}{\partial s} \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} (\tau t), \\ \frac{\partial}{\partial s} (t\tau) &= t \frac{\partial \tau}{\partial s} + n \frac{\tau}{R}, & \frac{\partial^2}{\partial s^2} (t\tau) &= t \left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial s^2} - \frac{\tau}{R^2} \right) + n(\dots) + b(\dots), \end{aligned}$$

et en faisant le produit scalaire de la dernière relation par t :

$$\rho t \cdot \frac{\partial^3 M}{\partial s \partial \theta^2} + \frac{\partial \rho}{\partial s} t \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial \theta^2} = t \cdot \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial s^2} - \frac{\tau}{R^2};$$

or

$$t \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial \theta^2} = \frac{1}{\rho} \left(t \cdot F + \frac{\partial \tau}{\partial s} \right)$$

et

$$\frac{\partial^2 M}{\partial s \partial \theta} = \frac{\partial V}{\partial s}$$

est connu à l'instant initial; par suite, on a l'équation différentielle suivante pour déterminer la tension à l'instant initial :

$$(4) \quad \frac{\partial^2 \tau}{\partial s^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial s} \frac{\partial \tau}{\partial s} - \frac{\tau}{R^2} + t \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial s} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial s} F \right) + \rho \left(\frac{\partial V}{\partial s} \right)^2 = 0.$$

Comme tout se passe à l'instant initial, nous écrirons de la manière suivante, où les accents désignent les dérivées prises par rapport à l'arc :

$$(4') \quad \tau'' - \frac{\rho'}{\rho} \tau' - \frac{\tau}{R^2} + t \cdot \left(F' - \frac{\rho'}{\rho} F \right) + \rho V'^2 = 0.$$

Si la densité est constante, on obtient l'équation plus simple :

$$(4'') \quad \tau'' - \frac{\tau}{R^2} + t \cdot F' + \rho V'^2 = 0.$$

Si le fil a ses deux extrémités libres, on prendra la solution qui s'annule aux

deux extrémités; si le fil est une courbe fermée, on prend la solution périodique de cette équation; comme elle est à coefficients périodiques, il existe une telle solution et une seule. Dans les autres cas, la détermination est beaucoup plus délicate et nous y reviendrons.

Comme application de l'équation (4), remarquons que si un fil se déplace en l'absence de forces extérieures, pour que la tension soit identiquement nulle, donc en particulier nulle en deux points quelconques qui vont nous servir à déterminer la solution, il faut et il suffit que $V'^2 = 0$, c'est-à-dire que le fil ait un mouvement instantané de translation.

Percussions dans les fils. — Nous supposons que pendant un très petit intervalle de temps agit une force très grande Φds sur chaque élément du fil; toutes ces forces agissant dans le même intervalle de temps suffisamment court pour qu'on puisse négliger tout déplacement du fil. Nous supposons que l'intégrale $F = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \Phi d\theta$ est finie, et nous appellerons percussion subie par l'élément le vecteur $F ds$. La forme du fil sera conservée pendant toute la durée des percussions et nous supposons que le fil reste parfaitement souple et inextensible. Nous ne considérerons pas de percussions finies subies par un point du fil, nous verrons pourquoi dans un instant.

Dans un article paru en 1925 (*Nouvelles Annales de Mathématiques*), G. Bouligand traite le problème suivant : On considère un fil flexible, inextensible et sans masse, suspendu par une extrémité O, et le long duquel on dispose invariablement des masses ponctuelles en des points M_1, M_2, \dots, M_n . Le système est en équilibre dans la position verticale, et l'on suppose que :

$$\overline{OM_1} = \overline{M_1M_2} = \dots = \overline{M_{n-1}M_n}.$$

Soient m_1, m_2, \dots, m_n , les masses placées aux points en question. On fait agir simultanément sur elles des percussions horizontales et parallèles, d'intensités respectives P_1, P_2, \dots, P_n .

En désignant par l la longueur totale, déterminer l'état des vitesses du système à l'instant immédiatement postérieur à la production de ces impulsions.

G. Bouligand étudie ce problème en se servant des équations de Lagrange pour les percussions, alors que nous nous servons des théorèmes généraux. Cette étude faite, il passe au cas d'un fil pourvu de masse soumis à une distribution rectiligne de percussions et montre que le passage à la limite du premier problème conduit à la solution du second. Enfin G. Bouligand signale que dans le cas d'un fil de forme quelconque le problème se ramène à la résolution d'équations intégrales. La méthode indiquée, application des équations de Lagrange à un système à une infinité

de paramètres, conduit à une analyse délicate, tandis que les théorèmes généraux conduisent à une équation différentielle du second ordre. Il serait sans doute intéressant de comparer les deux méthodes pour obtenir des résultats relatifs à ces équations intégrales. Signalons enfin que G. Bouligand suppose son fil attaché par une extrémité, ce qui est une source de difficultés pour la distribution de vitesses.

E. J. Routh (§ 585 et suivants) s'occupe du problème suivant : en donnant une percussion au fil en une de ses extrémités, trouver les variations de vitesses du fil. Dans cet exemple et dans d'autres, il ne suppose jamais une distribution continue de percussions le long du fil.

Isolons un élément ds du fil; il subit une variation de quantité de mouvement $\rho W ds$, une résultante des percussions extérieures $F ds$ et nous devons adjoindre des vecteurs percussions de tension τ et $\tau + d\tau$ aux deux extrémités. Écrivons les deux théorèmes généraux sur la quantité de mouvement et son moment :

$$\begin{aligned} -\rho W ds + F ds + d\tau &= 0, \\ \text{OM} \wedge (-\rho W ds + F ds) + d(\text{OM} \wedge \tau) &= 0 \end{aligned}$$

ou encore :

$$(5) \quad \rho W = F + \frac{\partial \tau}{\partial s},$$

$$(6) \quad t \wedge \tau = 0.$$

La dernière équation montre que le vecteur percussion de tension est tangent au fil, c'est pourquoi nous écrirons désormais ce vecteur $t\tau$, τ désignant maintenant un scalaire.

On peut obtenir ces deux équations en intégrant les équations du mouvement des fils pendant la durée du choc, puisque pendant ce temps le fil reste immobile. On aurait aussi pu écrire les théorèmes des percussions à un élément fini du fil, puis en dérivant par rapport à l'une des limites de l'intégrale :

$$\int_{\text{AM}} (F - \rho W) ds + \tau - \tau_A = 0, \quad \int_{\text{AM}} \text{OM} \wedge (F - \rho W) ds + \text{OM} \wedge \tau - \text{OA} \wedge \tau_A = 0.$$

Nous avons implicitement fait intervenir l'hypothèse que le fil était parfaitement souple, puisqu'aucun couple n'est intervenu dans l'équation des moments. C'est pour cette raison que la percussion de tension est tangente au fil. Il nous reste à faire intervenir l'hypothèse de l'inextensibilité; pour cela nous écrirons la condition (3) avant et après le choc. En retranchant la variation de vitesse W s'introduit :

$$(7) \quad t \cdot \frac{dW}{ds} = 0 \quad \text{ou} \quad (7') \quad \frac{dW_t}{ds} = \frac{W_n}{R}.$$

Si nous projetons l'équation (5) sur le trièdre de Frenet, on a pour déterminer W et τ le système :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho W_t = F_t + \frac{d\tau}{ds}, \\ \rho W_n = F_n + \frac{\tau}{R}, \\ \rho W_b = F_b, \\ \frac{dW_t}{ds} = \frac{W_n}{R}. \end{array} \right.$$

Si nous supposons données les percussions extérieures et la forme du fil, nous avons immédiatement W_b , pour avoir les quantités analogues, nous pouvons soit éliminer, soit rechercher en premier lieu τ .

Recherche de la percussion de tension. — En éliminant W_t et W_n , on trouve :

$$(9) \quad \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{\rho} \left(F_t + \frac{d\tau}{ds} \right) \right] = \frac{F_n}{\rho R} + \frac{\tau}{\rho R^2},$$

$$\frac{d^2\tau}{ds^2} - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{ds} \frac{d\tau}{ds} - \frac{\tau}{R^2} - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{ds} F_t - \frac{F_n}{R} + \frac{dF_t}{ds} = 0,$$

équation que l'on peut encore obtenir en intégrant pendant la durée du choc l'équation (4) qui fournit la tension pendant le mouvement. Si nous avons un fil dont les deux extrémités sont libres ou un fil fermé, nous rechercherons, soit la solution qui s'annule aux deux extrémités, soit la solution périodique.

Une fois la tension connue, (8) ou (5) donne immédiatement la variation de vitesse.

Élimination de la tension. — Nous prendrons cette fois $\varphi = W_t$ comme inconnue principale et nous éliminerons τ entre les deux premières équations :

$$(10) \quad \begin{array}{l} W_t = \varphi, \\ W_n = R\varphi', \\ \rho\varphi - F_t = \frac{d}{ds} (R^2\rho\varphi' - RF_n). \end{array}$$

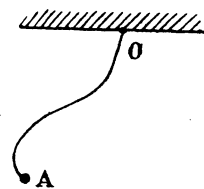
Il nous reste à intégrer cette équation différentielle. Si le fil est fermé, nous recherchons l'intégrale périodique. Si les deux extrémités sont libres, en ces points $\tau = 0$, donc nous connaissons W_n , ou encore φ' . Nous montrerons plus loin que la solution est bien déterminée. W_n s'obtient ensuite en dérivant φ .

Percussions appliquées en un point du fil. — Considérons un élément du fil dont les extrémités sont de part et d'autre du point considéré. Il subit : une variation de quantité de mouvement, infiniment petite; une percussion de tension à chaque extrémité; la percussion donnée qui n'est pas infiniment petite par hypothèse. Si au point P la tangente est continue, la somme géométrique des deux tensions est infiniment petite, et nous sommes conduits à une variation de vitesse infinie, c'est-à-dire que pratiquement le fil casserait, puisque les éléments voisins auraient une vitesse non infinie; ou encore on aurait une percussion de tension infinie et le fil casserait. Le seul cas d'exception est celui où la percussion donnée est dirigée suivant la tangente au fil, et dans ce cas, il y a en P une discontinuité de percussion de tension, précisément égale à la percussion donnée. En se reportant à (8) on voit que W_n est discontinue, ainsi que W_t en général. Pour mieux comprendre ce qui se passe, imaginons notre fil coupé en P, nous avons deux morceaux distincts qui subissent à chaque extrémité une percussion dirigée suivant la tangente, ce qui est tout à fait possible, car c'est au fond ainsi que nous avons introduit la percussion de tension. Nous pourrions supposer que ces percussions en P sont celles que nous donnerait le calcul précédent. Dans ces conditions, il n'y a aucune raison de supposer que les vitesses obtenues en P soient les mêmes pour les deux arcs, il suffit en effet de faire varier l'une des percussions l'autre restant fixe, la vitesse de l'une des extrémités restera fixe et l'autre variera. Il apparaît donc une discontinuité pour les trois composantes de la vitesse suivant les axes du trièdre principal.

Exemples de systèmes où il n'y a pas percussion. — Un fil a une extrémité fixe; à l'autre est attachée une masse m . En supposant qu'à un instant donné le fil se tende, y a-t-il percussion?

Nous savons que toutes les vitesses que peut avoir le fil satisfont à la condition :

$$(7') \quad \frac{dW_t}{ds} = \frac{W_n}{R}.$$



Or le fil se tendant, sa courbure est nulle, la projection de la vitesse sur le fil est donc constante, et par suite nulle puisque c'est la valeur en O. Il en sera de même en tout point du fil, et en particulier en A dont la vitesse sera perpendiculaire au fil. Il n'y a donc aucune raison pour qu'il y ait percussion.

Autre exemple. — Un fil muni d'une masse à chaque extrémité a un mouvement tel qu'à un instant déterminé il se tend en ligne droite, y a-t-il percussion?

Appliquons les équations (8) :

$$\rho W_t = \frac{d\tau}{ds},$$

$$W_u = 0,$$

$$W_b = 0.$$

On en déduit :

$$\tau'' = 0, \quad \tau = as + b,$$

où a et b sont des constantes.

Appliquons les théorèmes des percussions à A et B de masses m et m' . Les seules percussions qu'ils reçoivent sont dues au fil, donc :

$$mW_A = \tau_A, \quad m'W_B = -\tau_B.$$

Or nous admettrons (point sur lequel nous reviendrons) que les vitesses du fil et des masses sont les mêmes. Il en résulte :

$$m \frac{a}{\rho} = b,$$

$$m' \frac{a}{\rho} = -(al + b),$$

équations déterminant a et b . En ajoutant membre à membre :

$$\left(\frac{m}{\rho} + \frac{m'}{\rho} + l \right) a = 0,$$

$$a = b = 0,$$

car $mW_A + m'W_B = 0$ puisqu'il n'y a pas de percussions extérieures.

Il n'y a donc pas de percussion.

Cas général. — Le raisonnement que nous allons faire repose sur le fait que les équations des percussions, aussi bien pour les solides que pour les fils, sont linéaires et homogènes par rapport aux variations de vitesses aux tensions et à leurs dérivées aux percussions. Nous allons considérer un système matériel dans lequel un fil AB se tend, et nous nous proposons de rechercher s'il y a percussion. Supposons écrites toutes les équations qui forment la mise en équation du problème. Elles sont toutes linéaires et homogènes, elles admettent donc la solution identiquement nulle; comme d'autre part nous supposons le problème déterminé, il admet une solution et une seule, la solution zéro. Il n'y a donc aucune variation de vitesse. Ce résultat

paraît en contradiction avec certains problèmes, mais cela tient à ce que nous ne négligeons pas la masse du fil. Dans le premier exemple, où le point A reste constamment intérieur à une sphère s'il arrive qu'au cours du mouvement, il vienne sur la sphère, la vitesse de A, à ce moment est tangente à la sphère; le problème étudié est distinct de celui d'un point A attaché par un fil de masse nulle réalisant la liaison du point intérieur à une sphère, car si le fil se tendait, il semblerait qu'on puisse avoir des percussions, tout se passerait comme si le point rebondissait sur la sphère suivant une loi convenable de choc. Mais à notre point de vue, il est absurde de supposer la liaison réalisée par le fil de masse nulle, car la limite d'un fil de masse négligeable ne conduit pas à un choc sur la sphère.

On peut remarquer que lorsqu'un fil se tend, circonstance exceptionnelle, il peut arriver que le fil casse, cela provient de ce que la tension a pris une valeur trop forte, le calcul peut même conduire à une tension infinie, mais cela ne nous fournit pas une percussion au sens actuel.

Nombre de solutions des équations (4) ou (9). — Nous aurons à rechercher le nombre de solutions de ces équations connaissant 1° τ aux deux extrémités, 2° $\frac{d\tau}{ds}$ aux deux extrémités, 3° τ à une extrémité et $\frac{d\tau}{ds}$ à l'autre. Nous allons rappeler les résultats.

Dans les trois cas, nous allons supposer que nous avons deux solutions répondant aux conditions indiquées. Leur différence satisfait à l'équation sans second membre

$$\tau'' - \frac{\rho'}{\rho} \tau' - \frac{\tau}{R^2} = 0,$$

dont il suffit de rechercher le nombre de solutions pour lesquelles τ ou $\frac{d\tau}{ds}$ est nul aux deux extrémités. La différence entre les deux solutions possibles sera faite de manière qu'elle soit croissante pour $s = 0$:

1° τ est nul aux deux extrémités. Je dis d'abord que $\frac{d\tau}{ds} \neq 0$ pour $s = 0$, sinon d'après les théorèmes généraux, la solution serait identiquement nulle, et les solutions de (4) ou (9) non distinctes. La fonction croissant à partir de $s = 0$ atteint un maximum positif, pour lequel

$$\tau'' = \frac{\tau}{R^2} > 0,$$

c'est-à-dire que nous avons un minimum, d'où contradiction. Il y a donc une solution et une seule avec les conditions précisées. Nous avons implicitement utilisé le fait que la solution ne devenait pas infinie, ce qui revient à supposer que ni ρ ni R ne peuvent s'annuler.

2° Nous ferons la différence de manière que pour $s = 0$, elle soit positive. En ce point on ne peut avoir de maximum, sinon l'équation différentielle montre comme précédemment que c'est un minimum, la différence est donc croissante. Elle croît jusqu'à un maximum positif qui pour la même raison devrait être un minimum; ou augmente indéfiniment, ce qui est impossible, la différence est encore identiquement nulle.

3° Nous supposons que la valeur commune a été prise pour $s = 0$, la différence étant croissante en ce point. Si la fonction atteint un maximum, il est positif, et on a la même contradiction que précédemment; sinon, la fonction croît constamment, et ne peut avoir une dérivée nulle pour $s = l$.

Dans les trois cas la solution est unique.

Premier exemple de percussions. — Un fil se déplace librement dans l'espace, à un instant donné, on fixe une extrémité, quelle est la nouvelle distribution de vitesses?

Comme cas particulier très simple, nous considérerons celui où le fil est rectiligne à l'instant considéré, les vitesses en chacun de ses points étant équipollentes et perpendiculaires au fil. Cette distribution de vitesses est bien compatible avec la forme du fil. En nous reportant au système (8) nous avons à intégrer l'équation différentielle (9) moyennant les quatre conditions suivantes: $\tau = 0$ à l'extrémité libre; les trois composantes de la vitesse finale sont nulles au point fixe; telles paraissent être les conditions indispensables. Quatre conditions pour déterminer les deux constantes de l'équation différentielle conduisent en général à des impossibilités. $\tau = 0$ à l'extrémité libre est indispensable. Que faut-il penser des conditions relatives à la vitesse pour le point fixe? Nous allons donner un exemple de mouvement d'un fil, où à l'instant initial, la vitesse au point fixe ne sera pas nulle. Cette expression signifie que la limite de la vitesse quand s tend vers zéro, θ restant fixe, est différente de zéro.

Un fil se déplace dans un plan suivant une loi de force telle que son mouvement est régi par les équations :

$$x = \int_0^s \sqrt{1 - \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2} ds,$$

$$y = ks \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\theta}{s},$$

où k est une constante suffisamment petite pour que tout le long du fil $\frac{\partial y}{\partial s}$ soit inférieur à 1 en valeur absolue. Cherchons la forme du fil à l'instant initial $\theta = 0$:

$$y = 0, \quad x = s,$$

c'est donc la portion de l'axe des x comprise entre 0 et l .

Vérifions que pour $s = 0$ le point du fil reste immobile :

$$x = \int_0^0 = 0, \quad y = k \cdot 0 \cdot \frac{\pi}{2} = 0.$$

Cherchons les composantes de la vitesse :

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = \int_0^s \frac{-2 \frac{\partial y}{\partial s} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial s \partial \theta}}{2 \sqrt{1 - \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2}} ds, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = ks \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{\theta^2}{s^2}} = \frac{ks^2}{\theta^2 + s^2}.$$

A l'instant initial :

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = k,$$

même si on fait ensuite tendre s vers zéro. Mais pour tout autre instant, pour $s = 0$, $\frac{\partial y}{\partial \theta} = 0$. Il faut donc distinguer nettement : 1° la vitesse d'une extrémité soumise à une liaison; 2° la limite, à un instant donné, de la vitesse d'un point qui tend vers cette extrémité. On peut vérifier que dans cet exemple la discontinuité de vitesse se traduit sur le fil par une discontinuité de la tangente au point fixe. Si $\theta = 0$ nous connaissons la tangente, nous éliminons ce cas. Prenons pour θ quelconque les parties principales de x et y en fonction de s :

$$y = \frac{kM}{2} s, \quad x = \sqrt{1 - \frac{k^2 M^2}{4}} s.$$

La tangente est fixe, et nous imaginons très bien la singularité du mouvement.

Nous allons, avant de poursuivre l'étude du problème posé, montrer qu'il ne faut pas faire de passages à la limite aux points soumis à des liaisons.

Discontinuité de l'accélération. — Soit un fil qui a une extrémité fixe, nous nous proposons de rechercher à un instant donné que nous considérerons comme instant initial, la limite de l'accélération, en nous servant des équations du mouvement projetées sur les axes de Frenet. Nous supposerons connue la forme du fil et la distribution des vitesses initiales compatibles avec la fixité de l'extrémité A :

$$\rho \Gamma = F + \frac{\partial}{\partial s} (l\tau).$$

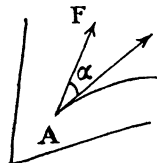
Nous savons que le vecteur $\frac{\partial}{\partial s}(t\tau)$ se trouve dans le plan osculateur. A ce vecteur nous devons ajouter F qui a en général une composante hors du plan osculateur. La somme géométrique de ces deux vecteurs ne pourra donc tendre vers zéro, accélération du point fixe. On peut présenter à ce raisonnement diverses objections : à un instant quelconque, il peut ne pas y avoir de plan osculateur limite ; ou encore ce n'est qu'en des circonstances exceptionnelles que le plan osculateur en A ne contient pas le vecteur F de A .

Cette dernière objection est levée dans l'exemple suivant : Un fil homogène de densité ρ a son extrémité A fixe ; à l'instant initial, il est rectiligne et horizontal. Il se déplace dans un plan vertical où il est soumis à la pesanteur ; les vitesses initiales sont perpendiculaires au fil et proportionnelles à AM . Elles sont compatibles avec la forme du fil et avec la fixité de A , puisqu'une barre pourrait commencer à se déplacer avec ces vitesses. Voici la marche que nous allons suivre : nous allons effectuer les calculs sur l'exemple indiqué mais nous exposerons le principe de la méthode sur un exemple plus général. Considérons un fil de forme quelconque ayant une extrémité fixe. J'admets la continuité de V , Γ , de la tangente, du plan osculateur et de la tension le long du fil. Au point A j'admets provisoirement que l'accélération est continue, et tend donc vers zéro. Je vais montrer qu'il y a contradiction. Projets l'équation vectorielle du mouvement sur les axes de Frenet en A . Comme $\frac{\partial}{\partial s}(t\tau)$ est dans le plan osculateur, pour que le mouvement ait lieu avec les hypothèses précédentes, il est nécessaire que F soit dans le plan osculateur. Dans ce plan nous aurons de plus :

$$F + \frac{\partial}{\partial s}(t\tau) = 0 \quad (\text{si } \Gamma = 0),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tau}{\partial s} = -F \cos \alpha, \\ \frac{\tau}{R} = -F \sin \alpha. \end{array} \right.$$

On en déduit que la connaissance de la tangente en A détermine le plan osculateur et par suite $\left(\frac{\partial \tau}{\partial s}\right)_A$. Si les deux extrémités du fil sont attachées, en ces points on connaît $\frac{\partial \tau}{\partial s}$ et la tension est déterminée en principe à l'instant initial. Si l'autre extrémité est libre, la solution est encore bien déterminée. En supposant cette tension calculée, à titre de vérification on en déduit la courbure à l'extrémité attachée.



Dans l'exemple initial on peut faire tous les calculs et la vérification ne se fait pas.

L'équation différentielle de la tension à l'instant initial s'écrit, si $V = kOM$:

$$\tau'' + k^2 = 0;$$

donc :

$$\tau = -\frac{k^2}{2}s^2 + as + \left(\frac{k^2 l^2}{2} - al\right),$$

puisque $\tau = 0$ pour $s = l$ (a C^{te} d'intégration).

A l'instant initial :

$$\frac{\partial \tau}{\partial s} = -k^2 s + a.$$

En A, on détermine a par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tau}{\partial s} = -g \cos \alpha = a, \\ \frac{\tau}{R} = -g \sin \alpha, \\ \tau_A = \frac{k^2 l^2}{2} + gl \cos \alpha. \end{array} \right.$$

Le calcul de la courbure en A donne $\frac{l}{R} \neq 0$, en contradiction avec l'hypothèse d'un fil rectiligne.

Cas où une extrémité est guidée, ou possède un mouvement connu à l'avance. Nous connaissons alors soit un plan contenant l'accélération de l'extrémité (le plan osculateur de la courbe guide), soit l'accélération de l'extrémité. Dans ce dernier cas il n'y a aucune raison pour que la composante de cette accélération suivant la binormale au fil soit égale à la composante de la force F . Dans le premier cas, nous supposons, comme toujours, données les vitesses initiales, donc celle du point sur la courbe guide. Il en résulte la connaissance de l'accélération suivant la binormale et la normale principale au guide, à savoir zéro et $\frac{V^2}{R}$, en introduisant la courbure du guide. Ceci, en se reportant à l'équation du mouvement projetée sur les axes de Frenet du fil, nous fournit deux relations entre τ et $\frac{\partial \tau}{\partial s}$, relations qui permettent de les calculer (car on voit qu'elles sont indépendantes), et comme dans le cas où une extrémité est fixe, on aboutit à une vérification sur la courbure qui ne se fait pas.

Application des considérations précédentes. — Mouvement d'un fil à partir d'une certaine position d'équilibre. Un fil homogène pesant, parfaitement souple est en équilibre de façon que ses deux extrémités soient sur une même horizontale. A l'instant initial, on abandonne le fil, en laissant glisser sans frottement ses deux extrémités sur l'horizontale, quelles sont les circonstances du début du mouvement ?

Les conditions initiales sont les suivantes : fil de forme connue : chaînette, vitesses initiales connues : nulles et compatibles avec les liaisons et la forme du fil. Nous avons un problème de dynamique, et nous savons que les tangentes initiales aux trajectoires des différents points sont les accélérations initiales que nous allons chercher à préciser. Désignons par τ' et τ les tensions en un même point, pendant l'équilibre et au début du mouvement. Le premier vecteur est défini par la relation :

$$-\rho g + \frac{d\tau'}{ds} = 0$$

ou par l'équation différentielle (4) :

$$\frac{\partial^2 \tau'}{\partial s^2} - \frac{\tau'}{R^2} = 0.$$

Or pour le mouvement nous avons la même relation puisque les vitesses initiales sont nulles; de plus, comme les tensions aux extrémités sont égales par suite de la symétrie de la figure, τ' et τ sont donc proportionnels, comme cela résulte de la forme des solutions de l'équation différentielle :

$$\tau = k\tau';$$

par suite :

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \theta^2} = -\rho \vec{g}(1-k), \quad \Gamma = -\vec{g}(1-k),$$

ce qui prouve que toutes les accélérations sont égales et verticales; en particulier pour les extrémités dont les accélérations ne sont pas portées par l'horizontale; ni nulles, sinon il en serait de même pour tous les éléments du fil, ce qui serait assez surprenant.

On peut remarquer que dans la suite du mouvement, il n'y a pas de raisons pour que les tensions aux extrémités soient nulles (ce qui reviendrait à avoir un fil libre qui tomberait certainement), comme elles sont égales et opposées aux réactions de la barre horizontale, on en déduit que la tangente au fil en chaque extrémité est verticale. Si on applique ce raisonnement à l'instant initial, comme la tangente

n'est pas verticale, on doit conclure que $\tau = 0$ et que tout se passe à l'instant initial comme si le fil était abandonné en chute libre. Aussitôt après l'instant initial, les tangentes aux extrémités seront verticales; il y aura donc variation brusque de la tangente et de la courbure en ces points.

Des considérations qui précèdent nous admettrons les résultats suivants qui paraissent difficiles à démontrer : En un point où se trouve une liaison, la vitesse comptée suivant le plan normal peut avoir une grandeur quelconque, mais la vitesse suivant la tangente est continue. Même si V_n est discontinue, $\frac{dV_t}{ds} = \frac{V_n}{R}$ montre que V_t est continue si V_n est intégrable, et cela quel que soit V_n . (Nous ne nous occuperons que du cas où la tangente est continue.) Si la courbure ou le plan osculateur n'est pas continu, on voit facilement que la tension est continue, dans les exemples traités nous admettrons que $\frac{d\tau}{ds}$ l'est aussi. Les conditions précédentes permettent de déterminer la solution du problème de la recherche de la percussion de tension dans le cas où une extrémité est fixée.

Il serait intéressant de trouver une condition analogue pour les accélérations, ce qui permettrait en particulier de trouver la tension de l'instant initial pour un fil dont une extrémité est attachée.

Si nous revenons au problème que nous avons en vue, celui du fil rectiligne, dans certaines conditions précisées, dont une extrémité est fixée, il n'y a aucune percussion, puisque la distribution de vitesse est possible avec nos conventions, la vitesse tangentielle étant nulle.

De même si un fil de forme quelconque a une extrémité fixée au moment où la vitesse en ce point est normale au fil, il n'y a aucune variation de vitesse. Si la vitesse n'est pas normale au fil, les équations (8) donnent $\frac{d\tau}{ds}$ qui est négatif si effectivement le fil se tend, en ce point la percussion de tension est maximum. Remarquons à ce propos qu'au point de vue calcul nous devons admettre les percussions négatives qui tendent à comprimer le fil. Si dans l'exemple précédent le fil arrive de façon que la projection sur la tangente de la vitesse de l'extrémité qui va être fixée, soit négative, le calcul précédent fournira des percussions de compression, alors qu'en pratique le fil se courbera rapidement; la théorie précédente est insuffisante car elle néglige la faible rigidité du fil qui devient alors le phénomène prépondérant.

Exemple de percussions. — Un fil peut se déplacer librement et sans frottement entre deux plans parallèles très voisins. Le système de ces deux plans reçoit une percussion connue, quelles sont les variations de vitesse pour le fil?

D'une manière plus précise nous supposerons calculée la variation de vitesse pour chaque point du plan double. Le fil reçoit du plan une percussion normale \mathcal{P} .

La solution du problème est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho W_t = \frac{d\tau}{ds}, \\ \rho W_n = \frac{\tau}{R}, \\ \rho W_b = \mathcal{F}, \\ \tau'' - \frac{\rho'}{\rho} \tau' - \frac{\tau}{R^2} = 0, \end{array} \right.$$

car la binormale à la courbe est la normale au plan. Si le fil a ses deux extrémités libres, la solution $\tau = 0$ satisfait à l'équation différentielle, et comme il n'y a qu'une solution, on voit qu'il n'y a aucune variation de vitesse le long du plan. Si le fil est fermé, on cherche la solution périodique, zéro convient; même résultat que précédemment. Si une ou deux extrémités sont fixées au plan, en ces points on connaît W_t et par suite $\frac{\partial \tau}{\partial s}$, le problème est donc déterminé.

Même problème, le fil glissant entre deux surfaces rigides très voisines dont la variation de vitesse est connue.

Le principe est le même que précédemment. Nous introduirons une percussion normale à la surface. Nous appellerons ϖ l'angle que fait la normale à la surface avec la normale principale de la courbe. Les variations de vitesse et percussion sont données par le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho W_t = \frac{\partial \tau}{\partial s}, \\ \rho W_n = \mathcal{F} \cos \varpi + \frac{\tau}{R}, \\ \rho W_b = \mathcal{F} \sin \varpi, \\ \tau'' - \frac{\rho'}{\rho} \tau' - \frac{\tau}{R^2} = \mathcal{F} \frac{\cos \varpi}{R}. \end{array} \right.$$

Or nous connaissons la variation de vitesse suivant la normale à la surface :

$$W_n \cos \varpi + W_b \sin \varpi = \mathcal{U}(s).$$

Relation qui se transforme et permet d'avoir \mathcal{F} en fonction de τ :

$$\mathcal{F} + \tau \frac{\cos \varpi}{R} = \rho \mathcal{U};$$

τ est déterminée par l'équation différentielle du second ordre :

$$\tau'' - \frac{\rho'}{\rho} \tau' - \frac{\tau}{R^2} = \frac{\cos \varpi}{R^2} \left(\rho \mathcal{U} - \tau \frac{\cos \varpi}{R} \right),$$

$$\tau'' - \frac{\rho'}{\rho} \tau' - \frac{\sin^2 \varpi}{R^2} \tau = \rho \mathcal{U} \frac{\cos \varpi}{R}$$

ou en introduisant la courbure normale et la courbure géodésique :

$$\tau'' - \frac{\rho'}{\rho} \tau' - \frac{\tau}{R_g^2} = \frac{\rho \mathcal{U}}{R_n}.$$

Les conditions aux extrémités sont données comme dans l'exemple précédent.

Si en particulier le fil est placé suivant une géodésique à l'instant considéré, on peut écrire :

$$\frac{\rho \tau'' - \rho' \tau'}{\rho^2} = \frac{\mathcal{U}}{R},$$

$$\frac{\tau'}{\rho} = a + \int \frac{\mathcal{U}}{R} ds,$$

$$\tau = b + a \int \rho ds + \int \rho ds \int \frac{\mathcal{U}}{R} ds,$$

où a et b sont des constantes.

Si le fil est placé suivant une asymptotique, l'équation différentielle n'a pas de second membre et si le fil est fermé ou a ses deux extrémités libres, par un raisonnement déjà fait, on voit qu'il n'y a pas de percussion de tension.

Dans tous les cas, une fois la percussion de tension connue, on en déduit la percussion normale, puis la variation de vitesse. Les calculs faits ne supposent pas que la surface sur laquelle glisse le fil soit rigide. Ils sont valables si la surface reste constamment applicable sur elle-même, à condition qu'on connaisse la variation de vitesse de chaque point de la surface, cas qui se produit en particulier si dans l'ensemble des percussions subies par le système fil-surface, on peut négliger en première approximation la masse du fil auprès de celle de la surface.

On peut aussi supposer que le fil glisse sur un ballon de caoutchouc qui subit des percussions, la variation de vitesse normale étant connue en chaque point.

Problème. — Dans son mouvement un fil vient rencontrer un plan fixe ; y a-t-il percussion ?

Nous allons supposer que le contact entre le fil et la surface dure un certain temps, le point qui reste au contact se déplaçant sur le fil. Je dis que l'action de

contact n'est pas une percussion. En effet d'après la manière dont ces dernières sont introduites (produit d'une grande force par un court intervalle de temps), une suite continue de percussions dans le temps équivaldrait à une force continue et très grande, ce qui est absurde au point de vue mécanique. On tombe de même sur une absurdité si on partage le temps du contact en un grand nombre d'intervalles où le fil reçoit une variation finie de vitesse, et cela un nombre de fois aussi grand qu'on le veut. Le contact donne donc simplement lieu à une réaction. Le fil est-il tangent ou non à la surface? Pour résoudre ce problème, nous considérerons l'élément de fil dont les extrémités sont de part et d'autre du point de contact à l'instant considéré. En le supposant infiniment petit, toutes les forces agissant sur lui doivent se faire équilibre; comme les forces d'inertie sont infiniment petites, les tensions à chaque extrémité et la réaction du plan doivent se faire équilibre. Or la somme géométrique des tensions est dans le plan tangent, tandis que la réaction ne s'y trouve jamais. Le fil ne peut pas rester tangent au plan en un seul point pendant un intervalle de temps fini.

