M. MENDES

Recherches sur le problème des *n* corps à masses variables

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 27 (1935), p. 1-169
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1935_3_27__1_0>

ANNALES
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE,
POUR LES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES.

RECHERCHES SUR LE PROBLÈME DES *n* CORPS A MASSES VARIABLES

PAR M. M. MENDES

INTRODUCTION

Le problème des deux corps à masses variables présente déjà une abondante bibliographie. Citons, en particulier, les mémoires des géomètres italiens tels qu'Armellini, Levi-Civita, etc... qui, faisant sur les masses des hypothèses particulières, se sont attachés surtout à la forme des trajectoires relatives d'un corps par rapport à l'autre.

Stepanoff, dans un mémoire du *Russian Astronomical Journal* (1930), démontre ce théorème, qui est en quelque sorte une réciproque à ces travaux :

« Quelle que soit la courbe $\rho = f(\theta)$ (en coordonnées polaires), tournant sa concavité vers le point fixe attirant, et ayant en chaque point une courbure déterminée, il existe une loi de variation continue de la masse telle que cette courbe sera décrite par le point attiré sous l'action de cette masse. »

Enfin, dans un mémoire récent, M. Mineur, reprenant la question à un point de vue nouveau et utilisant la méthode de la variation des constantes, établit les équations qui fournissent les variations des éléments elliptiques d'une orbite osculatric obtenue en fixant les masses à l'instant considéré.

Le problème des n corps ($n > 2$), qui fait l'objet du présent travail, n'a par contre pas encore été étudié à notre connaissance.

Nous exposerons rapidement les principaux résultats obtenus.

Tout d'abord, nous cherchons une limite inférieure des rayons de convergence des séries en $t - t_0$ suivant lesquelles on peut développer les coordonnées et leurs dérivées au voisinage d'un instant t_0 pour lequel les distances mutuelles sont toutes plus grandes que zéro.

Ce résultat nous conduit à une comparaison, à la fois aux points de vue analytique et mécanique, avec le problème ordinaire des n corps; il semble ici impossible d'affirmer dans le cas général que le mouvement ne peut cesser d'être régulier à un instant t_1 que si la plus petite distance tend vers zéro lorsqu'on approche de cet instant. Nous avons démontré seulement que la limite inférieure des distances est zéro pour les valeurs du temps voisines de t_1.

Une application au système solaire nous conduit à pouvoir affirmer pour les séries s'introduisant en Mécanique céleste un rayon de convergence au moins égal à une heure environ; on voit là un exemple de la difficulté d'application à l'Astronomie du résultat précédent, ce qui confirme les conclusions obtenues par M. Belorizky dans sa Thèse.

Dans le chapitre II, après avoir indiqué quelques formes de la méthode des approximations successives, nous en faisons l'application en comparant, d'une part, le mouvement à masses variables avec un mouvement à masses fixes obtenu en immobilisant les masses à un certain instant et en cherchant pendant un intervalle de temps que nous déterminons une limite supérieure des différences entre les coordonnées et leurs dérivées dans les deux mouvements, et, d'autre part, en considérant le cas de masses qui tendent vers des limites finies lorsque le temps croît indéfiniment, les différences entre les masses et leurs limites étant suffisamment petites.

D'autre part, nous généralisons le théorème de Poincaré relatif à la possibilité de développer suivant un paramètre les solutions d'une équation différentielle dépendant de ce paramètre au cas où celui-ci est remplacé par une fonction de la variable indépendante.

Au chapitre III, nous montrons principalement comment la combinaison des forces vives, quoique non intégrable, peut fournir des renseignements surtout lorsque les masses sont toujours croissantes ou toujours décroissantes, et nous permet une classification des divers cas possibles.

Nous énonçons également un théorème relatif aux masses telles que les produits $m_i t^{\frac{1}{p}}$ soient holomorphes pour t infini, dont la loi d'Eddington sur la décroissance de masse des étoiles nous offre une application à l'Astronomie.

Partant ensuite de la solution, supposée connue, du problème des n corps, nous en déduisons par la méthode de la variation des constantes la solution du problème à masses variables, et cela nous conduit à une application qui généralise en quelque sorte le théorème de Stepanoff.

Nous considérons dans le même chapitre IV le mouvement relatif des planètes par rapport au Soleil et, reprenant la méthode indiquée par M. Mineur pour le cas de deux corps, nous établissons les formules donnant les variations des éléments elliptiques d'une orbite osculatrice.

Au chapitre V, nous reprenons la plupart des résultats antérieurs en supposant que la loi du mouvement est $\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}$, et non pas $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$, comme M. Levi-Civita en a indiqué la possibilité.

La seconde partie de ce travail (chap. VI à XI) est consacrée au cas où les masses, restant dans des rapports constants, sont de la forme

$$m_i = \mu_i \psi(t), \qquad (\mu_i = \text{const.}).$$

Ce problème se rapproche le plus du problème à masses fixes, grâce à l'existence des intégrales du mouvement du centre de gravité et des intégrales des aires.

Pour

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{A}t^2 + \mathrm{B}t + \mathrm{C}}},$$

on a même une intégrale des forces vives généralisée.

De plus, les équations du mouvement peuvent se mettre sous la forme canonique.

Le problème des deux corps en particulier rentre dans ce cas; nous l'avons traité au chapitre IX, puis nous donnons la généralisation au chapitre X pour le cas de trois corps en suivant la méthode de Tisserand.

Dans une troisième partie, nous appliquons les résultats relatifs au problème des deux corps pour étudier comment varient le grand axe et l'excentricité dans le mouvement d'une masse infiniment petite placée dans le champ d'une Céphéide. Nous traitons les équations par approximations successives et, devant la complication des coefficients, cherchons des résultats de moyennes.

D'autre part, Tisserand a signalé l'intérêt qu'il y aurait à tenir compte dans l'étude du mouvement d'une comète soumise à une résistance du milieu, de la décroissance de sa masse. Nous traitons cette question au chapitre XIII, en supposant la résistance proportionnelle à une puissance de la vitesse et inversement proportionnelle à une puissance de la distance au Soleil, selon l'hypothèse d'Encke.

L'idée de ce travail m'a été donnée par M. Mineur; il n'a cessé de me soutenir de ses conseils pendant tout le cours de mes recherches. Je lui en exprime ici ma plus vive gratitude.

Ce travail a été fait à l'Observatoire de Besançon. Je remercie M. R. Baillaud directeur de cet Observatoire, pour l'intérêt qu'il a bien voulu y porter.

PREMIÈRE PARTIE

GÉNÉRALITÉS

CHAPITRE PREMIER

Détermination d'une limite inférieure des rayons de convergence des développements des coordonnées au voisinage d'un instant où les distances entre les corps sont toutes plus grandes que zéro.

1. — En supposant le coefficient d'attraction égal à l'unité, les équations du mouvement peuvent s'écrire :

$$\frac{dx_i}{dt} = x'_i, \quad \dots \tag{1}$$

$$\frac{dx'_i}{dt} = \sum_{j \neq i} m_j \frac{x_j - x_i}{r^3_{ij}}, \quad \dots \tag{2}$$

Nous supposerons des conditions initiales telles que, les coordonnées et leurs dérivées ayant des valeurs réelles finies, les distances mutuelles r_{ij} des corps soient toutes positives, et soit 14λ une limite inférieure, de sorte que l'on a :

$$r^0_{ij} \geqslant 14\lambda. \tag{3}$$

Nous ferons de plus l'hypothèse que, pendant tout l'intervalle de temps $(-\infty, +\infty)$ les masses, qui sont fonctions holomorphes du temps, restent finies, et nous désignerons par μ le maximum de leur somme.

Les théorèmes d'existence des solutions des équations différentielles montrent alors qu'il existe un système de solutions holomorphes pendant un certain intervalle de temps autour de l'instant initial et prenant à cet instant les valeurs initiales données. Ces solutions sont développables en séries ordonnées suivant les puissances positives de $t - t_0$. Nous nous proposons de chercher une limite inférieure des rayons de convergence de ces séries.

Nous utilisons pour cela le théorème fondamental[1] :

Soient les équations :

$$\frac{dq_i}{dt} = Q_i(t, q) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les Q_i *sont des fonctions développables suivant les puissances croissantes de* $t - t_0$ *et des* $q_i - q_i^0$ *en séries qui convergent tant que* t *et les* q_i *vérifient les inégalités*

$$|t - t_0| < a, \qquad |q_i - q_i^0| < b_i.$$

Supposons qu'il existe des quantités $\mathbf{M}_i$ *telles que l'on ait :*

$$|Q_i(t, q) - Q_i(t_0, q^0)| < \mathbf{M}_i$$

tant que les variables vérifient les inégalités précédentes.

