

G. PFEIFFER

**Méthode spéciale d'intégration des systèmes complets
d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier
ordre, à une fonction inconnue**

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3^e série, tome 28 (1936), p. 211-242

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1936_3_28__211_0

© Université Paul Sabatier, 1936, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

On voit que les relations (7) sont des conséquences des relations (8).

Le système (6) est un système jacobien, si la dernière des équations (6) est en involution avec les m antécédentes.

En vertu de tout ceci, les fonctions (5) doivent être la solution du système d'équations linéaires, en général, non homogènes, aux dérivées partielles du premier ordre :

$$(12) \quad \begin{aligned} X_1(v_\zeta) &= -Y(b_\zeta^1) - v_\zeta Y(b_1^1), \\ X_2(v_\zeta) &= -Y(b_\zeta^2) - v_\zeta Y(b_1^2), \\ &\dots\dots\dots \\ X_m(v_\zeta) &= -Y(b_\zeta^m) - v_\zeta Y(b_1^m), \\ &\zeta = 2, 3, \dots, n, \end{aligned}$$

avec $n - 1$, fonctions (5).

Le système (12) appartient au type des systèmes jacobiens généralisés à plusieurs fonctions inconnues, qui ont été étudiés par M. N. Saltykow (*). Son intégration est équivalente à l'intégration du système d'équations linéaires, homogènes aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue :

$$(13) \quad \begin{aligned} Z_1(f) &= \frac{\partial f}{\partial x_1} + \sum_{g=1}^n b_g^1 \frac{\partial f}{\partial x_{m+g}} - \sum_{\zeta=2}^n [Y(b_\zeta^1) + v_\zeta Y(b_1^1)] \frac{\partial f}{\partial v_\zeta} = 0, \\ Z_2(f) &= \frac{\partial f}{\partial x_2} + \sum_{g=1}^n b_g^2 \frac{\partial f}{\partial x_{m+g}} - \sum_{\zeta=2}^n [Y(b_\zeta^2) + v_\zeta Y(b_1^2)] \frac{\partial f}{\partial v_\zeta} = 0, \\ &\dots\dots\dots \\ Z_m(f) &= \frac{\partial f}{\partial x_m} + \sum_{g=1}^n b_g^m \frac{\partial f}{\partial x_{m+g}} - \sum_{\zeta=2}^n [Y(b_\zeta^m) + v_\zeta Y(b_1^m)] \frac{\partial f}{\partial v_\zeta} = 0. \end{aligned}$$

Avec les conditions (3) le système (13) est jacobien. Pour s'en convaincre, prenons deux équations (13) quelconques :

$$(14) \quad \begin{aligned} Z_i(f) &= X_i(f) - \sum_{\zeta=2}^n M_\zeta^i \frac{\partial f}{\partial v_\zeta} = 0, \\ Z_k(f) &= X_k(f) - \sum_{\zeta=2}^n M_\zeta^k \frac{\partial f}{\partial v_\zeta} = 0. \end{aligned}$$

(*) N. SALTYSKOW, *Étude, sur les intégrales d'un système, des équations différentielles aux dérivées partielles de plusieurs fonctions inconnues* (Journ. de Math. pures et appliquées, 1897, t. III, s. 5, pp. 423-428); *Recherches sur la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue* (Kharkow, 1905, pp. 68-76).

où :

$$(15) \quad \mathbf{M}_v^j = \mathbf{Y}(b_v^j) + v_v \mathbf{Y}(b_1^j) = \left(\frac{\partial b_v^j}{\partial x_{m+1}} - \sum_{h=2}^n v_h \frac{\partial b_v^j}{\partial x_{m+h}} \right) + v_v \left(\frac{\partial b_1^j}{\partial x_{m+1}} - \sum_{h=2}^n v_h \frac{\partial b_1^j}{\partial x_{m+h}} \right),$$

$$j = 1, 2, \dots, m, \quad v = 2, 3, \dots, n.$$

On voit immédiatement, qu'en vertu de (3) :

$$(16) \quad \begin{aligned} Z_k(b_v^i) &\equiv Z_i(b_v^k), \\ i, k &= 1, 2, \dots, m, \quad i \neq k, \\ v &= 2, 3, \dots, n, \end{aligned}$$

attendu que :

$$(17) \quad Z_k(b_v^i) \equiv X_k(b_v^i), \quad Z_i(b_v^k) \equiv X_i(b_v^k).$$

Aux identités :

$$(18) \quad \begin{aligned} Z_k(\mathbf{M}_v^i) &\equiv Z_i(\mathbf{M}_v^k), \\ i, k &= 1, 2, \dots, m, \quad i \neq k, \\ v &= 2, 3, \dots, n \end{aligned}$$

nous parvenons de la manière suivante.

Grâce aux liaisons :

$$(19) \quad Z_k(\mathbf{M}_v^i) = X_k(\mathbf{M}_v^i) - \sum_{\varrho=2}^n [Y(b_\varrho^k) + v_\varrho Y(b_\varrho^i)] \frac{\partial \mathbf{M}_v^i}{\partial v_\varrho}$$

et :

$$(20) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{M}_v^i}{\partial v_\varrho} &= - \left(\frac{\partial b_\varrho^i}{\partial x_{m+\varrho}} + v_v \frac{\partial b_1^i}{\partial x_{m+\varrho}} \right), & \varrho \neq v, \\ \frac{\partial \mathbf{M}_v^i}{\partial b_1} &= - \left(\frac{\partial b_v^i}{\partial x_{m+v}} + v_v \frac{\partial b_1^i}{\partial x_{m+v}} \right) + Y(b_1^i), & \varrho = v, \end{aligned}$$

on a :

$$(21) \quad Z_k(\mathbf{M}_v^i) = X_k(\mathbf{M}_v^i) + \sum_{\varrho=2}^n [Y(b_\varrho^k) + v_\varrho Y(b_\varrho^i)] \left(\frac{\partial b_\varrho^i}{\partial x_{m+\varrho}} + v_v \frac{\partial b_1^i}{\partial x_{m+\varrho}} \right) - Y(b_\varrho^k) Y(b_1^i) - \omega,$$

où :

$$(22) \quad \omega = v, Y(b_1^k) Y(b_1^i)$$

est une expression symétrique par rapport aux indices i, k .

Puisque :

$$(23) \quad X_k(M_1^i) = Y\left(\frac{\partial b_1^i}{\partial x_k}\right) + \sum_{g=1}^n b_g^k Y\left(\frac{\partial b_1^i}{\partial x_{m+g}}\right) + v, \left[Y\left(\frac{\partial b_1^i}{\partial x_k}\right) + \sum_{g=1}^n b_g^k Y\left(\frac{\partial b_1^i}{\partial x_{m+g}}\right) \right]$$

et :

$$(24) \quad \begin{aligned} YX_k(b_1^i) &= Y\left(\frac{\partial b_1^i}{\partial x_k}\right) + \sum_{g=1}^n b_g^k Y\left(\frac{\partial b_1^i}{\partial x_{m+g}}\right) + \sum_{g=1}^n Y(b_g^k) \frac{\partial b_1^i}{\partial x_{m+g}}, \\ YX_k(b_1^i) &= Y\left(\frac{\partial b_1^i}{\partial x_k}\right) + \sum_{g=1}^n b_g^k Y\left(\frac{\partial b_1^i}{\partial x_{m+g}}\right) + \sum_{g=1}^n Y(b_g^k) \frac{\partial b_1^i}{\partial x_{m+g}}. \end{aligned}$$

on a :

$$(25) \quad X_k(M_1^i) = \omega - \sum_{g=1}^n Y(b_g^k) \frac{\partial b_1^i}{\partial x_{m+g}} - v, \sum_{g=1}^n Y(b_g^k) \frac{\partial b_1^i}{\partial x_{m+g}},$$

où, en vue de (3), ω est symétrique par rapport aux indices i, k :

$$(26) \quad \omega = YX_k(b_1^i) + v, YX_k(b_1^i) \equiv YX_i(b_1^k) + v, X_i(b_1^k).$$

Il suit :

$$(27) \quad \begin{aligned} Z_k(M_1^i) &= \omega - Y(b_1^k) \frac{\partial b_1^i}{\partial x_{m+1}} - v, Y(b_1^k) \frac{\partial b_1^i}{\partial x_{m+1}} - \sum_{\xi=2}^n Y(b_\xi^k) \frac{\partial b_1^i}{\partial x_{m+\xi}} - v, \sum_{\xi=2}^n Y(b_\xi^k) \frac{\partial b_1^i}{\partial x_{m+\xi}} \\ &+ \sum_{\xi=2}^n [Y(b_\xi^k) + v_\xi Y(b_1^k)] \frac{\partial b_1^i}{\partial x_{m+\xi}} + v, \sum_{\xi=2}^n [Y(b_\xi^k) + v_\xi Y(b_1^k)] \frac{\partial b_1^i}{\partial x_{m+\xi}} - Y(b_1^k) Y(b_1^i) - \omega \\ &= \omega - Y(b_1^k) Y(b_1^i) - v, Y(b_1^k) Y(b_1^i) - Y(b_1^k) Y(b_1^i) - \omega. \end{aligned}$$

L'expression (27) est symétrique par rapport aux indices i, k ; de là suit que les identités sont exactes.