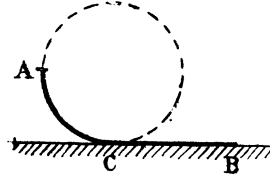
1° Il n'y a pas de frottement. La réaction est normale au plan, donc les deux tangentes au fil en M sont dans un plan normal; de plus la connaissance de la longueur d'une des tensions et de l'autre tangente détermine la réaction et la deuxième tension.

2° Il y a frottement. Nous supposerons que les lois habituelles sont applicables : la réaction tangentielle est portée en sens contraire de la vitesse, et elle est reliée à la composante normale par $T = fN$. Qu'appellerons-nous vitesse de glissement? C'est la vitesse de l'élément du fil au contact avec la surface. Si elle est connue, on a un plan qui contient la deuxième tangente, puisque la direction de la réaction est connue. Dans les deux cas, qu'il y ait frottement ou non, si en plus d'une des tensions, on connaît la direction de l'autre tangente, qui se trouve d'ailleurs dans un plan bien déterminé, on sait trouver la réaction de contact et la deuxième tension. Il est tout à fait normal que cette deuxième direction ne soit pas déterminée par le raisonnement précédent car elle dépend de la nature des surfaces en contact. On peut imaginer le choc parfaitement inélastique où le fil reste en contact avec la surface, et le choc plus ou moins élastique suivant l'angle d'écart avec le plan. Une autre considération à faire est celle du signe de la tension. Si le calcul conduit à une compression du fil nous ne pouvons pas toujours l'accepter. Une autre objection se présente : Nous avons supposé nos fils parfaitement souples, au point d'accepter un angle aigu au contact, sans qu'il soit nécessaire d'ajouter de couple soit pour faire cet angle, soit pour le supprimer. Nous sommes assez loin des fils que l'on trouve dans la pratique.

Dans le raisonnement précédent nous avons cherché s'il était possible que le fil et le plan aient un point commun. Si on suppose qu'une partie du fil repose sur la table, en restant immobile ou non, le problème se présente d'une manière diffé-

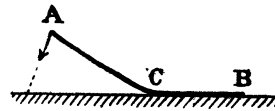
rente; au point de séparation des deux arcs du fil, libre ou gêné, il y a en général une discontinuité pour la tangente, le rayon de courbure, le plan osculateur, etc.

Voici des exemples de tels mouvements : un portion AC d'un fil AB est enroulée sur un cercle qui roule sans glisser sur une droite. Au fur et à mesure que le fil se déroule, il reste immobile en CB sur la droite. Nous pouvons maintenant faire abstraction du cercle et imaginer ce fil se développant sur un plan. Ce mouvement ne donne lieu à aucune percussion. Il n'y a d'ailleurs aucune discontinuité des vitesses. Il n'y a donc pas contradiction avec notre affirmation qu'une portion de fil ne peut rester tangente.



Le mouvement s'effectue évidemment avec une tension constante d'un bout à l'autre, ce qui exige que B soit fixe et qu'on exerce en A une tension convenable, fonction évidente de la vitesse et du rayon du cercle. La table n'exerce aucune réaction. Dans ce problème il n'y a pas lieu d'introduire une réaction isolée en C.

Un autre exemple est le suivant ; un fil a son extrémité B attachée à une table horizontale. Une portion CB reste tendue, l'autre AC est rectiligne et les vitesses de ses différents points sont équipollentes et forment avec BC un triangle isocèle. Ce mouvement est possible sans réaction isolée du plan en dehors de B.



Problème. — Un fil a une extrémité libre, et à l'autre extrémité est attaché un point matériel de masse m . Ce point reçoit une percussion connue \mathfrak{P} , quel est l'état des vitesses après le choc? Nous supposons que la tangente en A où se trouve le point matériel est bien déterminée. Sur A agissent donc : la percussion directement appliquée, et la percussion de tension $t\tau$ due au fil. Les équations des percussions appliquées à A donnent :

$$mW_t = \mathfrak{P}_t + \tau, \quad mW_n = \mathfrak{P}_n, \quad mW_b = \mathfrak{P}_b,$$

dont les deux dernières définissent la variation de vitesse suivant le plan normal au fil. Cherchons maintenant les variations de vitesse pour les éléments du fil. Nous avons à intégrer une équation différentielle du second ordre sachant que la solution cherchée est nulle à l'extrémité libre. Actuellement la solution dépend d'une constante arbitraire. Telle quelle, elle nous fournit en A une percussion de tension et permet de calculer la variation de vitesse du point A du fil, ainsi que la variation de vitesse tangentielle du point matériel. D'après un principe que nous avons admis les deux vitesses tangentielles pour le point matériel et pour le point du fil seront

les mêmes et ceci nous fournit une relation pour déterminer la constante arbitraire .

$$\text{point matériel} \left\{ \begin{array}{l} mW_t = \mathfrak{F}_t + \tau, \\ mW_n = \mathfrak{F}_n, \\ mW_b = \mathfrak{F}_b; \end{array} \right. \quad \text{point du fil} \left\{ \begin{array}{l} \rho W_t = \frac{d\tau}{ds}, \\ \rho W_n = \frac{\tau}{R}, \\ \rho W_b = 0. \end{array} \right.$$

Conformément à une remarque déjà faite, les variations de vitesses normales ne seront pas les mêmes.

Problème. — Dans le cours de son mouvement, un fil parfaitement libre vient rencontrer une courbe fixe. L'hypothèse d'une percussion au point où a lieu le choc n'est pas admissible, puisque nous avons montré que l'on devait rejeter les percussions isolées comme inacceptables du point de vue physique.

Le contact donne lieu simplement à une réaction, et comme nous sommes sûrs qu'il y aura modification de vitesse au point de contact, le fil glissant sur la courbe, et nulle part ailleurs, vu l'absence de percussions, la distribution des vitesses ne sera plus continue en ce point aussitôt après le choc. Le cas où un fil vient en contact avec une surface en un seul point donne les mêmes résultats.

En imaginant le choc d'un fil de fer sur un fil pendant librement, on voit que, bien que le contact ait lieu depuis un court instant, le mouvement du fil de fer n'est guère modifié et les éléments du fil se sont très peu déplacés sauf au voisinage du point de contact. Remarquons qu'après ce court instant la réaction au point de contact A peut devenir très grande surtout s'il y a frottement, et cela en un temps relativement court. Les deux tensions du fil au point connu A sont reliées par $T' = T e^{f\alpha}$, f coefficient de frottement sur le fil de fer, α angle dont a tourné la tangente, en supposant le glissement du fil.



Problème. — Un fil plan vient s'appliquer en entier sur un contour fixe, à un instant donné, le contact subsiste après le choc. Nous supposons connue la distribution des vitesses avant le choc. Nous devons introduire une percussion de contact en chaque point du fil, normale au contour, soit \mathfrak{F} . Nous supposons pour simplifier que la densité du fil est constante. Nous avons les relations suivantes où les indices 0 et 1 désignent un élément avant et après le choc :

$$\begin{aligned} \rho(V_t^1 - V_t^0) &= \frac{d\tau}{ds}, \\ \rho(V_n^0 - V_n^1) &= \frac{\tau}{R} + \mathfrak{F}, \\ \tau^1 - \frac{\tau}{R^2} &= \frac{\mathfrak{F}}{R}. \end{aligned}$$

La première équation donnera V_t^1 quand on connaîtra τ . Éliminons \mathcal{P} entre les deux dernières équations, on trouve :

$$\tau'' - \frac{\tau}{R^2} = -\frac{\rho}{R} V_n^0 - \frac{\tau}{R^2};$$

donc :

$$\tau = \alpha s + \beta - \rho \int ds \int \frac{V_n^0}{R} ds,$$

α et β étant deux constantes d'intégration. On peut simplifier cette formule en remarquant qu'avant le choc on a la relation :

$$\frac{dV_t^0}{ds} = \frac{V_n^0}{R}$$

et par suite :

$$\tau = \alpha s + \beta - \rho \int V_t^0 ds;$$

on vérifie ensuite que :

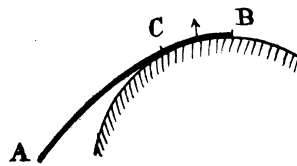
$$\rho V_t^1 = \rho V_t^0 + (\alpha - \rho V_t^0) = \alpha$$

est constant tout le long du fil. On détermine les deux constantes en écrivant que les percussions de tension sont nulles aux extrémités.

Même problème en supposant que le fil ne s'applique qu'en partie. Nous supposons par exemple que la portion AC reste libre, CB étant appliqué sur le contour :

$$\text{Sur AC} \left\{ \begin{array}{l} \rho W_t = \frac{d\tau}{ds}, \\ \rho W_n = \frac{\tau}{R}, \\ \tau'' - \frac{\tau}{R^2} = 0; \end{array} \right. \quad \text{sur CB} \left\{ \begin{array}{l} \rho W_t = \frac{d\tau}{ds}, \\ \rho W_n = \frac{\tau}{R} + \mathcal{P}, \\ \tau'' - \frac{\tau}{R^2} = \frac{\mathcal{P}}{R}. \end{array} \right.$$

Aux deux extrémités A et B les percussions de tension seront nulles. Que se passe-t-il en C? Je dis que τ est continu en ce point. Il suffit en effet de considérer un élément de fil dont les extrémités sont de part et d'autre de C. Il est soumis à deux percussions de tensions finies, à une percussion de contact



infiniment petite; comme la variation de quantité de mouvement est aussi infiniment

petite, τ est bien continu. $\frac{d\tau}{ds}$ est aussi continu, car cela résulte de la continuité de W_t et de la première des équations (8). Il y aura donc en général une discontinuité de vitesse normale en C. Nous avons deux équations différentielles à intégrer, donc en principe quatre constantes à déterminer. Or nous avons quatre relations : $\tau = 0$ aux deux extrémités, τ et $\frac{d\tau}{ds}$ continus en C. Le problème est donc bien déterminé. Remarquons que la discontinuité possible pour la vitesse normale entraîne que \mathcal{F} ne tend pas vers zéro en C.

Problème. — Dans son mouvement un fil vient s'appliquer complètement sur une surface. Il n'y a pas de frottement, et après le choc le fil glisse sur la surface. Nous appellerons ϖ l'angle de la normale principale au fil avec la normale à la surface. La seule percussion extérieure est une percussion \mathcal{F} portée par la normale à la surface. Les équations intrinsèques des percussions donnent :

$$\begin{aligned} V_t^1 - V_t^0 &= \frac{d\tau}{ds}, \\ V_n^1 - V_n^0 &= \frac{\tau}{R} + \mathcal{F} \cos \varpi, \\ V_b^1 - V_b^0 &= \mathcal{F} \sin \varpi, \\ \tau'' - \frac{\tau}{R^2} &= \mathcal{F} \frac{\cos \varpi}{R}, \end{aligned}$$

après le choc

$$V_n^1 = 0 \quad \text{ou} \quad V_n^1 \cos \varpi + V_b^1 \sin \varpi = 0,$$

cette relation donne en tenant compte du système précédent :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= -\tau \frac{\cos \varpi}{R} - (V_n^0 \cos \varpi + V_b^0 \sin \varpi), \\ \mathcal{F} &= -\tau \frac{\cos \varpi}{R} - V_n^0; \end{aligned}$$

τ est donc déterminé par l'équation différentielle suivante :

$$\tau'' - \frac{\tau}{R^2} + \tau \frac{\cos^2 \varpi}{R^2} + V_n^0 \frac{\cos \varpi}{R} = 0,$$

dont on peut simplifier la forme en introduisant la courbure normale et la courbure géodésique.

$$\tau'' - \frac{\tau}{R_G^2} + \frac{V_n^0}{R_N} = 0.$$

Si en particulier le fil s'applique suivant une géodésique ($\frac{1}{R_g} = 0$) ou un cercle géodésique ($R_g = C^{(c)}$) le problème se ramène aux quadratures. S'il vient s'appliquer suivant une asymptotique ($\frac{1}{R_n} = 0$) il n'y a pas de percussions de tension; en effet si les deux extrémités sont libres $\tau = 0$ en ces points, $\tau = 0$ convient à l'équation et nous savons qu'il n'existe qu'une solution; si le fil est une courbe fermée, $\tau = 0$ est la seule fonction périodique satisfaisant à l'équation différentielle. Plus particulièrement si un fil vient s'appliquer sur un plan, comme toute courbe du plan peut être considérée comme une asymptotique, il n'y aura aucune percussion de tension.

Revenons au cas général. Nous avons obtenu τ , on en déduit immédiatement la percussion normale, puis la variation de vitesse. On peut introduire les variations de vitesse suivant la normale à la surface et la normale géodésique.

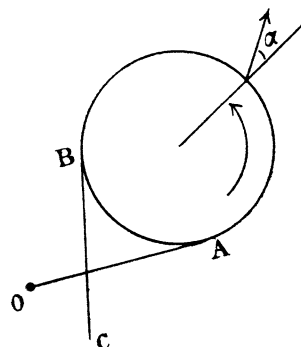
$$\left\{ \begin{array}{l} W_t = \frac{d\tau}{ds}, \\ W_n = \frac{\tau}{R_n} + \mathcal{F}, \\ W_g = -\frac{\tau}{R_g}; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau'' - \frac{\tau}{R_b^2} + \frac{V_n^0}{R_n} = 0, \\ \mathcal{F} = -\frac{\tau}{R_n} - V_n^0. \end{array} \right.$$

Dans le cas particulier où le fil s'applique suivant une asymptotique, nous avons vu que $\tau = 0$, il y a variation de vitesse seulement suivant la normale, variation connue a priori. On en déduit immédiatement :

$$\mathcal{F} = -V_n^0.$$

Problème. — Un fil est enroulé sur une section droite d'un treuil circulaire. Dans son mouvement le fil est entraîné sans glissement. A un certain moment une extrémité du fil est bloquée, le fil se tend et finit par glisser sur le treuil. Déterminer les percussions.

Au contact du treuil et du fil il y a des percussions de frottement. Nous remarquerons que pendant toute la durée du choc la direction des forces de frottement est invariable : elles font l'angle φ avec le rayon et sont situées dans le plan de la figure. La percussion de contact aura donc la même direction. Nous désignerons par \mathcal{F} la percussion normale et $f\mathcal{F}$ la percussion tangentielle. Le sys-



tème (8) nous fournit les équations :

$$\rho W_t = f \mathcal{Q} + \frac{d\tau}{ds},$$

$$\rho W_n = - \mathcal{Q} + \frac{\tau}{R},$$

$$\frac{dW_t}{ds} = \frac{W_n}{R},$$

où $W_t = 0 - \omega R$, $W_n = 0$.

Par suite W_t est constant et

$$\mathcal{Q} = \frac{\tau}{R}$$

est donc déterminée par l'équation différentielle

$$- \rho \omega R = \frac{f\tau}{R} + \frac{d\tau}{ds},$$

dont l'intégrale générale est

$$\tau = ae^{-\frac{fs}{R}} - \frac{\rho \omega R^2}{f},$$

a étant une constante d'intégration qui se détermine quand on connaît la percussion au point B, percussion variable suivant que le fil est libre ou supporte une masse. Si \mathcal{Q} est la percussion en ce point :

$$ae^{-\frac{fl}{R}} - \frac{\rho \omega R^2}{f} = \mathcal{Q}.$$

La percussion en A est

$$\tau_A = \left(\mathcal{Q} + \frac{\rho \omega R^2}{f} \right) e^{\frac{fl}{R}} - \frac{\rho \omega R^2}{f}$$

ou

$$\tau_A = \left(\mathcal{Q} + \frac{\rho \omega R^2}{f} \right) e^{fz} - \frac{\rho \omega R^2}{f},$$

α désignant l'angle dont est enroulé le fil.

Connaissant la percussion en chaque point du fil on pourrait avoir assez simplement le système des percussions subies par le treuil en faisant la somme géométrique des tensions en A et B, augmentée de la variation de quantité de mouvement de la portion de fil enroulée. Pour avoir le moment au centre du cercle on opérerait de même.

Retour sur la cinématique des fils inextensibles. — Soit M un point bien déterminé du fil, toujours le même quand le temps s'écoule. Nous désignerons par Ω la rotation instantanée du trièdre de Frenet en M. Nous allons commencer par retrouver la relation de compatibilité pour les vitesses de la manière suivante : Écrivons qu'un point voisin M' du fil a même vitesse que s'il était fixé au solide de masse nulle qu'entraîne le trièdre principal en M, le calcul étant fait en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$V_{M'} = V_M + \Omega \wedge MM' \quad \text{ou} \quad \frac{\partial V}{\partial s} ds = \Omega \wedge t ds,$$

d'où on déduit facilement

$$(11) \quad \frac{\partial V}{\partial s} = \Omega \wedge t, \quad t \cdot \frac{\partial V}{\partial s} = 0. \quad (3)$$

Remarquons tout de suite que la formule (11) permet d'avoir la composante de la rotation suivant le plan normal de la courbe, mais non la composante suivant la tangente; cela provient de ce que la rotation d'une barre est définie de la même manière : une rotation de la barre autour d'elle-même ne constituant pas un déplacement.

La méthode précédente ne fournissant pas cette composante tangentielle, nous allons procéder autrement. Nous allons écrire que dans le trièdre de Frenet de vitesse angulaire connue, on peut déterminer la vitesse de tous les points. Nous écrirons d'abord :

$$\frac{\partial t}{\partial \theta} = \Omega \wedge t;$$

or

$$\frac{\partial t}{\partial \theta} = M''_{s\theta} = V'_s,$$

donc

$$V'_s = \Omega \wedge t.$$

C'est la relation (11).

On en déduit, en faisant le produit scalaire par t, n, b ,

$$\begin{aligned} t \cdot V'_s &= 0, \\ n \cdot V'_s &= n \cdot (\Omega \wedge t) = \Omega \cdot (t \wedge n) = \Omega_b, \\ b \cdot V'_s &= b \cdot (\Omega \wedge t) = \Omega \cdot (t \wedge b) = -\Omega_n; \end{aligned}$$

donc :

$$(12) \quad \begin{cases} \Omega_n = -b \cdot V'_s, \\ \Omega_b = n \cdot V'_s. \end{cases}$$

De la même manière :

$$\frac{\partial n}{\partial \theta} = \Omega \wedge n.$$

Or d'après les formules de Frenet

$$\begin{aligned} n &= R M''_{s^2}, \\ \frac{\partial n}{\partial \theta} &= R'_0 M''_{s^2} + R V''_{s^2}, \\ R'_0 M''_{s^2} + R V''_{s^2} &= \Omega \wedge n. \end{aligned}$$

Faisons encore le produit scalaire par t ,

$$R t \cdot V''_{s^2} = t \cdot (\Omega \wedge n) = \Omega \cdot (n \wedge t) = -\Omega_b$$

ou

$$\Omega_b = -R t \cdot V''_{s^2}.$$

Comparons avec la relation (12)

$$-t \cdot V''_{s^2} = \frac{n}{R} V''_{s^2},$$

que l'on obtient en dérivant (3), nous n'avons donc pas de relation nouvelle.

Faisons le produit scalaire par n

$$\frac{R'_0}{R} + R n \cdot V''_{s^2} = 0$$

ou

$$(13) \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{R} \right) = n \cdot V''_{s^2}.$$

Relation intéressante car elle indique de quelle manière va se modifier la forme de la courbe (plus exactement sa courbure, mais nous allons trouver dans un instant une formule analogue pour la torsion).

Faisons enfin le produit scalaire par b .

$$Rb \cdot V_{s^2}'' = b \cdot (\Omega \wedge n) = \Omega \cdot (n \wedge b) = \Omega_t,$$

cette relation nous fournit la composante tangentielle de la rotation. Cette dernière est donnée en fonction de la vitesse par le système

$$(14) \quad \begin{cases} \Omega_t = Rb \cdot V_{s^2}'', \\ \Omega_n = -b \cdot V_s', \\ \Omega_b = n \cdot V_s'. \end{cases}$$

La formule (11) nous donne la vitesse quand on connaît la rotation, dont il est d'ailleurs inutile de connaître la composante tangentielle.

Pour obtenir les mêmes résultats nous allons indiquer une autre méthode qui sera plus facile à appliquer à la binormale. Dans le cas présent, seule l'écriture dif-fère. Nous écrivons la formule de Frenet sous la forme :

$$M_{s^2}' = \frac{1}{R} n$$

et en dérivant par rapport au temps :

$$V_{s^2}' = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{R} \right) n + \frac{1}{R} \Omega \wedge n.$$

Il suffit ensuite de faire les produits scalaires par t , n , b :

Nous allons terminer par l'étude de la binormale, et pour cela nous introduirons directement le vecteur M_s''' .

Les formules de Frenet nous permettent d'écrire :

$$\frac{\partial n}{\partial s} = -\frac{t}{R} - \frac{b}{T}$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{b}{T} &= -\frac{1}{R} M_s' - \frac{\partial}{\partial s} (R M_{s^2}'), \\ M_{s^2}''' &= -\frac{1}{R^2} t - \frac{R_s'}{R^2} n - \frac{1}{RT} b. \end{aligned}$$

Dérivons par rapport au temps

$$V_{s^3}''' = -\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{R^2} \right) t + \left(\frac{1}{R} \right)''_{s^0} n - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{RT} \right) b - \frac{1}{R^2} \Omega \wedge t - R'_s \Omega \wedge n - \frac{1}{RT} \Omega \wedge b$$

ou

$$V_{s^3}''' = -t \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{R^2} \right) - n R''_{s^0} - b \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{RT} \right) + \Omega \wedge M_{s^3}'';$$

faisons le produit scalaire successivement par t , n , b

$$t \cdot V_{s^3}''' = -\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{R^2} \right) + \Omega_b R'_s - \frac{\Omega_n}{RT},$$

$$n \cdot V_{s^3}''' = -R''_{s^0} - \frac{\Omega_b}{R^2} + \frac{\Omega_t}{RT},$$

$$b \cdot V_{s^3}''' = -\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{RT} \right) + \frac{\Omega_n}{R^2} - \Omega_t R'_s,$$

dont les deux premières sont conséquences de (3) et (13). La troisième nous fournit $\frac{\partial T}{\partial \theta}$, on peut aussi l'écrire sous la forme

$$(15) \quad b \cdot V_{s^3}''' = -\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{RT} \right) + b \cdot (\Omega \wedge M_{s^3}'').$$

Relation à laquelle satisfait la rotation. — Le système (14) nous permet d'écrire :

$$\frac{\partial \Omega_n}{\partial s} = -b \cdot V_{s^2}'' - \frac{n}{T} V'_s,$$

puis :

$$(16) \quad \frac{\partial \Omega_n}{\partial s} + \frac{\Omega_t}{R} + \frac{\Omega_b}{T} = 0;$$

or nous avons :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial s} = \frac{\partial \Omega_t}{\partial s} t + \frac{\partial \Omega_n}{\partial s} n + \frac{\partial \Omega_b}{\partial s} b + \Omega_t \frac{n}{R} - \Omega_n \left(\frac{t}{R} + \frac{b}{T} \right) + \Omega_b \frac{n}{T}.$$

On en déduit

$$(17) \quad n \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial s} = 0,$$

ce qui prouve que Ω'_s est dans le plan rectifiant de la courbe, tandis que V_s est dans le plan normal.

Si en particulier la courbe est plane, V'_s se projette suivant la normale; et Ω'_s suivant la tangente.

Problème. — On considère une courbe, qui sera par exemple un fil élastique. Deux de ses points matériels ne seront pas assujettis à être à une distance curviligne invariable l'un de l'autre. Nous supposons connue la distribution de vitesse tout le long de la courbe, et nous proposons de rechercher comment varient la longueur de la courbe, sa courbure et sa torsion. La distribution de vitesse n'est soumise à aucune restriction. Nous introduirons la rotation du trièdre principal de la courbe et, comme problème supplémentaire, nous aurons à rechercher comment s'exprime cette rotation en fonction de la vitesse et de ses dérivées. Nous suivrons pas à pas la méthode employée dans le cas des fils inextensibles. Nous allons donner une première méthode fournissant le coefficient d'allongement du fil en chaque point, coefficient défini de la manière suivante :

$$u = \frac{\frac{\partial}{\partial \theta} ds}{ds},$$

s est un paramètre définissant les divers points du fil, et qui à l'instant considéré coïncide avec l'arc. L'arc de la courbe peut se définir à l'aide de la formule :

$$ds^2 = dM^2,$$

que nous dériverons par rapport au temps :

$$2ds \frac{\partial}{\partial \theta} ds = 2dM \cdot dV,$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} ds = t \cdot dV,$$

$$u = \frac{\frac{\partial}{\partial \theta} ds}{ds} = t \cdot V_s.$$

Cette formule s'obtient encore par la considération de deux points voisins M et M' du fil, et de leurs positions M_1 et M'_1 à l'instant $\theta + \delta\theta$. Pour évaluer l'arc $M_1M'_1$ nous écrirons :

$$M_1M'_1 = -V\delta\theta + dM + (V + dV)\delta\theta = dM + dV\delta\theta$$

et en élevant au carré, on retrouve le calcul fait plus haut.

$$\begin{aligned} ds_1^2 &= ds^2 + 2dM \cdot dV \delta\theta, \\ (ds_1 + ds)\delta ds &= 2dM \cdot dV \delta\theta. \end{aligned}$$

On vérifie que si le fil est inextensible, tout le long du fil on doit avoir la condition souvent rencontrée :

$$t \cdot V'_s = 0.$$

Nous allons enfin donner une troisième méthode mieux adaptée aux problèmes partiels que nous nous sommes posés. Nous avons, d'après nos notations :

$$M'_s = t,$$

relation que nous allons dériver par rapport au temps. Pour dériver le premier vecteur, nous allons le considérer comme le quotient du vecteur dM par le scalaire ds . La dérivée du vecteur t s'obtient facilement en introduisant la rotation Ω du trièdre principal.

$$\frac{\partial}{\partial \theta} M'_s = \frac{d}{ds} \frac{\partial M}{\partial \theta} - dM \frac{\frac{\partial}{\partial \theta} ds}{ds^2} = V'_s - tu = \Omega \wedge t,$$

que nous écrirons

$$\frac{\partial}{\partial \theta} M'_s = V'_s - tu,$$

forme qui nous sera utile plus loin. Dans la première relation trouvée, faisons successivement les produits scalaires par t , n , b . Nous trouvons les trois relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} t \cdot V'_s = u, \\ n \cdot V'_s = \Omega_b, \\ b \cdot V'_s = -\Omega_n, \end{array} \right.$$

dont la première fournit u , les deux autres donnent Ω_n et Ω_b .

Suivant la même méthode, nous écrirons :

$$M''_{s^2} = \frac{n}{R},$$

que nous dériverons par rapport au temps. Nous considérerons M_s'' comme la dérivée de M_s' par rapport à l'arc :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} M_s'' = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} M_s' \right) - dM_s' \frac{\frac{\partial}{\partial \theta} ds}{ds^2} = \frac{d}{ds} (V_s' - tu) - M_s'' u = V_s'' - tu_s' - \frac{2u}{R} n;$$

donc :

$$\Omega \wedge \frac{n}{R} + n \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{R} = V_s'' - tu_s' - 2n \frac{u}{R},$$

que nous utiliserons plus loin sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} M_s'' = V_s'' - tu_s' - 2n \frac{u}{R}.$$

Faisons, dans la relation trouvée d'abord, le produit scalaire des deux membres par t , n , b , on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} t \cdot V_s'' = \frac{du}{ds} - \frac{\Omega_b}{R}, \\ n \cdot V_s'' = \frac{2u}{R} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{R}, \\ b \cdot V_s'' = \frac{\Omega_t}{R}. \end{array} \right.$$

On vérifie rapidement que la première est une conséquence de la première série de relations trouvées :

$$t \cdot V_s'' \equiv \left(t \cdot V_s' + \frac{n}{R} \cdot V_s' \right) - \frac{n}{R} \cdot V_s'.$$

La troisième achève de déterminer la rotation en fonction de la vitesse. La seconde fournit $\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{R}$ qui indique de combien aura varié la courbure entre les instants θ et $\theta + \delta\theta$.

Nous considérerons enfin le vecteur :

$$M_{s^3}'' = -\frac{t}{R^2} + \left(\frac{1}{R} \right)'_s n - \frac{b}{RT},$$

que nous dériverons par rapport au temps comme précédemment :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \frac{dM_{s^2}''}{d\theta} &= \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial M_{s^2}''}{\partial \theta} \right) - dM_{s^2}'' \frac{\partial}{\partial s^2} ds \\ &= V_{s^3}''' - tu_{s^2}'' - \frac{3u_s'}{R} n - 2nu \left(\frac{1}{R} \right)'_s + \frac{2u}{R} \left(\frac{t}{R} + \frac{b}{T} \right) - u \left[-\frac{t}{R^2} + \left(\frac{1}{R} \right)'_s - \frac{b}{RT} \right] \\ &= \Omega \wedge \left[-\frac{t}{R^2} + \left(\frac{1}{R} \right)'_s n - \frac{b}{RT} \right] - t \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{R} \right)''_{s\theta} n - b \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{RT}. \end{aligned}$$

Les produits scalaires des deux membres par t ou n fournissent des relations conséquences des deux séries déjà trouvées; mais le produit scalaire par b fournit une relation intéressante permettant d'avoir la dérivée de la torsion par rapport au temps :

$$V_{s^3}''' \cdot b = -\frac{u}{RT} + \frac{\Omega_n}{R^2} + \Omega_t \left(\frac{1}{R} \right)'_s - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{RT}.$$

En résumé, les formules intéressantes sont :

- 1) $\Omega \wedge t = V_s' - tu,$
- 2) $t \cdot V_s' = u,$
- 3) $n \cdot V_s' = \Omega_b,$
- 4) $b \cdot V_s' = -\Omega_n,$
- 5) $n \cdot V_{s^2}'' = \frac{2u}{R} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{R},$
- 6) $b \cdot V_{s^2}'' = \frac{\Omega_t}{R},$
- 7) $b \cdot V_{s^3}''' = -\frac{u}{RT} + \frac{\Omega_n}{R^2} + \Omega_t \left(\frac{1}{R} \right)'_s - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{RT},$

dont la première relie la distribution des vitesses à celle des rotations; d'une manière plus précise elle permet de calculer la vitesse en fonction de la rotation et du coefficient d'allongement. Les relations 3, 4, 6 permettent de calculer la rotation du trièdre connaissant la vitesse. Mais, quoique la vitesse puisse être arbitrairement choisie, la rotation satisfait à la même condition que dans le cas des fils inextensibles, car les relations 3, 4, 6 qui nous ont permis de l'obtenir sont encore les mêmes, cette relation était :

$$n \cdot \Omega_s' = 0.$$

Ceci va nous permettre d'évaluer facilement la dérivée de la courbure par rapport au temps. En effet calculons V_s'' dont nous avons besoin pour appliquer la formule 5.

$$\begin{aligned} V_s' &= \Omega \wedge t + tu, \\ V_s'' &= \Omega_s' \wedge t + \Omega \wedge \frac{n}{R} + tu_s' + u \frac{n}{R}, \\ \Omega_s' \cdot b + \frac{u}{R} &= \frac{2u}{R} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{R}, \\ 8) \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{R} &= \Omega_s' \cdot b - \frac{u}{R}. \end{aligned}$$

On peut de même chercher à simplifier la formule donnant la dérivée par rapport au temps de la torsion de la courbe. Nous calculerons ainsi V_{s^3}''' en fonction de Ω et u .

$$b \cdot V_{s^3}''' = (b \cdot V_{s^2}'')_s' - V_{s^2}'' \cdot \frac{n}{R}.$$

Pour développer les calculs, nous nous servirons de la formule 6, ce qui donne, en portant dans 7 :

$$\Omega_s' \cdot \frac{t}{R} + \Omega \cdot \frac{t}{R} + \Omega \cdot t \left(\frac{1}{R} \right)'_s - \frac{2u}{RT} - \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{R} = -\frac{u}{RT} + \frac{\Omega_n}{R^2} + \Omega_t \left(\frac{1}{R} \right)'_s - \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{R} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{T}$$

et après avoir simplifié, nous trouvons la formule très simple :

$$9) \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{T} = -\Omega_s' \cdot t - \frac{u}{T}.$$

On en déduit, en se servant de 8, une relation où n'intervient pas l'allongement du fil :

$$10) \quad \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{R} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{T} = \Omega_s' \cdot \left(\frac{t}{R} + \frac{b}{T} \right) = -\Omega_s' \cdot n_s'.$$

En particulier, si la courbe est telle, que la courbure et la torsion varient proportionnellement, le premier membre est nul et cela nous donne la direction du vecteur Ω_s' : il est perpendiculaire au plan déterminé par le vecteur n et sa dérivée par rapport à l'arc.

Relation entre la dynamique des fils et certaines surfaces réglées. — Étant donné un fil $C(M)$ nous avons désigné par Ω la rotation du trièdre principal, mais

nous avons remarqué qu'en chaque point on peut ajouter à cette rotation, une rotation arbitraire portée par la tangente. Nous aurons ainsi la rotation la plus générale de la tangente, soit $\Omega + \lambda t$.

Si à partir d'un point arbitraire on mène les vecteurs équipollents aux diverses rotations Ω , on obtient une courbe qui correspond point par point à $C(M)$. En faisant au contraire intervenir toutes les rotations possibles pour un même point M , on obtiendra une surface réglée dont les génératrices sont parallèles à t , c'est-à-dire aux tangentes à $C(M)$.

Sur cette surface nous allons chercher où est placée la courbe lieu des extrémités des rotations principales et nous allons démontrer que c'est la ligne de striction de la surface réglée.

En effet nous avons montré la relation :

$$\Omega'_s \cdot n = 0,$$

ce qui indique que la tangente à $C(\Omega)$ est perpendiculaire à la normale principale de $C(M)$. Or le plan asymptote de la surface réglée étant parallèle au plan osculateur de $C(M)$, le plan principal, qui lui est perpendiculaire et contient le vecteur t , est parallèle au plan rectifiant de $C(M)$. Ce plan principal contient toute direction orthogonale à n , donc Ω'_s en particulier, ce que nous voulions montrer.

Dans l'étude de la cinématique des surfaces réglées, nous rencontrerons certains mouvements où à la surface nous adjoindrons une courbe avec les relations géométriques précédentes. Ceci constituera une réciproque de la proposition précédente, s'il est possible de conserver l'inextensibilité du fil et de la surface.