Dans ces conditions, le système donné admet une et une seule solution telle que les inconnues q_i *tendent vers les valeurs finies données* q_i^0 *quand* t *tend vers* t_0, *les inconnues étant développables suivant les puissances croisantes de* $t - t_0$ *en séries qui convergent au moins tant que l'on a*

$$|t - t_0| < \tau,$$

τ *désignant la plus petite des quantités* a *et* $\frac{b_i}{\mathbf{M}_i}$. *De plus, les* q_i *vérifient les inégalités*

$$|q_i - q_i^0| < b_i$$

tant que t *vérifie l'inégalité précédente.*

Pour appliquer ce théorème au système (1), (2), nous chercherons d'abord des limites supérieures des valeurs que prennent les modules des seconds membres de ces équations pour les valeurs des $x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i, t$, vérifiant les inégalités :

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} |x_i - x_i^0|, \quad |y_i - y_i^0|, \quad |z_i - z_i^0| < \lambda_0, \\ |x'_i - x_i'^0|, \quad |y'_i - y_i'^0|, \quad |z'_i - z_i'^0| < \lambda'_0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad |t - t_0| < \tau, \end{array} \right.$$

$\tau, \lambda_0, \lambda'_0$ désignant des quantités positives que l'on doit déterminer de telle sorte que les développements de ces seconds membres suivant les puissances de $t - t_0$, $x_i - x^0_i, \ldots x'_i - x'^0_i, \ldots\ldots$ soient convergents tant que les conditions (4) sont vérifiées.

[1] Voir PICARD. *Traité d'Analyse*, tome II, page 291.

Cherchons à déterminer λ'_0 et τ de façon que les seconds membres de (2) soient développables en séries comme on vient de le dire. Remarquons qu'ils le sont tant que les quotients $\dfrac{1}{r_{ij}}$ le sont eux-mêmes.

Les dérivées x'_i, y'_i, z'_i, ayant des valeurs finies pour $t = t_0$, leurs valeurs absolues ont une limite supérieure que nous désignerons par ρ.

Les inégalités

$$|x'_i - x'^0_i| < \lambda'_0$$

donnent :

$$|x'_i| < |x'^0_i| + \lambda'_0 \leqslant \rho + \lambda'_0,$$

d'où, en intégrant à partir de t_0 pendant un intervalle de temps inférieur à τ :

$$|x_i - x^0_i| < (\rho + \lambda'_0)\tau,$$

et de même pour les autres coordonnées.

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} r^2_{ij} = (r^0_{ij})^2 &+ 2(x^0_j - x^0_i)[(x_j - x_i) - (x^0_j - x^0_i)] + [(x_j - x^0_j) - (x_i - x^0_i)]^2 \\ &+ 2(y^0_j - y^0_i)[(y_j - y_i) - (y^0_j - y^0_i)] + [(y_j - y^0_j) - (y_i - y^0_i)]^2 \\ &+ 2(z^0_j - z^0_i)[(z_j - z_i) - (z^0_j - z^0_i)] + [(z_j - z^0_j) - (z_i - z^0_i)]^2, \end{aligned}$$

et comme : $|x^0_j - x^0_i|$, $|y^0_j - y^0_i|$, $|z^0_j - z^0_i|$ sont inférieurs ou égaux à r^0_{ij}, r^2_{ij} peut se mettre sous la forme :

$$(r^0_{ij})^2 + \mathrm{P}(x_i - x^0_i, \ \ldots, \ x_j - x^0_j, \ \ldots),$$

P étant un polynôme en $x_i - x^0_i \ \ldots, \ x_j - x^0_j, \ldots$, dont le module, même lorsqu'on y remplace chaque terme par sa valeur absolue, reste inférieur à l'expression

$$12 r^0_{ij}(\rho + \lambda'_0)\tau + 12(\rho + \lambda'_0)^2\tau^2$$

tant que

$$|x_i - x^0_i|, \ |y_i - y^0_i|, \ |z_i - z^0_i| < (\rho + \lambda'_0)\tau.$$

Donc $\dfrac{1}{r_{ij}}$ est certainement développable suivant les puissances croissantes des différences $x_i - x^0_i$, $y_i - y^0_i$, $z_i - z^0_i$, tant que les valeurs absolues de ces différences sont inférieures à $(\rho + \lambda'_0)\tau$, si l'on détermine λ'_0 et τ de manière que

$$12 r^0_{ij}(\rho + \lambda'_0)\tau + 12(\rho + \lambda'_0)^2\tau^2 < (r^0_{ij})^2$$

ou

$$(\rho + \lambda'_0)\tau < \frac{r^0_{ij}}{6 + 4\sqrt{3}}.$$

Nous poserons

$$(5) \qquad (\rho + \lambda'_0)\tau = \frac{r^0_{ij}}{14},$$

relation qui vérifie l'inégalité précédente et qui est d'ailleurs choisie de manière à rendre rationnels les coefficients dans les formules qui suivent.

On voit alors que l'on a

$$r_{ij} > \sqrt{(r^0_{ij})^2 - 12\, r^0_{ij}\frac{r^0_{ij}}{14} - 12\left(\frac{r^0_{ij}}{14}\right)^2} = \frac{2}{7}\, r^0_{ij},$$

$$|x_j - x_i| \leqslant |x^0_j - x^0_i| + |x_i - x^0_i| + |x_j - x^0_j| < \frac{8}{7}\, r^0_{ij},$$

et, par suite

$$\left|\frac{x_j - x_i}{r^3_{ij}}\right| < \frac{1}{4(\rho + \lambda'_0)^2\tau^2},$$

tant que x_i, y_i, z_i vérifient les inégalités

$$|x_i - x^0_i|,\quad |y_i - y^0_i|,\quad |z_i - z^0_i| < (\rho + \lambda'_0)\tau,$$

ou, *a fortiori*, d'après (3) et (5)

$$(6) \qquad |x_i - x^0_i|,\quad |y_i - y^0_i|,\quad |z_i - z^0_i| < \lambda,$$

inégalités que nous substituerons désormais aux inégalités correspondantes (4).

Nous prendrons donc $\lambda_0 = \lambda$. Dans ces conditions, on voit immédiatement que les expressions des dérivées $\frac{dx'_i}{dt}$, $\frac{dy'_i}{dt}$, $\frac{dz'_i}{dt}$ ont toutes leurs modules inférieurs à $\frac{\mu}{4\lambda^2}$, d'où l'on tire, en intégrant à partir de t_0 pendant un intervalle de temps inférieur à τ :

$$|x'_i - x'^0_i|,\quad |y'_i - y'^0_i|,\quad |z'_i - z'^0_i| < \frac{\mu\tau}{4\lambda^2}.$$

Ces inégalités jointes à

$$(\rho + \lambda'_0)\tau \geqslant \lambda$$

ou

$$\lambda'_0 \geqslant \frac{\lambda}{\tau} - \rho$$

nous amènent à prendre pour τ la racine positive de l'équation

$$\frac{\mu\tau}{4\lambda^2} = \frac{\lambda}{\tau} - \rho,$$

soit

$$\tau = \frac{-2\lambda^2\rho + 2\lambda\sqrt{\lambda(\lambda\rho^2 + \mu)}}{\mu},$$

et nous prendrons

$$\lambda'_0 = \frac{\mu\tau}{4\lambda^2}.$$

En définitive, nous prendrons

$$\lambda_0 = \lambda, \qquad \lambda'_0 = \frac{\mu\tau}{4\lambda^2}, \qquad \tau = \frac{-2\lambda^2\rho + 2\lambda\sqrt{\lambda(\lambda\rho^2 + \mu)}}{\mu}.$$

Dans ces conditions, les seconds membres des équations (1), (2), auront des modules aux plus égaux aux quantités

$$\rho + \frac{\mu\tau}{4\lambda^2}, \qquad \frac{\mu}{4\lambda^2}.$$

Donc les développements en séries dont il est question seront convergents tant que t restera dans un intervalle de part et d'autre de t_0 inférieur ou égal à la plus petite des quantités

$$\tau, \qquad \frac{\lambda}{\rho + \frac{\mu\tau}{4\lambda^2}}, \qquad \frac{\frac{\mu\tau}{4\lambda^2}}{\frac{\mu}{4\lambda^2}},$$

c'est-à-dire τ, commune valeur de ces rapports.