Ainsi, d'après les conditions (3), le système (13) est jacobien; ses intégrales indépendantes seront désignées par :

$$(28) \quad f_2, f_3, \dots, f_{2n}.$$

La substitution de la solution (34) au système (6) donne un système jacobien :

$$\begin{aligned}
 (35) \quad & Z_1(z) = p_1 + (b_2^1 + b_1^1 u_2) p_{m+2} + \dots + (b_n^1 + b_1^1 u_n) p_{m+n} = 0, \\
 & \dots \dots \dots \\
 & Z_m(z) = p_m + (b_2^m + b_1^m u_2) p_{m+2} + \dots + (b_n^m + b_1^m u_n) p_{m+n} = 0, \\
 & Z_{m+1}(z) = p_{m+1} - u_2 p_{m+2} - \dots - u_n p_{m+n} = 0
 \end{aligned}$$

avec le paramètre γ_1 .

En appliquant, au système (35), les mêmes raisonnements et ainsi de suite, nous parviendrons, après la répétition, faite $n - 1$ fois, à des opérations du même caractère, au système jacobien :

$$\begin{aligned}
 (36) \quad & H_1(z) = p_1 + s_1 p_{m+n} = 0, \\
 & \dots \dots \dots \\
 & H_{m+n-1}(z) = p_{m+n-1} + s_{m+n-1} p_{m+n} = 0,
 \end{aligned}$$

dont les coefficients contiennent $(n - 1)$ constantes arbitraires $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}$.

L'intégration du système (36) est équivalente à l'intégration d'une équation aux différentielles totales complètement intégrable :

$$(37) \quad dx_{m+n} = s_1 dx_1 + s_2 dx_2 + \dots + s_{m+n-1} dx_{m+n-1}.$$

Si l'on désigne son intégrale par :

$$(38) \quad \omega(x_1, x_2, \dots, x_{m+n}, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}) = \text{const.},$$

l'intégrale complète du système (1) est :

$$(39) \quad z = \gamma_n \omega + \gamma_{n+1}.$$

Le système (36), pour lequel sont remplies les conditions :

$$\begin{aligned}
 (40) \quad & H_\lambda(s_\mu) \equiv H_\mu(s_\lambda), \\
 & \lambda, \mu = 1, 2, \dots, (m + n - 1), \quad \lambda \neq \mu,
 \end{aligned}$$

peut être intégré de la manière suivante.

En ajoutant, aux relations (40), la relation :

$$(41) \quad p_{m+n} = -\varphi,$$

où φ est fonction des variables indépendantes, nous obtiendrons les équations :

$$(42) \quad p_1 = s_1 \varphi, \quad p_2 = s_2 \varphi, \quad \dots, \quad p_{m+n-1} = s_{m+n-1} \varphi, \quad p_{m+n} = -\varphi.$$

La fonction φ sera déterminée de manière que les conditions :

$$(43) \quad \frac{\partial(s_i \varphi)}{\partial x_{m+n}} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0, \\ i = 1, 2, \dots (m+n-1),$$

soient satisfaites.

Grâce à ce que les relations :

$$(44) \quad \frac{\partial(s_\lambda \varphi)}{\partial x_\mu} = \frac{\partial(s_\mu \varphi)}{\partial x_\lambda}, \\ \lambda, \mu = 1, 2, \dots (m+n-1), \quad \lambda \neq \mu,$$

sont des conséquences des conditions (40) et (43), la fonction $\varphi = \gamma_n \varphi_0$, où φ_0 est une solution du système (43), présente un multiplicateur intégrant de l'équation (37) :

$$(45) \quad dz = \gamma_n \varphi_0 (s_1 dx_1 + s_2 dx_2 + \dots + s_{m+n-1} dx_{m+n-1} - dx_{m+n}) = \gamma_n d\omega, \\ z = \gamma_n \omega + \gamma_{n-1}.$$

Le système (43), ce qui est la même chose :

$$(46) \quad \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + s_i \frac{\partial \theta}{\partial x_{m+n}} = - \frac{\partial s_i}{\partial x_{m+n}}, \\ i = 1, 2, \dots (m+n-1), \quad \theta = \log \varphi,$$

est, en vertu des conditions (40), un système complet d'équations linéaires avec des seconds membres⁽¹⁾; il a toujours la solution φ_0 .

Il arrive fréquemment que les solutions (34) du système (12) se trouvent facilement par conjecture. Quand le système (12) est homogène, sa solution :

$$(47) \quad v_2 = \text{const.}, \quad v_3 = \text{const.}, \quad \dots, \quad v_n = \text{const.}$$

mène à un nombre infini de solutions (34).

Nous avons parlé de l'intégration des systèmes jacobiens. Tous nos raisonnements et la méthode indiquée d'intégration sont applicables aux systèmes complets d'équations linéaires avec seconds membres et aux systèmes complets d'équations linéaires non homogènes.

⁽¹⁾ E. GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre* (Paris, 1921, pp. 89-94).

Exemple. — Considérons le système jacobien :

$$\begin{aligned}
 X_3(z) &= p_3 + \frac{x_5}{x_4} p_2 + p_6 = 0, \\
 (\alpha_4) \quad X_4(z) &= p_4 + \frac{x_2 - x_3}{x_4} p_2 + p_6 = 0, \\
 X_5(z) &= p_5 + \frac{x_6}{x_4} p_2 - \frac{x_1}{x_5} p_1 = 0.
 \end{aligned}$$

Ajoutons aux équations (α_4) la condition :

$$(\alpha_2) \quad p_2 - \lambda x_4 p_1 + \mu x_4 p_6 = 0.$$

Les égalités (α_4) , (α_2) donnent le système :

$$\begin{aligned}
 Y_3(z) &= p_3 + \lambda x_3 p_1 + (1 - \mu x_5) p_6 = 0, \\
 Y_4(z) &= p_4 - \lambda(x_2 - x_3) p_1 + [1 + \mu(x_2 - x_3)] p_6 = 0, \\
 (\alpha_3) \quad Y_5(z) &= p_5 + \left(\lambda x_6 - \frac{x_1}{x_5} \right) p_1 - \mu x_5 p_6 = 0, \\
 Y(z) &= p_2 - \lambda x_4 p_1 + \mu x_4 p_6 = 0.
 \end{aligned}$$

La dernière équation (α_3) est en involution avec les trois premières aux conditions :

$$\begin{aligned}
 x_5 Y(\lambda) + x_4 Y_3(\lambda) &= 0, & (x_2 - x_3) Y(\lambda) - x_4 Y_4(\lambda) &= 0, \\
 (\alpha_1) \quad \frac{\lambda x_4}{x_5} + \lambda \mu x_4 + x_5 Y(\lambda) + x_4 Y_3(\lambda) &= 0, \\
 x_5 Y(\mu) + x_4 Y_3(\mu) &= 0, & (x_2 - x_3) Y(\mu) - x_4 Y_4(\mu) &= 0, \\
 \mu^2 x_4 + x_5 Y(\mu) + x_4 Y_3(\mu) &= 0.
 \end{aligned}$$