Distribution des accélérations le long d'un fil. — Reprenons d'abord la distribution des vitesses dans le corps solide, elle est définie par la relation :

$$V_M = V_o + \Omega \wedge OM,$$

d'où on tire en dérivant par rapport au temps :

$$\Gamma_M = \Gamma_o + \Omega' \wedge OM + \Omega \wedge (V_M - V_o);$$

Or :

$$\Omega \wedge (V_M - V_o) = \Omega \wedge (\Omega \wedge OM) = \Omega(\Omega \cdot OM) - OM(\Omega^2)$$

et, en posant $OM = \lambda t$, t étant un vecteur unitaire porté par la droite OM :

$$\Gamma_M = \Gamma_o + \lambda(\Omega' \wedge t + \Omega_t \Omega - \Omega^2 t),$$

$$\Gamma_M = \Gamma_o + \lambda Q, \quad Q = \Omega' \wedge t + \Omega_t \Omega - \Omega^2 t,$$

Q étant un vecteur indépendant de la position des points M et O sur la droite. Il en résulte que l'accélération, le long d'une droite se déplace parallèlement à un plan fixe et que son extrémité décrit une droite. Il en est bien de même pour la distribution des vitesses le long d'une droite, mais le vecteur Q analogue était perpendiculaire à la droite, et on pouvait projeter la vitesse, ce qui donnait un théorème connu. Ici, si on voulait une propriété analogue, il faudrait projeter les accélérations parallèlement à un plan, lui-même parallèle au vecteur Q. La difficulté serait de déterminer pour chaque droite le vecteur précédent.

Appliquons la formule que nous venons de trouver au cas de deux points infiniment voisins, t désignant le vecteur unitaire qui passe par ces deux points, on obtient alors :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial s} = \Omega' \wedge t + \Omega_t \Omega - \Omega^2 t.$$

Sous cette forme la formule s'applique le long de tout arc inextensible, en désignant par Ω le vecteur rotation du trièdre principal en chaque point, et par Ω' la dérivée de ce vecteur prise dans le temps.

Si nous posons :

$$\begin{aligned} \Omega &= t\Omega_t + n\Omega_n + b\Omega_b, \\ \Omega' &= t\Omega'_t + n\Omega'_n + b\Omega'_b, \end{aligned}$$

en dérivant la première égalité par rapport au temps, nous avons :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \theta} = \Omega' = t \frac{\partial \Omega_t}{\partial \theta} + n \frac{\partial \Omega_n}{\partial \theta} + b \frac{\partial \Omega_b}{\partial \theta} + \Omega \wedge \Omega,$$

ce qui prouve que :

$$\Omega'_t = \frac{\partial \Omega_t}{\partial \theta}, \quad \Omega'_n = \frac{\partial \Omega_n}{\partial \theta}, \quad \Omega'_b = \frac{\partial \Omega_b}{\partial \theta},$$

et nous savons que :

$$\begin{aligned} \Omega_t &= Rb \cdot V_s^2, \\ \Omega_n &= -b \cdot V_s', \\ \Omega_b &= n \cdot V_s'. \end{aligned}$$

En opérant d'une autre manière on peut rechercher directement les composantes

de $\frac{\partial \Gamma}{\partial s}$ sur les axes de Frenet-Serret en se servant de la formule vectorielle :

$$\begin{aligned}\Omega' \wedge t &= -b \Omega'_n + n \Omega'_b, \\ \Omega_t \Omega &= t \Omega_t^2 + n \Omega_t \Omega_n + b \Omega_t \Omega_b, \\ -t \Omega^2 &= -t(\Omega_t^2 + \Omega_n^2 + \Omega_b^2), \\ \frac{\partial \Gamma}{\partial s} &= -t(\Omega_n^2 + \Omega_b^2) + n(\Omega'_b + \Omega_t \Omega_n) + b(-\Omega'_n + \Omega_t \Omega_b).\end{aligned}$$

A titre de vérification, en se servant des valeurs rappelées pour Ω_t , Ω_n , Ω_b on trouve que $\frac{\partial \Gamma}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial \theta} V'_s$.

Nous allons obtenir l'équation différentielle de la tension en nous servant de cette relation cinématique pour l'accélération. Pour éliminer Ω' que nous ne connaissons que difficilement, formons :

$$\begin{aligned}t. \frac{\partial \Gamma}{\partial s} &= -(\Omega_n^2 + \Omega_b^2) = -[(b \cdot V'_s)^2 + (n \cdot V'_s)^2] = -V_s'^2 + (t \cdot V'_s)^2 = -V_s'^2, \\ t. \frac{\partial \Gamma}{\partial s} &= -V_s'^2.\end{aligned}$$

Reportons-nous à l'équation du mouvement des fils :

$$\Gamma = \frac{F}{\rho} + \frac{1}{\rho} t \frac{\partial \tau}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\tau}{R} n,$$

que nous dérivons par rapport à l'arc :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Gamma}{\partial s} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial s} F + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial s} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial s} t \frac{\partial \tau}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{n}{R} \frac{\partial \tau}{\partial s} + \frac{1}{\rho} t. \frac{\partial^2 \tau}{\partial s^2} \\ &\quad - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial s} \frac{\tau}{R} n + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial s} \frac{n}{R} - \frac{1}{\rho R} \frac{\partial R}{\partial s} \tau n - \frac{\tau}{\rho R} \left(\frac{t}{R} + \frac{b}{T} \right);\end{aligned}$$

donc :

$$t. \frac{\partial \Gamma}{\partial s} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial s} F. t + \frac{1}{\rho} t. \frac{\partial F}{\partial s} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial s} \frac{\partial \tau}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \tau}{\partial s^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\tau}{R^2} = -V_s'^2,$$

c'est l'équation (4) sous la forme où nous l'avons trouvée :

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial s^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial s} \frac{\partial t}{\partial s} - \frac{\tau}{R^2} + t. \left(\frac{\partial F}{\partial s} - \frac{\partial \rho}{\partial s} F \right) + \rho V_s'^2 = 0.$$

Étude d'un mouvement particulier de fil inextensible. — Soient A un point et ω une fonction ne dépendant que du temps. Nous allons montrer qu'il existe à chaque instant, pour chaque point M du fil, une rotation égale à ωAM . Nous montrerons de plus que le vecteur précédent est une rotation principale (rotation du trièdre principal). Pour cela il suffit de vérifier la relation :

$$\begin{aligned} n \cdot \Omega'_s &= 0, \\ \Omega'_s &= \omega t, \end{aligned}$$

ce qui est immédiat, car à l'instant considéré, A est fixe et ω constant.

Le fil est inextensible, donc $V'_s = \omega OM \wedge t$. Cherchons la variation de sa courbure et de sa torsion, elles sont données par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{R}} &= \Omega'_s \cdot b + tu = \omega t \cdot b = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{T}} &= -\Omega'_s \cdot t - \frac{u}{\mathbf{T}} = -\omega t \cdot t = -\omega, \quad \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{T}} = \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{T}_0} - \int \omega d\theta. \end{aligned}$$

Interprétons la première : En un même point matériel, lorsque le temps s'écoule, la courbure reste constante ; comme la distance de deux points voisins reste invariable, il en résulte que l'angle des deux tangentes est aussi indépendant du temps. On en déduit que la développable dont le fil est l'arête de rebroussement reste constamment applicable sur elle-même.

La deuxième formule prouve que la torsion augmente d'une même quantité, à un instant donné, pour tous les points de la courbe. Si initialement la courbe était plane, à chaque instant sa torsion serait constante. Plus généralement, si le fil est initialement une courbe de Bertrand, il le restera à chaque instant.

L'étude précédente nous conduit tout naturellement à étudier la déformation d'une surface développable qui reste applicable sur elle-même avec conservation de l'arête. Cette surface en effet est complètement déterminée par la connaissance de son arête de rebroussement qui est une ligne devant conserver sa longueur ; le long de cette courbe nous devons donc avoir :

$$V'_s = \Omega \wedge t \quad \text{et} \quad \Omega'_s \cdot n = 0.$$

De plus, la surface restant applicable sur elle-même, l'angle de deux tangentes infiniment voisines est indépendant du temps ; donc la courbure de l'arête de rebroussement est conservée :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{R}} = \Omega'_s \cdot b = 0.$$

Il en résulte que le vecteur Ω'_s est porté par la tangente à l'arête de rebroussement, $\Omega'_s = \lambda t$. On retrouve le cas étudié plus haut en supposant λ constant. Connaissant la rotation sur l'arête on en déduit la rotation en tout point de la développable de la manière suivante : Comme chaque génératrice est invariablement liée à l'arête, la rotation est constante tout le long de chaque arête. La connaissance du facteur λ en fonction de l'arc et du temps caractérise la déformation de la développable. La variation de la torsion est définie par :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{T} = -\Omega'_s \cdot t = -\lambda.$$

Comme λ est une fonction arbitraire des deux variables, nous voyons qu'on peut amener en contact, d'une manière continue, deux surfaces développables dont les arêtes de rebroussement ont même courbure aux points homologues. Si de plus cette courbure est constante, on peut faire glisser les deux surfaces l'une sur l'autre en maintenant au contact les arêtes.

Autre exemple. — Soit un mouvement où la rotation soit $\Omega = \omega n$, ω étant seulement fonction du temps, et le fil étant inextensible.

On vérifie que cette rotation est principale car :

$$\Omega'_s = -\omega \left(\frac{t}{R} + \frac{b}{T} \right) \quad \text{et} \quad n \cdot \Omega'_s = 0.$$

Les vitesses sont définies par :

$$dV = \Omega \wedge dM = \omega ds n \wedge t = -\omega b ds.$$

On a la variation de la courbure et de la torsion par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{R} &= \Omega'_s \cdot b = -\frac{\omega}{T}, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{T} &= -\Omega'_s \cdot t = \frac{\omega}{R}; \end{aligned}$$

d'où on déduit :

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{R} + \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{T} = 0.$$

Si, pendant un intervalle fini de temps, la rotation est définie comme précédemment, on voit que :

$$\frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2} = f(s).$$

Si, plus particulièrement encore, $\frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2} = \frac{1}{a^2}$ le long de la courbe initiale, il en sera de même à un instant quelconque, en tout point du fil.

Étudions la variation de l'accélération le long de la courbe :

$$\frac{d\Gamma}{ds} = \Omega' \wedge t + \Omega \wedge (\Omega \wedge t) = -\omega' b + \omega^2 t.$$

A un instant donné, le vecteur est dans le plan rectifiant et il occupe la même position par rapport au trièdre principal en tout point de la courbe.

Autre exemple. — Cherchons si la rotation peut être dans le plan rectifiant :

$$\begin{aligned} \Omega &= \lambda t + \nu b, \\ \Omega' &= (\lambda' t + \nu' b) + n \left(\frac{\lambda}{R} + \frac{\nu}{T} \right). \end{aligned}$$

Pour que ν convienne, il est nécessaire et suffisant que :

$$\frac{\lambda}{R} + \frac{\nu}{T} = 0.$$

Ce qui exprime que Ω est porté par la droite caractéristique du plan rectifiant, on en déduit immédiatement que :

$$\begin{aligned} dV &= \Omega \wedge t ds = \nu n ds, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{R} &= \nu', \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{T} &= -\lambda'. \end{aligned}$$

Cherchons la variation de l'accélération le long du fil; nous poserons :

$$\lambda = hR, \quad \nu = -hT,$$

et comme :

$$\begin{aligned}\Omega'_s &= \lambda'_s t + \nu'_s b, \\ \Omega'_s \wedge t &= \nu'_s n, & \Omega \wedge t &= \nu n, \\ \Omega \wedge (\Omega \wedge t) &= \nu(\lambda b - \nu t) = \nu hRT \left(\frac{t}{R} + \frac{b}{T} \right),\end{aligned}$$

nous obtenons :

$$\frac{d\Gamma}{ds} = \nu'_s n + \nu^2 R \frac{dn}{ds}.$$

Est-il possible que l'accélération soit portée par la normale principale? Cela ne pourra se produire que si :

$$\nu''_s = \nu^2 R$$

et si, en un point particulier du fil, l'accélération est portée par la normale principale.

Nous allons montrer que la distribution précédente de rotation est la seule qui fournisse un $\frac{dV}{ds}$ porté par la normale principale, en effet dans le cas général où :

$$\Omega = \lambda t + \mu n + \nu b,$$

on a :

$$\frac{dV}{ds} = \Omega \wedge t = \nu n - \mu b$$

et nous désirons que $\mu = 0$; Ω est donc dans le plan rectifiant et nous retrouvons le problème précédent.

Fil extensible. — Soit un fil dont la longueur n'est pas invariable, et dont la rotation du trièdre principal est :

$$\Omega = \omega AM,$$

A étant un point ne dépendant que du temps, et ω un scalaire indépendant de l'arc. C'est bien une rotation du trièdre principal, car :

$$n \cdot \Omega'_s = 0.$$

De l'étude des fils pouvant s'allonger, nous avons déduit la valeur de la rotation et de l'allongement en fonction de la vitesse. Or ici c'est la rotation qui est donnée, elle nous fournira la vitesse à condition de connaître l'allongement u en fonction du temps et de l'arc. En se reportant aux formules établies, on voit rapidement que, dans le cas général :

$$V'_s = \Omega \wedge t + ut,$$

formule donnant la vitesse en chaque point de l'arc, à condition de connaître celle d'un point particulier. Nous allons chercher la variation de la courbure et de la torsion ; elles sont données par les formules :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \Omega'_s \cdot b - \frac{u}{R}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{T} = -\Omega'_s \cdot t - \frac{u}{T},$$

qui donnent ici :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{R} &= -\frac{u}{R}, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{T} &= -\frac{u}{T} - \omega. \end{aligned}$$

Nous pouvons intégrer ces relations en supposant u déterminé et $\omega = 1$. Pour plus de simplicité dans les calculs, nous poserons :

$$u = \frac{v''_{\theta^2}}{v'_{\theta}},$$

ce qui est possible d'une infinité de façons ; nous procéderons de la manière suivante :

Posons d'abord :

$$u = \frac{w'_{\theta}}{w}, \quad w = \varphi(s) e^{\int_0^{\theta} u d\theta}.$$

Pour simplifier les notations, l'instant initial sera $\theta = 0$ et nous aurons :

$$w(s, 0) = \varphi(s).$$

Comme φ est une fonction arbitraire, que nous pouvons choisir à notre gré, sans modifier u , nous la prendrons égale à 1 de sorte que :

$$w(s, 0) = 1.$$

Nous poserons enfin :

$$w = v'_0, \quad v = \int_0^s w d\theta + \psi(s)$$

et nous choisirons la fonction arbitraire d'intégration ψ nulle à l'instant initial. Nous aurons alors :

$$u = \frac{v''_0}{v'_0}, \quad v(s, 0) = 0, \quad v'_0(s, 0) = 1.$$

Passons maintenant à l'intégration de la première équation différentielle qui donne la courbure :

$$\frac{1}{R} = \frac{\varphi(s)}{v'_0}.$$

En désignant par l'indice zéro la valeur prise par une quantité à l'instant initial, nous déterminons la fonction arbitraire d'intégration par :

$$\frac{1}{R_0} = \varphi(s) \frac{1}{v'_0(s, 0)},$$

ce qui donne, grâce au choix de v :

$$R = R_0 v'_0.$$

L'intégrale générale de la deuxième équation sans second membre est :

$$\frac{1}{T} = \frac{\lambda}{v'_0}.$$

Appliquons la méthode de la variation des constantes :

$$\frac{\lambda'_0}{v'_0} = -1;$$

donc :

$$\lambda = v + C(s), \quad \frac{1}{T} = \frac{v + C(s)}{v'_0}$$

et grâce au choix de v , nous pouvons déterminer la valeur de la torsion :

$$\frac{1}{T_0} = \frac{v(s, 0) + C(s)}{v'_0(s, 0)} = C(s),$$
$$\frac{v'_0}{T} = v + \frac{1}{T_0}.$$

En résumé, nous connaissons la valeur de la courbure et de la torsion en fonction du temps. Nous savons que, dans ces conditions, à chaque instant le fil est déterminé en position, à une translation près. Comme nous sommes en Mécanique, nous dirons que le fil est connu, à un mouvement relatif de translation près.

En d'autres termes, à une translation relative près, le déplacement du fil est connu chaque fois que la fonction u est connue.

Le raisonnement que nous venons de faire est général : si la rotation est connue en fonction de l'arc et du temps, ainsi que l'allongement, le mouvement du fil est parfaitement déterminé à une translation arbitraire près.

II. — ÉTUDE DYNAMIQUE DES SURFACES. PERCUSSIONS

Notations. — Nous appellerons $S(M)$, $S(\Omega)$ les surfaces décrites par des points M , Ω . Sur $S(M)$ la position de M sera définie à l'aide de deux paramètres α , β . Si pour un instant nous supposons que α représente le temps, la vitesse de M sera le vecteur M'_α . De même M'_β sera un vecteur tangent à la courbe coordonnée β variable. Les deux vecteurs M'_α , M'_β définissent le plan tangent, et $N = M'_\alpha \wedge M'_\beta$ un certain vecteur normal à la surface m sera un vecteur unitaire normal. Conformément à l'usage nous poserons :

$$\begin{aligned} E &= M'^2_\alpha, & F &= M'_\alpha \cdot M'_\beta, & G &= M'^2_\beta. \\ D &= M''_{\alpha^2} \cdot N, & D' &= M''_{\alpha\beta} \cdot N, & D'' &= M''_{\beta^2} \cdot N. \\ H^2 &= EG - F^2 = N^2. \end{aligned}$$

Rappelons les formules vectorielles dont nous ferons un fréquent usage :

$$\begin{aligned} u \cdot (v \wedge w) &= v \cdot (w \wedge u) = w \cdot (u \wedge v), \\ U \wedge (V \wedge W) &= V(U \cdot W) - W(U \cdot V). \end{aligned}$$

Nature des surfaces considérées. — Nous appellerons surface déformable une surface matérielle qui se déplace et se déforme de manière à rester constamment applicable sur elle-même, avec conservation des longueurs. Nous verrons plus tard des moyens de réaliser pratiquement de telles surfaces.

La statique de ces surfaces a été étudiée par Lecornu (*J. E. Polytechnique*, 29, 1880) et Beltrami (*Mémoires Acad. Bologna*, 1^{re} série, t. 3, 1882).

Cinématique de ces surfaces. — Considérons une courbe tracée sur la surface; comme elle est de longueur invariable, nous pouvons la considérer comme un fil et, pour qu'une distribution de vitesses sur la surface soit compatible avec l'inextensibilité de la surface, il faudra que, pour toute courbe, nous ayons :

$$(1) \quad t \cdot \frac{dV}{ds} = 0$$

ou sans spécifier le paramètre de la courbe :

$$(2) \quad dV \cdot dM = 0.$$

Nous allons aboutir à cette formule fondamentale d'une autre manière particulièrement intéressante.

Considérons le plan tangent en M comme invariablement lié à la surface, et le solide de masse nulle qu'il entraîne dans son mouvement. Désignons par Ω la rotation instantanée de ce solide. Écrivons qu'un point M' de la surface, infiniment voisin de M a même vitesse que s'il était situé dans le plan tangent en M , aux infiniment petits du second ordre près :

$$V(M') = V(M) + \Omega \wedge MM',$$

ou encore, les différentielles étant prises à t (temps) constant :

$$(3) \quad dV = \Omega \wedge dM$$

ou ;

$$\frac{dV}{ds} = \Omega \wedge t.$$

On en déduit immédiatement, d'après les propriétés du produit vectoriel :

$$dV \cdot dM = 0.$$

Dans cette relation nous allons faire intervenir le mode de représentation paramétrique :

$$\begin{aligned} (V'_\alpha d\alpha + V'_\beta d\beta) \cdot (M'_\alpha d\alpha + M'_\beta d\beta) &= 0, \\ (M'_\alpha \cdot V'_\alpha) d\alpha^2 + (M'_\alpha \cdot V'_\beta + M'_\beta \cdot V'_\alpha) d\alpha d\beta + (M'_\beta \cdot V'_\beta) d\beta^2 &= 0. \end{aligned}$$

Comme cette relation doit être vérifiée quels que soient $d\alpha$ et $d\beta$, on a les trois relations :

$$(4) \quad \begin{aligned} M'_\alpha \cdot V'_\alpha &= 0, & M'_\beta \cdot V'_\beta &= 0, \\ M'_\alpha \cdot V'_\beta + M'_\beta \cdot V'_\alpha &= 0. \end{aligned}$$

On peut obtenir ces trois relations d'une autre manière, en supposant qu'au cours du mouvement le même point matériel est toujours défini au moyen des mêmes paramètres $\alpha\beta$. Il suffit en effet de dériver par rapport au temps les relations :

$$M'^2_\alpha = E(\alpha, \beta), \quad M'_\alpha \cdot M'_\beta = F(\alpha, \beta), \quad M'^2_\beta = G(\alpha, \beta),$$

en remarquant que les seconds membres sont indépendants du temps. Mais les for-

mules (4) sont valables même si un même point matériel n'est pas toujours défini au moyen des mêmes paramètres quand le temps s'écoule; cela résulte de la première manière dont nous avons obtenu ces formules. Nous pouvons par exemple, à un instant donné, prendre pour paramètres les coordonnées rectangulaires de la projection de M sur un plan fixe. Si XYZ représentent les composantes rectangulaires de la vitesse et si $z = z(x, y)$ est l'équation de la surface rapportée aux mêmes axes, les relations (4) s'écrivent :

$$(4') \quad \begin{aligned} X'_x + pZ'_x &= 0, & Y'_y + qZ'_y &= 0, \\ X'_x + pZ'_y + Y'_x + qZ'_x &= 0, \end{aligned}$$

équations étudiées par Darboux (*Théorie des Surfaces*) dans le chapitre sur la déformation infiniment petite des surfaces. Darboux appelle directrice de la déformation infiniment petite le support de la vitesse $\dot{V}(M)$, et module, la longueur de la vitesse, ou un nombre proportionnel. Il étudie aussi la rotation, qui s'introduit chez lui comme intermédiaire de calcul. Il a bâti son étude d'une manière géométrique, complètement indépendante du point de vue mécanique où nous nous plaçons.

Application de la formule (4). — Considérons sur $S(M)$ les lignes dont la tangente coupe la vitesse en ce point sous un angle droit. Leurs trajectoires orthogonales sont tangentes aux projections de la vitesse sur le plan tangent. Elles sont donc définies par :

$$V \cdot dM = 0;$$

or on a aussi

$$dV \cdot dM = 0,$$

en différentiant la première relation on en déduit :

$$V \cdot d^2M = 0,$$

c'est-à-dire que la vitesse est perpendiculaire aux deux directions dM et d^2M situées dans le plan osculateur, et par suite V est placé suivant la binormale aux courbes considérées.

En particulier si tout le long d'une courbe la vitesse est normale à la surface, la courbe considérée est une asymptotique puisque sa binormale est normale à la surface.

Si tout le long d'une courbe les vitesses sont tangentes à la surface et normales à la courbe, cette ligne est une géodésique.

Si une surface est telle qu'elle admet une distribution de vitesses tangentes, les trajectoires orthogonales aux lignes de vitesses sont toutes des géodésiques. Nous reviendrons sur l'étude de ces surfaces.

Étude de la rotation. — Le vecteur Ω n'est pas quelconque; car la formule (3) qui permet de calculer la vitesse en M connaissant la forme de la surface et la vitesse en un point particulier M_0 nécessite en apparence la connaissance du chemin d'intégration. Il nous faut donc écrire que le résultat est indépendant du chemin suivi, et que le résultat est valable pour tout point de la surface.

$$V(M) = V(M_0) + \int_{M_0 M} \Omega \wedge dM.$$

Il nous suffira pour cela d'écrire que la quantité sous le signe somme est une différentielle vectorielle exacte. On peut aussi projeter sur trois axes rectangulaires, ou prendre un parallélogramme infiniment petit sur la surface, dont les côtés sont des courbes coordonnées.

$$\Omega \wedge M'_\alpha dx + \Omega \wedge M'_\beta d\beta,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\Omega \wedge M'_\beta) = \frac{\partial}{\partial \beta} (\Omega \wedge M'_\alpha),$$

$$(5) \quad \Omega'_\alpha \wedge M'_\beta = \Omega'_\beta \wedge M'_\alpha,$$

telle est la condition à laquelle doit satisfaire la rotation.

Sous cette forme on vérifie qu'aux points homologues les surfaces $S(M)$ et $S(\Omega)$ ont leurs plans tangents parallèles et que les tangentes asymptotiques en ces points percent le plan de l'infini en quatre points formant une division harmonique, ou, ce qui revient au même, que si on mène par un même point les parallèles aux deux couples de tangentes asymptotiques, elles sont dans un même plan et forment un faisceau harmonique. Darboux l'a démontré dans son chapitre sur les Douze Surfaces, en prenant comme paramètres x et y . Nous le démontrons un peu plus loin.

Recherche des rotations compatibles avec une forme de surface donnée. Première méthode.

Nous rechercherons Ω en posant

$$\Omega = \lambda M'_\alpha + \mu M'_\beta + \nu N$$

et nous allons calculer Ω'_α et Ω'_β dont nous avons besoin pour porter dans la condition (5)

$$\Omega'_\alpha = \lambda'_\alpha M'_\alpha + \mu'_\alpha M'_\beta + \nu'_\alpha N + \lambda M''_{\alpha\alpha} + \mu M''_{\alpha\beta} + \nu N'_\alpha;$$

$$\Omega'_\beta = \lambda'_\beta M'_\alpha + \mu'_\beta M'_\beta + \nu'_\beta N + \lambda M''_{\alpha\beta} + \mu M''_{\beta\beta} + \nu N'_\beta.$$

Il nous faudrait ensuite projeter l'égalité vectorielle obtenue sur trois axes, ou ce qui revient au même, faire le produit scalaire par M'_α , M'_β , N . Nous parviendrons au résultat par des calculs moins longs en faisant les remarques suivantes : Le vecteur égal à chacun des membres de (5) est d'abord perpendiculaire à M'_α et M'_β , il est donc parallèle à la normale en M à $S(M)$; il est de même parallèle à la normale en Ω à $S(\Omega)$. Les plans tangents aux points homologues sont donc parallèles, on peut donc poser :

$$\Omega'_\alpha = bM'_\alpha - aM'_\beta,$$

$$\Omega'_\beta = cM'_\alpha - eM'_\beta,$$

et en portant dans (5), on voit que $e = b$

$$(6) \quad \begin{cases} \Omega'_\alpha = bM'_\alpha - aM'_\beta, \\ \Omega'_\beta = cM'_\alpha - bM'_\beta. \end{cases}$$

On vérifie immédiatement que $FM'_\alpha - EM'_\beta$ et $GM'_\alpha - FM'_\beta$ sont dans le plan tangent et respectivement perpendiculaires à M'_α et M'_β . On en déduit, en se servant de (6)

$$\Omega'_\alpha \cdot (GM'_\alpha - FM'_\beta) = (bM'_\alpha - aM'_\beta) \cdot (GM'_\alpha - FM'_\beta) = b(EG - F^2),$$

$$\Omega'_\alpha \cdot (GM'_\alpha - FM'_\beta) = \Omega'_\beta \cdot (FM'_\alpha - EM'_\beta),$$

et tous calculs faits, on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (H\lambda) + \frac{\partial}{\partial \beta} (H\mu) = \nu \frac{GD - 2FD' + ED''}{H}.$$

Formons maintenant les produits scalaires de Ω'_α et Ω'_β par N qui doivent être nuls :

$$(7) \quad \begin{cases} D\lambda + D'\mu + H \frac{\partial}{\partial \alpha} (H\nu) = 0, \\ D'\lambda + D''\mu + H \frac{\partial}{\partial \beta} (H\nu) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} (H\lambda) + \frac{\partial}{\partial \beta} (H\mu) = \nu \frac{GD - 2FD' + ED''}{H}. \end{cases}$$

Tel est le système de relations qui relie la rotation et la surface pour laquelle elle est valable.

On peut tirer facilement λ et μ en fonction de $\nu = \nu H$ (composante normale de

la rotation) qui satisfait à l'équation aux dérivées partielles du second ordre (à condition que la surface ne soit pas développable) :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{H^2 (D' \rho'_\beta - D'' \rho'_\alpha)}{DD'' - D'^2} \right] + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{H^2 (D' \rho'_\alpha - D \rho'_\beta)}{DD'' - D'^2} \right] - \rho \frac{GD - 2FD' + ED''}{H^2} = 0,$$

dont l'écriture peut se simplifier grâce à la courbure totale et à la courbure moyenne :

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{DD'' - D'^2}{H^2}, \quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{GD - 2FD' + ED''}{H^2}.$$

On simplifie encore si les asymptotiques ont été prises pour lignes coordonnées.

Reprenons la dernière des équations (7), nous allons lui donner une forme géométrique. Prenons l'intégrale des deux membres à l'intérieur d'une portion de $S(M)$ limitée par un contour quelconque \mathcal{L} ,

$$\int \int_{\Sigma} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (H\lambda) + \frac{\partial}{\partial \beta} (H\mu) \right] d\alpha d\beta = \int \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) H \rho d\alpha d\beta.$$

La première intégrale se transforme en intégrale curviligne :

$$\int_{\mathcal{L}} H(\lambda d\beta - \mu d\alpha) = \int \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) H \rho d\alpha d\beta.$$

Remarquons que $\rho = \Omega \cdot m$ et que $H d\alpha d\beta = d\sigma$ est l'élément d'aire de $S(M)$.

Nous interpréterons l'intégrale curviligne en faisant intervenir le vecteur

$$\mathcal{U} = m \wedge \Omega = -\frac{1}{H} (\lambda M'_\alpha + \mu M'_\beta + \nu N) \wedge (M'_\alpha \wedge M'_\beta) = -\frac{1}{H} (F\lambda + G\mu) M'_\alpha + \frac{1}{H} (E\lambda + F\mu) M'_\beta$$

et comme

$$\mathcal{U} \cdot dM = \mathcal{U} \cdot (M'_\alpha d\alpha + M'_\beta d\beta) = \lambda d\beta - \mu d\alpha,$$

on a la formule vectorielle :

$$(8) \quad \int \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \Omega \cdot m d\sigma = \int_{\mathcal{L}} (m \wedge \Omega) \cdot dM \left(= \int_{\mathcal{L}} (\Omega \wedge dM) \cdot m = \int_{\mathcal{L}} m \cdot dV \right).$$

Le vecteur \mathcal{U} s'obtient en faisant tourner d'un angle droit, dans un sens convenable, la composante de Ω dans le plan tangent. Ce théorème peut s'énoncer ainsi :

le flux du vecteur $\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\Omega$ à travers une portion de la surface considérée, est égal à la circulation du vecteur $m \wedge \Omega$. Pour les surfaces à courbure moyenne constante, il y a proportionnalité entre le flux de Ω à travers une portion de surface et la circulation de Ω le long du contour qui la limite. Plus particulièrement, pour toute surface minima, la circulation de Ω le long d'un contour fermé arbitraire est nulle. Ω dépend donc, sur la surface d'un potentiel, c'est-à-dire que sa circulation le long d'un arc non fermé dépend seulement des extrémités et non du chemin parcouru. Nous y reviendrons plus loin.

Autre méthode de recherche de la rotation, en commençant par Ω'_α et Ω'_β . Nous allons rechercher les trois fonctions a, b, c qui les définissent, ainsi que le montrent les formules (6); Ω s'obtiendra ensuite par intégration à un vecteur additif près. Il va nous suffire d'écrire que

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \Omega'_\alpha = \frac{\partial}{\partial \alpha} \Omega'_\beta;$$

par suite :

$$b'_\beta M'_\alpha - a'_\beta M'_\beta + bM''_{\alpha\beta} - aM''_{\beta\alpha} = c'_\alpha M'_\alpha - b'_\alpha M'_\beta + cM''_{\alpha\alpha} - bM''_{\alpha\beta}.$$

Faisons maintenant le produit scalaire par M'_α, M'_β, N .

$$(9) \quad \begin{cases} E(b'_\beta - c'_\alpha) + F(b'_\alpha - a'_\beta) - a\left(F'_\beta - \frac{1}{2}G'_\alpha\right) + bE'_\beta - c\frac{1}{2}E'_\alpha = 0, \\ F(b'_\beta - c'_\alpha) + G(b'_\alpha - a'_\beta) - a\frac{1}{2}G'_\beta + bG'_\alpha - c\left(F'_\alpha - \frac{1}{2}E'_\beta\right) = 0, \\ Da - 2D'b + D''c = 0. \end{cases}$$

Si nous avons pris pour lignes coordonnées les asymptotiques de $S(M)$, $D = D'' = 0$, donc $b = 0$

$$\begin{cases} \Omega'_\alpha = -aM'_\beta, \\ \Omega'_\beta = cM'_\alpha. \end{cases}$$

Le long d'une asymptotique, la dérivée de Ω est tangente à l'autre asymptotique.

Recherche des vitesses compatibles avec une surface donnée : Nous emploierons une méthode analogue à la précédente en posant

$$V = uM'_\alpha + vM'_\beta + wN,$$

que nous transporterons dans les relations de compatibilité (4). Nous obtenons ainsi les trois équations aux dérivées partielles

$$(10) \quad \begin{cases} Eu'_\alpha + Fv'_\alpha + \frac{1}{2}E'_\alpha u + \frac{1}{2}F'_\alpha v = Dw, \\ Eu'_\beta + F(u'_\alpha + v'_\beta) + Gv'_\alpha + F'_\alpha u + F'_\beta v = D'w, \\ Fu'_\beta + Gv'_\beta + \frac{1}{2}G'_\alpha u + \frac{1}{2}G'_\beta v = D''w. \end{cases}$$

Multiplions-les respectivement par G , $-F$, E , il s'introduit H et ses dérivées partielles, et nous pouvons mettre sous la forme :

$$w(GD - 2FD' + ED'') = H \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (Hu) + \frac{\partial}{\partial \beta} (Hv) \right],$$

qui, grâce à la courbure moyenne :

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{GD - 2FD' + ED''}{H^3},$$

s'écrit :

$$H^3 w \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha} (Hu) + \frac{\partial}{\partial \beta} (Hv).$$

C'est, aux notations près, la relation obtenue précédemment pour la rotation. Par les mêmes calculs, on en déduit la relation intégrale :

$$(11) \quad \int \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) V \cdot m d\sigma = \int_{\mathcal{C}} (m \wedge V) \cdot dM,$$

qui s'énonce de la même manière que pour la rotation : Le flux de $\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) V$ à travers une portion de la surface est égal à la circulation du vecteur $\mathcal{U} = m \wedge V$ le long du contour qui la limite.