Nous sommes donc arrivés à la conclusion suivante :

Théorème. — *Si, quand t tend par des valeurs réelles vers une valeur réelle et finie t_0, les coordonnées x_i, y_i, z_i, et leurs dérivées x'_i, y'_i, z'_i, tendent vers les valeurs réelles et finies x^0_i, y^0_i, z^0_i, x'^0_i, y'^0_i, z'^0_i, telles que les r^0_{ij} satisfassent aux inégalités $r^0_{ij} \geqslant 14\lambda > 0$ et les x'^0_i, y'^0_i, z'^0_i, aux inégalités $|x'^0_i|$, $|y'^0_i|$, $|z'^0_i| < \rho$, les* *coordonnées et leurs dérivées par rapport au temps sont développables suivant les puissances croissantes de* $t - t_0$ *en séries qui convergent tant que*

$$(7) \qquad |t-t_0| \leqslant \tau = \frac{-2\lambda^2\rho + 2\lambda\sqrt{\lambda(\lambda\rho^2+\mu)}}{\mu},$$

et les inégalités

$$|x_i - x_i^0|, \quad |y_i - y_i^0|, \quad |z_i - z_i^0| < \lambda$$

auront lieu tant que t *vérifie cette inégalité.*

Les distances r_{ij} étant développables suivant les puissances des différences

$$x_i - x_i^0, \quad y_i - y_i^0, \quad z_i - z_i^0$$

quand les inégalités (6) ont lieu, on voit encore que, sous les conditions admises dans le théorème précédent, les distances r_{ij} sont développables en séries suivant les puissances croissantes de $t - t_0$ qui convergent tant que t vérifie l'inégalité (7).

Nous dirons que le mouvement est régulier dans un intervalle donné si les coordonnées des corps sont des fonctions holomorphes du temps dans cet intervalle.

Remarque. — Si nous supposons que la somme des masses admet une limite supérieure μ, non plus pendant un temps infini, mais pendant un espace de temps au moins égal à T autour de t_0, il est clair que l'on prendra pour τ la valeur la plus petite entre T et $\dfrac{-2\lambda^2\rho + 2\lambda\sqrt{\lambda(\lambda\rho^2+\mu)}}{\mu}$.

2. — Comparaison du résultat précédent avec celui de M. Sundman. — Nous avons utilisé dans ce qui précède une partie de la démonstration qu'a donnée dans son Mémoire des *Acta Mathematica* (tome 36) M. Sundman relativement à la même question pour le problème ordinaire des trois corps. Pour comparer son résultat au nôtre, plaçons-nous dans le cas des masses fixes. Nous prendrons pour μ la somme des masses M, et nous remplacerons ρ par la constante des forces vives.

L'équation des forces vives est :

$$T - U = h.$$

Lorsque t tend vers t_0, $U = \sum \dfrac{m_i m_j}{r_{ij}}$ tend vers $U_0 = \sum \dfrac{m_i m_j}{r_{ij}^0}$ et, d'après l'inégalité (3), on a

$$U_0 \leqslant \sum \frac{m_i m_j}{14\lambda},$$

ou, en vertu de l'inégalité immédiate $\sum m_i m_j < \frac{M^2}{2}$:

$$U_0 < \frac{M^2}{28\lambda}.$$

On a donc :

$$\sum m_i (v_i^0)^2 = 2U_0 + 2h < \frac{M^2}{14\lambda} + 2h,$$

ou, en désignant par m la plus petite masse :

$$m \sum (v_i^0)^2 < \frac{M^2}{14\lambda} + 2h,$$

d'où :

$$|x_i'^0|,\ |y_i'^0|,\ |z_i'^0| < \sqrt{\frac{M^2}{14m\lambda} + \frac{2h}{m}}:$$

on pourra donc prendre

$$\rho = \sqrt{\frac{M^2}{14m\lambda} + \frac{2h}{m}}.$$

Dans le cas de trois corps, on a même :

$$\sum m_i m_j \leqslant \frac{M^2}{3},$$

et l'on peut prendre

$$\rho = \sqrt{\frac{M^2}{21m\lambda} + \frac{2h}{m}}.$$

M. Sundman a pris, en ramenant ses notations aux nôtres :

$$\tau = \frac{\lambda}{2\rho}$$

avec

$$\rho = \sqrt{\frac{M^2}{21m\lambda} + \frac{M^2|h|}{2m_1m_2m_3}}.$$

Si nous adoptons cette même valeur de ρ, posons

$$f(\tau) = M\tau^2 + 4\lambda^2\rho\tau - 4\lambda^3.$$

La valeur que nous avons prise pour τ est la racine positive de $f(\tau) = 0$, et l'on a

$$f\left(\frac{\lambda}{2\rho}\right) = \frac{\lambda^2}{4\rho^2}(M - 8\lambda\rho^2) > 0$$

en vertu de

$$M - 8\lambda\rho^2 = M\left(1 - \frac{8M}{21m} - \frac{4\lambda M|h|}{m_1 m_2 m_3}\right) < 0,$$

puisque $8M > 21m$.

La valeur que nous obtenons pour τ est donc supérieure à celle qu'a adoptée M. Sundman si nous prenons pour ρ la même valeur que lui. Il en est *a fortiori* de même si nous prenons pour ρ la valeur plus petite $\sqrt{\dfrac{M^2}{21m\lambda} + \dfrac{2h}{m}}$.

3. — Remarque. — Si $[x_i(t), y_i(t), z_i(t)]$ est une solution des équations du mouvement,

$$[x_i(t) + at + b, \qquad y_i(t) + ct + d, \qquad z_i(t) + et + f],$$

où a, b, c, d, e, f sont des constantes quelconques, en sera une autre, et toutes ces solutions auront un rayon de convergence égal. Or, passer d'une solution à l'autre revient à ne pas toucher aux distances mutuelles des corps et à ajouter à toutes les vitesses le vecteur constant de projections a, c, e. On pourra donc, avant de faire le calcul de τ, augmenter toutes les vitesses d'un même vecteur. $\dfrac{\partial\tau}{\partial\rho}$ est < 0, donc τ va en diminuant constamment lorsque ρ augmente de 0 à $+\infty$.

Si l'on veut obtenir la plus grande valeur possible pour τ, on choisira ce vecteur constant pour que ρ soit le plus petit possible.

4. — Application astronomique. — Appliquons ce qui précède au système solaire. Nous pouvons, d'après la remarque précédente, négliger la vitesse d'entraînement du système et ne tenir compte que des vitesses relatives des planètes par rapport au Soleil.

Prenons comme unités de longueur, de temps et de masse respectivement la distance de la Terre au Soleil, le jour solaire moyen et la masse du Soleil, pour coefficient d'attraction $f = 3 \times 10^{-4}$.

D'après la troisième loi de Képler, on a

$$\frac{T^2}{a^3} = k^2 = c^{te} \text{ (avec les notations habituelles).}$$

On en déduit que la vitesse de la planète est

$$V = a \times \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{k\sqrt{a}}.$$

La valeur maxima de V sera donc fournie par la planète la plus rapprochée du Soleil, soit Mercure. Les éléments de Mercure sont :

$$a = 0,3, \qquad T = 90,$$

d'où :

$$V = \frac{0,3}{90} \times 2\pi = 0,021.$$

Prenons donc : $\rho = 0{,}03$, puis $\mu = 2$, $14\lambda = 0{,}3$ d'où $\lambda = 0{,}02$. La valeur de τ qui, en donnant à f une valeur quelconque, est égale à

$$\frac{-2\lambda^2\rho + 2\lambda\sqrt{\lambda(\lambda\rho^2 + f\mu)}}{f\mu},$$

donne ici :

$$\tau \# -12 \times 10^{-4} + 0,04,$$

soit une valeur moindre qu'une heure.

Nous voyons là le peu de valeur pratique de la valeur de τ obtenue précédemment : cet exemple ne fait que confirmer les conclusions obtenues par M. Belorizky dans sa Thèse.

5. — Comparaison avec le problème à masses fixes. — Dans le cas des masses fixes, si l'on suppose que les distances r_{ij} aient toutes une limite inférieure positive fixe pour toutes les valeurs de t, y compris l'infini, l'intégrale des forces vives permet de déterminer une valeur de ρ valable quel que soit l'instant t_0 choisi, de sorte que la valeur de τ obtenue précédemment sera constante, quel que soit t_0. On en déduit que les coordonnées des points seront des fonctions holomorphes de t à l'intérieur d'une bande du plan des t dont les bords sont parallèles à l'axe réel et symétriques par rapport à cet axe. On sait que l'on peut développer alors les coordonnées suivant les puissances croissantes de

$$\frac{1 - e^{\frac{\pi}{2\alpha}t}}{1 + e^{\frac{\pi}{2\alpha}t}},$$

2α étant la largeur de la bande.

Dans le cas des masses variables, la seule condition que les r_{ij} aient une limite inférieure positive et non nulle pour toutes les valeurs de t ne suffit pas en général pour affirmer que les composantes des vitesses aient une limite supérieure fixe, de sorte que nous ne sommes pas certains que l'ensemble des valeurs de τ pour toutes les valeurs de t ait une limite inférieure positive et non nulle. Nous pourrons seulement affirmer qu'à chaque valeur finie de t nous pourrons faire correspondre une valeur positive pour τ, de sorte qu'on pourra développer les coordonnées en séries de polynômes.