Les relations :

$$(\alpha_5) \quad -\frac{d\mu}{\mu^2} = dx_2, \quad \frac{1}{\mu} = x_5 + \text{const.}$$

permettent de prendre :

$$(\alpha_6) \quad \mu = \frac{1}{x_5};$$

la relation :

$$(\alpha_7) \quad \frac{d\lambda}{\lambda} + 2 \frac{dx_3}{x_3} = 0$$

donne :

$$(\alpha_9) \quad -\lambda = \frac{c}{x_5^2}.$$

Ayant substitué (x_6) , (x_4) à (x_3) , nous obtenons le système jacobien :

$$\begin{aligned} X_3(z) &= p_3 + \frac{c}{x_5} p_1 = 0, \\ X_4(z) &= p_4 - \frac{c}{x_5^2} (x_2 - x_5) p_1 + \frac{x_2}{x_5} p_6 = 0, \\ X_5(z) &= p_5 + \left(\frac{cx_6}{x_5^2} - \frac{x_1}{x_5} \right) p_1 - \frac{x_6}{x_5} p_6 = 0, \\ X_2(z) &= p_2 - \frac{cx_4}{x_5^2} p_1 + \frac{x_4}{x_5} p_6 = 0(*). \end{aligned}$$

En ajoutant la condition :

$$(\alpha_{10}) \quad p_1 + x_5 \pi p_6 = 0$$

aux équations (α_9) , nous viendrons au système :

$$\begin{aligned} Y_3(z) &= p_3 - c \pi p_6 = 0, \\ Y_4(z) &= p_4 + [x_2 + c(x_2 - x_5)\pi] \frac{p_6}{x_5} = 0, \\ Y_5(z) &= p_5 - \left[\frac{x_6}{x_5} + \left(\frac{cx_6}{x_5} - x_1 \right) \pi \right] p_6 = 0, \\ Y_2(z) &= p_2 + \frac{x_4}{x_5} (1 + c\pi) p_6 = 0, \\ Y(z) &= p_1 + x_5 \pi p_6 = 0(**). \end{aligned}$$

La dernière équation (α_{11}) est en involution avec les quatre premières aux conditions :

$$\begin{aligned} cY(\pi) + x_5 Y_3(\pi) &= 0, & c(x_2 - x_5)Y(\pi) - x_5^2 Y_4(\pi) &= 0, \\ (\alpha_{11}) \quad \pi(1 + c\pi) + \left(\frac{cx_6}{x_5} - x_1 \right) Y(\pi) + x_5 Y_5(\pi) &= 0, & cx_4 Y(\pi) &= x_5^2 Y_2(\pi). \end{aligned}$$

D'après la relation :

$$(\alpha_{12}) \quad \frac{d\pi}{\pi(1+c\pi)} + \frac{dx_5}{x_5} = 0$$

(*) Les symboles $X(\dots)$ en (α_9) sont différents des symboles $X(\dots)$ en (α_1) .

(**) Les symboles $Y(\dots)$ en (α_{11}) sont différents des symboles $Y(\dots)$ en (α_2) .

nous prenons :

$$(\alpha_{11}) \quad \pi = \frac{1}{fx_5 - c}.$$

La substitution de (α_{11}) à (α_{11}) donne le système jacobien :

$$(\alpha_{12}) \quad \begin{aligned} p_3 - \frac{c}{fx_5 - c} p_6 &= 0, \\ p_4 + \frac{fx_2 - c}{fx_5 - c} p_6 &= 0, \\ p_3 - \frac{fx_6 - x_1}{fx_5 - c} p_6 &= 0, \\ p_2 + \frac{fx_4}{fx_5 - c} p_6 &= 0, \\ p_1 + \frac{x_5}{fx_5 - c} p_6 &= 0, \end{aligned}$$

dont l'intégration est équivalente à l'intégration de l'équation aux différentielles totales :

$$(\alpha_{16}) \quad (fx_5 - c)dx_6 = x_2 dx_1 + fx_4 dx_3 - c dx_3 + (fx_2 - c)dx_4 - (fx_6 - x_1)dx_5.$$

L'intégrale de l'équation (α_{16}) est :

$$(\alpha_{17}) \quad \begin{aligned} x_2(fx_5 - c) &= x_1 x_3 + fx_2 x_4 - c(x_3 + x_4) + \text{const.}, \\ f(x_4 x_2 - x_2 x_4) - c(x_6 - x_3 - x_4) - x_1 x_5 &= \text{const.} \end{aligned}$$

où :

$$(\alpha_{18}) \quad A_1(x_6 x_5 - x_2 x_4) + A_2(x_6 - x_3 - x_4) + x_1 x_5 + A_3 = 0.$$

Les intégrales indépendantes du système (α_1) sont :

$$(\alpha_{19}) \quad \varphi_1 = x_6 x_5 - x_2 x_4, \quad \varphi_2 = x_6 - x_3 - x_4, \quad \varphi_3 = x_1 x_5.$$

L'expression :

$$(\alpha_{20}) \quad z = C_1(x_6 x_5 - x_2 x_4) + C_2(x_6 - x_3 - x_4) + C_3 x_1 x_5 + C_4$$

est l'intégrale complète du système (α_1) .

* * *

Exemple. — Les intégrales indépendantes (α_0) du système (α_1) sont connues :

$$(\beta_1) \quad \varphi_1 = x_6 x_5 - x_2 x_4, \quad \varphi_2 = x_6 - x_3 - x_4, \quad \varphi_3 = x_1 x_5.$$

En écrivant le système (α_0) sous la forme :

$$(\beta_2) \quad \begin{aligned} X_3(z) &= p_3 + \frac{x_5}{x_4} p_2 + p_6 = 0, \\ X_4(z) &= p_4 - \frac{(x_5 - x_3)}{x_4} p_2 + p_6 = 0, \\ X_5(z) &= p_5 + \frac{x_6}{x_4} p_2 - \frac{x_1}{x_5} p_1 = 0, \\ Y(z) &= p_2 - \frac{cx_4}{x_5^2} p_1 + \frac{x_4}{x_5} p_6 = 0 \end{aligned}$$

et tenant compte de ce que :

$$(\beta_3) \quad Y(\varphi_3) = -\frac{cx_4}{x_5} \equiv 0,$$

nous trouvons, laissant de côté le multiplicateur constant $-c$, que la transformation infinitésimale :

$$(\beta_4) \quad Z(z) = \frac{x_5}{x_4} p_2 - \frac{c}{x_5} p_1 + p_6$$

est l'opérateur du système (α_1) :

$$(\beta_5) \quad \begin{aligned} Z(\varphi_1) &\equiv 0, \\ Z(\varphi_2) &= 1, \\ Z(\varphi_3) &= -c. \end{aligned}$$

L'intégration de l'équation :

$$(\beta_6) \quad 0 \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_2} - c \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_3} = 0$$

et du système :

$$(\beta_7) \quad \frac{d\varphi_1}{0} = \frac{d\varphi_2}{1} = \frac{d\varphi_3}{-c},$$

donne les intégrales indépendantes du système (α_0) :

$$(\beta_8) \quad \psi_1 = \varphi_1 = x_6 x_5 - x_2 x_4, \quad \psi_2 = \varphi_2 + c\varphi_3 = x_1 x_5 + c(x_6 - x_3 - x_4).$$

Ayant les intégrales indépendantes (β_s) du système (α_s) , nous récrivons de nouveau le système (α_{1s}) en forme :

$$\begin{aligned}
 X_3(z) &= p_3 + \frac{c}{x_5} p_1 = 0, \\
 X_4(z) &= p_4 - \frac{c}{x_5^2} (x_5 - x_4) p_1 + \frac{x_2}{x_5} p_6 = 0, \\
 (\beta_s) \quad X_5(z) &= p_5 + \left(\frac{cx_6}{x_5^2} - \frac{x_1}{x_5} \right) p_1 - \frac{x_6}{x_5} p_6 = 0, \\
 X_2(z) &= p_2 - \frac{cx_4}{x_5^2} p_1 + \frac{x_4}{x_5} p_6 = 0, \\
 Y(z) &= p_1 + \frac{x_5}{fx_5 - c} p_4 = 0.
 \end{aligned}$$

En tenant compte de :

$$(\beta_{10}) \quad Y(\psi_2) = \frac{fx_5^2}{fx_5 - c} \equiv 0,$$

on trouve, laissant de côté le multiplicateur constant f , que la transformation infinitésimale :

$$(\beta_{11}) \quad Z(z) = \frac{fx_5 - c}{x_5^2} p_1 + \frac{1}{x_5} p_6$$

est l'opérateur du système (α_s) :

$$(\beta_{12}) \quad \begin{aligned}
 Z(\psi_1) &= 1, \\
 Z(\psi_2) &= f.
 \end{aligned}$$

L'intégration de l'équation :

$$(\beta_{13}) \quad \begin{aligned}
 \frac{\partial \theta}{\partial \psi_1} + f \frac{\partial \theta}{\partial \psi_2} &= 0, \\
 d\psi_1 &= \frac{d\psi_2}{f},
 \end{aligned}$$

donne l'intégrale du système (α_{1s}) :

$$(\beta_{14}) \quad \chi_1 = f(x_6 x_5 - x_2 x_4) - c(x_6 - x_3 - x_4) - x_1 x_5,$$

qui mène immédiatement à l'intégrale complète (α_{20}) du système (α_1) .