Si, en particulier, il existe sur $S(M)$ une ligne fermée tangente à la projection de V sur le plan tangent, le flux de la vitesse à travers la portion de surface limitée sera nul.

Pour toute surface fermée, le flux total de la vitesse est nul puisque le contour est réduit à un point.

Sur toute surface minima, la circulation de \mathcal{U} dépend d'un potentiel; elle dépend des extrémités et non du trajet suivi.

Une remarque curieuse à faire est que la vitesse et la rotation satisfont à la même relation (8) ou (4) relativement à $S(M)$.

Il est possible de donner une autre origine à la formule (11) que nous venons d'établir dans le cas de la vitesse. Si nous considérons une surface à l'instant θ , dont chaque point est animé d'une vitesse V qui conserve ou non les longueurs; un contour toujours formé des mêmes points matériels limite une surface $S(\theta)$ dont la variation est connue par :

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = \int \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) V \cdot m d\sigma + \int_{\mathcal{C}} (V \wedge m) \cdot dM,$$

le premier terme représentant la variation normale et le deuxième la variation tangentielle.

Si la surface est inextensible, le premier membre est nul, donc aussi le second.

Si maintenant nous prenons comme vitesse, non plus V , mais Ω (à un facteur λ d'homogénéité près). La formule (11) établie pour la rotation nous montre que les surfaces lieux de M et de $M' + \lambda \Omega \delta \theta$ se correspondent avec conservation des aires, mais sans conservation des longueurs en général.

Variation de la courbure et de la torsion d'une courbe tracée sur la surface.

Nous allons employer une méthode analogue à celle que nous avons indiquée pour les fils, pour rechercher les dérivées de la courbure et de la torsion prises par rapport au temps. Nous supposerons connues la vitesse et la rotation en chaque point de la surface.

Soit une courbe tracée sur la surface, t, n, b ses vecteurs unitaires principaux, m et g deux vecteurs qui lui soient normaux portés par la normale à la surface et situé dans le plan tangent. Nous désignerons par \mathcal{C} l'angle de la normale à la surface et de la normale principale.

Nous avons :

$$\begin{aligned} m &= n \cos \mathcal{C} + b \sin \mathcal{C}, \\ g &= -n \sin \mathcal{C} + b \cos \mathcal{C}, \end{aligned}$$

et les formules analogues à celles de Frenet-Serret :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= \frac{\cos \mathcal{C}}{R} m - \frac{\sin \mathcal{C}}{R} g, \\ \frac{dm}{ds} &= -\frac{\cos \mathcal{C}}{R} t + \left(\frac{d\mathcal{C}}{ds} - \frac{1}{T} \right) g, \\ \frac{dg}{ds} &= \frac{\sin \mathcal{C}}{R} t - \left(\frac{d\mathcal{C}}{ds} - \frac{1}{T} \right) m \end{aligned} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= \frac{m}{R_m} - \frac{g}{R_g}, \\ \frac{dm}{ds} &= -\frac{t}{R_m} + \frac{g}{\tau}, \\ \frac{dg}{ds} &= \frac{t}{R_g} - \frac{m}{\tau}, \end{aligned} \right.$$

en posant

$$\frac{\cos \varpi}{R} = \frac{1}{R_m}, \quad \frac{\sin \varpi}{R} = \frac{1}{R_g}, \quad \frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{T} = \frac{1}{\tau}.$$

Rappelons que Ω représente le vecteur rotation du solide de masse nulle invariablement lié au plan tangent au point M considéré. Dérivons les formules précédentes par rapport au temps en remarquant que les dérivées de t, m, g sont des vitesses dans un corps solide :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{dt}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial t}{\partial \theta} \right) = \frac{d}{ds} (\Omega \wedge t) = \Omega'_s \wedge t + \Omega \wedge \frac{dt}{ds} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{R_m} \right) m - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{R_g} \right) g + \Omega \wedge \frac{dt}{ds}$$

Et, en opérant de même pour les deux autres relations, nous pourrons écrire :

$$\begin{aligned} \Omega'_s \wedge t &= m \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{R_m} - g \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{R_g}, \\ \Omega'_s \wedge m &= -t \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{R_m} + g \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\tau}, \\ \Omega'_s \wedge g &= t \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{R_g} - m \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\tau}. \end{aligned}$$

D'où on déduit très facilement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\tau} &= \Omega'_s \cdot t, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{R_g} &= \Omega'_s \cdot m, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{R_m} &= \Omega'_s \cdot g, \end{aligned}$$

et on peut les résumer dans l'unique formule :

$$\Omega'_s = t \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\tau} + m \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{R_g} + g \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{R_m}.$$

Nous allons retrouver un résultat bien connu, en remarquant que dans tous les cas, le vecteur Ω'_s est parallèle au plan tangent en M . Il en résulte que le coefficient du vecteur m est nul, et par suite que la courbure géodésique est conservée quand la surface se déforme. On peut donc écrire la formule :

$$(12) \quad \Omega'_s = t \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\tau} + g \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{R_m}.$$

Comme Ω'_s ne dépend que de la tangente considérée, et non du plan osculateur, pour toutes les courbes tangentes à une direction donnée $\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\tau}$ et $\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{R_m}$ sont les mêmes. En effet

$$\Omega'_s = \frac{\Omega'_x dx + \Omega'_y dy}{\sqrt{E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2}},$$

ne dépend que du rapport $\frac{dy}{dx}$ et la formule précédente permet de calculer $\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\tau}$ et $\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{R_m}$.

Considérons une deuxième direction tangente à la surface, faisant l'angle φ avec la première :

$$\begin{aligned} t_1 &= t \cos \varphi + g \sin \varphi, \\ g_1 &= -t \cos \varphi + g \sin \varphi. \end{aligned}$$

La relation

$$(5) \quad \Omega'_x \wedge M'_y = \Omega'_y \wedge M'_x,$$

est valable pour deux directions quelconques. Elle donne ici :

$$(13) \quad \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_1} \right) = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{R_m} - \frac{1}{R_{m_1}} \right).$$

Conséquences de la relation (12).

Les deux vecteurs dM et $d\Omega$ se correspondant homographiquement sont situés dans des plans parallèles. Il existe deux couples de rayons homologues rectangulaires. Pour l'une de ces directions on a $\Omega'_s \cdot t = 0$ et par suite $\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\tau} = 0$.

Théorème. — En chaque point d'une surface il existe deux directions rectangulaires pour lesquelles $\frac{1}{\tau}$ ne varie pas. S'il y en a plus de deux, ou deux non rectangulaires, il en est ainsi pour toute direction.

Supposons qu'il existe des rayons homologues parallèles réels (deux couples), on a alors

$$\Omega'_s \cdot g = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{R_m} = 0,$$

et pour ces directions la courbure normale ne varie pas. Les bissectrices de ces deux couples sont les directions pour lesquelles $\frac{1}{\tau}$ ne varie pas.

Appliquons la formule (13) aux deux directions où $\frac{1}{R_m}$ ne varie pas :

$$\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_1} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_1} \right) = 0.$$

On peut appliquer la même formule en prenant deux directions, l'une où $\frac{1}{\tau}$ ne varie pas, et l'autre où $\frac{1}{R_m}$ ne varie pas.

Cette même relation (13) nous montre que pour deux directions rectangulaires quelconques, $\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_1} \right) = 0$.

Nous allons retrouver d'une autre manière les courbes où $\frac{1}{R_m}$ ne varie pas. Nous remarquerons d'abord que la connaissance de la variation de la courbure normale jointe à la constance de la courbure géodésique, permet de calculer la variation de Ω , puis celle de la torsion de la courbe. Il en résulte que les courbes où $\frac{1}{R_m}$ ne varie pas sont celles pour lesquelles il en est de même pour Ω . Or, à propos des fils, nous avons introduit la rotation du trièdre principal, qui est différente de celle ici considérée, elles ne coïncident que si Ω ne varie pas, les deux solides de masse nulle sont alors les mêmes, quoique non définis par les mêmes trièdres. Pour la courbe, nous avons vu que Ω'_s était dans le plan rectifiant, et pour la surface, Ω'_s est dans le plan tangent. Comme ces deux vecteurs doivent coïncider le long de la courbe considérée, deux cas peuvent se produire :

1° Les deux plans sont confondus, c'est le cas des géodésiques et on retrouve une propriété des géodésiques : si sur une surface une courbe a, à un instant donné, en tout point son plan osculateur normal, il en est de même si on déforme la surface.

2° Si les deux plans sont distincts, la circonstance ne peut se produire que si Ω'_s est porté par la tangente, et nous retrouvons ainsi les courbes pour lesquelles la courbure normale ne varie pas.

On trouvera ces courbes en cherchant les lignes telles que

$$dM = \lambda d\Omega,$$

où λ est un nombre.

En particulier si la surface est minima et que ses rotations soient définies par une sphère, les courbes cherchées sont les lignes de courbure. Les trajectoires de leurs bissectrices sont les asymptotiques pour lesquelles $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{T}$ ne varie pas.

Variation de la courbure de la surface. — Nous savons que les rayons de courbure principaux sont donnés par l'équation :

$$(DD'' - D'^2)R^2 - H(GD - 2FD' + ED'')R + H^3 = 0,$$

qui fournit les expressions de la courbure totale et de la courbure moyenne :

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{DD'' - D'^2}{R_1 R_2}, \quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{GD - 2FD' + ED''}{H^3}.$$

Nous commencerons, à titre de vérification, par retrouver le théorème de Gauss sur la courbure totale en montrant que

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{R_1 R_2} = 0;$$

comme ceci a lieu à chaque instant, il en résultera bien que la courbure totale ne variera pas.

Comme le dénominateur de la courbure totale ne dépend pas du temps, il nous suffira d'évaluer l'expression :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (DD'' - D'^2) = D'' \frac{\partial D}{\partial \theta} - 2D' \frac{\partial D'}{\partial \theta} + D \frac{\partial D''}{\partial \theta}.$$

Or, d'après les notations :

$$D = M''_{\alpha^2} \cdot N, \quad D' = M''_{\alpha\beta} \cdot N, \quad D'' = M''_{\beta^2} \cdot N;$$

on en déduit

$$\frac{\partial D}{\partial \theta} = V''_{\alpha^2} \cdot N + M''_{\alpha^2} \cdot (\Omega \wedge N) = N \cdot (V''_{\alpha^2} + M''_{\alpha^2} \wedge \Omega),$$

et comme

$$V'_{\alpha} = \Omega \wedge M'_{\alpha}, \quad V''_{\alpha\beta} = \Omega'_{\alpha} \wedge M'_{\beta} + \Omega \wedge M''_{\alpha\beta},$$

$$\frac{\partial D'}{\partial \theta} = N \cdot (\Omega'_{\alpha} \wedge M'_{\alpha} + \Omega \wedge M''_{\alpha^2} + M''_{\alpha^2} \wedge \Omega),$$

on a donc les relations :

$$\frac{\partial D}{\partial \theta} = N \cdot (\Omega'_{\alpha} \wedge M'_{\alpha}),$$

$$\frac{\partial D'}{\partial \theta} = N \cdot (\Omega'_{\beta} \wedge M'_{\alpha}) = N \cdot (\Omega'_{\alpha} \wedge M'_{\beta}),$$

$$\frac{\partial D''}{\partial \theta} = N \cdot (\Omega'_{\beta} \wedge M'_{\beta}).$$

Mais les formules (6) nous donnent :

$$(6) \quad \begin{cases} \Omega'_\alpha = bM'_\alpha - aM'_\beta, \\ \Omega'_\beta = cM'_\alpha - bM'_\alpha, \end{cases}$$

$$\Omega'_\alpha \wedge M'_\alpha = (bM'_\alpha - aM'_\beta) \wedge M'_\alpha = aN;$$

donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial \theta} &= H^2 a, \\ \frac{\partial D'}{\partial \theta} &= H^2 b, \\ \frac{\partial D''}{\partial \theta} &= H^2 c, \end{aligned}$$

formules très importantes pour la suite, et il s'ensuit que :

$$D'' \frac{\partial D}{\partial \theta} - 2D' \frac{\partial D'}{\partial \theta} + D \frac{\partial D''}{\partial \theta} = H^2(Da - 2D'b + D''c) = 0,$$

en tenant compte de la dernière des équations (9).

Passons au calcul de

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{H^2} \left(G \frac{\partial D}{\partial \theta} - 2F \frac{\partial D'}{\partial \theta} + E \frac{\partial D''}{\partial \theta} \right),$$

car E, F, G, H sont indépendants du temps.

D'après le calcul précédent, nous connaissons $\frac{\partial D}{\partial \theta}$, $\frac{\partial D'}{\partial \theta}$, $\frac{\partial D''}{\partial \theta}$

$$\begin{aligned} G \frac{\partial D}{\partial \theta} - 2F \frac{\partial D'}{\partial \theta} + E \frac{\partial D''}{\partial \theta} &= N \cdot [\Omega'_\alpha \wedge (GM'_\alpha - FM'_\beta) + \Omega'_\beta \wedge (-FM'_\alpha + EM'_\beta)] \\ &= \Omega'_\alpha \cdot [(GM'_\alpha - FM'_\beta) \wedge N] + \Omega'_\beta \cdot [(-FM'_\alpha + EM'_\beta) \wedge N] \\ &= \Omega'_\alpha \cdot (-H^2 M'_\beta) + \Omega'_\beta \cdot (H^2 M'_\alpha); \end{aligned}$$

donc

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{H} (M'_\alpha \cdot \Omega'_\beta - M'_\beta \cdot \Omega'_\alpha).$$

C'est la formule cherchée. Contrairement aux apparences, le deuxième membre de cette relation ne dépend pas du système de coordonnées, mais uniquement du

point choisi sur la surface. On peut aussi faire intervenir les composantes a, b, c de Ω'_x et Ω'_y .

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{Ga - 2Fb + Ec}{H}.$$

Complément sur la déformation des surfaces. — Nous avons déterminé la variation des rayons de courbure en un point de la surface mobile, en fonction de la vitesse de ce point, ou en fonction de la rotation du solide de masse nulle lié au plan tangent. On peut opérer autrement pour se rendre compte de la déformation de la surface en étudiant le déplacement infiniment petit du trièdre principal de la surface en M. Mais ce trièdre n'est pas entraîné seulement par le mouvement de la surface, comme il est lié aux directions principales, il a une rotation propre par rapport au solide de masse nulle lié au plan tangent. Cette rotation est d'ailleurs portée par la normale en M, et nous nous proposons de la déterminer.

Si pendant le temps $\partial \theta$ le trièdre principal tourne de l'angle ∂V , cette rotation supplémentaire ω sera égale à $\frac{\partial V}{\partial \theta}$.

Rappelons la formule donnant le sinus de l'angle de deux directions du plan tangent définies par les valeurs m et m' du rapport $\frac{dy}{dx}$:

$$\sin V = \frac{H(m' - m)}{\sqrt{E + 2Fm + Gm^2} \sqrt{E + 2Fm' + Gm'^2}}.$$

Pour un angle infiniment petit, cette formule devient :

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{H \frac{\partial m}{\partial \theta}}{E + 2Fm + Gm^2}.$$

On sait que m et m' , pour les deux directions principales, sont racines de l'équation du second degré :

$$a + bm + cm^2 = 0,$$

avec :

$$a = FD - ED', \quad b = GD - ED'', \quad c = GD' - FD''.$$

Dérivons l'équation en m par rapport au temps, les accents désignant les dérivées :

$$a' + b'm + c'm^2 + (b + 2cm) \frac{\partial m}{\partial \theta} = 0;$$

d'où la valeur de ω :

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{H(a' + b'm + c'm^2)}{(b + 2cm)(E + 2Fm + Gm^2)}.$$

Nous sommes certains *a priori* que la valeur de cette quantité sera la même pour m ou m' , car les deux directions principales tournent du même angle. Nous allons le retrouver de la manière suivante : nous commencerons par ne conserver au numérateur et au dénominateur que la première puissance de m , les autres disparaissant en se servant de l'équation en m . On trouve une fonction homographique en m après quelques calculs :

$$\omega = \frac{H[(bc' - cb')m + (ac' - ca')]}{(b^2 - 4ac)(Gm + F)}.$$

On constate que les coefficients sont proportionnels. Le dénominateur prend une forme intéressante, il devient

$$b^2 - 4ac = (ED - 2FD' + ED'')^2 - 4(EG - F^2)(DD'' - D'^2),$$

où on peut faire apparaître la courbure moyenne et la courbure totale de la surface. Finalement on obtient :

$$\omega = \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{(GD' - FD'') \frac{\partial D}{\partial \theta} + (ED'' - GD) \frac{\partial D'}{\partial \theta} + (FD - ED') \frac{\partial D''}{\partial \theta}}{H^2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)^2},$$

qui est la formule cherchée. On peut l'écrire :

$$\omega = \frac{1}{H^2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)^2} \begin{vmatrix} \frac{\partial D}{\partial \theta} & \frac{\partial D'}{\partial \theta} & \frac{\partial D''}{\partial \theta} \\ D & D' & D'' \\ E & F & G \end{vmatrix}.$$

Relations entre les surfaces $S(M)$, $S(\Omega)$, $S(V)$. — La démonstration de ces propriétés se trouve dans le chapitre sur les douze surfaces de Darboux. Toutes les surfaces qui y sont étudiées ne nous intéressent pas au même point, aussi nous ne signalerons que les propriétés suivantes :

$S(M)$ et $S(V)$ se correspondent par éléments rectangulaires.

$S(M)$ et $S(\Omega)$ par plans tangents parallèles et conjugaison des asymptotiques.

Introduisons $S(P)$, polaire réciproque de $S(\Omega)$ par rapport à la sphère de rayon i , ou encore corrélatrice de $S(\Omega)$.

$S(V)$ et $S(P)$ se correspondent par plans tangents parallèles et conjugaison des asymptotiques.

Problème. — La vitesse étant donnée tout le long d'un arc de la surface $S(M)$, est-il possible de connaître la rotation le long de ce même arc?

Nous partirons de la formule

$$dV = \Omega \wedge dM.$$

Nous désignerons par t, n, b les vecteurs unitaires principaux de la courbe donnée, et nous poserons

$$\begin{aligned} V &= ut + vn + wb, \\ \Omega &= \lambda t + \mu n + \nu b, \end{aligned}$$

u, v, w connus et λ, μ, ν inconnus :

$$\begin{aligned} \frac{dV}{ds} &= u't + v'n + w'b + \frac{u}{R}n - v\left(\frac{t}{R} + \frac{b}{T}\right) + \frac{w}{T}n \\ &= n\left(v' + \frac{u}{R} + \frac{v}{T}\right) + b\left(w' - \frac{v}{T}\right), \quad u' - \frac{v}{R} = 0 \quad \text{car } dV \cdot dM = 0, \end{aligned}$$

$$\Omega \wedge t = n\nu - b\mu;$$

donc

$$\begin{cases} \mu = \frac{\nu}{T} - w', \\ \nu = v' + \frac{u}{R} + \frac{w}{T}. \end{cases}$$

Il reste à déterminer λ . On le fait, en se servant de ce que $d\Omega$ est parallèle au plan tangent en M :

$$\Omega' = \left(\lambda' - \frac{\mu}{R}\right)t + \left(\mu' + \frac{\lambda}{R} + \frac{\nu}{T}\right)n + \left(\nu' - \frac{\mu}{T}\right)b.$$

On veut qu'il soit perpendiculaire à

$$N = n \cos \varpi + b \sin \varpi;$$

par suite :

$$\left(\mu' + \frac{\lambda}{R} + \frac{\nu}{T}\right) \cos \zeta + \left(\nu' - \frac{\mu}{T}\right) \sin \zeta = 0,$$

relation dont nous tirons λ à condition que $\frac{\cos \zeta}{R} \neq 0$, c'est-à-dire si C n'est pas une asymptotique. Dans ce cas, on peut déterminer Ω le long d'un arc où on connaît V .

En particulier, si $V = 0$ le long d'un arc, Ω aussi est nul.

Si l'arc choisi est une asymptotique, on ne peut pas déterminer λ . En effet la relation obtenue en dernier lieu s'écrit alors :

$$\nu' - \frac{\mu}{T} = 0 \quad \text{ou} \quad d\Omega \cdot b = 0,$$

ce qui est évident car $d\Omega$ est parallèle au plan tangent, et b est porté par la normale à la surface. λ est bien indéterminé.

Nous allons maintenant nous proposer un problème légèrement différent, celui de déterminer Ω sur toute la surface, quand on connaît V sur toute la surface. Nous commencerons par le problème inverse : trouver la vitesse quand on connaît la rotation par ses composantes λ, μ, ν . Le problème est résolu par

$$V'_\alpha = \Omega \wedge M'_\alpha,$$

$$V'_\beta = \Omega \wedge M'_\beta,$$

où

$$\Omega = \lambda M'_\alpha + \mu M'_\beta + \nu N.$$

En remplaçant Ω par cette valeur, on en déduit immédiatement :

$$V'_\alpha = -F\nu M'_\alpha + E\nu M'_\beta - \mu N,$$

$$V'_\beta = -G\nu M'_\alpha + F\nu M'_\beta + \lambda N,$$

et nous sommes ramenés à un problème connu, possible, la vitesse étant définie à un vecteur additif près.

Les dernières formules trouvées vont nous permettre de résoudre le problème posé initialement, il suffit de faire le produit scalaire de V'_α et V'_β par M'_α, M'_β, N . Nous obtenons six égalités dont trois déterminent λ, μ, ν et les trois autres sont les relations de compatibilité pour les vitesses :

$$H^2\lambda = N \cdot V'_\beta,$$

$$H^2\mu = -N \cdot V'_\alpha,$$

$$H^2\nu = M'_\alpha \cdot V'_\beta = -M'_\beta \cdot V'_\alpha,$$

$$M'_\alpha \cdot V'_\alpha = M'_\beta \cdot V'_\beta = 0.$$

Recherche des surfaces pour lesquelles il existe une distribution de vitesse tangente à la surface.

Les équations (10) nous fournissent la solution; il suffit de faire dans ces relations $w = 0$, elles deviennent :

$$\begin{aligned} Eu'_\alpha + Fv'_\alpha + \frac{1}{2}E'_\alpha u + \frac{1}{2}E'_\beta v &= 0, \\ Eu'_\beta + F(u'_\alpha + v'_\beta) + Gv'_\alpha + F'_\alpha u + F'_\beta v &= 0, \\ Fu'_\beta + Gv'_\beta + \frac{1}{2}G'_\alpha u + \frac{1}{2}G'_\beta v &= 0, \end{aligned}$$

avec des variables quelconques. Nous allons supposer que les lignes de vitesse ont été prises pour α variable, et leurs trajectoires orthogonales pour β variable. Avec ce système de coordonnées

$$\begin{aligned} v &= 0, & V &= uM'_\alpha; & F &= 0, \\ ds^2 &= Ed\alpha^2 + Gd\beta^2 \end{aligned}$$

et le système initial se réduit à

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{E} \frac{\partial}{\partial \alpha} (u\sqrt{E}) = 0, \\ Eu'_\beta = 0, \\ \frac{1}{2}G'_\alpha u = 0 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \alpha} (u\sqrt{E}) = 0, \\ u'_\beta = 0, \\ G'_\alpha u = 0, \end{array} \right.$$

car $E \neq 0$ et $u \neq 0$.

La première relation donne :

$$u\sqrt{E} = \psi(\beta),$$

qui représente précisément la longueur de la vitesse

$$|V| = u\sqrt{E} = \psi(\beta).$$

Sur une ligne de vitesse, la vitesse a partout la même grandeur, mais cette grandeur change avec la ligne considérée.

La troisième relation devient :

$$G = f^2(\beta),$$

que l'on interprète ainsi : à partir d'une même ligne de vitesse (β constant) les tra-

jectoires orthogonales ont le même élément d'arc $f(\beta)dx$; en intégrant : deux lignes de vitesse fixes interceptent sur une trajectoire orthogonale variable un arc de longueur constante.

Nous écrivons la deuxième relation :

$$u = \chi(x); \quad \text{donc} \quad \sqrt{E} = \frac{\psi(\beta)}{\chi(x)}$$

et le ds^2 s'écrit :

$$ds^2 = \frac{\psi^2(\beta)}{\chi^2(x)} dx^2 + f^2(\beta) d\beta^2.$$

Nous prendrons comme nouveaux paramètres

$$a = \int \frac{dx}{\chi(x)}, \quad b = \int f(\beta) d\beta$$

et nous aurons alors :

$$ds^2 = B(b) da^2 + db^2, \quad [ds^2 = r^2(\sigma) d\sigma^2 + d\sigma^2 \text{ avec les notations courantes}],$$

qui définit toutes les surfaces applicables sur les surfaces de révolution. Les lignes de vitesse (β ou b constant) s'appliquent sur les parallèles et leurs trajectoires orthogonales sont les méridiens. On voit immédiatement, de cette manière, pourquoi les longueurs de trajectoires orthogonales limitées à deux parallèles fixes sont constantes. Sur la surface donnée, les lignes de vitesses forment une famille de cercles géodésiques (courbure géodésique constante, et conservée dans la déformation) trajectoire orthogonale d'une famille de géodésiques. Les cas particuliers du plan et de la sphère en sont des exemples simples.

Remarque. — La transformation qui nous a permis de passer des coordonnées α et β à a , b , n'est pas unique, il est évident que le ds^2 est conservé par la transformation

$$a = ka', \quad B(b) = \frac{1}{k} B'(b),$$

dont la signification géométrique est simple : une surface de révolution étant donnée, on peut l'appliquer sur une surface de révolution constituée de la manière suivante : les cercles parallèles sont remplacés par des cercles de rayons tous k fois plus grands, leur écartement variant de façon que les longueurs soient conservées sur le méridien, et les parallèles étant simplement étalés sur ces nouveaux cercles.

Application aux hélicoïdes. — Ce sont des surfaces que l'on peut faire glisser sur elles-mêmes d'une manière continue. Dans un tel mouvement, les vitesses sont toutes tangentes à la surface. D'après ce qui vient d'être démontré plus haut, il en résulte que tout hélicoïde est applicable sur une infinité de surfaces de révolution.

Une propriété des surfaces dont les vitesses sont tangentes. — Pour toute surface déformable, nous avons :

$$dV \cdot dM = 0 \quad \text{ou} \quad t \cdot dV = 0.$$

Intégrons cette dernière relation le long d'un arc de géodésique

$$0 = \int_A^B t \cdot dV = (V \cdot t)_A^B - \int_A^B V \cdot dt;$$

or

$$dt = \frac{n}{R} ds,$$

comme V est tangent à la surface par hypothèse, et que n est la normale, la courbe étant une géodésique, on a

$$(V \cdot t)_A = (V \cdot t)_B.$$

Théorème. — La projection de la vitesse sur la tangente, est constante le long d'une géodésique, pour toute surface dont les vitesses lui sont tangentes.

Application. — Considérons un solide animé d'un mouvement hélicoïdal, et deux points particuliers A et B . Joignons ces deux points par une courbe. Dans le déplacement du solide, elle engendre un hélicoïde auquel nous pouvons appliquer le résultat précédent, puisque les vitesses en A et B lui sont tangentes. Si en particulier, on considère tous les hélicoïdes tangents à une direction Δ issue de A , s'il existe une géodésique tangente à Δ et arrivant en B , la tangente en ce point sera sur un certain cône de révolution autour de la vitesse de B . Si en particulier la géodésique est normale à la vitesse en A , il en sera de même en B , si cette géodésique existe.

On peut ajouter à la rotation du solide une rotation parallèle à AB , ce qui fournit d'autres hélicoïdes pour le même cône.

A l'aide de la formule trouvée, on peut obtenir un résultat déjà vu : si en A la vitesse est normale à la géodésique, il en sera de même tout le long.

Si au lieu d'une géodésique, nous prenons une courbe quelconque, le calcul précédent donne :

$$(\mathbf{V} \cdot \mathbf{t})_A^B = \int_A^B \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \frac{ds}{R}$$

et en introduisant la normale géodésique : $n = m \cos \varpi - g \sin \varpi$

$$(\mathbf{V} \cdot \mathbf{t})_A^B = - \int_A^B \mathbf{V} \cdot \mathbf{g} \frac{\sin \varpi}{R} ds = - \int_A^B \mathbf{V} \cdot \mathbf{g} \frac{ds}{R_g},$$

formule qui n'est valable que si la courbe a une tangente continue. L'intégrale curviligne ne change pas de valeur si on déplace la courbe sur la surface, à condition de conserver les extrémités et les tangentes en ces points.

Autre propriété des surfaces à vitesses tangentes. — Appliquons la formule (11); l'intégrale double est nulle, et par suite l'intégrale curviligne est nulle pour tout contour fermé. Cette intégrale curviligne, prise le long d'un arc ne dépend que des extrémités. On peut remarquer que le vecteur $\mathbf{U} = m \wedge \mathbf{V}$ se déduit de la vitesse par une rotation d'un droit dans le plan tangent. Nous voyons donc que sur la surface, \mathbf{U} dépend d'un potentiel φ qui est constant le long des lignes de vitesses. Le calcul de $d\varphi$ le long d'un élément d'arc de trajectoire orthogonale donne

$$d\varphi = \mathbf{V} ds \quad (= r d\sigma \text{ avec les notations courantes}).$$

Application aux surfaces à courbure totale constante, celles qui sont applicables sur la sphère ou la pseudosphère. — Considérons une figure matérielle tracée sur une telle surface, elle peut glisser sans que les longueurs et les angles soient modifiés; en quelque sorte, elle forme un corps solide pour cette surface. Les lignes droites doivent être remplacées par les géodésiques; moyennant ce changement de langage, le théorème sur la conservation de la vitesse tangentielle le long d'une géodésique est identique à la propriété caractéristique du solide pour les vitesses de deux quelconques de ses points. Le mouvement plan, est un cas particulier des mouvements sur surfaces à courbure totale constante, celui où elle est nulle.

Problème. — Nous allons rechercher s'il est possible qu'une surface admette une distribution de rotations normales. Pour résoudre ce problème nous allons nous reporter aux formules (7) qui déterminent les composantes de la rotation. Elles se réduisent à

$$\begin{aligned} H \varphi'_x &= 0, & H \varphi'_y &= 0, \\ H \varphi \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Comme nous supposons évidemment que la composante normale n'est pas nulle, nous voyons que le problème n'est possible que pour les surfaces minima. De plus, les deux premières équations montrent que la composante normale a une longueur constante. La surface $S(\Omega)$ est une sphère de centre o ; et la correspondance entre $S(M)$ et $S(\Omega)$ est la représentation sphérique de la surface donnée.

Quelques problèmes relatifs à la rotation. — Nous allons considérer en premier lieu les lignes de $S(M)$ pour lesquelles

$$d\Omega = \lambda dM,$$

λ étant un scalaire. Nous avons déjà rencontré ces lignes : ce sont celles pour lesquelles la dérivée de la courbure normale par rapport au temps est nulle à l'instant considéré. Elles correspondent si on veut, aux rayons parallèles de l'homographie qui existe entre $d\Omega$ et dM . Nous allons déterminer λ en nous reportant aux formules (6)

$$[(bM'_x - aM'_y)dx + (cM'_x - bM'_y)d\beta] = \lambda(M'_x dx + M'_y d\beta),$$

qui donne en annulant les coefficients de M'_x et M'_y :

$$(b - \lambda)dx + cd\beta = 0,$$

$$adx + (b + \lambda)d\beta = 0,$$

ce qui fournit

$$\lambda^2 = b^2 - ac;$$

nous avons deux valeurs égales et opposées pour λ . Nous voyons que ces lignes ne passent au point considéré de $S(M)$ que si

$$b^2 - ac > 0.$$

Supposons maintenant que ces lignes aient été prises comme lignes coordonnées sur la surface. En se reportant aux formules (6) nous voyons que

$$a = c = 0;$$

dans ces conditions $\lambda = \pm b$ et

$$\Omega'_x = bM'_x, \quad \Omega'_y = -bM'_y.$$

De plus, la troisième des équations (9), puisque b est certainement différent de zéro, montre que $D' = 0$ et comme les directions asymptotiques sont définies par

$$Ddx^2 + D''d\beta^2 = 0,$$

on trouve pour $\frac{d\beta}{d\alpha}$ deux valeurs égales et opposées, ce qui prouve que les directions asymptotiques sont conjuguées harmoniques des lignes considérées et inversement. On peut encore dire que les tangentes en un point de $S(M)$ aux lignes considérées sont conjuguées par rapport à l'indicatrice en ce point.

Les surfaces $S(M)$ et $S(\Omega)$ jouent le même rôle, la formule $d\Omega = \lambda dM$ ne rompt pas cette symétrie; aussi les tangentes à ces lignes sont conjuguées par rapport aux asymptotiques de $S(\Omega)$. Nous avons donc trois couples de droites conjuguées harmoniques : les deux tangentes aux courbes $d\Omega = \lambda dM$ et les deux couples d'asymptotiques. La figure se déduit par homographe de deux droites rectangulaires, leurs bissectrices et les isotropes au point de concours. Il y a donc deux couples réels au plus. La connaissance de deux d'entre eux entraîne théoriquement la connaissance du troisième.

Recherche des lignes pour lesquelles $d\Omega \cdot dM = 0$ [ou $\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{d\Omega}{ds} - \frac{1}{T} \right) = 0$] avec des paramètres quelconques. En un point, leur direction est définie par

$$[(bM'_\alpha - aM'_\beta)d\alpha + (cM'_\alpha - bM'_\beta)d\beta] \cdot (M'_\alpha d\alpha + M'_\beta d\beta) = 0$$

ou, en posant $\frac{d\beta}{d\alpha} = m$,

$$(bE - aF) + (cE - aG)m + (cF - bG)m^2 = 0.$$

Vérifions que ces deux directions sont rectangulaires, c'est-à-dire que

$$E + F(m + m_1) + Gmm_1 = 0,$$

$$E(cF - bG) - F(cE - aG) + G(bE - aF) = 0.$$

Si nous avons pris les lignes du paragraphe précédent pour lignes coordonnées, on trouve comme coefficient angulaire :

$$Edx^2 - Gd\beta^2 = 0,$$

ce qui prouve que les quatre tangentes forment un faisceau harmonique; comme un couple est rectangulaire, ce sont les bissectrices de l'autre couple.