6. — La valeur de τ trouvée précédemment entraîne encore une différence entre le problème à masses fixes et le problème à masses variables.

On démontre en effet que la constance de τ entraîne dans le problème ordinaire des n corps cette conclusion que le mouvement ne peut cesser d'être régulier à un instant t_1 que si la plus petite des distances r_{ij} tend vers zéro quand t tend vers t_1.

Nous allons démontrer, dans le problème à masses variables, que *le mouvement ne peut cesser d'être régulier à un instant* t_1 *que si la plus petite des distances* r_{ij} *a zéro pour limite inférieure quand* t *tend vers* t_1.

En effet, s'il n'en était pas ainsi, toutes les distances r_{ij} seraient limitées inférieurement par une même quantité positive, et en supposant qu'aucune masse ne croisse indéfiniment lorsque t tend vers t_1, on en déduit que les dérivées secondes des coordonnées seraient limitées supérieurement en valeur absolue par une quantité fixe. Les quantités telles que $\left|\dfrac{dx_i}{dt} - \left(\dfrac{dx_i}{dt}\right)_{t=t_0}\right|$ seraient donc finies, donc les $\dfrac{dx_i}{dt}$ seraient finies pour $t = t_1$.

D'après le théorème fondamental, le mouvement serait donc régulier pour $t = t_1$. C. Q. F. D.

7. — Ce qui précède s'applique au cas où les masses sont des fonctions quelconques du temps. Dans certains cas, on peut arriver aux mêmes conclusions que dans le problème ordinaire des n corps.

Considérons, par exemple, le cas des masses $m_i = \mu_i \psi(t)$, la fonction $\psi(t)$ étant croissante dans un intervalle (t_0, t_2) comprenant t_1. Nous démontrerons au chapitre VI que si l'on pose

$$2T_1 = \Sigma \mu_i v_i^2, \qquad 2U_1 = f \sum \frac{\mu_i \mu_j}{r_{ij}},$$

la combinaison des forces vives fournit l'égalité

$$\frac{dT_1}{dt} - \psi \frac{dU_1}{dt} = 0,$$

qui, intégrée entre les instants t_0 et t donne

$$T_1 - \psi U_1 = -\int_{t_0}^{t} \psi' U_1 dt + h,$$

d'où

$$T_1 - \psi U_1 < h.$$

Le fait pour tous les r_{ij} d'avoir une borne inférieure positive entraîne, comme dans le problème à masses fixes, une limitation des vitesses, et le raisonnement de Sundman (*loc. cit.*, page 119) montre que le mouvement ne peut cesser d'être régulier à un instant t_1 que si la plus petite distance tend vers zéro lorsque t tend vers t_1.

Le même raisonnement sera encore valable si l'on a une inégalité de la forme

$$T - U < h \qquad \text{ou} \qquad T - U < f(t),$$

$f(t)$ étant une fonction finie pour toute valeur finie de t.

Il en sera encore de même si le produit $\lambda\rho \left(\lambda = \frac{r}{14}\right.$, r la plus petite des distances $\left. r_{ij} \right)$ reste inférieur à une quantité fixe a lorsque t tend vers t_1. Cela résulte de l'inégalité

$$\tau > \frac{-2a\lambda + 2\lambda\sqrt{a^2 + \lambda\mu}}{\mu}.$$

CHAPITRE II

Approximations successives. — Généralisation d'un théorème de Poincaré. — Applications.

8. — Nous indiquons sans démonstration dans ce chapitre quelques formes de la méthode des approximations successives, généralisons, d'autre part, un théorème de Poincaré et donnons des applications au problème des n corps à masses variables.

9. — Forme A de la méthode des approximations successives. — Considérons le système d'équations du premier ordre

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i\big(x, y_l, \varepsilon_k(x)\big)\ (i, l = 1, 2, \ldots, n;\quad k = 1, 2, \ldots, p), \tag{8}$$

les fonctions $\varepsilon_k(x)$ tendant vers zéro lorsque x tend vers zéro.

Considérons en même temps le système adjoint

$$\frac{dY_i}{dx} = f_i(x, Y_l, 0), \tag{9}$$

toutes les fonctions ε_k ayant été remplacées par 0, et soit $Y_i = \psi_i(x)$ une solution de ce système.

Nous ferons les hypothèses suivantes :

1° Il existe des nombres positifs a, b_l et M tels que pour $0 < x < a$ et $|y_l - \psi_l(x)| < b_l$ on ait les inégalités :

$$|f_i(x, y_l, \varepsilon_k) - f_i(x, \psi_l, 0)| < M. \tag{10}$$

2° Lorsque x est compris entre 0 et a et y_l, y'_l entre $\psi_l - b_l$ et $\psi_l + b_l$, il existe des nombres A_l tels qu'on ait les inégalités :

$$|f_i(x, y'_l, \varepsilon_k) - f_i(x, y_l, \varepsilon_k)| < \sum_l A_l\,|y'_l - y_l|. \tag{11}$$

Posons :

$$\left\{\begin{array}{l} y_i^{(1)} = \psi_i(x) + \int_0^x \left[f_i(x, \psi_l, \varepsilon_k) - f_i(x, \psi_l, 0)\right] dx, \\ y_i^{(2)} = \psi_i(x) + \int_0^x \left[f_i(x, y_l^{(1)}, \varepsilon_k) - f_i(x, \psi_l, 0)\right] dx, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_i^{(n)} = \psi_i(x) + \int_0^x \left[f_i(x, y_l^{(n-1)}, \varepsilon_k) - f_i(x, \psi_l, 0)\right] dx, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

Les séries

$$\varphi_i(x) = \psi_i(x) + \left(y_i^{(1)} - \psi_i\right) + \left(y_i^{(2)} - y_i^{(1)}\right) + \dots + \left(y_i^{(n)} - y_i^{(n-1)}\right) + \dots.$$

uniformément convergentes pour les valeurs de x comprises dans l'intervalle $(-h, +h)$, h étant le plus petit des nombres a et $\frac{b_l}{M}$, représentent une solution du système (8) telle que

$$|\varphi_i - \psi_i| < \frac{M}{A}(e^{Ax} - 1),$$

avec

$$A = \sum_l A_l,$$

et cette solution, telle que les différences $y_i - \psi_i$ tendent vers zéro quand x tend vers zéro, est unique.

Les fonctions ε_k étant continues, les conditions de l'énoncé sont vérifiées si les fonctions f_i admettent des dérivées partielles bornées et, en particulier, continues lorsque x varie entre $-a$ et $+a$ et les y_l entre $\psi_l - b_l$ et $\psi_l + b_l$.

10. — Forme B de la méthode des approximations successives. — Considérons le système du second ordre :

(12) $$\frac{d^2 y_i}{dx^2} = f_i\left(x, y_l, \varepsilon_k(x)\right) \quad (i, l = 1, 2, \dots, n;\ k = 1, 2, \dots, p),$$

les fonctions $\varepsilon_k(x)$ prenant les valeurs ε_k^0 pour la valeur x_0 de x.

Nous envisagerons en même temps le système obtenu en remplaçant les fonctions ε_k par leur valeur initiale ε_k^0 :

(13) $$\frac{d^2 Y_i}{dx^2} = f_i(x, Y_l, \varepsilon_k^0).$$

Soit $Y_i = \psi_i(x)$ la solution de (13) prenant pour $x = x_0$ la valeur y_i^0, les dérivées prenant les valeurs $y_i'^0$.

Cherchons la solution de (12) correspondant aux mêmes conditions initiales.