La méthode spéciale d'intégration des systèmes complets d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre a sans doute un joint avec la méthode de Jacobi-Mayer⁽¹⁾ et sa généralisation⁽²⁾. C'est pourquoi nous appliquons la méthode de Jacobi-Mayer et sa généralisation à l'intégration du système (1) :

$$(65) \quad F_i = X_i(z) = p_i + b_1^i p_{m+1} + \dots + b_n^i p_{m+n} = 0, \\ i = 1, 2, \dots, m,$$

non sans quelques variantes. En ajoutant au système (65) la relation :

$$(66) \quad f = f(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+n}, p_{m+1}, \dots, p_{m+n}) = a,$$

exigeons que les équations (65), (66) fournissent un système complet. Pour cela, il est nécessaire que les parenthèses de Poisson :

$$(67) \quad (F_i, f) = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^n b_j^i \frac{\partial f}{\partial x_{m+j}} - \sum_{j=1}^n \left(\sum_{h=1}^n \frac{\partial b_h^i}{\partial x_{m+j}} p_{m+h} \right) \frac{\partial f}{\partial p_{m+j}} = 0, \\ i = 1, 2, \dots, m,$$

soient nulles en vertu des relations (65), (66). Puisque les relations (67) ne contiennent ni p_i ni a , elles doivent être nulles identiquement.

Le système (67) est jacobien⁽³⁾. Il possède $2n$ intégrales indépendantes qui peuvent être linéaires en p_{m+j} , peuvent ne pas les contenir, mais peuvent aussi être non linéaires en p_{m+j} . La dernière circonstance est évidente, une fonction des intégrales étant aussi une intégrale. La marche ultérieure des raisonnements est claire.

Exemple. — Intégrons le système (α_1) :

$$(7_1) \quad p_3 + \frac{x_5}{x_1} p_2 + p_6 = 0, \\ p_4 - \frac{x_2 - x_5}{x_4} p_2 + p_6 = 0, \\ p_3 + \frac{x_6}{x_4} p_2 - \frac{x_4}{x_3} p_1 = 0.$$

⁽¹⁾ Ed. GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre* (Paris, 1921, pp. 266-293).

A. FORSYTH, *Theory of differential equations* (Cambridge, 1906, vol. V, pp. 117-131).

⁽²⁾ G. PFEIFFER, *La généralisation de la méthode de Jacobi-Mayer de l'intégration des équations non linéaires et des systèmes d'équations non linéaires aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue* (Acta math., B. 61, pp. 239-261, 1933).

⁽³⁾ Ed. GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre* (Paris, 1921, pp. 274-275).

En ajoutant l'égalité :

$$(\gamma_2) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_6, p_1, p_2, p_6) = a,$$

exigeons que les équations (γ_1) , (γ_2) fournissent un système complet :

$$\begin{aligned} X(f) &= \frac{\partial f}{\partial x_3} + \frac{x_2}{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_6} = 0, \\ (\gamma_3) \quad Y(f) &= \frac{\partial f}{\partial x_4} - \frac{x_2 - x_5}{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_6} + \frac{p_2}{x_1} \frac{\partial f}{\partial p_2} = 0, \\ Z(f) &= \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{x_6}{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{x_4}{x_5} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{p_1}{x_5} \frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{p_2}{x_1} \frac{\partial f}{\partial p_6} = 0. \end{aligned}$$

Les intégrales de la première équation du système jacobien (γ_3) sont :

$$(\gamma_4) \quad \varphi_3 = x_1, \quad \varphi_4 = x_1, \quad \varphi_5 = x_5, \quad \varphi_6 = p_1, \quad \varphi_7 = p_2, \quad \varphi_8 = p_6$$

et :

$$(\gamma_5) \quad \varphi_1 = x_2 x_4 - x_3 x_5, \quad \varphi_2 = x_6 - x_3.$$

φ_1, φ_2 étant les intégrales du système :

$$(\gamma_6) \quad dx_3 = \frac{x_4 dx_2}{x_5} = dx_6.$$

Attendu que :

$$\begin{aligned} (\gamma_7) \quad Y(\varphi_1) &= \varphi_5, & Y(\varphi_2) &= 1, & Y(\varphi_4) &= 1, & Y(\varphi_7) &= \frac{\varphi_2}{\varphi_4}, \\ Y(\varphi_3) &= Y(\varphi_5) = Y(\varphi_6) = Y(\varphi_8) = 0, \end{aligned}$$

les intégrales communes aux deux premières équations (γ_3) sont :

$$(\gamma_8) \quad \psi_4 = \varphi_3, \quad \psi_5 = \varphi_5, \quad \psi_6 = \varphi_6, \quad \psi_7 = \varphi_8$$

et :

$$(\gamma_9) \quad \psi_1 = \varphi_3 \varphi_5 - \varphi_1, \quad \psi_2 = \varphi_2 - \varphi_4, \quad \psi_3 = \frac{\varphi_7}{\varphi_4}.$$

ψ_1, ψ_2, ψ_3 étant les intégrales de l'équation :

$$(\gamma_{10}) \quad Y(\theta) = \varphi_5 \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_2} + \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_4} + \frac{\varphi_7}{\varphi_4} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_7} = 0.$$

ou, ce qui est la même chose, du système :

$$(\gamma_{11}) \quad \frac{d\varphi_1}{\varphi_5} = d\varphi_2 = d\varphi_4 = \frac{\varphi_4 d\varphi_7}{\varphi_7}.$$

Vu que :

$$(\gamma_{12}) \quad \begin{aligned} Z(\varphi_1) &= \varphi_2, & Z(\varphi_3) &= -\frac{\varphi_3}{\varphi_5}, & Z(\varphi_5) &= 1, & Z(\varphi_6) &= \frac{\varphi_6}{\varphi_5}, & Z(\varphi_8) &= -\frac{\varphi_7}{\varphi_4}, \\ Z(\varphi_2) &= Z(\varphi_4) = Z(\varphi_7) = 0 \end{aligned}$$

et, par conséquent :

$$(\gamma_{13}) \quad \begin{aligned} Z(\psi_1) &= -\frac{\psi_4}{\psi_5}, & Z(\psi_2) &= 1, & Z(\psi_6) &= \frac{\psi_6}{\psi_5}, & Z(\psi_7) &= -\frac{\psi_3}{\psi_4}, \\ Z(\psi_4) &= Z(\psi_5) = Z(\psi_8) = 0, \end{aligned}$$

les intégrales communes aux trois équations du système (γ_3) sont :

$$(\gamma_{14}) \quad \begin{aligned} \lambda_4 &= \psi_1 = \varphi_2 \varphi_5 - \varphi_1 = x_5 x_6 - x_2 x_4, \\ \lambda_5 &= \psi_2 = \varphi_2 - \varphi_4 = x_6 - x_3 - x_4, & \lambda_6 &= \psi_3 = \frac{\varphi_7}{\varphi_4} = \frac{p_2}{x_4} \end{aligned}$$

et :

$$(\gamma_{15}) \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= \psi_4 \psi_5 = \varphi_3 \varphi_5 = x_1 x_5, & \lambda_2 &= \frac{\psi_6}{\psi_5} = \frac{\varphi_6}{\varphi_5} = \frac{p_1}{x_5}, \\ \lambda_3 &= \psi_7 + \psi_3 \psi_5 = \varphi_3 + \frac{\varphi_5 \varphi_7}{\varphi_4} = p_6 + \frac{x_5}{x_4} p_2, \end{aligned}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ étant les intégrales de l'équation :

$$(\gamma_{16}) \quad Z(\theta) = -\frac{\psi_4}{\psi_5} \frac{\partial \theta}{\partial \psi_4} + \frac{\partial \theta}{\partial \psi_5} + \frac{\psi_6}{\psi_5} \frac{\partial \theta}{\partial \psi_6} - \psi_7 \frac{\partial \theta}{\partial \psi_7} = 0,$$

ou, ce qui est la même chose, du système :

$$(\gamma_{17}) \quad \frac{\psi_5 d\psi_4}{-\psi_4} = d\psi_5 = \frac{\psi_5 d\psi_6}{\psi_6} = \frac{d\psi_7}{-\psi_5}.$$

On peut prendre l'égalité (γ_2) en diverses formes :

$$(\gamma_{18}) \quad \frac{p_2}{x_4} = a, \quad \frac{p_1}{x_5} = a, \quad p_6 + \frac{x_5}{x_4} p_2 = a,$$

linéaires aux dérivées et aussi non linéaires.