Étude du vecteur $d\Omega$ en un point de $S(M)$. — Nous savons déjà que ce vecteur se déplace parallèlement au plan tangent à $S(M)$ en M et que les directions des supports de $d\Omega$ et dM se correspondent par une homographie réciproque. Nous nous proposons maintenant de rechercher la valeur du rapport $\frac{d\Omega^2}{dM^2}$ et de savoir entre quelles limites il varie. Comme :

$$u^2 = \frac{d\Omega^2}{dM^2} = \frac{\Omega'_\alpha d\alpha^2 + 2\Omega'_\alpha \cdot \Omega'_\beta d\alpha d\beta + \Omega'_\beta d\beta^2}{Edx^2 + 2Fdxd\beta + Gd\beta^2},$$

ce rapport est égal à :

$$u^2 = \frac{\mathcal{E}d\alpha^2 + 2\mathcal{F}d\alpha d\beta + \mathcal{G}d\beta^2}{Ed\alpha^2 + 2Fd\alpha d\beta + Gd\beta^2},$$

où

$$\begin{aligned}\Omega'_\alpha &= bM'_\alpha - aM'_\beta, & \Omega'_\beta &= cM'_\alpha - bM'_\beta, \\ \mathcal{E} &= Eb^2 - 2Fab + Ga^2, \\ \mathcal{F} &= Ebc - F(ac + b^2) + Gab, \\ \mathcal{G} &= Ec^2 - 2Fbc + Gb^2.\end{aligned}$$

Les valeurs extrêmes de ce rapport sont fournies par :

$$u^2 = \frac{\mathcal{E}d\alpha + \mathcal{F}d\beta}{Ed\alpha + Fd\beta} = \frac{\mathcal{F}d\alpha + \mathcal{G}d\beta}{Fd\alpha + Gd\beta}$$

ou

$$\begin{aligned}(\mathcal{E} - Eu^2)d\alpha + (\mathcal{F} - Fu^2)d\beta &= 0, \\ (\mathcal{F} - Fu^2)d\alpha + (\mathcal{G} - Gu^2)d\beta &= 0,\end{aligned}$$

entre lesquelles nous éliminons $d\alpha$ et $d\beta$. Cela nous fournit l'équation en u cherchée :

$$\begin{aligned}(\mathcal{E} - Eu^2)(\mathcal{G} - Gu^2) - (\mathcal{F} - Fu^2)^2 &= 0, \\ (EG - F^2)u^4 - (G\mathcal{E} - 2F\mathcal{F} + E\mathcal{G})u^2 + (\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2) &= 0.\end{aligned}$$

Évaluons les coefficients en fonction de a, b, c :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2 &= (EG - F^2)(ac - b^2)^2, \\ G\mathcal{E} - 2F\mathcal{F} + E\mathcal{G} &= (Ga - 2Fb + Ec)^2 + 2(EG - F^2)(b^2 - ac).\end{aligned}$$

Un moyen rapide d'avoir $\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2$ est de constater que c'est le carré de la longueur du vecteur

$$\mathfrak{H} = \Omega'_\alpha \wedge \Omega'_\beta = (bM'_\alpha - aM'_\beta) \wedge (cM'_\alpha - bM'_\beta) = (ac - b^2)N, \quad \mathfrak{H} = (ac - b^2)H.$$

L'équation en u devient donc :

$$u^4 - \left[\frac{(Ga - 2Fb + Ec)^2}{H^2} - 2(ac - b^2) \right] u^2 + (ac - b^2)^2 = 0$$

et par suite

$$\begin{aligned}u_1^2 + u_2^2 &= \frac{(Ga - 2Fb + Ec)^2}{H^2} \pm 2u_1 u_2, \\ u_1^2 u_2^2 &= (ac - b^2)^2,\end{aligned}$$

ce qui nous permet d'écrire, avec un choix convenable de signes pour les u maximum ou minimum :

$$\begin{aligned} u_1 u_2 &= ac - b^2, \\ u_1 + u_2 &= \frac{Ga - 2Fb + Ec}{H} \end{aligned}$$

et les u sont racines de l'équation du second degré :

$$u^2 - \frac{Ga - 2Fb + Ec}{H} u + ac - b^2 = 0.$$

Nous allons trouver une signification géométrique différente pour u_1 et u_2 en introduisant les rayons de courbures \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 de $S(\Omega)$. Il nous faudra d'abord calculer les trois scalaires \mathcal{D} , \mathcal{D}' , \mathcal{D}'' :

$$\mathcal{D} = \Omega''_{\alpha^2} \cdot \mathcal{N} = (ac - b^2) \Omega''_{\alpha^2} \cdot \mathcal{N} = (ac - b^2) (bM''_{\alpha^2} - aM''_{\alpha^3} + b'_\alpha M'_\alpha - a'_\alpha M'_\beta) \cdot \mathcal{N}$$

et nous obtenons pour eux ces valeurs :

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= (ac - b^2) (bD - aD'), \\ \mathcal{D}' &= (ac - b^2) (bD' - aD'') = (ac - b^2) (cD - bD') = \frac{ac - b^2}{2} (cD - aD''), \\ \mathcal{D}'' &= (ac - b^2) (cD' - bD''). \end{aligned}$$

On forme $\mathcal{D}\mathcal{D}'' - \mathcal{D}'^2$ en se servant pour \mathcal{D}' des deux premières valeurs données :

$$\mathcal{D}\mathcal{D}'' - \mathcal{D}'^2 = (ac - b^2)^3 (DD'' - D'^2);$$

donc :

$$\frac{1}{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2} = \frac{\mathcal{D}\mathcal{D}'' - \mathcal{D}'^2}{\mathcal{H}^4} = \frac{DD'' - D'^2}{H^4 (ac - b^2)^3} = \frac{1}{ac - b^2} \frac{1}{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2},$$

relation qu'on peut obtenir rapidement grâce à la représentation par plans tangents parallèles de $S(\mathcal{M})$ et $S(\Omega)$. En effet, pour la raison précédente, ces deux surfaces ont la même représentation sphérique, et par suite, le rapport de leurs courbures totales est égal aux rapports des aires élémentaires homologues :

$$\frac{1}{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2} \Big|_{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2} = \frac{d\sigma(\mathcal{M})}{d\sigma(\Omega)} = \pm \sqrt{\frac{EG - F^2}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}} = \frac{\pm 1}{ac - b^2}.$$

Nous obtenons pour la courbure moyenne, en nous servant cette fois de la dernière valeur pour \mathcal{D}' :

$$\zeta \mathcal{D} - 2\mathcal{F}\mathcal{D}' + \xi \mathcal{D}'' = (ac - b^2)^2 [D(Fc - Gb) + D'(Ga - Ec) + D''(Eb - Fa)]$$

et comme

$$\frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_2} = \frac{\zeta \mathcal{D} - 2\mathcal{F}\mathcal{D}' + \xi \mathcal{D}''}{\mathcal{H}^3},$$

on a finalement :

$$\frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_2} = \frac{1}{(ac - b^2)\mathcal{H}^3} \begin{vmatrix} a & b & c \\ D & D' & D'' \\ E & F & G \end{vmatrix},$$

valeur que l'on peut rapprocher de la formule donnant la rotation propre du trièdre principal de $S(M)$ en M :

$$\omega = \frac{1}{\mathcal{H}^3 \left(\frac{1}{\mathcal{R}_1} - \frac{1}{\mathcal{R}_2} \right)^2} \begin{vmatrix} a & b & c \\ D & D' & D'' \\ E & F & G \end{vmatrix}.$$

On peut exprimer ω simplement en fonction des rayons de courbure :

$$\omega \frac{(\mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_2)^2}{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2.$$

En faisant d'autres rapprochements, on voit que les deux quantités

$$\frac{Ga - 2Fb + Ec}{\mathcal{H}} \quad \text{et} \quad ac - b^2,$$

sont respectivement égales à

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_2} \right) = u_1 + u_2$$

et

$$\frac{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2}{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2} = u_1 u_2.$$

Le sens géométrique de ces expressions prouve que les quantités où interviennent a, b, c sont des invariants relativement à tout changement de coordonnées sur $S(M)$.

Il nous reste maintenant à rechercher quelles sont sur $S(M)$ les directions fournissant les maxima et minima de u . Reportons-nous aux équations déterminant u . Par élimination de u on trouve :

$$(F\mathcal{E} - E\mathcal{F})dx^2 - (E\mathcal{G} - G\mathcal{E})dx d\beta + (G\mathcal{F} - F\mathcal{G})d\beta^2 = 0,$$

que nous mettrons sous forme de déterminant :

$$0 = \begin{vmatrix} d\beta^2 & \mathcal{E} & E \\ -dx d\beta & \mathcal{F} & F \\ dx^2 & \mathcal{G} & G \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d\beta^2 & [Eb^2 - 2Fab + Ga^2] & E \\ -dx d\beta & [Ebc - F(ac + b^2) + Gab] & F \\ dx^2 & [Ec^2 - 2Fbc + Gb^2] & G \end{vmatrix}.$$

Multiplions la dernière colonne par $ac - b^2$ et ajoutons-la à la seconde, on peut écrire :

$$(Ga - 2Fb + Ec) \begin{vmatrix} d\beta^2 & a & E \\ -dx d\beta & b & F \\ dx^2 & c & G \end{vmatrix} = 0.$$

Remarquons que si

$$Ga - 2Fb + Ec = 0,$$

$|u_x| = |u_z|$ et $\frac{d\beta}{dx}$ est indéterminé, mais peut posséder une limite. Sinon il reste :

$$\begin{vmatrix} d\beta^2 & a & E \\ -dx d\beta & b & F \\ dx^2 & c & G \end{vmatrix} = 0.$$

Sous cette forme nous reconnaissons l'équation des lignes de $S(M)$ où $\frac{d\Omega}{ds} = \frac{1}{T}$ ne varie pas à l'instant considéré. Nous voyons que les directions où u est maximum ou minimum, sont rectangulaires et perpendiculaires à la direction correspondante sur $S(M)$. Si en particulier $S(M)$ est minima, multiplions les deuxième et troisième lignes par D' , D , que nous ajouterons à la première multipliée par D' ; comme deux des termes obtenus sont nuls, il en est de même du premier, ce qui prouve que les lignes considérées sont les asymptotiques.

Étude de la courbure de $S(V)$. — Commençons par rechercher son élément linéaire en introduisant la rotation et ses composantes. Nous avons déjà établi les relations

$$\begin{cases} \Omega = \lambda M'_x + \mu M'_y + \nu N, \\ V'_x = \nu(-FM'_x + EM'_y) - \mu N, \\ V'_y = \nu(-GM'_x + FM'_y) + \lambda N, \end{cases}$$

qui nous permettent d'écrire, en désignant par l'indice 1 ce qui est relatif à $S(V)$:

$$\begin{aligned} E_1 &= H^2(\mu^2 + \nu^2 E), \\ F_1 &= H^2(-\lambda\mu + \nu^2 F), \\ G_1 &= H^2(\lambda^2 + \nu^2 G); \end{aligned}$$

d'où il résulte :

$$ds_1^2 = \nu^2 H^2 (E dx^2 + 2F dx d\beta + G d\beta^2) + H^2 (\lambda d\beta - \mu dx)^2$$

ou

$$ds_1^2 = \nu^2 H^2 ds^2 + H^2 (\lambda d\beta - \mu dx)^2.$$

Calcul de D_1, D'_1, D''_1 . Nous avons besoin pour cela de connaître

$$\begin{aligned} N_1 = V'_\alpha \wedge V'_\beta &= (\Omega \wedge M'_\alpha) \wedge (\Omega \wedge M'_\beta) = \Omega [M'_\beta \cdot (\Omega \wedge M'_\alpha)] + M'_\beta [\Omega \cdot (\Omega \wedge M'_\alpha)], \\ N_1 &= H^2 \nu \Omega. \end{aligned}$$

On trouve ensuite facilement :

$$\begin{aligned} D_1 &= H^4 \nu^2 a, \\ D'_1 &= H^4 \nu^2 b, \\ D''_1 &= H^4 \nu^2 c. \end{aligned}$$

De là on déduit la courbure totale

$$\left(\frac{1}{R_1 R_2} \right)_1 = \frac{ac - b^2}{\Omega^4}$$

et la courbure moyenne

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)_1 = \frac{\lambda^2 a^2 + 2\lambda\mu b + \mu^2 c}{\nu |\Omega|^2} + \nu \frac{Ga - 2Fb + Ec}{|\Omega|^2},$$

avec :

$$\Omega^2 = E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2 + H^2\nu^2.$$

Nous allons faire une application des résultats précédents en considérant le cas où λ et μ sont nuls. Nous savons que cela ne peut se produire que si $S(M)$ est une surface minima et de plus la rotation est normale et sa longueur constante.

Dans ces conditions, la vitesse est définie par les relations suivantes où ω désigne la mesure de la rotation :

$$V'_\alpha = \frac{\omega}{H} (-FM'_\alpha + EM'_\beta),$$

$$V'_\beta = \frac{\omega}{H} (-GM'_\alpha + FM'_\beta).$$

$S(M)$ et $S(V)$ se correspondent donc par plans tangents parallèles et par éléments rectangulaires.

Recherchons les courbures. Nous pouvons remarquer que

$$ds_1^2 = \omega^2 ds^2$$

et que par suite les deux surfaces sont applicables à la similitude de rapport ω près. Nous allons retrouver ce résultat autrement en cherchant a, b, c . Nous partirons de

$$\Omega = \frac{\omega}{H} N,$$

que nous dérivons par rapport à α et β , puis nous identifions avec les formules de définition de a, b, c . Ceci nous donne, en faisant ensuite les produits scalaires par M'_α, M'_β :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega'_\alpha = bM'_\alpha - aM'_\beta = -\omega \frac{H'_\alpha}{H} + \frac{\omega}{H} (M''_{\alpha\alpha} \wedge M'_\beta + M'_\alpha \wedge M''_{\alpha\beta}), \\ \Omega'_\beta = cM'_\alpha - bM'_\beta = -\omega \frac{H'_\beta}{H} + \frac{\omega}{H} (M''_{\alpha\beta} \wedge M'_\beta + M'_\alpha \wedge M''_{\beta\beta}), \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} Eb - Fa = -\frac{\omega}{H} D, & Ec - Fb = -\frac{\omega}{H} D', \\ Fb - Ga = -\frac{\omega}{H} D', & Fc - Gb = -\frac{\omega}{H} D''; \end{array} \right.$$

d'où

$$a = \frac{\omega}{H^2} (ED' - FD), \quad c = \frac{\omega}{H^2} (FD'' - GD'),$$

$$b = \frac{\omega}{H^2} (FD' - GD) = \frac{\omega}{H^2} (ED'' - FD') = \frac{\omega}{2H^2} (ED'' - GD),$$

les deux premières valeurs de b sont égales car la courbure moyenne est nulle :

$$GD - 2FD' + ED'' = 0.$$

Pour calculer la courbure totale de $S(V)$ nous utiliserons les deux premières valeurs de D'_1 , et pour la courbure moyenne la troisième valeur :

$$\left(\frac{1}{R_1 R_2}\right)_1 = \frac{ac - b^2}{\omega^4} = \frac{\omega^2}{H^6} (EG - F^2) (DD'' - D'^2) \frac{1}{\omega^4} = \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{R_1 R_2},$$

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)_1 = \frac{\lambda^2 a + 2\lambda\mu b + \mu^2 c}{\nu|\Omega|^3} + \nu \frac{Ga - 2Fb + Ec}{|\Omega|^3} = 0.$$

Et par suite $S(V)$ est aussi une surface minima.

Théorème. — A toute surface minima on peut faire correspondre par plans tangents parallèles et orthogonalité des éléments linéaires d'une manière et d'une seule (à une symétrie et translation près) une autre surface minima applicable sur la précédente.

On obtient ce résultat en supposant $\omega = \pm 1$ avec un choix déterminé des unités de longueur et de temps.

Voici une autre façon d'exprimer le résultat précédent : si $S(M)$ et $S(V)$ se correspondent par plans tangents parallèles, $\lambda = \mu = 0$ et nous retombons sur le cas précédent.

Du premier théorème énoncé donnons une démonstration géométrique. Rappelons que, dans le cas général, si $S(P)$ est la polaire réciproque de $S(\Omega)$, $S(P)$ et $S(V)$ se correspondent par plans tangents parallèles et conjugaison des asymptotiques. Or ici $S(\Omega)$ est une sphère dont le centre peut être pris pour définir la corrélation, $S(P)$ est aussi une sphère et aux points homologues les plans tangents sont parallèles et par suite $S(M)$ et $S(V)$ se correspondent par plans tangents parallèles. De plus les asymptotiques de $S(P)$ et $S(V)$ étant conjuguées, comme les unes sont les isotropes, celles de $S(V)$ sont rectangulaires et $S(V)$ est minima.

La correspondance entre $S(M)$ et $S(V)$ ayant lieu par plans tangents parallèles, les tangentes aux courbes homologues en des points homologues sont respectivement conjuguées de la même direction par rapport aux indicatrices respectives. Ces indicatrices sont ici des hyperboles équilatères et deux directions conjuguées sont symétriques par rapport aux directions asymptotiques.

On a par suite pour $S(M)$

$$(d, \delta) = 2(T, \delta),$$

si d, d' désignent les directions homologues, δ la direction conjuguée commune, T et T' une direction asymptotique sur chaque surface; de même :

$$(d', \delta) = 2(T', \delta)$$

et en retranchant :

$$(d, d') = 2(T, T') = \frac{\pi}{2} \quad (\text{éléments rectangulaires}).$$

Les asymptotiques de $S(M)$ sont parallèles aux directions principales de $S(V)$. Par plans tangents parallèles, aux asymptotiques de l'une des surfaces correspondent les lignes de courbure de l'autre.

Revenons au cas général d'une surface $S(M)$ dont la rotation est normale. Commençons par rechercher la variation de la courbure et de la torsion d'une courbe tracée sur la surface et entraînée par la surface dans son mouvement. Ces variations sont données par la relation

$$\begin{aligned} \Omega'_s &= t \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{I}{\tau} + g \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{I}{R_m}, \\ \Omega'_s &= \omega \frac{dm}{ds} = \omega \left(-\frac{t}{R_m} + \frac{g}{\tau} \right). \end{aligned}$$

Dans la deuxième nous utilisons l'hypothèse que la rotation est un vecteur normal constant. L'identification conduit à :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{I}{\tau} = -\frac{\omega}{R_m}, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{I}{R_m} = \frac{\omega}{\tau}, \end{cases}$$

dont nous pouvons déduire qu'à l'instant considéré

$$\frac{I}{\tau} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{I}{\tau} + \frac{I}{R_m} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{I}{R_m} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{I}{\tau^2} + \frac{I}{R_m^2}$$

ne varie pas, comme la courbure géodésique.

Recherchons maintenant la rotation propre du trièdre principal de $S(M)$. Nous avons montré que c'est un scalaire égal à :

$$\frac{I}{H^3 \left(\frac{I}{R_1} - \frac{I}{R_2} \right)^2} \begin{vmatrix} a & b & c \\ D & D' & D'' \\ E & F & G \end{vmatrix},$$

avec

$$\begin{aligned} a &= \frac{\omega}{H^3} (ED' - FD), & c &= \frac{\omega}{H^3} (FD'' - GD'), \\ b &= \frac{\omega}{H^3} (FD' - GD) = \frac{\omega}{H^3} (ED'' - FD') = \frac{\omega}{2H^3} (ED'' - GD). \end{aligned}$$

Si nous développons le déterminant suivant les éléments de la première ligne nous obtenons pour la rotation propre :

$$\frac{R^3}{4H^3} [a(-c) + b(2b) + c(-a)] \frac{H^3}{\omega} = \frac{R^3(b^2 - ac)}{2\omega} = \frac{\omega}{2}.$$

Elle est constante en tout point de la surface et est la moitié de la rotation du plan tangent.

Cherchons maintenant la variation de la courbure moyenne de la surface :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{Ga - 2Fb + Ec}{H},$$

qui est nulle comme nous l'avons vu en calculant la courbure moyenne de $S(V)$. A l'instant $\theta + \partial\theta$, $S(M)$ est encore minima; si nous prenons alors une distribution de vitesse définie par la surface minima que nous pouvons lui associer par la loi Λ précitée, un instant infiniment petit après la surface sera encore minima. Peut-on continuer indéfiniment? En d'autres termes, est-il possible d'imaginer la déformation d'une surface restant constamment applicable sur elle-même et constamment minima?

Imaginons le déplacement du point M en supposant que ω soit indépendant du temps. A chaque instant le point M est animé d'une certaine vitesse qui peut être arbitraire car nous savons que la connaissance de Ω entraîne celle de V à un vecteur additif près, vecteur ne dépendant que du temps. Mais le plan tangent en M est animé d'une rotation normale et reste donc parallèle à lui-même. Dans un tel déplacement la surface correspondra à une position fixe par plans tangents parallèles. Cherchons à un instant donné la distribution des accélérations sur la surface. Nous avons vu à propos des fils que cette distribution est définie par

$$d\Gamma = \Omega' \wedge dM + \Omega(\Omega \cdot dM) - \Omega^2 dM,$$

où Ω' est la dérivée du vecteur Ω par rapport au temps. Remarquons que le deuxième terme est nul, la rotation étant normale. Pour avoir Ω' remarquons que c'est la vitesse d'un vecteur invariablement lié au plan tangent, sa vitesse est donc :

$$\Omega' = \Omega \wedge \Omega = 0$$

et par suite on a simplement :

$$d\Gamma = -\omega^2 dM,$$

que nous intégrerons à partir d'un point O fixe sur la surface :

$$\Gamma_M - \Gamma_O = -\omega^2 dM \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} OM = -\omega^2 OM.$$

La solution de cette équation différentielle est :

$$\mathbf{OM} = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad A \text{ et } B \text{ vecteurs indépendants du temps.}$$

Cela revient à supposer que O est fixe dans l'espace, ce qui est légitime d'après la composition des accélérations dans un mouvement de translation, le déplacement de $S(M)$ étant rapporté à des axes de direction fixe issus de O . Le plan tangent en M tournant autour de sa normale. On peut aussi supposer que O est un point fixe arbitraire de l'espace, et nous avons le mouvement relatif de la surface. On voit que chaque point décrit une ellipse d'un mouvement périodique de période $\frac{2\pi}{\omega}$. Darboux étudie ce déplacement à propos de l'étude des surfaces minima. Son étude est basée sur l'équation générale de ces surfaces. Les surfaces $S(M)$ et $S(V)$, dans le cas où $\omega = 1$, sont les surfaces adjointes d' O . Bonnet (Darboux, *Théorie des surfaces*, tome I; *la surface adjointe d' O . Bonnet*).

Autre propriété des surfaces minima. — Supposons que $S(M)$ soit minima et la rotation soit définie par une sphère passant par O à l'instant donné. $S(P)$ est alors un parabolôide de révolution autour d'une droite Oz et de foyer O . La surface $S(V)$ correspondante lui correspond par plans tangents parallèles et directions des asymptotiques conjuguées. Projetons ces directions sur un plan perpendiculaire à Oz . On sait que pour le parabolôide de révolution on trouve deux isotropes, la projection des tangentes asymptotiques devant être conjuguée par rapport aux droites précédentes, elles doivent être rectangulaires, et par suite $S(V)$ est une surface harmonique : z fonction harmonique de x, y . La réciproque est immédiate : si $S(V)$ est une surface harmonique ses directions asymptotiques projetées sur le plan des x, y sont perpendiculaires donc conjuguées harmoniques par rapport aux isotropes; on peut donc prendre pour $S(P)$ un parabolôide de révolution autour de Oz et de foyer O dont les projections des directions asymptotiques sont isotropes. Si de plus nous convenons de prendre pour origine commune de nos rotations un point de l'axe de révolution, la corrélation qui fournit $S(\Omega)$ donnera une sphère et, d'après ce que nous savons, $S(M)$ sera une surface minima.

Nous allons traiter la question par le calcul. Nous allons prendre pour paramètres les coordonnées x, y de la projection de M sur le plan tangent en O à la sphère $S(\Omega)$. Pour déterminer V nous remarquerons que dans la formule

$$dV = \Omega \wedge dM,$$

la vitesse est une fonction linéaire de la rotation. Nous poserons $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$, Ω_1 vecteur d'origine le centre de la sphère qui nous fournirait comme vitesse celle qui est représentée par la surface minima adjointe. Ω_2 est le vecteur $(0, 0, -\omega)$.

Nous calculerons séparément les composantes de V'_x et V'_y et nous en ferons la somme algébrique, ceci nous donne :

$$\begin{cases} V'_x = \frac{\omega}{H} (-FM'_x + EM'_y) + \Omega_x \wedge M'_x, \\ V'_y = \frac{\omega}{H} (-EM'_x + FM'_y) + \Omega_y \wedge M'_y, \end{cases}$$

$$V'_x \left\{ \begin{array}{l} \frac{\omega}{H} (-pq + o) + o, \\ \frac{\omega}{H} (o + 1 + p^2) - \omega, \\ \frac{\omega}{H} [-p^2q + q(1 + p^2)] + o; \end{array} \right. \quad V'_y \left\{ \begin{array}{l} \frac{\omega}{H} [-(1 + q^2) + o] + \omega, \\ \frac{\omega}{H} (o + pq) + o, \\ \frac{\omega}{H} [-(1 + q^2)p + pq^2] + o. \end{array} \right.$$

Si X, Y, Z sont les composantes de la vitesse, on a donc :

$$dX = \omega \left[-\frac{pq dx + (1 + q^2) dy}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} + dy \right],$$

$$dY = \omega \left[\frac{(1 + p^2) dx + pq dy}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} - dx \right],$$

$$dZ = \omega \frac{q dx - p dy}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Formons la combinaison

$$p dX + q dY = \omega \frac{q dx - p dy}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} (1 - \sqrt{1 + p^2 + q^2})$$

et par suite

$$dZ = \frac{p dX + q dY}{1 - H}, \quad H = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

et

$$P = \frac{\partial Z}{\partial X} = \frac{p}{1 - H}, \quad Q = \frac{\partial Z}{\partial Y} = \frac{q}{1 - H}.$$

Nous allons nous servir de ces relations pour comparer différents angles. Nous appellerons α , β les angles de Oz avec la normale à S(M) et à S(V); γ angle des deux plans tangents. On a immédiatement :

$$\frac{1}{\cos \alpha} = -\sqrt{1 + p^2 + q^2} \quad \text{ou} \quad \cos \alpha = -\frac{1}{H},$$

puis :

$$\frac{1}{\cos^2 \beta} = 1 + P^2 + Q^2$$

et comme

$$1 + P^2 + Q^2 = \frac{p^2 + q^2 + 1 - 2H + H^2}{(1 - H)^2} = \frac{2H}{H - 1},$$

$$1 + \cos 2\beta = 2 \cos^2 \beta = 1 - \frac{1}{H} = \cos \alpha + 1,$$

et comme α et β sont des angles définis au signe près :

$$2\beta = \alpha;$$

calculons maintenant γ :

$$\cos^2 \gamma = \frac{(Pp + Qq + 1)^2}{H^2(1 + P^2 + Q^2)} = \frac{1}{1 + P^2 + Q^2} = \cos^2 \beta.$$

donc :

$$\beta = \gamma,$$

$$\gamma = \beta = \frac{\alpha}{2}.$$

De la première formule trouvée on déduit le résultat suivant : soient sur $S(M)$ les courbes où la normale fait avec Oz un angle constant, les courbes homologues sur $S(V)$ seront des courbes définies de la même manière avec l'angle $\frac{\alpha}{2}$ et aux points homologues, les plans tangents font un angle constant $\frac{\alpha}{2}$.

Le trièdre formé avec les parallèles à Oz et les deux normales a une face égale à la somme des deux autres, les trois parallèles sont donc dans un même plan et l'une est la bissectrice de l'angle formé par les deux autres.

Cherchons à déterminer la surface minima qui correspond à une surface harmonique donnée. Au lieu de la considérer comme le problème inverse du précédent, nous supposons que $S(M)$ est la surface harmonique, la surface minima à déterminer sera une surface des vitesses. Un paraboloïde particulier de foyer O et de révolution autour de Oz aura comme équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 = (z + 1)^2 \quad \text{ou} \quad 2z = x^2 + y^2 - 1,$$

si son plan directeur est $z = -1$. Les paramètres directeurs de sa normale sont : $x, y, -1$; si nous voulons qu'ils soient $p, q, -1$, paramètres directeurs de la normale à $S(M)$, ce qui assurera la correspondance par plans tangents parallèles, les coordonnées du point du paraboloïde seront

$$p, \quad q, \quad \frac{p^2 + q^2 - 1}{2},$$

ce qui représente les composantes de la rotation sur les trois axes. On en déduit les composantes de V'_α et V'_β :

$$V'_\alpha = \Omega \wedge M'_\alpha \begin{cases} pq, \\ \frac{q^2 - p^2 - 1}{2}, \\ -q; \end{cases} \quad V'_\beta \begin{cases} \frac{q^2 - p^2 + 1}{2}, \\ -pq, \\ p. \end{cases}$$

Si nous supposons $S(M)$ définie par

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = u(\alpha, \beta)$$

et la vitesse par ses composantes X, Y, Z , on a :

$$dX = pq d\alpha + \frac{q^2 - p^2 + 1}{2} d\beta,$$

$$dY = \frac{q^2 - p^2 - 1}{2} d\alpha - pq d\beta,$$

$$dZ = -q d\alpha + p d\beta.$$

On transforme aisément dZ en introduisant la fonction harmonique $v(\alpha, \beta)$ telle que $\zeta = u + iv$ soit une fonction analytique de $\xi = \alpha + i\beta$, car on a les relations :

$$v'_\alpha = -u'_\beta = -q, \quad v'_\beta = u'_\alpha = p$$

et on en déduit, à une constante additive près :

$$dZ = dV,$$

$$Z = v.$$

Formons maintenant l'expression :

$$2(dY + idX) = -(p - iq)^2 (d\alpha + id\beta) - (d\alpha - id\beta),$$

or $p - iq$ est la dérivée de ζ par rapport à ξ . Nous avons :

$$\begin{cases} 2Y + \alpha + i(2X - \beta) = -\int \left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)^2 d\xi, \\ Z = v(\alpha, \beta). \end{cases}$$

Nous pouvons transformer la première expression, en prenant pour variable ζ et ξ pour fonction. Si le symbole \Re désigne la partie réelle de l'expression sur

laquelle il porte, u et v deviennent les variables indépendantes et α, β deux fonctions de u, v .

$$\left\{ \begin{array}{l} 2X = \beta + \Re i \int \frac{d\zeta}{d\xi} d\zeta, \\ 2Y = -\alpha - \Re \int \frac{d\zeta}{d\xi} d\zeta, \\ Z = v. \end{array} \right.$$

Nous pouvons encore transformer en prenant une fonction η de $\zeta = u + iv$ telle que :

$$\frac{i}{2} \frac{d\zeta}{d\xi} = \frac{d\eta}{d\zeta}$$

et on a les formules d'apparence plus simple :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2X = \beta + \Re \eta, \\ 2Y = -\alpha + \Re i \eta, \\ Z = v \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2X = \Re(\eta - i\xi), \\ 2Y = \Re(i\eta - \xi), \\ Z = \Re(-i\zeta). \end{array} \right.$$

Autre problème. — Nous sommes partis d'une surface harmonique pour $S(M)$ et d'un parabolôïde de foyer O et de révolution autour de Oz . Prenons encore la même $S(M)$ et un parabolôïde $S(\Omega)$ de révolution autour de Oz , mais de sommet O . Sa transformée par polaire réciproque par rapport à la sphère de centre O et de rayon i donnera un autre parabolôïde de révolution autour de Oz et de sommet O . Nous savons que $S(V)$ devra correspondre à ce nouveau parabolôïde par plans tangents parallèles et conjugaison des directions asymptotiques. En répétant un raisonnement déjà fait, cette conjugaison se conserve en projetant sur le plan des xy . Pour le parabolôïde nous avons des isotropes, pour $S(V)$ nous aurons des directions rectangulaires et $S(V)$ sera donc une surface harmonique. Nous allons maintenant en donner une solution par le calcul, en précisant la correspondance de $S(M)$ et $S(V)$, point par point.

Supposons $S(M)$ définie par

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = u(\alpha, \beta)$$

et soit $v(\alpha, \beta)$ la fonction harmonique associée à u de façon que $\zeta = u + iv$ soit une fonction analytique de $\xi = \alpha + i\beta$. On sait que l'on a les relations :

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} = -\frac{\partial u}{\partial \beta} = -q,$$

$$\frac{\partial v}{\partial \beta} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} = p.$$

Nous partons donc d'une surface harmonique dont les rotations sont définies par le paraboloidé $2z = x^2 + y^2$, l'origine des rotations étant l'origine des coordonnées. Les coefficients de l'équation du plan tangent au paraboloidé au point x, y, z sont : $x, y, -1$ comme il y a correspondance par plans tangents parallèles avec $S(M)$ la rotation du point α, β de $S(M)$ sera par suite le vecteur de composantes :

$$p, \quad q, \quad \frac{p^2 + q^2}{2}.$$

On en déduit les composantes de V'_α et V'_β

$$V'_\alpha = \Omega \wedge M'_\alpha \begin{cases} pq, \\ \frac{q^2 - p^2}{2}, \\ -q; \end{cases} \quad V'_\beta = \Omega \wedge M'_\beta \begin{cases} \frac{q^2 - p^2}{2}, \\ -pq, \\ p \end{cases}$$

et si X, Y, Z sont les composantes de la vitesse :

$$\begin{cases} dX = pq d\alpha + \frac{q^2 - p^2}{2} d\beta, \\ dY = \frac{q^2 - p^2}{2} d\alpha - pq d\beta, \\ dZ = -q d\alpha + p d\beta. \end{cases}$$

Pour interpréter simplement ces relations, formons

$$\begin{aligned} 2i(dX - idY) &= 2(dY + idX) = -(p^2 - q^2 - 2ipq)d\alpha - i(p^2 - q^2 - 2ipq)d\beta \\ &= -(p - iq)^2(d\alpha + id\beta), \end{aligned}$$

$$dZ = \frac{\partial v}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial v}{\partial \beta} d\beta.$$

Or

$$p - iq = \frac{\partial u}{\partial \alpha} + i \frac{\partial v}{\partial \alpha},$$

représente la dérivée de ζ par rapport à ξ . Nous pourrons donc écrire, en négligeant les constantes additives dont nous connaissons la signification :

$$X - iY = \frac{i}{2} \int \left(\frac{d\zeta}{d\xi} \right)^2 d\xi,$$

$$Z = v$$

ou encore, le symbole \Re désignant la partie réelle de l'expression sur laquelle il porte :

$$\begin{aligned} X &= \Re \frac{i}{2} \int \left(\frac{d\zeta}{d\xi} \right)^2 d\xi, \\ Y &= -\Re \frac{1}{2} \int \left(\frac{d\zeta}{d\xi} \right)^2 d\xi, \\ Z &= \Re(-i\zeta). \end{aligned}$$

Formules faisant correspondre une autre surface harmonique à toute fonction de variable complexe, ou à toute fonction harmonique.