Nous ferons les hypothèses suivantes :

1° Il existe des nombres positifs a, b_l, M, tels que pour x compris entre $x_0 - a$ $x_0 + a$, et les y_l entre $\psi_l - b_l$ et $\psi_l + b_l$, les fonctions $f_i(x, y_l, \varepsilon_k)$ soient continues et que les valeurs absolues de ces fonctions soient limitées par le nombre M :

$$|f_i(x, y_l, \varepsilon_k)| < M. \tag{14}$$

2° Il existe également des nombres positifs A_l tels que, x étant compris entre $x_0 - a$ et $x_0 + a$ et y_l et y_l' entre $\psi_l(x) - b_l$ et $\psi_l(x) + b_l$, on ait les inégalités :

$$|f_i(x, y_l', \varepsilon_k) - f_i(x, y_l, \varepsilon_k)| < \sum_{l=1}^{n} A_l |y_l' - y_l|. \tag{15}$$

Posons successivement :

$$\left\{\begin{aligned}
y_i^{(1)} &= \psi_i(x) + \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} \left[f_i(x, \psi_l, \varepsilon_k) - f_i(x, \psi_l, \varepsilon_k^0)\right] dx, \\
y_i^{(2)} &= \psi_i(x) + \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} \left[f_i(x, y_l^{(1)}, \varepsilon_k) - f_i(x, \psi_l, \varepsilon_k^0)\right] dx, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_i^{(n)} &= \psi_i(x) + \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} \left[f_i(x, y_l^{(n-1)}, \varepsilon_k) - f_i(x, \psi_l, \varepsilon_k^0)\right] dx, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right.$$

Les séries

$$\varphi_i(x) = \psi_i(x) + \left(y_i^{(1)} - \psi_i\right) + \left(y_i^{(2)} - y_i^{(1)}\right) + \ldots + \left(y_i^{(n)} - y_i^{(n-1)}\right) + \ldots,$$

uniformément convergentes pour les valeurs de x comprises dans l'intervalle $(x_0, x_0 + h)$, h étant le plus petit des nombres a et $\sqrt{\frac{b_l}{M}}$, représentent une solution du système (12) telle que

$$|\varphi_i - \psi_i| < \frac{M}{A}\left[e^{\sqrt{A}(x - x_0)} + e^{-\sqrt{A}(x - x_0)} - 2\right],$$

$$|\varphi_i' - \psi_i'| < \frac{M}{\sqrt{A}}\left[e^{\sqrt{A}(x - x_0)} - e^{-\sqrt{A}(x - x_0)}\right],$$

avec

$$A = \sum_l A_l,$$

et cette solution, telle que les différences $y_i - \psi_i$, $\frac{dy_i}{dx} - \psi'_i$, tendent vers zéro quand x tend vers zéro, est unique.

Remarque. — Nous avons supposé les conditions (14) et (15) réalisées lorsque les y_l et y'_l sont compris entre $\psi_l(x) - b_l$ et $\psi_l(x) + b_l$. Le raisonnement est encore valable si elles sont vérifiées lorsque les y_l et y'_l sont compris entre $\psi_l(x) - M(x - x_0)^2$ et $\psi_l(x) + M(x - x_0)^2$.

11. — Forme C de la méthode des approximations successives. — Considérons le système de second ordre :

$$(16) \qquad \frac{d^2 y_i}{dx^2} = f_i\big(x, y_l, \varepsilon_k(x)\big) \quad (i, l = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, p),$$

les fonctions $\varepsilon_k(x)$ tendant vers zéro lorsque x croît indéfiniment. Considérons en même temps le système obtenu en remplaçant les ε_k par o :

$$(17) \qquad \frac{d^2 Y_i}{dx^2} = f_i(x, Y_l, 0).$$

Soit $Y_i = \psi_i(x)$ une solution de ce système.

Nous ferons les deux hypothèses suivantes :

1° Il existe des nombres positifs x_0, b_l, A, α tels que pour $x > x_0$ et y_l compris entre $\psi_l(x) - b_l$ et $\psi_l(x) + b_l$, on ait les inégalités :

$$(18) \qquad \big|f_i\big(x, y_l, \varepsilon_k(x)\big) - f_i(x, \psi_l, 0)\big| < \frac{A}{x^{\alpha+2}}.$$

2° Pour $x > x_0$ et y_l et y'_l compris entre $\psi_l(x) - b_l$ et $\psi_l(x) + b_l$, on a les inégalités :

$$(19) \qquad |f_i(x, y'_l, \varepsilon_k) - f_i(x, y_l, \varepsilon_k)| < \frac{\sum_{l=1}^{n} B_l\,|y'_l - y_l|}{x^{\alpha+2}},$$

les B_l étant également des nombres positifs fixes.

Posons :

$$\left\{\begin{aligned}
y_i^{(1)} &= \psi_i(x) + \int_\infty^x dx \int_\infty^x \left[f_i(x, \psi_l, \varepsilon_k) - f_i(x, \psi_l, 0)\right] dx,\\
y_i^{(2)} &= \psi_i(x) + \int_\infty^x dx \int_\infty^x \left[f_i\left(x, y_l^{(1)}, \varepsilon_k\right) - f_i(x, \psi_l, 0\right] dx,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
y_i^{(n)} &= \psi_i(x) + \int_\infty^x dx \int_\infty^x \left[f_i\left(x, y_l^{(n-1)}, \varepsilon_k\right) - f_i(x, \psi_l, 0)\right] dx,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right.$$

Les séries :

$$\varphi_i(x) = \psi_i(x) + \left(y_i^{(1)} - \psi_i\right) + \left(y_i^{(2)} - y_i^{(1)}\right) + \ldots + \left(y_i^{(n)} - y_i^{(n-1)}\right) + \ldots,$$

uniformément convergentes pour les valeurs de x supérieures à h, h étant le plus grand des nombres $\dfrac{1}{[b_i\alpha(\alpha+1)]^{\frac{1}{\alpha}}}$, représentent une solution du système (16) telle que

$$|\varphi_i - \psi_i| < \frac{A}{B(\alpha+1)}\left(e^{\frac{B}{\alpha x^\alpha}} - 1\right),$$

$$|\varphi_i' - \psi_i'| < \frac{A}{B(\alpha+1)\,x^{\alpha+1}}\, e^{\frac{B}{\alpha x^\alpha}},$$

avec

$$B = \sum_l B_l,$$

et cette solution, telle que les différences $y_i - \psi_i$, $\dfrac{dy_i}{dx} - \psi'_i$ tendent vers zéro quand x croît indéfiniment, est unique.

Remarque. — La démonstration montre qu'il suffit, pour pouvoir appliquer la méthode des approximations successives, que les hypothèses faites aient lieu seulement lorsque les y_l et y'_l sont compris entre $\psi_l(x) - \dfrac{A}{\alpha(\alpha+1)x^\alpha}$ et $\psi_l(x) + \dfrac{A}{\alpha(\alpha+1)x^\alpha}$.

Cas particulier. — Supposons que les f_i ne dépendent pas de x directement et soient linéaires par rapport aux fonctions ε_k, de sorte que nous pourrons poser :

$$f_i(x, y_l, \varepsilon_k) \equiv F_i(y_l) + \sum_k \varepsilon_k(x) G_i^k(y_l).$$

Les conditions (18) et (19) seront alors vérifiées si l'on a dans le domaine indiqué des inégalités de la forme :

$$\left| \frac{\partial F_i}{\partial y_l} + \sum_k \varepsilon_k \frac{\partial G_i^k}{\partial y_l} \right| < \frac{B_l}{x^{\alpha+2}},$$

$$|\varepsilon_k G_i^k| < \frac{C_i^k}{x^{\alpha+2}},$$

les B_l et C_i^k étant des constantes.

Applications.

12. — Considérons le mouvement de n corps de masses variables m_i défini par les équations

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = f \sum_{j \neq i} m_j \frac{x_j - x_i}{r_i^3}, \ldots,$$

et soient m_i^0 les valeurs des m_i à l'instant t_0.

Nous considérerons en même temps le mouvement de n corps dont les masses gardent les valeurs constantes m_i^0 et s'attirant suivant la loi de Newton avec le même coefficient d'attraction, les conditions initiales étant les mêmes dans les deux mouvements, dont les équations sont :

$$\frac{d^2 X_i}{dt^2} = f \sum_{i \neq i} m_j^0 \frac{X_j - X_i}{R_{ij}^3}, \ldots.$$

Proposons-nous de comparer les deux mouvements pendant un certain intervalle de temps à partir de t_0.

Nous supposerons qu'il existe un intervalle de temps $(t_0, t_0 + a)$ pendant lequel on a pour tous les indices i, j :

$$|X_j - X_i|, \quad |Y_j - Y_i|, \quad |Z_j - Z_i| > \rho > 0.$$

Soit alors ρ' un nombre positif inférieur à $\frac{\rho}{2}$. Si l'on donne aux x_i, y_i, z_i des valeurs comprises respectivement entre $X_i(t) - \rho'$ et $X_i(t) + \rho'$, $Y_i(t) - \rho'$ et $Y_i(t) + \rho'$, $Z_i(t) - \rho'$ et $Z_i(t) + \rho'$, on aura :

$$|x_j - x_i|, \quad |y_j - y_i|, \quad |z_j - z_i| > \rho - 2\rho' > 0,$$

donc

$$r_{ij}^2 > 3(\rho - 2\rho')^2.$$

On aura alors :

$$\left| f \sum_{j \neq i} m_j \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3} \right| < f \sum_{i \neq i} \frac{m_j}{r_{ii'}^2} < \frac{f}{3(\rho - 2\rho')^2} \sum_{j \neq i} m_j .$$

Les masses étant supposées des fonctions continues du temps, leur somme a pendant l'intervalle de temps considéré une limite supérieure μ. On aura donc :

$$\left| f \sum_{j \neq i} m_j \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3} \right| < \frac{f\mu}{3(\rho - 2\rho')^2} .$$