Profitant de la première relation (γ_{18}) , nous passons du système (γ_1) au système :

$$\begin{aligned}
 (\gamma_{19}) \quad & p_3 - ax_4 = 0, \\
 & p_3 + p_6 + ax_5 = 0, \\
 & p_4 + p_6 - a(x_2 - x_3) = 0, \\
 & p_5 - \frac{x_4}{x_3} p_1 + ax_6 = 0.
 \end{aligned}$$

En ajoutant l'égalité :

$$(\gamma_{20}) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_6, p_1, p_6) = b,$$

exigeons que le système $(\gamma_{19}), (\gamma_{20})$ soit complet :

$$\begin{aligned}
 (\gamma_{21}) \quad & X_1(f) = \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \quad X_2(f) = \frac{\partial f}{\partial x_3} + \frac{\partial f}{\partial x_6} = 0, \\
 & Y(f) = \frac{\partial f}{\partial x_4} + \frac{\partial f}{\partial x_5} = 0, \quad Z(f) = \frac{\partial f}{\partial x_5} - \frac{x_4}{x_3} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{p_1}{x_3} \frac{\partial f}{\partial p_1} - a \frac{\partial f}{\partial p_6} = 0.
 \end{aligned}$$

Les intégrales des deux premières équations $(\gamma_{21})^{(*)}$ sont :

$$(\gamma_{22}) \quad \varphi_2 = x_1, \quad \varphi_3 = x_4, \quad \varphi_4 = x_5, \quad \varphi_5 = p_1, \quad \varphi_6 = p_6$$

et :

$$(\gamma_{23}) \quad \varphi_1 = x_6 - x_3,$$

φ_1 étant l'intégrale de l'équation :

$$(\gamma_{24}) \quad dx_3 = dx_6.$$

Puisque :

$$\begin{aligned}
 (\gamma_{25}) \quad & Y(\varphi_1) = 1, \quad Y(\varphi_3) = 1, \\
 & Y(\varphi_2) = Y(\varphi_4) = Y(\varphi_5) = Y(\varphi_6) = 0,
 \end{aligned}$$

les intégrales communes aux trois premières équations (γ_{25}) sont :

$$(\gamma_{26}) \quad \psi_2 = \varphi_2, \quad \psi_3 = \varphi_4, \quad \psi_4 = \varphi_5, \quad \psi_5 = \varphi_6$$

et :

$$(\gamma_{27}) \quad \psi_1 = \varphi_1 - \varphi_3;$$

(*) Les φ, ψ, χ nouveaux ne sont pas les mêmes que les précédents.

ψ_1 est l'intégrale de l'équation :

$$(\gamma_{20}) \quad \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_3} = 0,$$

ou, ce qui est la même chose, de l'équation :

$$(\gamma_{20}) \quad d\varphi_1 = d\varphi_3.$$

Dès que :

$$(\gamma_{30}) \quad Z(\varphi_2) = -\frac{\varphi_2}{\varphi_4}, \quad Z(\varphi_3) = 1, \quad Z(\varphi_4) = \frac{\varphi_5}{\varphi_4}, \quad Z(\varphi_6) = -a,$$

$$Z(\varphi_1) = Z(\varphi_3) = 0$$

et, par conséquent :

$$(\gamma_{31}) \quad Z(\psi_2) = -\frac{\psi_2}{\psi_3}, \quad Z(\psi_3) = 1, \quad Z(\psi_4) = \frac{\psi_4}{\psi_3}, \quad Z(\psi_5) = -a,$$

$$Z(\psi_1) = 0,$$

les intégrales communes aux quatre équations du système (γ_{21}) sont :

$$(\gamma_{32}) \quad \chi_1 = \psi_4 = \varphi_4 - \varphi_3 = x_6 - x_3 - x_4$$

et :

$$(\gamma_{33}) \quad \chi_2 = \psi_2 \psi_3 = \varphi_2 \varphi_4 = x_1 x_5, \quad \chi_2 = \frac{\psi_4}{\psi_3} = \frac{\varphi_5}{\varphi_4} = \frac{p_1}{x_5},$$

$$\chi_3 = \psi_5 + a\psi_3 = \varphi_6 + a\varphi_1 = p_6 + ax_5,$$

χ_1, χ_2, χ_3 étant les intégrales de l'équation :

$$(\gamma_{34}) \quad Z(\theta) = -\frac{\psi_2}{\psi_3} \frac{\partial \theta}{\partial \psi_2} + \frac{\partial \theta}{\partial \psi_3} + \frac{\psi_4}{\psi_3} \frac{\partial \theta}{\partial \psi_4} - a \frac{\partial \theta}{\partial \psi_5} = 0,$$

ou, ce qui est la même chose, du système :

$$(\gamma_{35}) \quad \frac{\psi_3 d\psi_2}{-\psi_2} = d\psi_3 = \frac{\psi_3 d\psi_4}{\psi_4} = \frac{d\psi_5}{-a}.$$

Profitant de l'égalité (γ_{20}) en la forme :

$$(\gamma_{36}) \quad p_6 + ax_5 = b,$$

nous passons du système (γ_{36}) au système :

$$\begin{aligned}
 & p_2 - ax_4 = 0, \\
 & p_3 + b = 0, \\
 (\gamma_{37}) \quad & p_4 - ax_2 + b = 0, \\
 & p_3 - \frac{x_4}{x_5} p_1 + ax_6 = 0, \\
 & p_6 + ax_5 - b = 0.
 \end{aligned}$$

En ajoutant la relation :

$$(\gamma_{38}) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_6, p_1) = c,$$

exigeons que le système $(\gamma_{37}), (\gamma_{38})$ soit complet :

$$\begin{aligned}
 (\gamma_{39}) \quad X_1(f) = \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \quad X_2(f) = \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0, \quad X_3(f) = \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0, \\
 X_4(f) = \frac{\partial f}{\partial x_5} = 0, \quad Y(f) = \frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{x_4}{x_5} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{p_1}{x_5} \frac{\partial f}{\partial p_1} = 0.
 \end{aligned}$$

Les intégrales du système (γ_{39}) sont :

$$(\gamma_{40}) \quad \varphi_1 = x_2 x_4, \quad \varphi_2 = \frac{p_1}{x_5}.$$

Profitant de la relation (γ_{38}) sous la forme :

$$(\gamma_{41}) \quad p_1 = cx_5,$$

nous parvenons au système :

$$\begin{aligned}
 (\gamma_{42}) \quad p_1 = cx_5, \quad p_2 = ax_4, \quad p_3 = -b, \quad p_4 = ax_2 - b, \\
 p_5 = cx_1 - ax_6, \quad p_6 = -ax_5 + b.
 \end{aligned}$$

Ainsi on trouve que l'intégrale complète du système (γ_1) est :

$$(\gamma_{43}) \quad Z = a(x_2 x_4 - x_5 x_6) + b(x_6 - x_3 - x_1) + cx_1 x_5 + d.$$

Son intégrale générale est :

$$(\gamma_{44}) \quad Z = \Phi(x_2 x_4 - x_5 x_6, x_6 - x_3 - x_1, x_1 x_5),$$

où Φ est fonction arbitraire des arguments.