Si nous introduisons la surface $S'(M)$ dont l'équation est $z = v(x, y)$ et sa surface des vitesses $S'(V)$ dérivée du même paraboloides, on trouve le tableau suivant pour différents angles :

$$\begin{aligned} oz, \text{ normale } S(M) &= \alpha, \\ oz, \text{ normale } S'(M) &= \alpha, \\ \text{normales } S(M) \text{ et } S'(M) &= \varphi \text{ tel que } \cos \varphi = \cos^2 \alpha, \\ oz, \text{ normale } S(V) &= \frac{\alpha}{2}, \\ oz, \text{ normale } S'(V) &= \frac{\alpha}{2}, \\ \text{normales } S(V) \text{ et } S'(M) &= \varphi, \\ \text{normales } S(M) \text{ et } S'(V) &= \varphi, \\ \text{normales } S(V) \text{ et } S'(V) &= \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Si on laisse de côté la correspondance ponctuelle entre les deux surfaces harmoniques, et qu'on se propose uniquement la recherche de la nouvelle fonction de variable complexe, on peut poser $\eta = -i\zeta$ et introduire la fonction $H(\eta)$ définie par

$$\frac{dH}{d\eta} = -\frac{1}{2} \frac{d\zeta}{d\xi},$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$X - iY = \frac{i}{2} \int \left(\frac{d\zeta}{d\xi} \right)^2 d\xi = \frac{i}{2} \int \frac{d\zeta}{d\xi} d\zeta = \frac{i}{2} \int -2 \frac{dH}{d\eta} (i d\eta) = \int dH = H(\eta)$$

et finalement :

$$X = \Re(H),$$

$$Y = \Re(iH),$$

$$Z = \Re(\tau),$$

formules extrêmement simples si on considère τ fonction de H .

Nous allons revenir aux surfaces harmoniques et déduire de leurs propriétés élémentaires des résultats que nous interpréterons en parlant de rotations. Soit une surface harmonique $S(M)$ et sa surface harmonique associée $S'(M)$. Les paramètres directeurs de la normale à chaque surface sont respectivement $p, q, -1$ et $-q, p, -1$. On en déduit rapidement que les deux normales font le même angle avec oz . Soit Δ une direction du plan de cosinus directeurs $\cos \alpha, \sin \alpha, 0$ et Δ' la direction obtenue en faisant tourner Δ de $+\frac{\pi}{2}$ dans le plan xoy . Ses cosinus directeurs sont $-\sin \alpha, \cos \alpha, 0$. On voit immédiatement que les angles (Δ, N) et (Δ', N') sont égaux quelle que soit Δ . Pour parler simplement, nous supposons oz verticale. Il résulte de ce qui vient d'être rappelé que les plans verticaux contenant chaque normale se déduisent l'un de l'autre par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$. D'une manière plus précise, si nous faisons tourner $S'(M)$ de $+\frac{\pi}{2}$ pour l'amener en $S''(M)$, les normales à $S'(M)$ et $S''(M)$ seront parallèles, et les deux surfaces se correspondront par plans tangents parallèles. Les représentations sphériques de $S(M)$ et $S''(M)$ seront les mêmes. Comparons les éléments d'aire de $S(M)$ et $S'(M)$ [ou $S''(M)$]. Ils sont tous égaux à $\sqrt{1+p^2+q^2} dx dy$. La représentation de $S(M)$ et $S''(M)$ se fait donc par plans tangents parallèles et conservation des aires; aux points homologues les courbures totales sont donc les mêmes, ce qu'un calcul direct montre simplement. Pour $S(M)$ et $S'(M)$, du fait que les plans contenant Oz et chacune des normales sont rectangulaires, il en résulte que les lignes de pente de l'une des surfaces se projettent suivant les sections horizontales de l'autre.

On peut se demander si la correspondance précédente a lieu de façon que pour $S(M)$ et $S''(M)$ les directions asymptotiques soient conjuguées. Puisque les plans tangents sont parallèles, il suffit de vérifier la propriété en projection sur le plan horizontal.

Nous commencerons même par étudier les projections des tangentes asymptotiques à $S(M)$ et $S'(M)$ en des points homologues, où on a :

$$\begin{aligned} v'_x &= -q, & v'_y &= p, \\ v''_{x^2} &= -s, & v''_{xy} &= -t = r, & v''_{y^2} &= s. \end{aligned}$$

Les directions asymptotiques de $S(M)$ sont données par

$$rm^2 + 2sm - r = 0;$$

celles de $S'(M)$, sont en projection :

$$-sm'^2 + 2rm' + s = 0$$

et il suffit de vérifier la condition

$$2(m_1 m_2 + m'_1 m'_2) = (m_1 + m_2)(m'_1 + m'_2) \quad \text{ou} \quad 2(-1 - 1) = -2 \frac{s}{r} \cdot 2 \frac{r}{s},$$

ce qui est immédiat.

Or ces deux couples de directions se projettent suivant deux couples rectangulaires, on a donc les deux bissectrices de deux droites rectangulaires. Si on fait ensuite une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ pour passer à $S''(M)$, cette propriété est conservée, et nous voyons que $S''(M)$ peut servir à définir une distribution de rotations pour $S(M)$. En remontant pas à pas le raisonnement précédent, on montre que si une surface harmonique admet, pour surface des rotations, une autre surface harmonique, cette dernière se déduit de la surface conjuguée de la première par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ autour de Oz , suivie peut-être d'une homothétie.

Si maintenant, nous introduisons les nombres a, b, c qui définissent les vecteurs $\Omega'_\alpha, \Omega'_\beta$, d'après ce que nous avons montré sur les courbures totales de $S(M)$ et $S(\Omega)$, il en résulte que $ac - b^2 = 1$, et on a

$$\begin{cases} \Omega'_\alpha = bM'_\alpha - aM'_\beta, \\ \Omega'_\beta = cM'_\alpha - bM'_\beta, \end{cases} \quad \begin{cases} M'_\alpha = -b\Omega'_\alpha + a\Omega'_\beta, \\ M'_\beta = -c\Omega'_\alpha + b\Omega'_\beta. \end{cases}$$

Nous avons désigné plus haut par u_1 et u_2 les valeurs maximum et minimum du rapport des longueurs de $d\Omega$ et dM homologues. Ici on a $u_1 u_2 = 1$.

De plus, comme les points où la rotation est tangente à $S(M)$ sont donnés par $ac - b^2 = 0$ qui exprime l'existence d'une tangente et non d'un plan tangent à $S(\Omega)$, il en résulte qu'une surface harmonique ne peut posséder d'arête de rebroussement réelle; ce qui est bien évident, car en un tel point, l'indicatrice est réduite à deux droites parallèles qui ne peuvent se projeter sur xoy suivant deux droites rectangulaires.

La vitesse est donnée par les relations :

$$\begin{aligned} dX &= -(xdu + v'dy), & dY &= v'dx - ydu, & dZ &= xdx + ydy, \\ u'(x, y) &= u(y, -x), & v'(x, y) &= v(y, -x). \end{aligned}$$

Problème. — Dans le déplacement d'une surface qui reste applicable sur elle-même, est-il possible que les surfaces $S(\Omega)$ de la rotation, à chaque instant, forment une suite de surfaces applicables les unes sur les autres? Nous savons déjà que E, F, G sont indépendants du temps, pour que le problème posé soit possible, il faudra que $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ quantités analogues pour $S(\Omega)$ soient aussi indépendantes du temps. Nous les avons déjà calculées en fonction de a, b, c . Considérons les trois relations comme équations en a, b, c , tout le reste étant connu. Si, momentanément, nous considérons a, b, c comme les coordonnées rectangulaires d'un point, nous avons trois quadriques qui se coupent, en général, en des points isolés et en nombre fini. Dans ce cas, a, b, c sont indépendants du temps. Si nous nous reportons alors au système (9), nous constatons que les deux premières équations ne font pas intervenir le temps, tandis que la troisième le fait intervenir. Nous devons donc avoir :

$$D^2a - 2D'b + Dc = 0,$$

ainsi que la relation obtenue en dérivant par rapport au temps :

$$\frac{\partial D^2}{\partial \theta} a - 2 \frac{\partial D'}{\partial \theta} b + \frac{\partial D}{\partial \theta} c = 0.$$

Or, en tenant compte des valeurs des dérivées trouvées au cours du calcul sur la variation sur la courbure de la surface nous constatons que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial \theta} &= H^2 a, & \frac{\partial D'}{\partial \theta} &= H^2 b, & \frac{\partial D^2}{\partial \theta} &= H^2 c, \\ & & & & 2H^2(ac - b^2) &= 0. \end{aligned}$$

Cette condition exprime que les deux vecteurs Ω'_α et Ω'_β ont le même support, et par suite que $S(\Omega)$ est dégénérée, en tant qu'enveloppe de plans tangents, en une courbe; ou très exceptionnellement en un point, la rotation est alors un vecteur libre, et $S(M)$ se déplace comme un solide. Cherchons quelles sont les surfaces pour lesquelles il existe une distribution de rotation définie par une courbe. Sur $S(M)$ soient, α variable, les courbes qui correspondent à un point donné de $C(\Omega)$ et, β variable, un autre système quelconque de courbes coordonnées. Tout le long de chaque courbe du premier système la rotation est constante, cette courbe se déplace donc comme un solide. Reportons-nous à la formule

$$(5) \quad \Omega'_\alpha \wedge M'_\beta = \Omega'_\beta \wedge M'_\alpha,$$

qui définit la rotation d'une surface dans tous les cas. Le premier produit étant nul puisque $\Omega'_\alpha = 0$, le deuxième est aussi nul, or Ω'_β est porté par la tangente à

$C(\Omega)$ donc M'_α lui est parallèle. Tout le long de la courbe α considérée, la tangente a une direction fixe c'est donc une droite et $S(M)$ est une surface réglée dont les génératrices rectilignes sont parallèles aux tangentes de $C(\Omega)$. Comme la condition (5) est nécessaire et suffisante, à toute surface réglée on peut faire correspondre d'une infinité de manières des rotations définies par une courbe, il suffit de prendre une courbe dont les tangentes sont parallèles aux génératrices de $S(M)$. Par exemple, si $S(M)$ est une surface à plan directeur, $C(\Omega)$ sera la courbe plane la plus générale. Si $S(M)$ est un hyperboloïde de révolution, ou toute surface dont les génératrices font un angle constant φ avec une direction donnée, $C(\Omega)$ sera une hélice quelconque coupant sous l'angle φ les génératrices de tout cylindre de génératrices parallèles à la direction donnée.

Cherchons si une surface réglée donnée peut se déplacer en restant réglée, autrement dit les génératrices rectilignes restant indéformables. Pour cela il sera nécessaire et suffisant que les rotations, à chaque instant, soient données par une courbe dont nous savons que les tangentes sont parallèles aux génératrices rectilignes. Nous allons étudier la variation de la rotation dans le temps. Désignons par σ l'arc de $C(\Omega)$; $\frac{d\Omega}{d\sigma}$ sera un vecteur unitaire tangent, ou un vecteur porté par la génératrice considérée. Pour connaître sa dérivée par rapport au temps, nous nous servirons de cette dernière interprétation :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} = \Omega \wedge \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} = \Omega \wedge \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma}.$$

La vitesse du point Ω est $\frac{\partial \Omega}{\partial \theta}$, et la formule précédente montre que sa rotation est Ω . Avec d'autres notations, dans le mouvement d'un fil nous avons étudié le cas où la rotation était OM ; nous avons montré que cette rotation était principale et nous avons étudié d'abord le cas où le fil était inextensible. Nous constatons que, la distribution initiale des rotations étant choisie, l'arc de $C(\Omega)$ a une signification pour la surface réglée. Puisque la rotation est principale, nous avons montré que la variation de la courbure était nulle, et celle de la torsion :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{T} = -1,$$

car ici $\omega = 1$. La courbure en chaque point du fil $C(\Omega)$ étant indépendante du temps, la développable dont $C(\Omega)$ est l'arête de rebroussement reste applicable sur elle-même car l'angle de deux tangentes infiniment voisines $d\varepsilon = \frac{d\sigma}{R}$ est indépendant du temps.

Mais cette surface développable ne se déforme pas d'une manière quelconque, car en un point de $C(\Omega)$ la torsion varie suivant la loi :

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_0} - \theta.$$

Entre deux instants donnés, les torsions de tous les points de $C(\Omega)$ ont augmenté de la même quantité. Nous voyons qu'en général, avec le choix le plus général des rotations initiales, on n'aura pas une torsion nulle en tout point de la courbe à un instant convenablement choisi. Si cela peut se produire, c'est que la courbe initiale sera à torsion constante, et, dans son mouvement viendra s'appliquer sur une surface à plan directeur quand $C(\Omega)$ sera plane. Si en particulier on part d'un hyperboloïde de révolution (ou d'une surface dont les génératrices font un angle constant avec une direction Δ_0), on peut choisir pour $C(\Omega)$ une hélice circulaire dont la courbure et la torsion sont constantes. Dans le déplacement, la courbure sera constante dans le temps et dans l'espace; la courbure sera constante le long de $C(\Omega)$ à chaque instant et $C(\Omega)$ restera une hélice circulaire. A chaque instant, $S(M)$ aura ses génératrices faisant un angle constant avec une direction Δ pouvant varier avec le temps.

On voit, comme suite aux remarques précédentes, quand une surface se déplace en restant constamment réglée avec $C(\Omega)$ inextensible, une fois la distribution des rotations initiales connue, on n'obtiendra pas toutes les surfaces réglées applicables sur $S(M)$. On s'en rend aisément compte en partant d'une surface que l'on sait être applicable sur une certaine surface à plan directeur, et en partant de rotations initiales quelconques; la torsion de $C(\Omega)$ ne sera pas constante, et le mouvement ne pourra conduire à la surface à plan directeur applicable sur $S(M)$.

Qu'ont de commun toutes les courbes $C(\Omega)$ admissibles pour une position donnée de $S(M)$? On se rend aisément compte que l'arc n'est pas le même pour une même génératrice ainsi que la courbure et la torsion, mais

$$\frac{R}{T} = \frac{d\varepsilon}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{d\eta} = \frac{d\varepsilon}{d\eta},$$

où $d\varepsilon$ angle de deux génératrices et $d\eta$ angle des plans asymptotes est le même en des points homologues sur deux $C(\Omega)$. Les tangentes homologues sont parallèles à la génératrice dont elles dépendent. Les plans osculateurs sont parallèles car un tel plan est parallèle à deux génératrices infiniment voisines. Il est d'ailleurs, pour la raison précédente, parallèle au plan asymptote le long de la génératrice considérée. Est-il possible de déterminer des rotations initiales de façon que l'on passe d'une surface réglée donnée à une autre surface réglée sur laquelle elle est applicable? $S(M)$ étant constamment réglée. Il faut rechercher $C(\Omega)$ pour $S(M)$ et $C'(\Omega)$ pour $S'(M)$

de façon que ces courbes aient même longueur et même rayon de courbure aux points homologues. S'il en est ainsi, on devra reconnaître que les torsions diffèrent d'une constante.

Si nous remarquons que la rotation n'est définie qu'à un vecteur additif près, fonction du temps, ainsi que la vitesse, nous voyons que le mouvement de $S(M)$ est parfaitement connu en fonction du temps, à un mouvement relatif près, dès que les rotations initiales sont connues.

$S(M)$ admettant une distribution de rotations définie par une courbe, que peut-on dire de la surface des vitesses? Le long d'une génératrice α variable, où l'élément d'arc est dl :

$$dV = \Omega \wedge dM = \Omega \wedge \Omega' dl.$$

Il en résulte que le point V décrit une droite perpendiculaire à Ω et Ω' , donc à la génératrice. $S(V)$ est donc une surface réglée, je dis qu'elle est développable. En effet, sur chaque génératrice G de $S(M)$ il existe un point et un seul en général, où le vecteur Ω est dans le plan tangent. En ce point, pour la direction Ω , $dV = 0$, et pour toute autre direction : $dV = \Omega \wedge dM$ est perpendiculaire au plan tangent à $S(M)$ en ce point. $S(V)$ ne présente pas de plan tangent homologue, mais une tangente; le lieu du point de contact est l'arête de rebroussement de la développable.

Signalons que dans le cas où $S(M)$ est quelconque, les points où $\Omega \cdot N \equiv 0$ forment une ligne fournissant sur $S(V)$ une arête de rebroussement. Remarquons que sur $S(M)$, en chaque point de cette ligne la rotation ne lui est pas tangente en général, sinon le long de cette courbe $dV \equiv 0$ et $S(V)$ présenterait un point conique où le cône des tangentes serait le lieu des tangentes de rebroussement. Si $S(M)$ était réglée avec vitesse dérivant d'une courbe, $S(V)$ serait un cône.

Demandons-nous ce que seraient les rotations les plus générales d'une surface réglée, mais qui ne le resterait pas dans la suite de son mouvement. Considérons sur $S(M)$ ses génératrices rectilignes G et ses asymptotiques A , quand le plan tangent tourne autour de G , sur $S(\Omega)$ on a comme courbe homologue la courbe de raccordement avec le cylindre circonscrit de génératrices parallèles à G . On sait que la courbe de raccordement est conjuguée de la caractéristique du plan tangent par rapport à l'indicatrice de $S(V)$ en ce point.

Même résultat pour G et la tangente à A , il en résulte que la tangente en Ω à la courbe de raccordement est parallèle à la tangente asymptotique en M sur $S(M)$. On encore : à une génératrice de $S(M)$ correspond sur $S(\Omega)$ une courbe dont les tangentes sont parallèles aux tangentes asymptotiques le long de G . Or on sait que les tangentes asymptotiques le long d'une génératrice engendrent une quadrique, elles sont donc parallèles aux génératrices d'un certain cône du second degré. Aux asymptotiques de $S(M)$ correspondront les courbes conjuguées des précédentes. Ce seront les courbes dont les tangentes sont parallèles aux génératrices de $S(M)$. Mais $S(\Omega)$

ne sera pas la surface la plus générale engendrée par de telles courbes, car il faut que le lieu des points où la tangente a une direction donnée, ait sa tangente parallèle à la tangente asymptotique à $S(M)$ où le plan tangent est parallèle à celui de $S(\Omega)$.

Si $S(M)$ est un hyperboloïde de révolution, $S(\Omega)$ sera engendrée par des hélices faisant avec l'axe de l'hyperboloïde le même angle que ses génératrices. Comme il y a deux systèmes de génératrices rectilignes, $S(\Omega)$ sera engendrée par des hélices de deux manières différentes, et qui sont conjuguées. Faisons déplacer une des hélices précédentes par translation, un de ses points décrivant une autre hélice. On obtiendra une surface de translation et on sait que les deux systèmes d'hélices sont conjugués. Une telle surface sera $S(\Omega)$ pour l'hyperboloïde de révolution. Elle dépend de deux fonctions arbitraires ainsi que la surface $S(\Omega)$ la plus générale pour une surface donnée. On a donc la solution générale pour l'hyperboloïde de révolution. De même pour une quadrique réglée réelle, puisque toute génératrice est parallèle à une autre génératrice de l'autre système, $S(\Omega)$ est engendrée de deux manières par une courbe dont les tangentes rencontrent à l'infini la section de la quadrique par le plan de l'infini, les deux familles étant conjuguées. Si, plus particulièrement, on a un paraboloid hyperbolique il existe, sur $S(V)$, deux sections de plans parallèles donnant des courbes conjuguées. Comme dans le cas de l'hyperboloïde de révolution, pour toute quadrique, $S(\Omega)$ est une surface de translation se déduisant par affinité soit des surfaces minima (cas de la sphère) soit des surfaces rattachées à l'hyperboloïde de révolution.

Reprenons l'étude des surfaces $S(M)$ dont $S(\Omega)$ reste applicable sur elle-même. Nous commencerons par rechercher les surfaces pour lesquelles $S(\Omega)$ a ses courbures invariables. Rappelons les formules :

$$\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 = (ac - b^2) R_1 R_2,$$

$$\frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_2} = \frac{1}{(ac - b^2) H^2} \begin{vmatrix} a & b & c \\ D & D' & D'' \\ E & F & G \end{vmatrix}.$$

Nous voyons que pour que les conditions précisées soient satisfaites, il est nécessaire et suffisant que $ac - b^2$ et le déterminant précédent soient indépendants du temps. Leurs dérivées par rapport au temps sont donc nulles, ce qui donne :

$$ca'_0 - 2bb'_0 + ac'_0 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a'_0 & b'_0 & c'_0 \\ D & D' & D'' \\ E & F & G \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ H^2 a & H^2 b & H^2 c \\ E & F & G \end{vmatrix} = 0.$$

Le deuxième déterminant est identiquement nul, donc le premier doit être nul. Multiplions-en respectivement les colonnes par c , $-2b$, a et ajoutons-les à l'une

d'entre elles. Deux des nombres obtenus sont nuls, le troisième doit être nul, sinon les trois mineurs du déterminant relatif à E, F, G devraient être nuls simultanément, et par suite :

$$\begin{aligned} \text{soit} \quad & Ga - 2Fb + Ec = 0, \\ \text{soit} \quad & \frac{a'_0}{D} = \frac{b'_0}{D'} = \frac{c'_0}{D''}. \end{aligned}$$

Nous avons donc deux catégories distinctes de solutions⁽¹⁾. La première condition exprime que les courbures de S(M) ne varient pas. Nous allons étudier ces surfaces.

En nous reportant à la théorie faite à propos de l'étude du rapport des longueurs de $d\Omega$ et dM , nous voyons que le maximum et le minimum de ce rapport, affectés de signes convenables sont donnés par

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 &= \frac{Ga - 2Fb + Ec}{H}, \\ u_1 u_2 &= ac - b^2. \end{aligned}$$

La première de ces relations montre que le maximum est égal au minimum en valeur absolue, et par conséquent que nous avons une représentation géodésique de S(M) sur S(Ω). Le rapport des arcs est constant en chaque point de la surface et il est égal à $\sqrt{b^2 - ac}$. Ceci prouve que la quantité $ac - b^2$ est négative pour ces surfaces, et les courbures totales sont de signes contraires. Il en résulte aussi que le ds^2 des surfaces S(Ω) est indépendant du temps, ou encore S(Ω) reste applicable sur elle-même, la correspondance ponctuelle étant définie par l'application correspondante de S(M) sur elle-même.

Réciproquement, S(Ω) peut-elle rester applicable sur elle-même par la correspondance ponctuelle précédente? Pour cela il faut et il suffit que les trois coefficients du ds^2 de S(Ω) soient indépendants du temps :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= Eb^2 - 2Fab + Ga^2, \\ \mathcal{F} &= Ebc - F(ac + b^2) + Gab, \\ \mathcal{C} &= Ec^2 - 2Fbc + Gb^2. \end{aligned}$$

Si nous dérivons par rapport au temps, nous avons trois équations linéaires et homogènes par rapport aux dérivées, le déterminant des inconnues doit donc être nul :

$$\begin{vmatrix} Ga - Fb & Eb - Fa & 0 \\ Gb - Fc & Ga - 2Fb + Ec & Eb - Fa \\ 0 & Ga - Fc & Ec - Fb \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \alpha + \delta & \beta \\ 0 & \gamma & \delta \end{vmatrix} = 0.$$

(1) La deuxième catégorie est distincte de la première, mais on retrouve encore la périodicité du mouvement.

En développant ce dernier déterminant, on trouve :

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha + \delta) = 0$$

ou

$$(EG - F^2)(ac - b^2)(Ga - 2Fb + Ec) = 0.$$

Les deux premières parenthèses sont différentes de zéro, donc la courbure moyenne de $S(M)$ ne varie pas dans le temps.

Entre les coefficients \mathcal{E} , \mathcal{F} , \mathcal{G} on a les relations :

$$\mathcal{G}a - 2\mathcal{F}b + \mathcal{E}c = (Ga - 2Fb + Ec)(ac - b^2) = 0,$$

$$E\mathcal{G} - 2F\mathcal{F} + G\mathcal{E} = (Ga - 2Fb + Ec)^2 + 2H^2(b^2 - ac) = 2H^2(b^2 - ac).$$

La deuxième montre que $b^2 - ac$ est indépendant du temps; on aurait pu le constater à partir de la courbure totale de $S(\Omega)$ qui est invariable dans le temps d'après le théorème de Gauss. Comme la surface $S(\Omega)$ se déplace en restant applicable sur elle-même, M définit une rotation possible pour elle; c'est même la rotation qui va lui associer une $S(\Omega')$ applicable sur elle-même. On en déduit des coefficients a , b , c relatifs à $S(\Omega)$ en résolvant :

$$\begin{cases} \Omega'_x = bM'_x - aM'_y, \\ \Omega'_y = cM'_x - bM'_y, \end{cases}$$

par rapport à M'_x et M'_y . On trouve :

$$\begin{cases} (ac - b^2)M'_x = -b\Omega'_x + a\Omega'_y, \\ (ac - b^2)M'_y = -c\Omega'_x + b\Omega'_y, \end{cases}$$

et par suite, la première des relations trouvées plus haut montre que la courbure moyenne de $S(\Omega)$ est invariante dans le temps.

Nous avons donc trouvé comme conditions nécessaires que

$$Ga - 2Fb + Ec = 0$$

et que $ac - b^2$ soit indépendant du temps. D'après le début de la question traitée, nous voyons que ces conditions sont suffisantes. Une autre façon d'opérer est la suivante : commençons par mettre \mathcal{E} , \mathcal{F} , \mathcal{G} sous la forme :

$$\mathcal{E} = E(b^2 - ac) + a(Ga - 2Fb + Ec),$$

$$\mathcal{F} = F(b^2 - ac) + b(Ga - 2Fb + Ec),$$

$$\mathcal{G} = G(b^2 - ac) + c(Ga - 2Fb + Ec),$$

ce qui donne :

$$d\Omega^2 = (b^2 - ac)dM^2 + (Ga - 2Fb + Ec)(adx^2 + 2bdx d\beta + cd\beta^2),$$

relation où $d\Omega^2$ et dM^2 ne doivent pas dépendre du temps par hypothèse; cela sera vérifié si les deux conditions nécessaires sont réalisées.

Avant de déterminer les surfaces pour lesquelles ces deux conditions sont possibles, nous allons transformer les deux premières conditions (g). Nous savons déjà que la troisième est équivalente au théorème de Gauss. Nous les écrivons d'abord sous la forme :

$$(g') \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \alpha}(Ec - Fb) - \frac{\partial}{\partial \beta}(Eb - Fa) = \frac{1}{2}(aG'_\alpha - 2bF'_\alpha + cE'_\alpha), \\ \frac{\partial}{\partial \alpha}(Fc - Gb) - \frac{\partial}{\partial \beta}(Fb - Ga) = \frac{1}{2}(aG'_\beta - 2bF'_\beta + cE'_\beta), \end{cases}$$

qui est très symétrique. En se rappelant que

$$\frac{\partial D}{\partial \theta} = H^2 a, \quad \frac{\partial D'}{\partial \theta} = H^2 b, \quad \frac{\partial D''}{\partial \theta} = H^2 c,$$

si nous intégrons par rapport au temps (g'), nous pouvons simplement dire que les seconds membres ne diffèrent des premiers que par des fonctions additives arbitraires ne dépendant pas du temps, mais en se reportant aux conditions auxquelles doivent satisfaire E, F, G, D, D', D'', on constate que l'on retrouve ces conditions d'intégrabilité sous une forme un peu différente, en mettant zéro pour les fonctions arbitraires.

$$(g'') \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{ED'' - FD'}{H^2} - \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{ED' - FD}{H^2} = \frac{DG'_\alpha - 2D'F'_\alpha + D''E'_\alpha}{2H^2}, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{FD'' - GD'}{H^2} - \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{FD' - GD}{H^2} = \frac{DG'_\beta - 2D'F'_\beta + D''E'_\beta}{2H^2}. \end{cases}$$

Ces relations prennent une forme relativement simple si nous prenons comme lignes coordonnées sur la surface les lignes de longueur nulle. Nous avons le droit de le faire quand le temps s'écoule, car les transformées de ces lignes conservent la même définition. Nous avons alors :

$$E = G = 0, \quad F = iH$$

et (g'') devient

$$\begin{cases} H \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{D'}{H^2} = \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{D}{H}, \\ H \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{D'}{H^2} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{D''}{H}. \end{cases}$$

Ce système prendra une forme différente en introduisant les courbures moyenne et totale, ainsi que H . On obtient une équation intégro-différentielle, où les signes sommes indiquent une primitive quelconque prise par rapport à la variable précisée. Il s'introduit bien entendu des fonctions de l'autre variable et du temps :

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{iH''_{\alpha\beta}}{H^2}, \quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = -\frac{2iD'}{H^2},$$

$$H^2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)^2 + \int H \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) d\beta \int H \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) d\alpha = 0.$$

Nous n'utiliserons pas cette équation. Nous remarquerons simplement que D' ne dépend pas du temps ainsi que DD' . De plus $b = 0$ et ac indépendant du temps. Avec d'autres notations, en désignant D et D'' par u et v , et leurs dérivées par rapport au temps par u' et v' (le temps seul étant variable), on peut écrire que

$$uv = c^{te},$$

$$u'v' = c^{te}.$$

En dérivant la première par rapport au temps, on en déduit que

$$\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} = 0, \quad \frac{u'}{u} \cdot \frac{v'}{v} = c^{te}$$

et par suite $\frac{u'}{u}$ et $\frac{v'}{v}$ sont indépendants du temps :

$$u = HA e^{k\theta},$$

$$v = HB e^{-k\theta},$$

A, B, k étant des fonctions de α, β seulement. Si nous transportons dans les relations entre D, D', D'' , nous avons :

$$Hi \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = (A'_{\beta} + A k'_{\beta} \theta) e^{k\theta},$$

$$Hi \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = (B'_{\alpha} + B k'_{\alpha} \theta) e^{-k\theta}.$$

Le second membre dépend du temps, alors que le premier n'en dépend pas, chacun des membres étant nul identiquement

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = 0;$$

ceci prouve que la courbure moyenne est une constante dans le temps et sur la surface.

En étudiant les seconds membres, on voit que l'on peut écrire :

$$\begin{aligned} A'_y = B'_x = k'_\alpha = k'_\beta = 0, \\ D = H \varphi(\alpha) e^{k\beta}, \quad D'' = H \psi(\beta) e^{-k\alpha}; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} a &= \frac{k}{H} \varphi(\alpha) e^{k\beta}, \\ c &= -\frac{k}{H} \psi(\beta) e^{-k\alpha}. \end{aligned}$$

Ceci va nous permettre de calculer la courbure moyenne de $S(\Omega)$. D'après une formule que nous avons établie dans l'étude des courbures de $S(\Omega)$, on trouve

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{2i}{k},$$

ce qui donne la signification du nombre k qui doit donc être pris imaginaire pur si nous voulons que $S(M)$ et $S(\Omega)$ soient réelles ensemble.

Pour la commodité nous poserons $k = -2\omega i$, et nous allons montrer que ω représente la rotation propre du trièdre principal. Cette dernière est en effet égale à :

$$\frac{1}{H^3 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)^2} \begin{vmatrix} a & b & c \\ D & D' & D'' \\ E & F & G \end{vmatrix} = \omega = -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

On voit qu'elle est constante sur la surface et dans le temps. Le même résultat s'applique à $S(\Omega)$.

Pour les surfaces à courbure moyenne constante, la formule obtenue un peu plus haut entre les rayons de courbure et H , se simplifie beaucoup. Les deux intégrales fournissent respectivement des fonctions arbitraires de α ou β (et du temps si on veut). Sur toute la surface nous avons :

$$H \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = f(\alpha) g(\beta).$$

Ce qui nous permet d'évaluer simplement les rayons de courbure de la surface, sachant en outre que la courbure moyenne est constante.

On peut essayer de rapprocher le mouvement des surfaces à courbure moyenne

constante de celui des surfaces minima que nous avons déjà rappelé. Dans les deux cas la rotation du trièdre principal par rapport à un trièdre lié invariablement aux lignes coordonnées est constante dans le temps et sur la surface. Il en résulte qu'au bout du temps $\frac{2\pi}{\omega}$, les tangentes principales ont repris leur position et les rayons de courbure sont encore les mêmes ainsi que le ds^2 . Il en résulte qu'au bout de ce temps la surface reprendra sa forme. Il en sera de même évidemment pour la surface $S(\Omega)$ qui lui est associée.

Surfaces réglées le demeurant. — Nous allons reprendre cette étude en précisant quelques points. Nous avons fait la remarque que dans de telles conditions la rotation était constante le long d'une génératrice; si nous nous rappelons que ce vecteur est la rotation du plan tangent en chaque point, nous voyons que l'ensemble des plans tangents d'une génératrice se déplace en bloc comme un solide. Il en résulte que le paramètre de distribution est indépendant de la déformation de la surface.

Nous avons constaté que la courbe $C(\Omega)$ était l'une quelconque des courbes dont les tangentes étaient parallèles aux génératrices de $S(M)$. Il revient au même de dire que la développable dont $C(\Omega)$ est l'arête de rebroussement a même courbe à l'infini que $S(M)$ en exceptant peut-être les génératrices rectilignes pouvant s'y trouver. Inversement, toute surface réglée admettant une distribution de rotation, régie par une courbe $C(\Omega)$ donnée, a même courbe à l'infini que la développable engendrée par les tangentes.

Les plans tangents le long d'une génératrice étant entraînés en bloc, il en résulte que la ligne de striction est conservée d'après sa définition. Ainsi dans l'hélicoïde droit, la ligne de striction est une directrice rectiligne de la surface si on la considère comme conoïde. Dans une déformation de la surface elle restera ligne de striction et aussi géodésique. De plus, le paramètre de distribution sera constant sur la surface et dans le temps. Cette dernière propriété est valable pour tous les hélicoïdes réglés et l'hyperboloïde de révolution. La première est valable pour tout conoïde droit.