Dans la forme B de la méthode des approximations successives, nous ferons donc

$$M = \frac{f\mu}{3(\rho - 2\rho')^2} .$$

Il nous faut maintenant calculer les nombres A_l. Posons

$$U_i = f \sum_{j \neq i} m_j \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3} .$$

On a :

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = -f \sum_{\neq i} m_j \frac{r_{ij}^2 - 3(x_j - x_i)^2}{r_{ij}^5},$$

d'où :

$$\left| \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \right| < \frac{f\mu}{r_{ij}^3} + \frac{3f\mu}{r_{ij}^3} < \frac{4f\mu}{3\sqrt{3}(\rho - 2\rho')^3} .$$

On verra, en faisant de même le calcul des dérivées de tous les U_i par rapport à toutes les variables x, y, z, que l'on peut prendre tous les A_l égaux à $\dfrac{4f\mu}{3\sqrt{3}(\rho - 2\rho')^3}$, de sorte que l'on aura

$$A = \Sigma A_l = 3n \frac{4f\mu}{3\sqrt{3}(\rho - 2\rho')^3} = \frac{4fn\mu}{\sqrt{3}(\rho - 2\rho')^3} .$$

Les b_i étant tous égaux à ρ', les quantités $\sqrt{\frac{b_i}{M}}$ peuvent être prises égales à $\sqrt{\frac{3\rho'}{f\mu}}(\rho - 2\rho')$.

Si l'on désigne alors par τ le plus petit des nombres a et $(\rho - 2\rho')\sqrt{\frac{3\rho'}{f\mu}}$, la méthode des approximations successives montre que pendant l'intervalle de temps $(t_0, t_0 + \tau)$, on a les inégalités :

$$|x_i - X_i|, \quad |y_i - Y_i|, \quad |z_i - Z_i| < \frac{f\mu}{3(\rho - 2\rho')^2} \frac{\sqrt{3}(\rho - 2\rho')^3}{4fn\mu}\left[e^{\sqrt{A}(t-t_0)} + e^{-\sqrt{A}(t-t_0)} - 2\right]$$

ou

$$|x_i - X_i|, \quad |y_i - Y_i|, \quad |z_i - Z_i| < \frac{\rho - 2\rho'}{4n\sqrt{3}}\left[e^{\sqrt{A}(t-t_0)} + e^{-\sqrt{A}(t-t_0)} - 2\right]$$

et

$$\left|\frac{dx_i}{dt} - \frac{dX_i}{dt}\right|, \quad \left|\frac{dy_i}{dt} - \frac{dY_i}{dt}\right|, \quad \left|\frac{dz_i}{dt} - \frac{dZ_i}{dt}\right| < \frac{1}{2 \times 3^{\frac{3}{4}}}\sqrt{\frac{f\mu}{n(\rho - 2\rho')}}\left[e^{\sqrt{A}(t-t_0)} - e^{-\sqrt{A}(t-t_0)}\right].$$

ρ' n'a été jusqu'ici défini que comme étant inférieur à $\frac{\rho}{2}$.

On voit immédiatement que la valeur qu'il faut lui attribuer pour rendre la quantité $(\rho - 2\rho')\sqrt{\frac{3\rho'}{f\mu}}$ la plus grande possible est $\frac{\rho}{6}$.

En prenant pour ρ' cette valeur, on peut dire que, τ désignant le plus petit des nombres a et $\frac{\rho}{3}\sqrt{\frac{2\rho}{f\mu}}$, si t varie dans l'intervalle $(t_0, t_0 + \tau)$, on a :

$$|x_i - X_i|, \quad |y_i - Y_i|, \quad |z_i - Z_i| < \frac{\rho}{6n\sqrt{3}}\left[e^{\sqrt{A}(t-t_0)} + e^{-\sqrt{A}(t-t_0)} - 2\right],$$

$$\left|\frac{dx_i}{dt} - \frac{dX_i}{dt}\right|, \quad \left|\frac{dy_i}{dt} - \frac{dY_i}{dt}\right|, \quad \left|\frac{dz_i}{dt} - \frac{dZ_i}{dt}\right| < \frac{1}{2 \times 3^{\frac{3}{4}}}\sqrt{\frac{3f\mu}{2n\rho}}\left[e^{\sqrt{A}(t-t_0)} - e^{-\sqrt{A}(t-t_0)}\right],$$

où

$$A = \frac{27fn\mu}{2\rho^3\sqrt{3}}.$$

Nous pouvons indiquer pour les quantités $|x_i - X_i|, \ldots, \left|\frac{dz_i}{dt} - \frac{dZ_i}{dt}\right|$ une limite supérieure indépendante de t, en remarquant que pendant l'intervalle de temps $(t_0, t_0+\tau)$ les quantités entre crochets du second membre prennent leur plus grande valeur pour $t-t_0=\tau$, de sorte que l'on a :

$$|x_i-X_i|,\quad |y_i-Y_i|,\quad |z_i-Z_i|<\frac{\rho-2\rho'}{4n\sqrt{3}}\left(e^{\sqrt{A}\tau}+e^{-\sqrt{A}\tau}-2\right)<\frac{\rho}{4n\sqrt{3}}\left(e^{\sqrt{A}\tau}+e^{-\sqrt{A}\tau}-2\right),$$

$$\left|\frac{dx_i}{dt}-\frac{dX_i}{dt}\right|,\quad \left|\frac{dy_i}{dt}-\frac{dY_i}{dt}\right|,\quad \left|\frac{dz_i}{dt}-\frac{dZ_i}{dt}\right|<\frac{1}{2\times 3^{\frac{3}{4}}}\sqrt{\frac{f\mu}{n(\rho-2\rho')}}\left(e^{\sqrt{A}\tau}-e^{-\sqrt{A}\tau}\right).$$

Remarques. — I. Nous avons supposé que, pendant un certain intervalle de temps à partir de t_0, on avait :

$$|X_j-X_i|,\quad |Y_j-Y_i|,\quad |Z_j-Z_i|>\rho>0.$$

Cela aura certainement lieu si ces inégalités sont vérifiées à l'instant initial. Dans l'hypothèse contraire, il suffirait d'une rotation des axes de coordonnées pour se ramener au cas précédent.

II. Dans le cas où tous les points se meuvent dans le plan des xy, on trouve les inégalités :

$$|x_i-X_i|,\quad |y_i-Y_i|,\quad |z_i-Z_i|<\frac{\rho}{9n\sqrt{2}}\left[e^{\sqrt{A}(t-t_0)}+e^{-\sqrt{A}(t-t_0)}-2\right]\leqslant\frac{\rho}{9n\sqrt{2}}\left(e^{\sqrt{A}\tau}+e^{-\sqrt{A}}-2\right),$$

où $A=\dfrac{81fn\mu}{4\rho^3\sqrt{2}}$ et τ est le plus petit des nombres a et $\dfrac{2\rho}{3}\sqrt{\dfrac{\rho}{3f\mu}}$.

13. — Application à l'Astronomie. — La masse de la Terre va en s'accroissant par suite de la chute des météorites.

Considérons le système Soleil-Terre, et soient $x, y, 0$ les coordonnées de la Terre par rapport à des axes de directions fixes issus du centre du Soleil, le plan des xy étant parallèle au plan de l'écliptique, θ l'angle de ST avec Sx.

En prenant les mêmes unités qu'au paragraphe 4 et en supposant qu'à l'instant initial la droite ST est la première bissectrice des axes, on a :

$$x_0=y_0=\frac{\sqrt{2}}{2}\;\#\;0,7.$$

En considérant le mouvement de la Terre comme circulaire et uniforme,

$$\theta=2\pi t.$$

L'instant initial t_0 correspond à $\theta = 45°$, d'où $t_0 = \frac{1}{8}$; si l'instant $t_0 + a$ correspond à $\theta = 60°$,

$$t_0 + a = \frac{1}{6},$$

d'où

$$a = \frac{1}{24},$$

et l'on aura pendant tout l'intervalle de temps $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{6}\right)$

$$x, y > \frac{1}{2}.$$

En définitive, nous appliquons nos formules avec

$$t_0 = \frac{1}{8}, \quad a = \frac{1}{24}, \quad \rho = \frac{1}{2}, \quad n = 2, \quad \mu = 1,1, \quad f = 3 \times 10^{-4}, \quad \tau = a = \frac{1}{24};$$

on a alors

$$\sqrt{A} = 29.10^{-2},$$

d'où

$$|x - X|, \quad |y - Y| < \frac{1}{36\sqrt{2}}\left(e^{\frac{29.10^{-2}}{24}} + e^{-\frac{29.10^{-2}}{24}} - 2\right)$$
$$< \frac{10^{-4}}{30}.$$

Donc, pendant un mois, pris moitié avant, moitié après l'instant initial, $|x - X|$, $|y - Y|$ restent inférieurs à $\frac{10^{-4}}{30}$, valeur voisine de $\frac{10^{-4}}{25} = 4 \times 10^{-6}$.