En intégrant le système (65) d'après la méthode de Jacobi-Mayer et sa généralisation, admettons la supposition que la relation (66) est linéaire en dérivées

$p_{m+1}, p_{m+2}, \dots, p_{m+n}$ (¹); alors

$$(68) \quad f = Y(z) = a_1 p_{m+1} + a_2 p_{m+2} + \dots + a_n p_{m+n} = a.$$

Les coefficients :

$$(69) \quad a_1, a_2, \dots, a_n$$

sont des fonctions des variables indépendantes; alors

$$(70) \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{h=1}^n \frac{\partial a_h}{\partial x_i} p_{m+h},$$

$$i = 1, 2, \dots, m;$$

$$(71) \quad \frac{\partial f}{\partial x_{m+j}} = \sum_{h=1}^n \frac{\partial a_h}{\partial x_{m+j}} p_{m+h}, \quad \frac{\partial f}{\partial p_{m+j}} = a_j,$$

$$j = 1, 2, \dots, n.$$

Ayant substitué (70), (71) dans (67), nous trouverons :

$$(72) \quad \sum_{h=1}^n \left[\frac{\partial a_h}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^n \left(b_j^i \frac{\partial a_h}{\partial x_{m-j}} - a_j \frac{\partial b_h^i}{\partial x_{m+j}} \right) \right] p_{m+h} = 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, m,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(73) \quad \sum_{h=1}^n [X_i(a_h) - Y(b_h^i)] p_{m+h} = 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, m.$$

Attendu que les dérivées $p_{m+1}, p_{m+2}, \dots, p_{m+n}$ dans le système (67) sont des variables indépendantes, essayons de satisfaire les systèmes (72), (73), en apprêtant les coefficients (69) de telle manière que soient remplies les égalités du système :

$$(74) \quad \begin{aligned} X_1(a_h) &= Y(b_h^1), \\ X_2(a_h) &= Y(b_h^2), \\ &\dots\dots\dots \\ X_m(a_h) &= Y(b_h^m), \\ h &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

(¹) On peut aussi faire une telle supposition au cas où le système à intégrer est un système complet d'équations linéaires avec des seconds membres ou un système complet d'équations non homogènes.

Le système (74) est le système jacobien généralisé, dont l'intégration est équivalente à l'intégration du système d'équations linéaires homogènes :

$$(75) \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^n b_j^i \frac{\partial f}{\partial x_{m+j}} + \left(\sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial b_j^i}{\partial x_{m+j}} \right) \frac{\partial f}{\partial a_i} \\ + \left(\sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial b_j^i}{\partial x_{m+j}} \right) \frac{\partial f}{\partial a_2} + \dots + \left(\sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial b_j^i}{\partial x_{m+j}} \right) \frac{\partial f}{\partial a_n} = 0, \\ i = 1, 2, \dots, m,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(76) \quad X_i(f) + \sum_{h=1}^n Y(b_h^i) \frac{\partial f}{\partial a_h} = 0, \\ i = 1, 2, \dots, m.$$

Montrons que d'après les conditions (3) :

$$(77) \quad X_k(b_v^i) \equiv X_i(b_v^k), \\ i, k = 1, 2, \dots, m, \quad i \neq k, \\ v = 1, 2, \dots, n,$$

$$(78) \quad X_k(b_v^i) = \frac{\partial b_v^i}{\partial x_k} + \sum_{h=1}^n b_h^k \frac{\partial b_v^i}{\partial x_{m+h}}, \quad X_i(b_v^k) = \frac{\partial b_v^k}{\partial x_i} + \sum_{h=1}^n b_h^i \frac{\partial b_v^k}{\partial x_{m+h}},$$

desquelles sortent les identités :

$$(79) \quad \frac{\partial}{\partial x_{m+g}} X_k(b_v^i) \equiv \frac{\partial}{\partial x_{m-g}} X_i(b_v^k), \\ i, k = 1, 2, \dots, m, \quad i \neq k, \\ v = 1, 2, \dots, n, \quad g = 1, 2, \dots, n,$$

$$(80) \quad \frac{\partial}{\partial x_{m+g}} X_k(b_v^i) = \frac{\partial^2 b_v^i}{\partial x_k \partial x_{m-g}} + \sum_{h=1}^n \left(b_h^k \frac{\partial^2 b_v^i}{\partial x_{m+h} \partial x_{m-g}} + \frac{\partial b_h^k}{\partial x_{m-g}} \frac{\partial b_v^i}{\partial x_{m+h}} \right), \\ \frac{\partial}{\partial x_{m-g}} X_i(b_v^k) = \frac{\partial^2 b_v^k}{\partial x_i \partial x_{m+g}} + \sum_{h=1}^n \left(b_h^i \frac{\partial^2 b_v^k}{\partial x_{m+h} \partial x_{m+g}} + \frac{\partial b_h^i}{\partial x_{m+g}} \frac{\partial b_v^k}{\partial x_{m+h}} \right),$$

le système (75)-(76) est jacobien. Pour s'en convaincre, prenons deux équations (76), n'importe lesquelles :

$$(81) \quad \begin{aligned} Z_i(f) &= X_i(f) + \sum_{h=1}^n Y(b_h^i) \frac{\partial f}{\partial a_h} = 0, \\ Z_k(f) &= X_k(f) + \sum_{h=1}^n Y(b_h^k) \frac{\partial f}{\partial a_h} = 0. \end{aligned}$$

D'après les relations (3)-(77) nous voyons immédiatement que :

$$(82) \quad \begin{aligned} Z_k(b_v^i) &\equiv Z_i(b_v^k), \\ i, k &= 1, 2, \dots, m, \quad i \neq k, \\ v &= 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

parce que :

$$(83) \quad Z_k(b_v^i) \equiv X_k(b_v^i), \quad Z_i(b_v^k) \equiv X_i(b_v^k).$$

Aux identités :

$$(84) \quad \begin{aligned} Z_k Y(b_v^i) &\equiv Z_i Y(b_v^k), \\ i, k &= 1, 2, \dots, m, \quad i \neq k, \\ v &= 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

nous parviendrons de la manière suivante.

Dès que :

$$\begin{aligned} Z_k Y(b_v^i) &= X_k Y(b_v^i) + \sum_{h=1}^n Y(b_h^k) \frac{\partial}{\partial a_h} Y(b_v^i), \\ Y(b_v^i) &= \sum_{g=1}^n a_g \frac{\partial b_v^i}{\partial x_{m-g}}, \quad \frac{\partial Y(b_v^i)}{\partial a_h} = \frac{\partial b_v^i}{\partial x_{m-h}}, \quad Y(b_h^k) = \sum_{g=1}^n a_g \frac{\partial b_h^k}{\partial x_{m+g}}, \\ \sum_{h=1}^n Y(b_h^k) \frac{\partial}{\partial a_h} Y(b_v^i) &= \sum_{g=1}^n \sum_{h=1}^n a_g \frac{\partial b_h^k}{\partial x_{m+g}} \frac{\partial b_v^i}{\partial x_{m-h}}, \\ X_k Y(b_v^i) &= \sum_{g=1}^n a_g X_k \left(\frac{\partial b_v^i}{\partial x_{m-g}} \right) \stackrel{(*)}{=} \sum_{g=1}^n a_g \left(\frac{\partial^2 b_v^i}{\partial x_k \partial x_{m+g}} + \sum_{h=1}^n b_h^k \frac{\partial b_v^i}{\partial x_{m+h} \partial x_{m+g}} \right), \\ Z_k Y(b_v^i) &= \sum_{g=1}^n a_g \left[\frac{\partial^2 b_v^i}{\partial x_k \partial x_{m-g}} + \sum_{h=1}^n \left(b_h^k \frac{\partial^2 b_v^i}{\partial x_{m+h} \partial x_{m+g}} + \frac{\partial b_h^k}{\partial x_{m+g}} \frac{\partial b_v^i}{\partial x_{m+h}} \right) \right], \end{aligned}$$

(*) On doit avoir égard à ce que, dans les équations (81), a_1, a_2, \dots, a_n sont des variables indépendantes.

nous avons, par (78), l'égalité :

$$(85) \quad Z_k Y(b^i) = \sum_{g=1}^n a_g \frac{\partial X_k(b^i)}{\partial x_{m-g}}$$

et l'égalité analogue :

$$(86) \quad Z_i Y(b^k) = \sum_{g=1}^n a_g \frac{\partial X_i(b^k)}{\partial x_{m-g}}$$

De là on voit qu'avec les conditions (77) les identités (84) sont justes.

Ainsi, aux conditions (3)-(77) le système (75)-(76) est jacobien ; le système (74) a toujours une solution.

Attendu que, dans la relation (68), entre la constante arbitraire a , il suffit de prendre pour les coefficients (69), en intégrant le système (1)-(65), par la méthode exposée, la solution particulière du système (74), ne contenant pas de constantes arbitraires.