Rapprochons maintenant différents résultats. Soit un hélicoïde réglé quelconque. Nous savons qu'une distribution initiale de rotations peut être définie par une hélice circulaire convenablement choisie. Supposons de plus que le mouvement de cette surface ait lieu de manière que la courbe $C(\Omega)$ soit inextensible dans le temps, nous avons montré que la courbure restait indépendante du temps, et que la torsion était une fonction linéaire du temps; par conséquent, elle est constante à chaque instant. Il en résulte que les génératrices font toutes le même angle avec une direction convenablement choisie. Si nous revenons maintenant à la définition du paramètre de distribution (ici constant), quotient de la distance de deux génératrices infiniment voisines par leur angle, et à la définition de la ligne de striction coupant

sous un angle constant les génératrices, on voit que chaque génératrice a la même position par rapport à la génératrice qui la précède, et la nouvelle surface est encore un hélicoïde réglé. Nous avons obtenu une représentation assez simple du mouvement qui amène en coïncidence les différents hélicoïdes réglés applicables. On peut prendre en particulier comme hélicoïde de départ l'hyperboloïde de révolution.

D'autres lignes, sur une surface réglée qui se déforme, conservent la même signification géométrique, ce sont celles où le plan tangent fait avec le plan asymptote un angle constant. Ces lignes peuvent avoir un certain intérêt dans l'évaluation de l'aire de certaines portions de surfaces.

Considérons maintenant les trajectoires des génératrices sous un angle constant φ , la tangente et la normale géodésique à de telles courbes sont : si u est porté par la génératrice et v par la perpendiculaire du plan tangent,

$$\begin{aligned} t &= u \cos \varphi + v \sin \varphi, \\ g &= -u \sin \varphi + v \cos \varphi. \end{aligned}$$

Si nous cherchons à évaluer la variation de courbure et de torsion d'une telle courbe, nous emploierons la formule :

$$\Omega'_s = t \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\mathbf{I}}{\tau} + g \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{R}_m},$$

où le premier membre est un vecteur porté par la génératrice

$$xu = (u \cos \varphi + v \sin \varphi) \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\mathbf{I}}{\tau} + (-u \sin \varphi + v \cos \varphi) \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{R}_m}.$$

Faisons maintenant le produit scalaire par v , on en déduit :

$$\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\mathbf{I}}{\tau} + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{R}_m} = 0$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\sin \varphi}{\tau} + \frac{\cos \varphi}{\mathbf{R}_m} \right) = 0$$

et par suite

$$\frac{\sin \varphi}{\tau} + \frac{\cos \varphi}{\mathbf{R}_m}$$

est indépendant du temps.

Les calculs précédents sont encore valables si la courbe est quelconque, tracée sur $S(M)$, car φ est seulement fonction de l'arc. On en déduit que pour toute courbe invariablement liée à la surface,

$$\frac{\sin \varphi}{\tau} + \frac{\cos \varphi}{R_m} = f(s).$$

Nous voyons en particulier que pour une trajectoire orthogonale, $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$, τ est indépendant de la déformation de la surface. Si maintenant nous supposons qu'au cours du mouvement une courbe donnée devienne asymptotique ou ligne de courbure, nous saurons à ce moment calculer τ ou R_m dans cette nouvelle position.

Si nous désignons par $d\Omega$ l'angle de deux plans asymptotes infiniment voisins, nous nous proposons de rechercher la variation de cet élément en fonction du temps. Pour cela nous rappellerons que ces plans asymptotes sont parallèles aux plans osculateurs de $C(\Omega)$. Si nous désignons par $d\sigma$ et T l'élément d'arc, et le rayon de torsion, nous avons par définition :

$$d\Omega = \frac{d\sigma}{T},$$

d'où, en dérivant par rapport au temps :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} d\Omega = \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial \theta} d\sigma + d\sigma \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{T}.$$

Or nous avons montré que pour une courbe extensible :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{T} = -\Omega'_\sigma \cdot t - \frac{u}{T}$$

et comme

$$\Omega'_\sigma = t,$$

il en résulte

$$\frac{\partial}{\partial \theta} d\Omega = -d\sigma,$$

ce qui donne une signification plus tangible de l'arc de $C(\Omega)$.

Si nous voulons exprimer $d\Omega$ en fonction de l'allongement u de $C(\Omega)$, on obtient immédiatement :

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} d\Omega + u \frac{\partial}{\partial \theta} d\Omega = 0.$$

Un cas intéressant rencontré est celui où $C(\Omega)$ reste inextensible. Nous voyons que la surface s'enroule autour de chaque génératrice.

On peut généraliser certaines propriétés vues à propos des hélicoïdes réglés. Considérons en effet une surface $S(M)$ dont le cône asymptotique est de révolution autour d'une droite Δ . On constate que la ligne de striction est la courbe de contact du cylindre circonscrit parallèlement à Δ . En effet, si nous cherchons la direction du plan principal le long d'une génératrice donnée, comme ce plan contient la génératrice du cône et est perpendiculaire au plan asymptote, nous voyons qu'il contiendra Δ , ce que nous voulions montrer. Pour une telle surface, dont les hélicoïdes réglés sont des cas particuliers, une distribution de rotations possibles est définie par une hélice circulaire tracée sur un cylindre de révolution de génératrices parallèles à Δ , et coupant les génératrices du cylindre sous l'angle que font les génératrices de $S(M)$ avec Δ . Nous pouvons encore supposer que cette courbe $C(\Omega)$ se déplace avec conservation des longueurs; nous avons déjà montré que la courbe $C(\Omega)$ restait une hélice, et par suite la surface $S(M)$ reste telle que ses génératrices rectilignes font toutes le même angle avec une certaine direction. Nous pouvons supposer, en ajoutant au besoin un déplacement relatif convenable, que cette direction Δ est fixe dans le temps. Je dis que Δ aura une direction fixe dans le temps si l'origine des vecteurs Ω dont l'extrémité décrit $C(\Omega)$ est un point de l'axe de l'hélice. En effet, pour un plan principal, on peut décomposer la rotation en deux vecteurs: l'un normal et l'autre dans le plan tangent. Le premier a une grandeur constante, et le deuxième a comme direction l'axe du cylindre. Tous les plans principaux tournent donc du même angle autour de la normale, puis d'un angle variable autour de la parallèle à Δ . Le premier résultat montre qu'en chaque point de la ligne de striction chaque génératrice de $S(M)$ tourne du même angle par rapport à la normale au cylindre. Toutes les génératrices font donc le même angle avec l'ancien Δ ; il faut aussi remarquer que la deuxième rotation ne modifie pas cet angle.

Comme à un certain instant $C(\Omega)$ aura sa torsion nulle et sera par conséquent plane, on voit que toutes les surfaces précédentes proviennent de la déformation d'une certaine surface à plan directeur.

Si initialement on a un conoïde droit, sa ligne de striction est la directrice rectiligne et toutes les génératrices lui sont orthogonales. Dans un mouvement tel que nous le considérons, comme les génératrices resteront orthogonales à la ligne de striction, et feront ainsi toutes le même angle avec les génératrices du cylindre circonscrit suivant la ligne de striction, il en résulte que cette dernière ligne sera constamment une hélice.

Dans le cas général où la droite Δ conserve une direction fixe, puisque la composante normale de la rotation du plan tangent principal est constante en grandeur, cela signifie que, par rapport à Δ , toutes les génératrices et les tangentes à la ligne de striction tournent du même angle entre deux instants θ et $\theta + d\theta$. Si on évalue

la tangente de l'angle que fait une génératrice particulière avec un plan perpendiculaire à Δ , on trouve une fonction linéaire du temps, ce qui prouve qu'au bout d'un temps très long toutes les génératrices sont presque parallèles à Δ , et la surface est enroulée autour de ses génératrices.

Si nous donnons une surface réglée initiale, et que nous voulions avoir des surfaces applicables sur elle, il suffit de se donner une fonction $u(\beta, \theta)$ allongement de $C(\Omega)$, ainsi que la distribution initiale des rotations. En effet la torsion et la courbure de $C(\Omega)$ à un instant donné satisfont aux deux relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{R} + \frac{u}{R} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{T} + \frac{u}{T} + 1 = 0, \end{array} \right.$$

déjà établies. En laissant β constant on peut les considérer comme des équations différentielles linéaires du premier ordre. Leur solution est bien déterminée par la connaissance initiale de $C(\Omega)$ car nous avons de suite la courbure et la torsion initiale en chaque point. R et T sont connus en fonction du temps et nous savons que la courbe est définie à un déplacement et une symétrie près, ce qui nous suffit. La surface initiale étant connue, on détermine sa ligne de striction, l'angle de cette courbe avec chaque génératrice, et le paramètre de distribution. Nous allons voir, en calquant un raisonnement fait pour démontrer l'existence des solutions d'une équation différentielle, qu'on peut construire la surface à chaque instant. Sur la courbe $C(\Omega)$ marquons différents points suffisamment rapprochés. Le premier de ces points définit une génératrice de $S(M)$ dont la position peut être prise arbitrairement car la surface est définie à une translation près, la génératrice G_1 devant être parallèle à la tangente en Ω_1 . Le point Ω_2 donne la direction de la génératrice G_2 . Il nous reste à définir sa position par rapport à G_1 . Prenons arbitrairement sur G_1 un point qui nous servira de point central, soit A_1 . Le plan central en A_1 est perpendiculaire au plan osculateur en Ω_1 à $C(\Omega)$; il en est donc bien défini. Comme nous connaissons l'angle sous lequel la ligne de striction coupe G_2 cela nous donne deux droites issues de A_1 où peut se trouver A_2 . Choisissons l'une, arbitrairement pour G_1 et par continuité pour les génératrices suivantes. L'angle de G_1 et G_2 nous étant connu, ainsi que le paramètre de distribution, nous en déduisons la plus courte distance des deux génératrices, ce qui nous donne deux possibilités pour A_2 . Nous le choisissons arbitrairement pour la première génératrice et par continuité pour les suivantes. Nous opérons ainsi de proche en proche. Cet ensemble de génératrices en nombre fini ne représente pas la surface cherchée, mais une approximation. Il ne nous reste plus qu'à augmenter indéfiniment le nombre des points de division sur $C(\Omega)$ et de faire un passage à la limite sous certaines conditions relatives aux fonctions employées.

On peut présenter d'une autre manière le problème de la déformation des surfaces réglées. Nous désignons encore par t un vecteur unitaire porté par chaque génératrice. Si par un point O arbitraire nous menons un vecteur équipollent à t , nous obtenons une courbe sphérique $C(t)$. Nous pouvons considérer le lieu des supports des vecteurs t ; ils définissent un cône asymptotique de $S(M)$. L'élément d'arc de $C(t)$ est l'angle de deux génératrices infiniment voisines. D'après ce qui a été vu sur le déplacement d'une génératrice et des plans tangents le long, il en résulte que la génératrice infiniment voisine est invariablement entraînée, aux infiniment petits du second ordre près. On peut encore dire : le minimum de la distance de deux points de génératrices voisines ayant lieu pour la distance des deux droites, il en résulte que ce minimum est conservé comme toutes les longueurs de la surface. En nous reportant à la définition du paramètre de distribution, nous voyons que l'angle de deux génératrices infiniment voisines est indépendant du temps. Une autre façon d'arriver au même résultat consiste à se servir de la courbure $C(\Omega)$ qui donne :

$$d\varepsilon = \frac{d\sigma}{R};$$

par dérivation au rapport du temps, on trouve zéro au second membre.

Nous en déduisons que lorsque $S(M)$ se déforme, $C(t)$ conserve sa longueur, ou encore, le cône reste applicable sur lui-même. Nous sommes ainsi conduits à étudier le déplacement d'une courbe inextensible restant sur une même sphère. La courbe initiale pouvant venir s'appliquer sur n'importe quelle courbe donnée à l'avance, on voit qu'on peut donner arbitrairement la suite des cônes asymptotiques de $S(M)$. Le cas particulier où $C(t)$ se déforme en restant circulaire donne la déformation précédemment étudiée des surfaces à plan directeur, les génératrices faisant à chaque instant le même angle avec l'axe du cercle. Si, de plus, tous ces cercles ont même axe, c'est avec une direction fixe dans le temps que les génératrices font un angle constant. Il y a quand même une différence avec l'étude précédente où nous avons étudié un mouvement de surface, alors que maintenant nous étudions une suite cinématique de surfaces sans introduction d'accélération.

On voit que l'on peut s'imposer la suite des cônes directeurs dans le temps. Même, le mouvement peut avoir lieu avec un cône directeur qui glisse sur un cône fixe.

Application géométrique de la formule (8) ou (11). — L'une ou l'autre de ces formules qui revêtent la même forme est valable quelle que soit la valeur de V ou Ω pourvu qu'ils soient une vitesse ou une rotation compatible avec la surface considérée. Or on peut prendre l'un de ces deux vecteurs constants dans l'espace, cela correspond à un déplacement possible pour un corps solide donc possible aussi pour la

surface. Précisons auparavant que l'une ou l'autre de ces formules s'applique pour un morceau de surface d'un seul tenant, le nombre de frontières étant quelconque, le sens de parcours pour l'intégration se déduisant de celui de la normale transportée par continuité, ce qui exclut les surfaces à un seul côté.

Nous supposons, pour simplifier le langage, que Ω est un vecteur unitaire. Comme il est constant, on peut le faire sortir des signes d'intégration et écrire :

$$\begin{aligned} \iint \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \Omega \cdot m d\sigma &= \int (\Omega \wedge m) \cdot d\mathbf{M} = \int (m \wedge d\mathbf{M}) \cdot \Omega, \\ \Omega \cdot \iint \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) m d\sigma &= \Omega \cdot \int m \wedge d\mathbf{M}. \end{aligned}$$

La dernière formule prouve que les deux vecteurs multipliés scalairement par Ω ont la même projection sur Ω . Or ce dernier peut avoir sa direction arbitraire, on conclut donc à l'identité de ces deux vecteurs :

$$\int \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) m d\sigma = \int_{\mathcal{L}} m \wedge d\mathbf{M},$$

égalité géométrique, valable pour toute portion de surface, dans les conditions précisées plus haut.

En particulier, pour une surface fermée; à plan tangent continu :

$$\iint \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) m d\sigma = 0.$$

On voit aussi que sur toute surface minima, l'intégrale curviligne

$$\int m \wedge d\mathbf{M},$$

définit un potentiel vecteur.

Si nous prenons maintenant pour \mathcal{L} un contour infiniment petit entourant une aire $d\sigma$, on a l'égalité vectorielle :

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) m = \frac{1}{d\sigma} \int_{\mathcal{L}} m \wedge d\mathbf{M}.$$

Prenons enfin un contour fixe auquel on adjoint une développable circonscrite, et considérons différentes surfaces tangentes à cette multiplicité, l'intégrale curviligne est fixe et il en est donc de même de l'intégrale double qui est indépendante de la surface choisie.

Dans la relation (11), supposons maintenant que la surface ait un mouvement de rotation, on pourra prendre

$$V = \Omega \wedge OM,$$

donc

$$\iint \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) (\Omega \wedge OM) \cdot m d\sigma = - \int [m \wedge (\Omega \wedge OM)] \cdot dM$$

ou

$$\begin{aligned} \Omega \cdot \iint \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) (OM \wedge m) d\sigma &= - \int [\Omega(OM \cdot m) - OM(\Omega \cdot m)] \cdot dM, \\ &= \Omega \cdot \int m(OM \cdot dM) - (m \cdot OM) dM; \end{aligned}$$

cette relation doit être vraie quel que soit le vecteur fixe Ω

$$\iint_{\Sigma} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) (OM \wedge m) d\sigma = \int_{\mathcal{L}} m(OM \cdot dM) - \int_{\mathcal{L}} (m \cdot OM) dM,$$

égalité vectorielle vraie pour toute surface. Si, en particulier, nous avons une surface minima, les deux intégrales curvilignes sont égales.

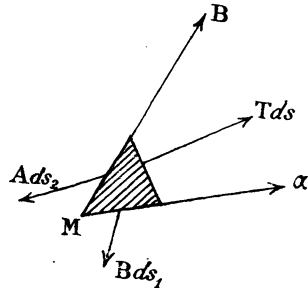
Si le contour d'intégration est sur une sphère de centre O, la première intégrale curviligne est nulle.

Si le contour d'intégration est la courbe de contact du cône circonscrit de sommet O, la deuxième intégrale est nulle.

On peut aussi combiner deux à trois de ces cas particuliers. Par exemple : Soit une surface fermée anallagmatique par rapport à une sphère réelle qui la partage en deux régions, comme les deux intégrales curvilignes sont nulles, il en résulte que sur chaque portion l'intégrale double est nulle.

Mouvement des surfaces déformables. — Soit une surface $S(M)$ rapportée à deux systèmes de lignes coordonnées α et β . Soit $\rho d\sigma$ la masse de l'élément d'aire $d\sigma$, $\rho F d\sigma$ la résultante des forces extérieures agissant sur cet élément. Découpons un morceau de la surface limité par le contour \mathcal{L} . Si nous enlevons le reste de la surface, il faudra introduire des réactions de tension $T ds$ sur chaque élément ds du contour. Nous écrirons que pendant le mouvement, à l'instant θ , le système de toutes les forces agissant sur le morceau de surface, y compris les forces d'inertie, est équivalent à zéro, quelle que soit la forme de L.

Études des réactions en un point. — Nous allons appliquer le théorème que nous venons de rappeler à un triangle infiniment petit dont les directions de deux côtés resteront fixes, la direction du troisième étant variable. Comme les forces directement appliquées sont du second ordre et les tensions du premier ordre, ces trois dernières doivent se faire équilibre. On en déduit immédiatement qu'elles sont dans un même plan. De plus, la direction du côté variable détermine la direction de la tension, car il est défini par ds_1 et ds_2 . Inversement, si on connaît la direction de la tension, on peut avoir ds_1 et ds_2 , donc la tangente au côté inconnu. Nous avons une correspondance homographique entre la direction de la tension et la tangente dont elle dépend. Nous préciserons plus loin cette homographie en montrant que c'est une involution.



Équations du mouvement. — 1° La somme géométrique de toutes les forces extérieures, les forces d'inertie comprises, est nulle.

2° La somme géométrique des moments de toutes ces forces est nulle.

$$\int \int_{\mathcal{Q}} \rho \left(F - \frac{\partial^2 M}{\partial \theta^2} \right) d\sigma + \int_{\mathcal{Q}} T ds = 0,$$

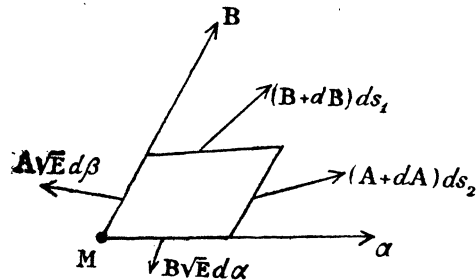
$$\int \int_{\mathcal{Q}} OM \wedge \rho \left(F - \frac{\partial^2 M}{\partial \theta^2} \right) d\sigma + \int_{\mathcal{Q}} OM \wedge T ds = 0.$$

Appliquons ces théorèmes au parallélogramme infiniment petit limité par les courbes α , β , $\alpha + d\alpha$, $\beta + d\beta$. Nous désignerons par A et B les tensions relatives

aux côtés α et β constant. La surface étant définie par son

$$ds^2 = E d\alpha^2 + 2F d\alpha d\beta + G d\beta^2,$$

$$ds_1 = \sqrt{E} d\alpha, \quad ds_2 = \sqrt{G} d\beta.$$



L'intégrale curviligne sera prise dans le sens direct du plan des $\alpha\beta$. L'élément de surface étant $H d\alpha d\beta$.

$$H \rho \left(F - \frac{\partial^2 M}{\partial \theta^2} \right) d\alpha d\beta + \frac{\partial}{\partial \alpha} (A\sqrt{G}) d\alpha d\beta - \frac{\partial}{\partial \beta} (B\sqrt{E}) d\alpha d\beta.$$

En supprimant le facteur $d\alpha d\beta$, le premier théorème donne :

$$H\rho\left(F - \frac{\partial^2 M}{\partial\theta^2}\right) + \frac{\partial}{\partial\alpha} A\sqrt{G} - \frac{\partial}{\partial\beta} B\sqrt{E} = 0.$$

En effectuant le même calcul sur la deuxième intégrale, on a

$$HOM \wedge \rho\left(F - \frac{\partial^2 M}{\partial\theta^2}\right) + \frac{\partial}{\partial\alpha} (OM \wedge A\sqrt{G}) - \frac{\partial}{\partial\beta} (OM \wedge B\sqrt{E}) = 0,$$

qui, en tenant compte de la première relation trouvée donne :

$$M'_\alpha \wedge A\sqrt{G} = M'_\beta \wedge B\sqrt{E}.$$

Ces équations peuvent s'obtenir à partir d'un contour de forme quelconque, en remarquant que la tension élémentaire en un point quelconque est

$$Tds = A\sqrt{G}d\beta + B\sqrt{E}d\alpha.$$

Nous écrivons donc :

$$\int \int_{\mathcal{C}} \rho\left(F - \frac{\partial^2 M}{\partial\theta^2}\right) d\sigma + \int_{\mathcal{C}} B\sqrt{E}d\alpha + A\sqrt{G}d\beta.$$

Puis, en transformant l'intégrale curviligne en intégrale double :

$$\iint \left[H\left(\rho - \frac{\partial^2 M}{\partial\theta^2}\right) + \frac{\partial}{\partial\alpha} A\sqrt{G} - \frac{\partial}{\partial\beta} B\sqrt{E} \right] d\alpha d\beta = 0.$$

Comme le résultat doit avoir lieu quelle que soit la forme du contour, par un raisonnement classique, la quantité sous le signe somme doit être nulle. Finalement, sans aucune hypothèse sur l'extensibilité de la surface, nous avons obtenu les équations :

$$\rho H\left(F - \frac{\partial^2 M}{\partial\theta^2}\right) + \frac{\partial}{\partial\alpha} A\sqrt{G} - \frac{\partial}{\partial\beta} B\sqrt{E} = 0,$$

$$M'_\alpha \wedge A\sqrt{G} = M'_\beta \wedge B\sqrt{E},$$

qui supposent seulement que la surface est sans raideur, car nous n'avons fait intervenir aucun couple dans les réactions distribuées sur le contour.

La dernière relation nous indique que le vecteur premier membre est perpendiculaire à M'_α , de même le deuxième membre est perpendiculaire à M'_β , ils sont

donc portés tous les deux par la normale; comme ce même vecteur est encore séparément perpendiculaire à A et B, on en déduit que ces deux derniers vecteurs sont dans le plan tangent. On voit facilement qu'il en est de même pour toute autre tension. Nous pouvons donc poser :

$$A\sqrt{G} = aM'_\alpha - bM'_\beta,$$

$$B\sqrt{E} = eM'_\alpha - cM'_\beta.$$

Si nous transportons dans cette même relation, on constate que $e = b$. Pour interpréter ce résultat, nous allons faire un changement de lignes coordonnées : Nous conserverons les lignes β variable, et nous prendrons pour nouvelles lignes α variable des courbes tangentes à A en chaque point. Avec ce système, nous aurons $b = 0$ et la tangente à B sera M'_β . L'homographie entre la direction des tensions en un point, et la tangente correspondante est donc réciproque, c'est une involution. Nous savons qu'une involution possède un couple de rayons rectangulaires; supposons qu'ils correspondent à A et B. Ceci nous permettra d'étudier plus complètement la distribution des tensions en un point.

Soit une autre direction définie par l'angle φ qu'elle fait avec M'_α . La tension élémentaire correspondante est

$$Tds = A ds \sin \varphi - B ds \cos \varphi,$$

dont les composantes sont :

$$x = A \sin \varphi,$$

$$y = -B \cos \varphi.$$

On a aussitôt le lieu de l'extrémité de ces tensions : c'est l'ellipse

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1,$$

d'axes A et B (qui sont les tensions maximum et minimum).

On vérifie facilement que la tension et la tangente sont conjuguées par rapport aux faisceaux des droites

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 0.$$

On doit remarquer à ce propos qu'une surface matérielle ne pourra peut-être pas supporter de réactions négatives, et que, par conséquent, toutes les tensions doivent

être positives, et en particulier A et B. Le faisceau des droites précédentes sera donc imaginaire. Mais il pourra se présenter dans certains calculs des tensions négatives que nous accepterons.

Lignes de tensions. — Nous appellerons ainsi les lignes (en général imaginaires) pour lesquelles la tension est dirigée dans la direction de la tangente homologue. Ces directions sont des rayons doubles de l'involution et ont pour équation :

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 0.$$

Si on suppose que les lignes de tension ont été prises pour lignes coordonnées, on trouve pour les tensions correspondantes

$$\begin{cases} a = c = 0, \\ A\sqrt{G} = -bM'_\beta, \\ B\sqrt{E} = bM'_\alpha, \end{cases}$$

et on constate qu'elles ont même valeur absolue.

Cas particuliers.]— Si $A = B$, toutes les tensions sont égales et perpendiculaires à la tangente dont elles dépendent.

Si $B = 0$ toutes les réactions sont portées par la même droite. Ce cas se présente sur le contour d'une surface, où la tension relative à la tangente est nulle, pour toute autre direction de tangente, la tension est tangente au contour.

Équations du mouvement d'une surface déformable :

$$(14) \quad \begin{cases} \rho H \left(F - \frac{\partial^2 M}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} A\sqrt{G} - \frac{\partial}{\partial \beta} B\sqrt{E} = 0, \\ A\sqrt{G} = aM'_\alpha - bM'_\beta, \\ B\sqrt{E} = bM'_\alpha - cM'_\beta, \\ M'_\alpha \cdot V'_\alpha = M'_\beta \cdot V'_\beta = 0, \\ M'_\alpha \cdot V'_\beta + M'_\beta \cdot V'_\alpha = 0. \end{cases}$$

Les trois dernières expriment que la surface est inextensible. Nous supposons implicitement qu'elles sont toujours rapportées au même système de lignes coordonnées quand le temps s'écoule.

Percussions. — Nous supposons que sur l'élément $d\sigma$ agit la percussion $\rho P d\sigma$, et que cet élément subit la variation de vitesse $W = V_1 - V_0$. Nous ferons l'hypothèse essentielle que, pendant la durée des percussions, la surface reste immobile et inextensible. On voit qu'avant et après le choc nous aurons :

$$\begin{aligned} M'_\alpha \cdot (V_0)'_\alpha &= 0, \dots \\ M'_\alpha \cdot (V_1)'_\alpha &= 0, \dots \end{aligned}$$

et en retranchant :

$$(15) \quad \begin{cases} M'_\alpha \cdot W'_\alpha = M'_\beta \cdot W'_\beta = 0, \\ M'_\alpha \cdot W'_\beta + M'_\beta \cdot W'_\alpha = 0. \end{cases}$$

On introduit les percussions de tension comme nous avons introduit les tensions. Nous les désignerons avec les mêmes notations que pour le mouvement. On pourrait refaire à leur propos la même étude. Leurs lois de variation en un point donné sont celles que nous avons vu pour les tensions : relation involutive entre la tangente et la percussion de tension.

Comme dans le cas des fils nous n'accepterons pas de percussions finies appliquées en un point de la surface ou sur une ligne car nous serions conduits, soit à une variation de vitesse infinie, donc discontinue; soit à des percussions de tensions infinies. Dans les deux cas nous aurions arrachement de la surface. En appliquant les théorèmes généraux sur les percussions et en suivant une méthode calquée sur celle que nous avons suivie dans le cas du mouvement, on trouve les équations des percussions et de la variation de vitesse. On peut aussi obtenir ces équations en intégrant les équations du mouvement pendant la durée du choc,

$$(16) \quad \begin{cases} H\rho(P - W) + \frac{\partial}{\partial \alpha} A\sqrt{G} - \frac{\partial}{\partial \beta} B\sqrt{E} = 0, \\ A\sqrt{G} = aM'_\alpha - bM'_\beta, \\ B\sqrt{E} = bM'_\alpha - cM'_\beta. \end{cases}$$

Nous avons 6 équations différentielles entre 6 inconnues : a, b, c et les trois composantes de la variation de vitesse.

Si nous voulons suivre une méthode calquée sur celle que nous avons vu à propos des fils en éliminant la variation de vitesse, on forme trois équations aux dérivées partielles en a, b, c , facile à écrire en principe, mais d'une grande complication. Si on veut au contraire commencer par éliminer les percussions de tension, on retrouve les équations de compatibilité pour les vitesses.

On peut remarquer que la première équation vectorielle (16) fournit deux équations

ations aux dérivées partielles et une équation en termes finis. Il suffit pour cela de faire le produit scalaire par un vecteur normal :

$$H\varphi(P-W) \cdot N - \sqrt{GA} \cdot N'_x + \sqrt{EB} \cdot N'_y = 0.$$

Percussions sur un morceau de plan complètement libre. — Cet exemple particulièrement simple va donner une idée de la difficulté du problème et des circonstances exceptionnelles qui peuvent se présenter.

Nous prendrons des axes Oxy dans le plan considéré. Soient p, q, r les composantes de la percussion directement appliquée, u, v, w les composantes de la variation de vitesse. Les équations du problème sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(P-W) + \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y} = 0, \\ A = aM'_x - bM'_y, \\ B = bM'_x - cM'_y, \\ M'_x \cdot W'_x = M'_y \cdot W'_y = 0, \\ M'_x \cdot W'_y + M'_y \cdot W'_x = 0, \end{array} \right.$$

M'_x et M'_y sont des vecteurs unitaires portés par Ox et Oy . u, v, w, a, b, c sont des solutions du système

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(p-u) + a'_x - b'_y = 0, \\ \varphi(q-v) - b'_x + c'_y = 0, \\ \varphi(r-w) = 0, \\ u'_x = v'_y = 0, \\ u'_y + v'_x = 0. \end{array} \right.$$

Les trois dernières donnent immédiatement

$$u = g(y), \quad v = f(x), \quad f'(x) + g'(y) = 0$$

et en donnant des noms convenables aux constantes :

$$u = -\omega(x - x_0), \quad v = \omega(y - y_0).$$

Cela signifie que pour un morceau de plan parfaitement souple, dans sa position plane, la vitesse normale peut être arbitraire, mais la projection de la vitesse sur le plan tangent est une rotation de vitesse angulaire ω autour du point x_0, y_0 . On peut

déterminer immédiatement les trois constantes en appliquant le théorème de la variation de quantité de mouvement suivant Oz

$$\omega \int_s \int_s \rho(x^2 + y^2) dx dy = \int_s \int_s \rho(xq - yp) dx dy$$

et le théorème sur la variation de vitesse du centre de gravité projetée sur le plan des xy

$$V_G \int_s \int_s \rho dx dy = \int_s \int_s P_{xy} dx dy.$$

Si nous nous bornons à la recherche de la variation de vitesse, le problème est terminé car nous connaissons la variation de vitesse sur le plan des xy et la troisième équation fournit la variation de la vitesse suivant la normale. Nous allons maintenant voir s'il est possible de déterminer les percussions de tension, c'est-à-dire les trois nombres a, b, c . Nous avons pour cela seulement deux équations :

$$\begin{aligned} a'_x - b'_y &= \rho \omega (x - x_0) - \rho p(x, y), \\ c'_y - b'_x &= -\rho \omega (y - y_0) - \rho q(x, y). \end{aligned}$$

Soit a_0, b_0, c_0 une solution de ce système. Essayons de voir si elle est unique, nous poserons pour cela :

$$a = a_0 + \alpha, \quad b = b_0 + \beta, \quad c = c_0 + \gamma,$$

α, β, γ satisfèront au système

$$\begin{aligned} \alpha'_x - \beta'_y &= 0, \\ \gamma'_y - \beta'_x &= 0. \end{aligned}$$

La solution a, b, c est telle que sur le contour, les percussions de tension lui sont tangentes, ou exceptionnellement nulles. Soit $\xi(t)$ et $\eta(t)$ les coordonnées d'un point du contour, les composantes de A et B sont $a, -b$ et $b, -c$; sur le contour on doit avoir

$$\frac{a}{d\xi} = \frac{-b}{d\eta}, \quad \frac{b}{d\xi} = \frac{-c}{d\eta}$$

ou encore

$$\frac{a}{d\xi^2} = \frac{b}{-d\xi d\eta} = \frac{c}{d\eta^2}.$$

Comme ces relations sont linéaires, α , β , γ doivent aussi y satisfaire.

Posons $\beta = \varphi''_{xy}$, on en déduit $\alpha = \varphi''_{y^2}$ à une fonction additive de y près, fonction que nous pouvons supposer nulle, car cela ne modifie pas β . On peut de même prendre $\gamma = \varphi''_{x^2}$ à une fonction additive de x près que l'on peut encore supposer nulle. On peut aussi dire : la première équation en α , β , γ permet de poser

$$\alpha = \gamma'_y, \quad \beta = \gamma'_x,$$

La deuxième nous donne :

$$\beta = \psi'_y, \quad \gamma = \psi'_x;$$

par comparaison :

$$\beta = \psi'_y = \gamma'_x, \quad \text{donc} \quad \gamma = \varphi'_y, \quad \psi = \varphi'_x$$

et on arrive bien au résultat annoncé. φ sera défini à la fonction additive $Ax + By + C$ près.

Sur le contour nous aurons :

$$\frac{\alpha}{\xi'^2} = \frac{\beta}{-\xi'\eta'} = \frac{\gamma}{\eta'^2} = \delta(t),$$

ce qui nous permet d'évaluer

$$\begin{aligned} d\varphi'_x &= \varphi''_{x^2}d\xi + \varphi''_{xy}d\eta = \delta(\eta'^2d\xi - \xi'\eta'd\eta), \\ d\varphi'_x &= \delta\xi'(\eta'd\xi - \xi'd\eta), \\ d\varphi'_y &= \delta\eta'(\xi'd\eta - \eta'd\xi), \end{aligned}$$

or les parenthèses sont nulles puisque nous sommes sur le contour; les deux fonctions φ'_x et φ'_y sont donc constantes sur le contour, soient A et B leurs valeurs. Sans modifier α , β , γ on peut retrancher $Ax + By$ à φ ce qui nous permet de supposer que φ'_x et φ'_y sont nuls sur le contour. Par un raisonnement semblable on voit que $d\varphi$ est nulle et que φ peut être supposé nul sur le contour. Traduisons en langage géométrique. La surface Σ , lieu du point $z = \varphi(x, y)$, est tangente au plan xOy tout le long de la projection du contour, puisqu'en ces points la fonction est nulle ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres. En ces points nous connaissons donc l'indicatrice qui est parabolique, comme il faut s'y attendre. En effet les tangentes asymptotiques sont définies par :

$$\begin{aligned} \varphi''_{x^2}dx^2 - 2\varphi''_{xy}dxdy + \varphi''_{y^2}dy^2 &= 0, \\ \delta(\eta'^2dx^2 - 2\xi'\eta'dxdy + \xi'^2dy^2) &= 0 \end{aligned}$$

ou

$$(\eta'd\xi - \xi'd\eta)^2 = 0, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d\eta}{d\xi}.$$

Nous trouvons une direction double, celle de la tangente au contour. Réciproquement, prenons une surface se raccordant au plan des xy le long de la projection du contour, et qui soit régulière ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres, elle satisfait à toutes les conditions que nous avons imposées, et ses dérivées partielles peuvent être prises pour γ , β , α respectivement. Il ne nous paraît pas possible de déterminer d'une manière plus précise les percussions de tension qui dépendent d'une fonction de deux variables à peu près arbitraires à moins de faire intervenir la théorie de l'élasticité. On peut remarquer que les génératrices rectilignes qui, avant ou après le choc se déplaçaient d'une manière continue par rapport aux éléments matériels de la surface, subissent, au moment du choc, une variation brusque de direction.