14. — La question précédente peut être traitée à un autre point de vue. Nous avons vu au chapitre I qu'en désignant par 14λ une limite inférieure des r_{ij}^0, par ρ une limite supérieure des composantes des vitesses à l'instant initial, par μ une limite supérieure de la somme des masses, le mouvement à masses variables, et par conséquent aussi le mouvement à masses fixes, restaient réguliers pendant un intervalle de temps au moins égal à

$$\tau = \frac{-2\lambda^2\rho + 2\lambda\sqrt{\lambda(\lambda\rho^2 + \mu)}}{\mu}.$$

et que pendant cet intervalle de temps, on avait :

$$\left|\frac{dx'_i}{dt}\right|, \ldots, \quad \left|\frac{d\mathrm{X}'_i}{dt}\right|, \ldots < \frac{\mu}{4\lambda^2}.$$

On a donc :

$$\left|\frac{dx'_i}{dt} - \frac{d\mathrm{X}'_i}{dt}\right| < 2\frac{\mu}{4\lambda^2} = \frac{\mu}{2\lambda^2},$$

d'où

$$\left|x'_i - \mathrm{X}'_i\right| < \frac{\mu(t-t_0)}{2\lambda^2},$$

d'où

$$|x_i - \mathrm{X}_i| < \frac{\mu}{4\lambda^2}(t-t_0)^2 \leqslant \frac{\mu\tau^2}{4\lambda^2},$$

et de même pour les autres coordonnées.

Les distances de deux points correspondants restent donc inférieures à $\dfrac{\mu\tau^2\sqrt{3}}{4\lambda^2}$, la vitesse relative des deux points restant inférieure à $\dfrac{\mu\tau\sqrt{3}}{2\lambda^2}$.

15. — Cherchons s'il est possible que les $|x_i - \mathrm{X}_i|$, $|y_i - \mathrm{Y}_i|$, $|z_i - \mathrm{Z}_i|$, soient limitées supérieurement pour toutes les valeurs de t. On a :

$$(x_i)_{t=\infty} - (\mathrm{X}_i)_{t=\infty} = \int_{t_0}^{\infty}\left(x'_i - \mathrm{X}'_i\right) dt,$$

puisque $x'^0_i = \mathrm{X}'^0_i$.

$|(x_i)_{t=\infty} - (\mathrm{X}_i)_{t=\infty}|$ sera finie si $x'_i - \mathrm{X}'_i$ est un infiniment petit d'ordre supérieur à *un* :

$$\left|x'_i - \mathrm{X}'_i\right| < \frac{\mathrm{A}}{t^\alpha} \qquad (\alpha > 1).$$

Comme
$$x'_i - \mathrm{X}'_i = \int_{t_0}^{\infty}\left(\frac{dx'_i}{dt} - \frac{d\mathrm{X}'_i}{dt}\right) dt,$$

$x'_i - \mathrm{X}'_i$ sera un infiniment petit d'ordre supérieur à *un* si $\left|\dfrac{dx'_i}{dt} - \dfrac{d\mathrm{X}'_i}{dt}\right|$ est un infiniment petit d'ordre supérieur à 2, donc si l'on a :

$$\left|m_j\frac{x_j - x_i}{r^3_{ij}}\right|, \ldots < \frac{\mathrm{B}}{t^\beta}, \qquad \left|m^0_j\frac{\mathrm{X}_j - \mathrm{X}_i}{\mathrm{R}^3_{ij}}\right|, \ldots < \frac{\mathrm{B}}{t^\beta} \qquad (\beta > 2)$$

pour tous les indices i et j.

Supposons que toutes les masses soient limitées supérieurement par un nombre μ. Les conditions précédentes seront alors vérifiées si l'on a :

$$\frac{1}{r_{ij}^2} \text{ et } \frac{1}{R_{ij}^2} < \frac{C}{t^\beta},$$

ou

$$r_{ij} \text{ et } R_{ij} > D t^{\frac{\beta}{2}}.$$

Si donc l'on considère des conditions initiales telles que tous les r_{ij} et tous les R_{ij} soient des infiniment grands d'ordre supérieur à *un* pour les très grandes valeurs du temps, les $|x_i - X_i|$, ... seront limitées supérieurement pendant tout le mouvement, à condition que les masses variables soient elles-mêmes limitées pour $t = \infty$.

Ce cas ne peut se présenter dans le cas de trois corps.

16. — Considérons maintenant le cas où les masses sont de la forme $\mu_i + \varepsilon_i(t)$, les $\varepsilon_i(t)$ tendant vers zéro lorsque t croît indéfiniment. Les équations du mouvement seront :

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = f \sum_{j \neq i} (\mu_j + \varepsilon_j) \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3}, \ldots .$$

Nous rapprocherons de ces équations les suivantes, représentant le mouvement de n points de masses fixes μ_i :

$$\frac{d^2 X_i}{dt^2} = f \sum_{j \neq i} \mu_j \frac{X_j - X_i}{R_{ij}^3}, \ldots$$

et nous tâcherons d'obtenir une solution du premier système à partir d'une solution (X_i, Y_i, Z_i) du second par la méthode des approximations successives sous la forme C.

Nous pourrons appliquer cette méthode si les deux conditions suivantes sont remplies :

1° Pour t assez grand et x_i, y_i, z_i, compris respectivement entre $X_i - b$ et $X_i + b$, $Y_i - b$ et $Y_i + b$, $Z_i - b$ et $Z_i + b$, on a pour tous les indices i et j

$$\left| \varepsilon_j \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3} \right|, \ldots < \frac{C}{t^{\alpha+2}},$$

avec $\alpha > 0$.

2° Dans les mêmes conditions, on a

$$|\text{dérivées des seconds membres des équations par rapport à } x_l, y_l, z_l| < \frac{B}{t^{\alpha+2}}.$$

Il suffit même que ces conditions soient vérifiées pour

$$|x_i - X_i|, \quad |y_i - Y_i|, \quad |z_i - Z_i| < \frac{A}{t^\alpha}.$$

Examinons d'abord la seconde condition. Posons

$$\lambda_{ij} = x_j - x_i, \qquad \mu_{ij} = y_j - y_i, \qquad \nu_{ij} = z_j - z_i,$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3} &= \frac{\lambda_{ij}}{\left(\lambda_{ij}^2 + \mu_{ij}^2 + \nu_{ij}^2\right)^{\frac{3}{2}}} = u(\lambda_{ij}, \mu_{ij}, \nu_{ij}), \\ \frac{y_j - y_i}{r_{ij}^3} &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots = v(\dots\dots\dots,), \\ \frac{z_j - z_i}{r_{ij}^3} &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots = w(\dots\dots\dots). \end{aligned}\right.$$

Le second membre d'une équation est de la forme

$$f \sum_{j \neq i} (\mu_j + \varepsilon_j)\, u(\lambda_{ij}, \mu_{ij}, \nu_{ij}).$$

La dérivée par rapport à x_j sera $f(\mu_j + \varepsilon_j)\dfrac{\partial u}{\partial \lambda_{ij}}$, et l'on a, en désignant par M_j le maximum de $\mu_j + \varepsilon_j$ à partir d'un certain moment :

$$\left| f(\mu_j + \varepsilon_j)\frac{\partial u}{\partial \lambda_{ij}} \right| < f M_j \left| \frac{\partial u}{\partial \lambda_{ij}} \right|.$$

Or

$$u = \frac{\lambda_{ij}}{r_{ij}^3},$$

d'où

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda_{ij}} = \frac{r_{ij}^3 - 3\lambda_{ij} r_{ij}^2 \dfrac{\partial r_{ij}}{\partial \lambda_{ij}}}{r_{ij}^6} = \frac{1}{r_{ij}^3} - \frac{3\lambda_{ij}^2}{r_{ij}^5}.$$

On a donc :

$$\left| \frac{\partial u}{\partial \lambda_{ij}} \right| < \frac{4}{r_{ij}^3},$$

d'où

$$\left| f(\mu_j + \varepsilon_j) \frac{\partial u}{\partial \lambda_{ij}} \right| < 4f \frac{M_j}{r_{ij}^3}.$$

On trouvera des inégalités analogues pour les dérivées par rapport aux autres variables, avec cette différence que l'on aura plusieurs termes lorsqu'on prendra les dérivées par rapport à x_i, y_i, z_i.