Exemple. — Intégrons le système (x_i) - (γ_i) :

$$(87) \quad \begin{aligned} X_3(z) &= p_3 + \frac{x_2}{x_4} p_2 + p_6 = 0, \\ X_4(z) &= p_4 - \frac{(x_2 - x_5)}{x_4} p_2 + p_6 = 0, \\ X_5(z) &= p_5 + \frac{x_6}{x_4} p_2 - \frac{x_4}{x_5} p_1 = 0. \end{aligned}$$

En ajoutant l'égalité :

$$(88) \quad Y(z) = a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_6 p_6 = a,$$

exigeons que les équations (δ_1) , (δ_2) , fournissent un système complet.

Les coefficients :

$$(89) \quad a_1, a_2, a_6$$

doivent être les solutions du système (74), qui d'après :

$$(90) \quad \begin{aligned} b_1^3 &= 0, & b_2^3 &= \frac{x_5}{x_4}, & b_6^3 &= 1, \\ b_1^4 &= 0, & b_2^4 &= -\frac{(x_2 - x_5)}{x_4}, & b_6^4 &= 1, \\ b_1^5 &= -\frac{x_4}{x_5}, & b_2^5 &= \frac{x_6}{x_4}, & b_6^5 &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 & Y(b_1^3) = 0, & Y(b_2^3) = 0, & Y(b_6^3) = 0. \\
 (\delta_3) \quad & Y(b_1^4) = 0, & Y(b_2^4) = -\frac{a_2}{x_4}, & Y(b_6^4) = 0. \\
 & Y(b_1^5) = -\frac{a_1}{x_5}, & Y(b_2^5) = \frac{a_6}{x_4}, & Y(b_6^5) = 0 (*),
 \end{aligned}$$

à l'aspect :

$$\begin{aligned}
 & X_3(a_1) = 0, & X_3(a_2) = 0, & X_3(a_6) = 0, \\
 (\delta_6) \quad & X_4(a_1) = 0, & X_4(a_2) = -\frac{a_2}{x_4}, & X_4(a_6) = 0, \\
 & X_5(a_1) = -\frac{a_1}{x_5}, & X_5(a_2) = \frac{a_6}{x_4}, & X_5(a_6) = 0.
 \end{aligned}$$

Le système (δ_6) possède la solution particulière évidente à deux constantes arbitraires λ, μ :

$$(\delta_7) \quad a_1 = \frac{\lambda}{x_5}, \quad a_2 = \frac{\mu}{x_4}, \quad a_6 = 0,$$

qui permet d'écrire deux solutions particulières tout à fait simples, ne contenant pas de constantes arbitraires :

$$\begin{aligned}
 (\delta_8) \quad & a_1 = 0, & a_2 = \frac{1}{x_4}, & a_6 = 0, \\
 (\delta_9) \quad & a_1 = \frac{1}{x_5}, & a_2 = 0, & a_6 = 0.
 \end{aligned}$$

Aux solutions $(\delta_8), (\delta_9)$, correspondent les égalités (δ_{10}) :

$$(\delta_{10}) \quad p_2 = ax_4, \quad p_1 = ax_5,$$

identiques aux deux premières (γ_{10}) .

Profitant de la première relation (δ_{10}) , nous passerons du système $(\alpha_1)-(\gamma_1)-(\delta_1)$ au système (γ_{10}) et ainsi de suite.

Si nous voulons trouver l'intégrale générale du système (δ_6) , ou un plus grand

(*) Les indices inférieurs des coefficients b et les indices des coefficients a sont les mêmes que les indices des dérivées correspondantes p .

nombre de solutions particulières que l'on peut remarquer immédiatement, nous serons obligé d'intégrer le système (76) :

$$\begin{aligned} \Xi(f) &= \frac{\partial f}{\partial x_3} + \frac{x_3}{x_4} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_6} = 0, \\ (\delta_{11}) \quad Y(f) &= \frac{\partial f}{\partial x_4} - \frac{x_2 - x_5}{x_4} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_6} - \frac{a_2}{x_4} \frac{\partial f}{\partial a_2} = 0, \\ Z(f) &= \frac{\partial f}{\partial x_5} + \frac{x_6}{x_4} \frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{x_4}{x_5} \frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{a_1}{x_5} \frac{\partial f}{\partial a_1} + \frac{a_2}{x_4} \frac{\partial f}{\partial a_2} = 0. \end{aligned}$$

Les intégrales de la première équation (δ_{11}) sont :

$$(\delta_{12}) \quad \varphi_3 = x_1, \quad \varphi_4 = x_4, \quad \varphi_5 = x_5, \quad \varphi_6 = a_1, \quad \varphi_7 = a_2, \quad \varphi_8 = a_3$$

et

$$(\delta_{13}) \quad \varphi_1 = x_2 x_4 - x_3 x_5, \quad \varphi_8 = x_6 - x_3,$$

φ_1, φ_3 étant les intégrales du système :

$$(\delta_{14}) \quad dx_2 = \frac{x_4 dx_3}{x_5} = dx_6.$$

Attendu que :

$$\begin{aligned} (\delta_{15}) \quad Y(\varphi_1) &= \varphi_3, & Y(\varphi_3) &= 1, & Y(\varphi_4) &= 1, & Y(\varphi_7) &= -\frac{\varphi_7}{\varphi_4}, \\ Y(\varphi_3) &= Y(\varphi_5) = Y(\varphi_6) = Y(\varphi_8) = 0. \end{aligned}$$

les intégrales communes aux deux premières équations (δ_{11}) sont :

$$(\delta_{16}) \quad \psi_4 = \varphi_3, \quad \psi_5 = \varphi_5, \quad \psi_6 = \varphi_6, \quad \psi_7 = \varphi_8$$

et

$$(\delta_{17}) \quad \psi_1 = \varphi_1 - \varphi_2 \varphi_5, \quad \psi_2 = \varphi_4 - \varphi_2, \quad \psi_3 = \varphi_4 \varphi_7,$$

ψ_1, ψ_2, ψ_3 étant les intégrales de l'équation :

$$(\delta_{18}) \quad Y(\theta) = \varphi_5 \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_2} + \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_4} - \frac{\varphi_7}{\varphi_4} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_7} = 0$$

ou, ce qui est la même chose, du système :

$$(\delta_{19}) \quad \frac{d\varphi_1}{\varphi_5} = d\varphi_2 = d\varphi_4 = \frac{\varphi_7 d\varphi_7}{-\varphi_7}.$$

Vu que

$$\begin{aligned}
 & Z(\varphi_1) = \varphi_2, & Z(\varphi_1) &= -\frac{\varphi_3}{\varphi_5}, \\
 (\delta_{20}) \quad & Z(\varphi_3) = 1, & Z(\varphi_6) &= -\frac{\varphi_6}{\varphi_5}, & Z(\varphi_7) &= \frac{\varphi_8}{\varphi_4}, \\
 & Z(\varphi_2) = Z(\varphi_4) = Z(\varphi_8) = 0
 \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned}
 (\delta_{21}) \quad & Z(\psi_3) = \psi_7, & Z(\psi_4) &= -\frac{\psi_4}{\psi_5}, & Z(\psi_5) &= 1, & Z(\psi_6) &= -\frac{\psi_6}{\psi_5}, \\
 & Z(\psi_1) = Z(\psi_2) = Z(\psi_7) = 0,
 \end{aligned}$$

les intégrales communes aux trois équations du système (δ_{11}) sont :

$$\begin{aligned}
 (\delta_{22}) \quad & \gamma_4 = \psi_4 = \varphi_1 - \varphi_2 \varphi_5 = x_2 x_4 - x_5 x_6, \\
 & \gamma_5 = \psi_2 = \varphi_4 - \varphi_2 = -(x_6 - x_3 - x_4), \\
 & \gamma_6 = \psi_7 = \varphi_8 = a_6
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 (\delta_{23}) \quad & \gamma_1 = \psi_3 - \psi_5 \psi_7 = \varphi_4 \varphi_7 - \varphi_5 \varphi_8 = a_2 x_4 - a_6 x_5, \\
 & \gamma_2 = \psi_4 \psi_5 = \varphi_3 \varphi_5 = x_1 x_5, \\
 & \gamma_3 = \psi_5 \psi_6 = \varphi_5 \varphi_6 = a_1 x_5,
 \end{aligned}$$