Existence d'une solution pour le système (16). — Le problème particulier traité nous amène à nous demander si l'ensemble des systèmes (15) et (16) possède une solution unique et bien déterminée quand on suppose connue la forme de la surface, son contour, la distribution des percussions extérieures, et que l'on sait que sur le contour les percussions de tension lui sont tangentes, et qu'elles sont régulières sur toute la surface.

Si, par une méthode quelconque, nous connaissons les percussions de tension sur toute la surface, le système (16) fournit les variations de vitesse. Nous allons rechercher maintenant s'il est possible de déterminer les percussions de tension connaissant les variations de vitesse, exactement comme dans le cas du plan. D'une manière précise nous allons d'abord rechercher si la solution est unique. D'après le caractère linéaire des équations, s'il existe deux solutions, leur différence satisfait au même système où on a remplacé les vitesses et les percussions extérieures par zéro. En d'autres termes, nous voulons voir si l'absence de percussions extérieures et de variation de vitesse conduit à la seule solution identiquement nulle bien évidente.

Pour avoir des calculs plus simples, nous prendrons comme paramètres les coordonnées x et y de la projection de M sur le plan des xy . Nous avons

$$ds^2 = (1 + p^2)dx^2 + 2pq dx dy + (1 + q^2)dy^2, \quad H^2 = 1 + p^2 + q^2$$

et les équations s'écrivent avec ces paramètres :

$$\begin{aligned} H \rho (P - W) + \frac{\partial}{\partial x} (A \sqrt{1 + q^2}) - \frac{\partial}{\partial y} (B \sqrt{1 + p^2}) &= 0, \\ A \sqrt{1 + q^2} &= aM'_x - bM'_y, \\ B \sqrt{1 + p^2} &= bM'_x - cM'_y, \\ M'_x(1, 0, p), & \quad M'_y(0, 1, q) \end{aligned}$$

ou

$$(16') \quad \begin{aligned} H\varphi(p-u) + a'_x - b'_y &= 0, \\ H\varphi(q-v) + c'_y - b'_x &= 0, \\ H\varphi(r-w) + \frac{\partial}{\partial x}(ap-bq) - \frac{\partial}{\partial y}(bp-cq) &= 0. \end{aligned}$$

En désignant cette fois par a, b, c la différence de deux solutions elles satisfont au système :

$$\left\{ \begin{aligned} a'_x - b'_y &= 0, \\ c'_y - b'_x &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x}(ap-bq) - \frac{\partial}{\partial y}(bp-cq) &= 0, \end{aligned} \right.$$

dont la dernière se simplifie, ce qui est conforme à une remarque déjà faite. Elle s'écrit

$$ra - 2sb + tc = 0.$$

Les deux premières équations nous permettent de poser

$$a = \varphi''_{y^2}, \quad b = \varphi''_{xy}, \quad c = \varphi''_{x^2},$$

en répétant un raisonnement fait dans le cas des percussions sur un morceau de plan. φ sera donc solution de l'équation :

$$(17) \quad t\varphi''_{x^2} - 2s\varphi''_{xy} + r\varphi''_{y^2} = 0$$

et sur le contour nous devons avoir :

$$\frac{a}{d\xi^2} = \frac{b}{-d\xi d\eta} = \frac{c}{d\eta^2} = \frac{ra - 2sb + bc}{rd\xi^2 - 2sd\xi d\eta + td\eta^2}.$$

Or le dernier numérateur est nul. Supposons que le contour ne comporte aucun arc d'asymptotique. (Le contour est formé d'un nombre quelconque d'arcs possédant une tangente où les conditions précédentes sont réalisées; en un point anguleux, on voit aisément que a, b, c sont nuls avec des percussions extérieures). Comme le dénominateur de la dernière fraction est différent de zéro, on en déduit que les dérivées secondes de φ sont toutes nulles sur le contour. Comme dans le cas du morceau de plan on voit que φ est défini à la fonction additive $Ax + By + C$ près. On démontre de même que φ'_x, φ'_y et φ peuvent être supposés nuls sur le contour en tout point où la tangente n'est pas asymptotique. Nous allons montrer que dans ces

conditions φ est identiquement nulle. Nous ferons nos calculs sans supposer que r, s, t sont des dérivées secondes, hypothèse que nous n'utiliserons qu'en dernier lieu. Soit $u(x, y)$ une fonction arbitraire, définie dans le même domaine que φ , continue ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres. En intégrant sur la surface $S(M)$ limitée à son contour \mathcal{L} l'équation à laquelle satisfait φ , nous aurons :

$$\int \int_s u(t\varphi''_{x^2} - 2s\varphi''_{xy} + r\varphi''_{y^2}) dx dy = 0,$$

que l'on peut mettre sous la forme :

$$\int \int_s \left[\left(tu \frac{\partial}{\partial x} \varphi'_x - su \frac{\partial}{\partial x} \varphi'_y \right) - \left(su \frac{\partial}{\partial y} \varphi'_x - ru \frac{\partial}{\partial y} \varphi'_y \right) \right] dx dy = 0.$$

Si nous intégrons par parties, nous trouverons une intégrale curviligne qui sera nulle car elle contient φ'_x et φ'_y nuls sur le contour. Il reste :

$$\int \int_s \left[\varphi'_x \left(\frac{\partial}{\partial x} tu - \frac{\partial}{\partial y} su \right) - \varphi'_y \left(\frac{\partial}{\partial x} su - \frac{\partial}{\partial y} ru \right) \right] dx dy = 0.$$

Nous allons intégrer une deuxième fois par partie. L'intégrale curviligne sera nulle car elle contiendra φ nul sur le contour. Il nous restera :

$$\int \int_s \varphi \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} tu - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} su + \frac{\partial^2}{\partial y^2} ru \right] dx dy = 0,$$

qui doit avoir lieu quelle que soit la fonction u . Si u, r, s, t sont des fonctions quelconques, le crochet s'écrit :

$$\left[t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2s \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + r \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + 2 \left[\frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial t}{\partial x} - \frac{\partial s}{\partial x} \right) - \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial r}{\partial y} \right) \right] + u \left[\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} \right].$$

Dans le cas actuel, seule la première partie subsiste. Dans tous les cas, le crochet est une fonction arbitraire de deux variables, et par suite φ est identiquement nul.

Nous avons montré ceci : Si les percussions extérieures sont données, ainsi que les variations de vitesse, il existe au plus une distribution de percussions de tension, à condition que le contour ne comporte aucun arc d'asymptotique. En d'autres termes, une distribution de percussions extérieures étant donnée, si nous prenons arbitrairement une distribution de vitesse, le raisonnement prouve qu'il y a au plus une distribution de percussions intérieures. Nous allons essayer de montrer que si elle est effectivement arbitraire, il est impossible de déterminer les percussions de tension.

Regardons maintenant comment il est possible de déterminer a, b, c sur le con-

tour en supposant connue la variation de vitesse. a, b, c sont déterminés par des équations de la forme :

$$\begin{aligned} a'_x &= b'_y - \gamma'_x, \\ c'_y &= b'_x - \psi'_y, \\ ra - 2sb + tc &= \theta(x, y), \end{aligned}$$

où nous choisirons pour γ et ψ des fonctions bien déterminées. On peut voir comme précédemment que l'on peut poser

$$\begin{aligned} a &= \alpha - \gamma, & c &= \gamma - \psi, \\ a'_x &= b'_y, & \gamma'_y &= b'_x, \\ \left\{ \begin{array}{l} a + \gamma &= \varphi''_{yy}, \\ b &= \varphi''_{xy}, \\ c + \psi &= \varphi''_{xx}, \end{array} \right. \end{aligned}$$

φ étant déterminé sans ambiguïté. φ est alors solution d'une équation de la forme :

$$t\varphi''_{xx} - 2s\varphi''_{xy} + r\varphi''_{yy} = r\gamma + t\psi + \theta.$$

Nous pouvons donner une signification géométrique à son second membre, en nous servant de l'équation que l'on obtient en faisant le produit scalaire par le vecteur normal de l'équation des percussions. Nous avons mis cette équation sous la forme :

$$H\varphi(P-W).N = \sqrt{GA}.N'_\alpha - \sqrt{EB}.N'_\beta,$$

qui devient en introduisant les composantes des tensions

$$H\varphi(P-W).N = (aM'_\alpha - bM'_\beta).N'_\alpha - (bM'_\alpha - cM'_\beta).N'_\beta$$

et, en dérivant les relations

$$M'_\alpha.N = M'_\beta.N = 0,$$

on a finalement :

$$\begin{aligned} aN.M''_{\alpha\alpha} - 2bN.M''_{\alpha\beta} + cN.M''_{\beta\beta} &= -H\varphi(P-W).N, \\ (17) \quad Da - 2D'b + D''c &= -H^2\varphi(P_m - W_m), \end{aligned}$$

qui avec nos variables actuelles s'écrit :

$$(17') \quad ra - 2sb + tc = -(1 + p^2 + q^2)\varphi(P_m - W_m).$$

Si le contour ne comporte aucun arc d'asymptotique, nous connaissons ainsi a, b, c sur le contour, ou les trois dérivées secondes de φ , grâce aux formules :

$$(18) \quad \frac{a}{d\xi^2} = \frac{b}{-d\xi d\eta} = \frac{c}{d\eta^2} = \frac{ra - 2sb + tc}{rd\xi^2 + 2sd\xi d\eta + td\eta^2} = \frac{-(1+p^2+q^2)\rho(P_m - W_m)}{rd\xi^2 + 2sd\xi d\eta + td\eta^2}.$$

Puis, comme

$$d\varphi'_x = \varphi''_{xx}d\xi + \varphi''_{xy}d\eta, \quad d\varphi'_y = \varphi''_{xy}d\xi + \varphi''_{yy}d\eta, \quad d\varphi = \varphi'_x d\xi + \varphi'_y d\eta,$$

on en déduit la valeur de φ sur le contour. Relativement à l'équation (17') nous sommes ramenés à un problème semblable à celui de l'équation de Laplace : trouver une solution prenant des valeurs données sur le contour. Suivant la valeur des coefficients, le problème ainsi posé n'est pas toujours bien déterminé; mais nous avons des renseignements supplémentaires car nous connaissons aussi les dérivées du premier ordre. Si, à partir de ces données, on cherche à calculer les dérivées secondes, on retrouve les valeurs de départ de a, b, c . Connaissant donc φ et ses deux premières dérivées, c'est-à-dire une multiplicité M_1 , d'après le théorème de Cauchy, il existe une solution et une seule se raccordant à la multiplicité. Or, en général, une telle solution n'est pas régulière à l'intérieur du contour. Pour qu'elle le soit, il nous faudra donc écrire certaine condition pour la multiplicité, c'est-à-dire, finalement, pour la vitesse qui ne peut donc être choisie arbitrairement. Cette condition nous l'obtiendrons en suivant une marche analogue à celle qui fournit l'identité de Green pour l'équation de Laplace. Nous poserons

$$\Delta\varphi = t\varphi''_{xx} - 2s\varphi''_{xy} + r\varphi''_{yy}$$

et nous calculerons $\int \int_{\Sigma} \psi \Delta\varphi dx dy$ sur une surface quelconque en suivant pas à pas le calcul fait à propos des percussions dans le plan. Par des intégrations par partie, nous écrirons successivement :

$$\begin{aligned} I &= \int \int_{\Sigma} \psi \Delta\varphi dx dy = \int \int \psi \left[\left(t \frac{\partial}{\partial x} \varphi'_x - s \frac{\partial}{\partial x} \varphi'_y \right) - \left(s \frac{\partial}{\partial y} \varphi'_x - r \frac{\partial}{\partial y} \varphi'_y \right) \right] dx dy \\ &= \int \psi (s\varphi'_x - r\varphi'_y) dx + \psi (t\varphi'_x - s\varphi'_y) dy - \int \int \left[\varphi'_x \left(\frac{\partial}{\partial x} \psi t - \frac{\partial}{\partial y} \psi s \right) - \varphi'_y \left(\frac{\partial}{\partial x} \psi s - \frac{\partial}{\partial y} \psi r \right) \right] dx dy = I_1 - I'_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I'_1 &= \int \varphi \left(\frac{\partial}{\partial x} \psi s - \frac{\partial}{\partial y} \psi r \right) dx + \varphi \left(\frac{\partial}{\partial x} \psi t - \frac{\partial}{\partial y} \psi s \right) dy - \int \int \varphi \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi t - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \psi s + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi r \right) dx dy \\ &= \int \varphi (s\psi'_x - r\psi'_y) dx + \varphi (t\psi'_x - s\psi'_y) dy - \int \int \varphi \Delta\psi dx dy = I_2 - I', \end{aligned}$$

$$I = I_1 - I_2 + I';$$

donc

$$\begin{aligned} \iint (\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi) dx dy &= \int [\psi (s \varphi'_x - r \varphi'_y) - \varphi (s \psi'_x - r \psi'_y)] dx + [\psi (t \varphi'_x - s \varphi'_y) - \varphi (t \psi'_x - s \psi'_y)] dy \\ &= \int [r(\varphi \psi'_y - \psi \varphi'_y) - s(\varphi \psi'_x - \psi \varphi'_x)] dx + [s(\varphi \psi'_y - \psi \varphi'_y) - t(\varphi \psi'_x - \psi \varphi'_x)] dy \\ &= \int (\varphi \psi'_y - \psi \varphi'_y)(r dx + s dy) - (\varphi \psi'_x - \psi \varphi'_x)(s dx + t dy), \end{aligned}$$

$$(19) \quad \iint_{\Sigma} (\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi) dx dy = \int_c (\varphi \psi'_y - \psi \varphi'_y) dp - (\varphi \psi'_x - \psi \varphi'_x) dq.$$

Cette relation est valable quelles que soient les fonctions φ et ψ , pourvu que r, s, t soient les dérivées secondes d'une même fonction. Supposons que φ soit solution de

$$(17) \quad \Delta \varphi = \omega(x, y), \quad \omega = -(1 + p^2 + q^2) \rho (P_m - w_m)$$

et que ψ soit une solution de $\Delta \psi = 0$, la relation devient

$$\iint_{\Sigma} \omega \psi dx dy = \int_c \dots,$$

où φ ne figure plus que par ses valeurs et celles de ses dérivées premières prises sur le contour. φ intervient par ses valeurs prises à l'intérieur du contour. Si en particulier le domaine choisi est la portion de surface considérée, on a :

$$(20) \quad \iint_{\Sigma} \omega \psi dx dy = \int_{\mathcal{C}} (\varphi \psi'_y - \psi \varphi'_y) dp - (\varphi \psi'_x - \psi \varphi'_x) dq,$$

ce qui montre que $\varphi, \varphi'_x, \varphi'_y$ ne peuvent être choisis arbitrairement sur le contour, ω et ψ étant donnés.

Voyons maintenant comment on calcule $\varphi, \varphi'_x, \varphi'_y$ sur le contour. La suite d'égalités (18) donne a, b, c sur le contour; il en résulte la connaissance de $\varphi''_{x^2}, \varphi''_{xy}, \varphi''_{y^2}$, d'où φ'_x, φ'_y et φ sur ce même contour.

La relation (20) fait donc intervenir ψ, χ, θ c'est-à-dire les trois composantes de la vitesse. Elle doit être vérifiée pour toute solution de $\Delta \psi = 0$ qui dépend de deux fonctions arbitraires d'une variable. Si on rapproche ce résultat du fait que la vitesse est déterminée quand elle est connue sur le contour, et dépend donc de deux fonctions arbitraires d'une variable, il semble que le problème est possible et bien déterminé.

Cas où le contour comporte des arcs d'asymptotique. — Reportons-nous au groupe de relations (18) permettant d'avoir les composantes des percussions de tension sur le contour. Supposons qu'au point considéré la tangente soit asymptotique, qu'il s'agisse d'un point isolé du contour ou d'un point d'une asymptotique. Deux cas peuvent être possibles pour nous : ou bien $W_m = P_m$, les tensions ne sont pas déterminées complètement et la relation qui manque est remplacée par la précédente; ou bien ce numérateur est différent de zéro, et les tensions sont infinies au point considéré. Si ce dernier cas est possible, comme le mouvement peut être considéré comme la limite d'une succession de percussions suffisamment rapprochées, les tensions seront infinies sur tout arc d'asymptotique du contour, et en tout point du contour où la tangente est asymptotique. Pratiquement, si au cours du mouvement, une tangente devient asymptotique, en ce point la surface va se déchirer. Ceci se produit, non seulement pour les surfaces à courbures opposées, mais aussi pour les surfaces à courbure totale positive, au moment où en un point du contour l'un des rayons de courbure devient infini et l'autre nul, comme cela se produit par exemple dans certaines déformations d'un morceau de sphère.

Manières de réaliser pratiquement une surface déformable. — Nous indiquerons d'abord une méthode qui permet d'en construire avec une certaine approximation, basée sur la réalisation matérielle approchée d'un fil à l'aide de petites barres, attachées bout à bout. Cette méthode qui, du point de vue analytique, revient à remplacer l'arc par la corde donne d'une manière intuitive des résultats pour une courbe grâce à un passage à la limite. Les résultats ainsi trouvés ne sont pas probants, car nous avons mis en évidence certaines discontinuités dans le mouvement des fils, ce qui indique que nous devons nous méfier de certains passages à la limite. Notre courbe, remplacée par ce système de barres de même densité que la courbe, donnera une approximation d'autant meilleure que la plus grande des barres sera plus petite. Nous allons remplacer de même la surface déformable par un système de barres. Supposons tracés deux systèmes de lignes coordonnées, ou plus exactement deux familles de ces lignes suffisamment rapprochées. Chacune de ces lignes sera remplacée par une suite de barres dont les extrémités seront des points de croisement consécutifs des deux familles. Mais il est manifeste qu'un tel système de barres aura plus de degrés de liberté que ceux voulus, car un petit quadrilatère limité à quatre barres ne sera pas indéformable, et la ligne passant par une diagonale ne sera pas de longueur constante. Il nous faut donc une surface découpée en triangles et non en parallélogrammes. Nous voyons immédiatement une façon de procéder en remplaçant une des familles de diagonales de nos quadrilatères par des petites barres.

Nous allons rechercher comment il faut découper la surface en triangles de manière que, par chaque sommet, il passe le même nombre de triangles. Nous supposons que le nombre de sommets intérieurs est grand, par rapport au nombre de

sommets situés sur le contour. Pour simplifier, nous considérerons un contour formé d'une seule ligne. Il nous est toujours possible de supposer que par une déformation continue, non astreinte à conserver les longueurs, nous avons amené tous les triangles à être dans un même plan, et nous supposerons de plus que les côtés ont été rendus rectilignes. Soient F , S , A , le nombre de triangles, de sommets et de côtés. Entre ces trois nombres nous avons la relation :

$$F - A + S = 1.$$

Commençons par faire un raisonnement rapide, en introduisant le nombre q de barres aboutissant en un sommet intérieur. Nous avons donc environ $\frac{Sq}{2}$ barres, l'erreur provenant des sommets sur le contour. Nous aurons aussi $\frac{Sq}{3}$ triangles environ, car un triangle a trois sommets. Comme sensiblement :

$$F - A + S \approx S \left(1 - \frac{q}{2} + \frac{q}{3} \right) = S \left(1 - \frac{q}{6} \right),$$

on en déduit une valeur approchée de

$$S \left(1 - \frac{q}{6} \right),$$

qui est petit par rapport à S . Nous sommes conduits à prendre $q = 6$. Nous obtenons une figure analogue au pavage du plan en triangles équilatéraux.

Regardons d'une manière plus précise les quantités négligées. La somme des angles de tous les triangles est $2F$ droits, puisque nous avons F triangles. Autour de chaque sommet, nous avons 4 droits. Or la quantité $4S - 2F$ représente la somme des angles extérieurs du polygone frontière, c'est-à-dire

$$4m - 2(m - 2) = (2m + 4) \text{ droits,}$$

si m est le nombre des barres frontières. Or notre hypothèse sur le grand nombre de sommets revient à supposer que S est grand comme m^2 . Le rapport $\frac{S}{F}$ a donc comme partie principale 2. Un raisonnement semblable prouverait que $\frac{S}{A}$ a comme partie principale 3. En transportant dans la formule du début, on voit bien que le second membre n'est pas du même ordre de grandeur que les termes du premier.

Un tel mode de découpage peut servir à la définition de l'aire d'une surface, comme limite de la somme des aires de ces triangles.

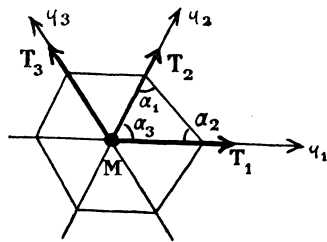
Autre méthode. — Imaginons reliée matériellement sous forme d'un solide la surface sur laquelle sera applicable la surface souple que nous voulons construire. Nous traçons trois familles de lignes coordonnées convenablement espacées qui réaliseront nos petits triangles du paragraphe précédent. Fixons des fils parfaitement souples et inextensibles sur chaque fil des trois systèmes précédents. Il ne restera plus qu'à noyer le tout dans une mince pellicule de caoutchouc, pour avoir une surface inextensible et souple. Le rôle du caoutchouc est d'empêcher tout glissement des fils à leur point de croisée. On pourrait se contenter de deux familles de fils, à condition de ne pas exercer d'efforts de traction sur la surface. Il est bien évident que, pour une surface de caoutchouc réalisée de cette deuxième manière, les efforts pour la rouler sont moindres que ceux qu'il faut faire pour que les angles varient aux croisements des fils. Si la surface ne doit pas subir de gros effort on pourra la réaliser de cette deuxième manière qui est plus simple.

Équations que l'on peut obtenir pour le mouvement d'une surface déformable considérée comme limite du système de barres dont nous avons parlé plus haut. Supposons que u_1, u_2, u_3 définissent nos trois systèmes de lignes coordonnées; u_3 par exemple est une fonction connue de u_1 et u_2 . Pour avoir des équations simples, nous supposons que notre système de barres est sans masse, mais que les masses sont concentrées aux points de croisée des fils.

Écrivons qu'il y a équilibre entre toutes les forces qui agissent sur un sommet M, y compris les tensions et les forces d'inertie.

$$\delta T_1 + \delta T_2 + \delta T_3 + m(F - \Gamma) = 0.$$

On remarque que les δT sont du premier ordre par rapport aux longueurs, tandis que la masse est du second, comme étant proportionnelle à la surface de l'hexagone dont M est le centre. Nous obtiendrons toutes les équations désirées en écrivant le développement de δT jusqu'au second ordre. Les éléments du premier ordre donnent



$$\frac{\partial T_1}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial T_2}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial T_3}{\partial u_3} du_3 = 0.$$

Or les du ne sont pas indépendants, car lorsqu'ils tendront vers zéro, le triangle qu'ils forment restera semblable à lui-même, donc :

$$\frac{\sqrt{E_1} du_1}{\sin \alpha_1} = \frac{\sqrt{E_2} du_2}{\sin \alpha_2} = \frac{\sqrt{E_3} du_3}{\sin \alpha_3} = 2R,$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial u_1} \frac{\sin \alpha_1}{\sqrt{E_1}} + \frac{\partial T_2}{\partial u_2} \frac{\sin \alpha_2}{\sqrt{E_2}} + \frac{\partial T_3}{\partial u_3} \frac{\sin \alpha_3}{\sqrt{E_3}} = 0.$$

Les éléments du second ordre donnent de même

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial u_1^2} \frac{\sin^2 \alpha_1}{E_1} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial u_2^2} \frac{\sin^2 \alpha_2}{E_2} + \frac{\partial^2 T_3}{\partial u_3^2} \frac{\sin^2 \alpha_3}{E_3} = \frac{m}{4R^2} (\Gamma - F).$$

Or $m = 3\rho S$, S surface du triangle formé par les trois éléments d'arc, puisque la masse représente le demi hexagone entourant M .

$$\frac{m}{4R^2} = \rho \frac{3}{4} \frac{S}{R^2}.$$

Or dans le triangle

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} 4R^2 \sin A \sin B \sin C,$$

$$\frac{m}{4R^2} = \frac{3\rho}{2} \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3.$$

D'où le système d'équations

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} S \frac{\partial T}{\partial u} \frac{\sin \alpha}{\sqrt{E}} = 0, \\ S \frac{\partial^2 T}{\partial u^2} \frac{\sin^2 \alpha}{E} = \frac{3\rho}{2} \left(\frac{\partial^2 M}{\partial \theta^2} - F \right) \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3, \\ dV \cdot dM = 0, \end{array} \right.$$

la dernière équation représentant la condition de compatibilité pour les vitesses. Les sommations sont étendues à u_1, u_2, u_3 .

Précisons que dans ces équations les vecteurs T sont tangents à la ligne coordonnée dont ils dépendent. En effet, en se reportant à la manière dont ils ont été introduits, chacun d'eux est une réaction portant sur une barre sans masse. Cette barre ne subissant que deux telles réactions, elles sont donc portées par la droite qui les joint. Du système d'équations précédent on ne peut espérer passer au système (14) car les forces introduites n'ont pas la même signification mécanique.

Mouvement et percussions des surfaces qui restent constamment réglées. —

Une manière de réaliser matériellement de telles surfaces consiste à remplacer dans l'une des constructions données précédemment les fils ou chaînons constituant les

lignes figurant les génératrices par des tiges rigides. De cette manière la surface restera certainement réglée dans le cours du temps.

Nous avons vu que dans de telles conditions le vecteur rotation est constant tout le long d'une génératrice. Les équations établies à propos des surfaces quelconques restant applicables sur elles-mêmes sont évidemment valables, mais il est possible d'avoir un système plus simple en se débarrassant en partie des tensions. Nous supposerons la portion de surface considérée simplement connexe et limitée à un contour rencontré en deux points seulement par chaque génératrice. Soit α le paramètre sur chaque génératrice, ce sera par exemple la longueur de génératrice à partir d'un point connu; chaque génératrice sera définie à son tour par un paramètre β qui, variant entre β_1 et β_2 , fournira toute la portion de surface étudiée. Nous appellerons dS la portion de surface comprise entre les génératrices β et $\beta + d\beta$, $d\mu$ sa masse, A son centre de gravité, ou plus exactement la limite de ce point quand $d\beta$ tend vers zéro. Le système des forces extérieures agissant sur la portion de surface considérée est équivalent à un vecteur $\varphi d\beta$ et un couple $\psi d\beta$ issus de A . Nous emploierons ces expressions car nous allons écrire le théorème du centre de gravité et celui du moment cinétique par rapport à ce point. Il nous est nécessaire, auparavant, de préciser la nature du système des réactions le long d'une génératrice. Le long de tout élément $d\alpha$ de cette droite nous avons une réaction élémentaire située dans le plan tangent. La somme géométrique sera un vecteur R que nous devons considérer comme arbitraire car les tensions peuvent avoir une direction quelconque. Si nous prenons le moment G au point A , nous obtenons un vecteur perpendiculaire à la génératrice sans autre précision. Il est manifeste qu'un tel système de tensions est trop général, car il conviendrait aussi à des réactions de directions quelconques assujetties à la seule condition de rencontrer la génératrice considérée. Nous compléterons cette étude en écrivant que la génératrice infiniment voisine rencontre les tensions puisqu'elles sont dans le plan tangent, ou ce qui revient au même, que le moment au point $A + dA$ est perpendiculaire à la génératrice qui y passe. Nous devons donc avoir :

$$t \cdot G = 0, \quad (t + dt) \cdot (G + dG) = 0$$

ou, t vecteur unitaire de la génératrice,

$$G \cdot dt + t \cdot dG = 0,$$

que l'on peut obtenir en différentiant la première relation le long du lieu de A . Or on sait que

$$dG = R \wedge dA$$

et par suite

$$G \cdot \frac{dt}{d\beta} + R \cdot \left(\frac{dA}{d\beta} \wedge t \right) = 0,$$

qui est la relation cherchée.

Le théorème du centre de gravité donne immédiatement :

$$\frac{d\mu}{d\beta} \Gamma_A = \varphi + \frac{dR}{d\beta}.$$

L'application de celui du moment cinétique nécessite la connaissance du vecteur moment cinétique. Nous ferons la remarque que la portion de surface limitée à deux génératrices infiniment voisines est un système matériel infiniment voisin d'une barre dont on sait que l'ellipsoïde d'inertie par rapport à son centre de gravité est un cylindre de révolution. Si $I d\beta$ est son moment d'inertie par rapport à un axe quelconque passant par A et perpendiculaire à la génératrice, et si Ω est le vecteur projection de la rotation sur un plan perpendiculaire à la génératrice, ou sur le plan normal de la courbe $C(\Omega)$, le moment cinétique est le vecteur $I \Omega, d\beta$. On en déduit :

$$I \frac{d\Omega}{d\beta} = \psi + \frac{dG}{d\beta},$$

équation vectorielle ne fournissant que deux relations scalaires comme on le voit en faisant le produit scalaire par t . On voit d'abord que le second membre donne zéro car il représente des vecteurs perpendiculaires à t en tant que moments de vecteurs rencontrant la génératrice ou la génératrice infiniment voisine (pour G). Pour le premier membre, faisons la vérification. Posons

$$\Omega = u \omega,$$

u étant un vecteur unitaire portant Ω , et ω un scalaire, par dérivation on en déduit :

$$\frac{d}{d\theta} \Omega = u \frac{d\omega}{d\theta} + \omega \Omega \wedge u,$$

$$\Omega = \omega u + \omega_1 t,$$

$$\Omega \wedge u = \omega_1 t \wedge u,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Rappelons-nous maintenant que Ω n'est pas quelconque, mais que la tangente à

la courbe $C(\Omega)$ est parallèle à t . Nous avons le système suivant qui comporte 14 équations entre 14 inconnues : $R(3)$, $G(2)$, $V_\lambda(3)$, $\Gamma_\lambda(3)$, $\Omega(3)$:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_\lambda \frac{d\mu}{d\beta} &= \varphi + \frac{dR}{d\beta}, & 3 \\ I \frac{d\Omega_\lambda}{d\beta} &= \psi + \frac{dG}{d\beta}, & 2 \\ G \cdot \frac{dt}{d\beta} + R \cdot \left(\frac{dA}{d\beta} \wedge t \right) &= 0, & 1 \\ t \wedge \frac{d\Omega}{d\beta} &= 0, & 2 \\ dV_\lambda &= \Omega \wedge dA, & 3 \\ \Gamma_\lambda &= \frac{\partial V_\lambda}{\partial \theta}. & 3 \end{aligned} \right\}$$

On devra intégrer ces équations différentielles sachant que pour β_1 et β_2 , R et G sont nuls. On peut voir facilement que ces conditions sont équivalentes au théorème du centre de gravité et du théorème du moment cinétique de toute la portion de surface considérée.

Si nous considérons maintenant le cas d'une distribution continue de percussions sur toute la portion de surface, nous aurons un système analogue au précédent. Nous appellerons W la variable de vitesse de A , Ω la variation de rotation correspondante; φ , ψ définiront le système de percussions données agissant sur la surface limitée à deux génératrices infiniment voisines; R et G définiront le système des percussions de tension. Nous aurons alors le système :

$$\left. \begin{aligned} W \frac{d\mu}{d\beta} &= \varphi + \frac{dR}{d\beta}, & 3 \\ I \frac{d\Omega_\lambda}{d\beta} &= \psi + \frac{dG}{d\beta}, & 2 \\ G \cdot \frac{dt}{d\beta} + R \cdot \left(\frac{dA}{d\beta} \wedge t \right) &= 0, & 1 \\ t \wedge \frac{d\Omega}{d\beta} &= 0, & 2 \\ dW &= \Omega \wedge dA. & 3 \end{aligned} \right\}$$

qui fournit 11 équations entre les 11 inconnues : $W(3)$, $\Omega(3)$, $R(3)$, $G(2)$.

TABLE DES MATIÈRES DE CE MÉMOIRE

I. — Étude des percussions dans les fils.

	Pages.
Condition nécessaire pour les vitesses	1
Tension à l'instant initial	2
Percussions dans les fils	4
Exemples sans percussions	7
Exemples avec percussions	10
Discontinuités possibles en une extrémité	11
Exemples de percussions	15
Cinématique des fils inextensibles	25
Cas des fils extensibles	29
Relation entre la dynamique des fils et certaines surfaces réglées	33
Distribution des accélérations le long d'un fil	34
Exemples de mouvement de fil	37

II. — Étude dynamique des surfaces. Percussions.

Cinématique des surfaces déformables	44
Étude de la rotation	47
Recherche des vitesses	50
Variation de la courbure et de la torsion d'une courbe tracée sur la surface	52
Variation des courbures de la surface	56
Rotation propre du trièdre principal	58
Surfaces admettant des vitesses tangentes	62
Surfaces à rotation normale	65
Quelques problèmes relatifs à la rotation	66
Étude de la courbure de $S(V)$. Application aux surfaces minima	71
Autre propriété des surfaces minima	77
Surfaces harmoniques	81
Surfaces pour lesquelles $S(\Omega)$ reste applicable sur elle-même. Surfaces réglées	86
Surfaces réglées le demeurant	96
Mouvement des surfaces déformables. Étude des tensions	103
Percussions dans ces surfaces	108
Percussions sur un morceau de plan libre	109
Existence d'une solution pour le système (16)	112
Manières de réaliser pratiquement une surface déformable	118
Équations qui en résultent	120
Mouvement et percussions des surfaces qui restent constamment réglées	121