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ étant les intégrales de l'équation :

$$(\delta_{24}) \quad Z(\theta) = \psi_7 \frac{\partial \theta}{\partial \psi_3} - \frac{\psi_4}{\psi_5} \frac{\partial \theta}{\partial \psi_4} + \frac{\partial \theta}{\partial \psi_5} - \frac{\psi_6}{\psi_5} \frac{\partial \theta}{\partial \psi_6} = 0,$$

ou, ce qui est la même chose, du système :

$$(\delta_{25}) \quad \frac{d\psi_3}{\psi_7} = \frac{\psi_5 d\psi_6}{-\psi_4} = d\psi_5 = \frac{\psi_5 d\psi_6}{-\psi_6}.$$

Il n'est pas difficile de voir que les coefficients (δ_3) peuvent affecter les équations qui contiennent trois constantes arbitraires λ, μ, ν ;

$$(\delta_{26}) \quad a_1 x_5 = \lambda, \quad a_2 x_4 - a_6 x_5 = \mu, \quad a_6 = \nu.$$

En substituant leurs expressions :

$$(\delta_{27}) \quad a_1 = \frac{\lambda}{x_5}, \quad a_2 = \frac{\mu + \nu x_5}{x_4}, \quad a_6 = \nu$$

dans la relation (δ_2) :

$$(\delta_{2a}) \quad \frac{\lambda}{x_5} p_1 + \frac{\mu + \nu x_5}{x_4} p_2 + \nu p_3 = a,$$

il est commode de prendre la connexion (δ_2) dans une des formes très simples :

$$(\delta_{2b}) \quad \frac{p_1}{x_5} = a, \quad \frac{p_2}{x_4} = a, \quad p_3 + \frac{x_5}{x_4} p_2 = a;$$

ces formes sont identiques aux formes (γ_{1a}) .

*
* *

Enfin, faisons la supposition que l'égalité (66) est linéaire par rapport aux dérivées p_{m+1}, \dots, p_{m+n} et ne contient pas la constante arbitraire a . En admettant que $a = 0$, réduisons l'équation (66) en a_1 et introduisons, pour les coefficients, de nouvelles significations $-v_2, -v_3, \dots, -v_n$. Alors

$$(87) \quad f = Y(z) = p_{m+1} - v_2 p_{m+2} - v_3 p_{m+3} - \dots - v_n p_{m+n} = 0,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(88) \quad p_{m+1} - \sum_{h=2}^n v_h p_{m+h} = 0.$$

Donc

$$(89) \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} = - \sum_{h=2}^n \frac{\partial v_h}{\partial x_i} p_{m+h},$$

$$i = 1, 2, \dots, m;$$

$$(90) \quad \frac{\partial f}{\partial x_{m+j}} = - \sum_{h=2}^n \frac{\partial v_h}{\partial x_{m+j}} p_{m+h},$$

$$j = 1, 2, \dots, n;$$

$$(91) \quad \frac{\partial f}{\partial p_{m+1}} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial p_{m+j}} = -v_j,$$

$$j = 2, 3, \dots, n.$$

Ayant substitué (89), (90), (91) dans (67), nous trouvons les relations :

$$(92) \quad \sum_{h=2}^n \frac{\partial v_h}{\partial x_i} p_{m+h} + \sum_{j=1}^n b_j^i \sum_{h=2}^n \frac{\partial v_h}{\partial x_{m+j}} p_{m+h} - \sum_{j=2}^n v_j \sum_{h=1}^n \frac{\partial b_h^i}{\partial x_{m+j}} p_{m+h} + \sum_{h=1}^n \frac{\partial b_h^i}{\partial x_{m+1}} p_{m+h} = 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, m.$$

Grâce à la relation (87) :

$$(93) \quad \sum_{h=1}^n \frac{\partial b_h^i}{\partial x_{m+j}} p_{m+h} = \sum_{h=2}^n \left(v_h \frac{\partial b_h^i}{\partial x_{m+j}} + \frac{\partial b_h^i}{\partial x_{m+j}} \right) p_{m+h},$$

$$(94) \quad - \sum_{h=1}^n \frac{\partial b_h^i}{\partial x_{m+1}} p_{m+h} = - \sum_{h=2}^n \left(v_h \frac{\partial b_h^i}{\partial x_{m+1}} + \frac{\partial b_h^i}{\partial x_{m+1}} \right) p_{m+h}.$$

et les relations (92) deviennent :

$$(95) \quad \sum_{h=2}^n \left[\frac{\partial v_h}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^n b_j^i \frac{\partial v_h}{\partial x_{m+j}} - \sum_{j=2}^n v_j \left(v_h \frac{\partial b_j^i}{\partial x_{m+j}} + \frac{\partial b_j^i}{\partial x_{m+j}} \right) + \left(v_h \frac{\partial b_h^i}{\partial x_{m+1}} + \frac{\partial b_h^i}{\partial x_{m+1}} \right) \right] p_{m+h} = 0,$$

$i = 1, 2, \dots, m,$

ou, ce qui est la même chose,

$$(96) \quad \sum_{h=2}^n [X_i(v_h) + v_h Y(b_h^i) + Y(b_h^i)] p_{m+h} = 0,$$

$i = 1, 2, \dots, m.$

Les dérivées $p_{m+2}, p_{m+3}, \dots, p_{m+n}$ sont indépendantes, c'est pourquoi nous essaierons de satisfaire aux systèmes (95), (96) en écrivant les coefficients v_1, v_2, \dots, v_n de telle manière que soient remplies les égalités du système :

$$(97) \quad \begin{aligned} X_1(v_h) &= -v_h Y(b_h^1) - Y(b_h^1), \\ X_2(v_h) &= -v_h Y(b_h^2) - Y(b_h^2), \\ &\dots \dots \dots \\ X_m(v_h) &= -v_h Y(b_h^m) - Y(b_h^m), \\ &h = 2, 3, \dots, n. \end{aligned}$$

Le système (97) n'est pas autre chose que le système (12) de la méthode spéciale d'intégration des systèmes complets d'équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue. Il représente le système jacobien généralisé. L'existence de sa solution est démontrée par nous.

Travaux de M. G. Pfeiffer (1923-1933) liés au sujet.

Méthode spéciale d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre
(Comptes rendus de l'Acad. des Sc. de Paris, t. 176, pp. 62-64, 1923).

Sur une méthode spéciale d'intégration des équations et des systèmes d'équations non

- linéaires aux dérivées partielles du premier ordre* (Bull. de l'Acad. des Sc. de l'Ukraine, T. I., F. I., pp. 41-59, 1923).
- Sur la permutation des solutions d'une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre* (Bull. des Sc. math., s. 2, t. LII, octobre 1928).
- Quelques additions au problème de M. A. Buhl* (Atti del Congr. Intern. dei Mathem.; Bologna, 1928, t. VI, pp. 49-53).
- Théorèmes expliquant une série de questions dans le problème de la permutation des solutions d'une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre* (Comptes rendus de l'Acad. des Sc. de l'U. R. S. S., 1929, fasc. 8, pp. 177-182).
- Sur les opérateurs d'un système complet d'équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue* (Comptes rendus de l'Acad. des Sc. de Paris, t. 190, pp. 909-911, 1930).
- Sur les intégrales complètes des équations linéaires et des systèmes d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue* (Ann. de Toulouse, s. 3, t. XXII, pp. 147-169, 1930).
- Construction de l'opérateur général permutant les intégrales d'une équation linéaire et homogène aux dérivées partielles du premier ordre* (Comptes rendus de l'Acad. des Sc. de Paris, t. 192, pp. 660-662, 1931).
- Sur la permutation des intégrales d'une équation linéaire et homogène aux dérivées partielles du premier ordre* (Ann. de Toulouse, s. 3, t. XXIII, pp. 139-181, 1931).
- La généralisation des méthodes de Jacobi pour l'intégration des systèmes complets d'équations linéaires et de Jacobi-Mayer pour l'intégration des systèmes complets d'équations non linéaires* (Verhandl. des Intern. Math. Kongresses Zürich, B. II, Ss. 82-83, 1932).
- La généralisation de la méthode de Jacobi pour l'intégration des systèmes complets d'équations linéaires et homogènes; généralisation des recherches correspondantes de Clebsch* (Acta math., B. 61, pp. 203-238, 1933).
-