On voit ainsi que les secondes conditions de l'énoncé sont vérifiées si les r_{ij} sont des infiniment grands d'ordre au moins égal à $\frac{\alpha + 2}{3}$:

$$r_{ij} > \mathrm{K} t^{\frac{\alpha+2}{3}}.$$

Passons alors aux premières conditions. On a :

$$\left| \varepsilon_j \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3} \right| < \frac{|\varepsilon_j|}{r_{ij}^2} < \frac{|\varepsilon_j|}{\mathrm{K}^2 t^{2\frac{\alpha+2}{3}}}.$$

Les premières conditions seront donc vérifiées si l'on a :

$$|\varepsilon_j| < \frac{a}{t^{\frac{\alpha+2}{3}}}.$$

Nous sommes amenés alors à faire les deux hypothèses suivantes :

1re hypothèse : Les ε_i sont des infiniment petits d'ordre au moins égal à $\frac{\alpha + 2}{3}$ pour les très grandes valeurs du temps.

2e hypothèse : Le mouvement à masses fixes d'où nous partons est tel que toutes les distances mutuelles sont des infiniment grands d'ordre $\frac{\alpha + 2}{3}$ au moins.

Si tous les R_{ij} sont d'ordre $\frac{\alpha + 2}{3}$ au moins, il en est de même de tous les X_i, Y_i, Z_i, sauf peut-être de quelques-uns. On pourra donc écrire :

$$\left\{ \begin{aligned} \mathrm{X}_i &= \mathcal{A}_i t^{\frac{\alpha+2}{3}+\beta} + \ldots\ldots, \\ \mathrm{Y}_i &= \mathcal{B}_i t^{\frac{\alpha+2}{3}+\beta'} + \ldots\ldots, \qquad (\beta, \beta', \beta'' \geqslant 0), \\ \mathrm{Z}_i &= \mathcal{C}_i t^{\frac{\alpha+2}{3}+\beta''} + \ldots\ldots, \end{aligned} \right.$$

les termes non écrits étant d'ordre inférieur.

Comme nous sommes amenés à considérer des x_i, y_i, z_i ne différant des X_i, Y_i, Z_i que par des termes infiniment petits d'ordre au moins égal à α, ces termes n'influeront pas sur l'ordre de grandeur des r_{ij}. Donc, tous les r_{ij} seront également des infiniment grands d'ordre $\frac{\alpha+2}{3}$ au moins.

En nous bornant au cas de trois corps, nous n'avons à envisager que les mouvements hyperboliques, dans lesquels les distances mutuelles sont des infiniment grands d'ordre *un*, et nous sommes conduits à cette conclusion que, si l'on appelle mouvements asymptotes deux mouvements dans lesquels les différences entre les coordonnées et les différences entre leurs dérivées tendent vers zéro respectivement, *toute solution du problème à masses fixes* μ_i *dans laquelle les distances mutuelles sont des infiniment grands d'ordre un, fournit une solution du problème à masses variables* $\mu_i + \varepsilon_i(t)$ *asymptote, les* ε_i *étant pour les très grandes valeurs de* t *des infiniment petits d'ordre supérieur à* $\frac{2}{3}$.

Il y a évidemment réciprocité.

17. — Généralisation. — On démontrerait par une méthode analogue le théorème suivant :

Si l'on considère deux systèmes pour lesquels les masses diffèrent d'infiniment petits d'ordre supérieur à $\frac{2}{3}$ *et sont limitées supérieurement, tout mouvement de l'un des systèmes pour lequel les distances mutuelles sont des infiniment grands d'ordre supérieur à* $\frac{2}{3}$ *fournit par approximations successives un mouvement asymptote de l'autre, et réciproquement.*

18. — Généralisation d'un théorème de Poincaré. — Soit l'équation

$$\frac{dx}{dt} = f\big(x, t, \mu(t)\big), \tag{20}$$

dont le second membre dépend d'une fonction $\mu(t)$. Nous supposerons qu'on a

$$|\mu(t)| < b \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Considérons en même temps l'équation

$$\frac{dX}{dt} = f(X, t, \nu), \tag{21}$$

obtenue en remplaçant dans f la fonction $\mu(t)$ par une constante ν.

Nous supposons la fonction f développable en série ordonnée suivant les puissances croissantes de X et ν sous les conditions

$$0 \leqslant t \leqslant T, \qquad |X| < a, \qquad |\nu| \leqslant b.$$

$|\beta|$ étant inférieur à a, considérons la solution de cette équation qui prend la valeur β pour $t = 0$. On sait, d'après un théorème de Poincaré(¹), que l'on peut la mettre sous la forme

$$X = \sum_{i,j=0}^{\infty} A_{ij}(t)\,\nu^i \beta^j.$$

Posons

$$x = \sum_{i,j=0}^{\infty} A_{ij}(t)\,\mu^i \beta^j,$$

et cherchons à déterminer β comme fonction de t, de façon que cette série soit solution de l'équation (20).

On a

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{dA_{ij}}{dt}\mu^i\beta^j + \sum_{i,j=0}^{\infty}\left(i A_{ij}\mu^{i-1}\beta^j \frac{d\mu}{dt} + j A_{ij}\mu^i\beta^{j-1}\frac{d\beta}{dt}\right) = f(x, t, \mu).$$

Mais

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{dA_{ij}}{dt}\mu^i\beta^j = f(x, t, \mu).$$

Donc

$$\frac{d\beta}{dt}\sum_{i,j=0}^{\infty} j A_{ij}\mu^i\beta^{j-1} + \frac{d\mu}{dt}\sum_{i,j=0}^{\infty} i A_{ij}\mu^{i-1}\beta^j = 0.$$

Cette équation donne

$$\beta = \varphi(t, \gamma),$$

γ étant la constante d'intégration.

On a donc :

$$x = \sum_{i,j=0}^{\infty} A_{ij}\mu^i\varphi^j(t, \gamma).$$

(¹) *Méthodes nouvelles*, tome I.

Or, la série $\sum_{i,j=0}^{\infty} A_{ij}(t)\nu^i\beta^j$ est uniformément convergente pour $|\nu| \leqslant b$ et $0 \leqslant t \leqslant T$. Prenons donc pour γ une valeur telle que $|\varphi(t, \gamma)|$ prenne pour $t = 0$ une valeur inférieure à $|\beta|$. Pendant un certain intervalle de temps $(0, T_1)$ on aura donc encore $|\varphi(t, \gamma)| \leqslant \beta$. En désignant par τ la plus petite des deux valeurs T et T_1, on voit que pendant l'intervalle de temps $(0, \tau)$ la série

$$x = \sum_{i,j=0}^{\infty} A_{ij}\mu^i\varphi^j(t, \gamma)$$

représentera une solution de l'équation (20).

En résumé, nous avons développé la solution de (20) en une série ordonnée par rapport à μ.

Comme $\varphi(t, \gamma)$ est à son tour développable suivant les puissances de γ, on pourra, en portant ce développement dans l'expression de x, avoir un développement de x en série double ordonnée par rapport à μ et γ à la fois.

Le raisonnement précédent est valable pour un nombre quelconque d'équations et un nombre quelconque de fonctions telles que $\mu(t)$.

Le théorème de Poincaré est donc étendu au cas où les paramètres sont remplacés par des fonctions de la variable indépendante.

19. — Application. — On sait que, dans le problème des n corps à masses fixes, si $n - 1$ masses sont suffisamment petites, on peut développer les solutions suivant les puissances de ces masses. Il en sera donc encore de même dans le cas où ces masses, supposées variables, sont assez petites.

CHAPITRE III

Généralités sur le problème des n corps à masses variables. Cas où les masses sont des fonctions monotones du temps.

20. — Les équations du mouvement sont, en désignant par U la fonction de forces égale à $\sum \frac{m_i m_j}{r_{ij}}$:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \qquad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \qquad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i}.$$

On en tire les combinaisons :

$$\sum m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \sum m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = 0.$$

$\psi(t)$ étant une fonction quelconque, la première peut s'écrire :

$$\frac{1}{\psi(t)} \sum m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = 0$$

ou

$$\frac{d}{dt}\left(\sum \frac{m_i}{\psi} \frac{dx_i}{dt}\right) - \sum \frac{d}{dt}\left(\frac{m_i}{\psi}\right) \frac{dx_i}{dt} = 0.$$

Pour $m_i = (\alpha_i t + \beta_i)\psi$, on a une intégrale première :

$$\sum (\alpha_i t + \beta_i) \frac{dx_i}{dt} - \sum \alpha_i x_i = \text{const.}$$

On a des équations analogues pour les y et les z.

Les masses $m_i = (\alpha_i t + \beta_i)\psi(t)$ admettent comme cas particulier les masses $m_i = \mu_i \psi(t)$ où les μ_i sont des constantes, et, dans ce cas, on a les intégrales :

$$\sum \mu_i x_i = a_1 t + b_1, \; \ldots .$$

21. — La combinaison des aires donne

$$\sum m_i\left(y_i\frac{d^2x_i}{dt^2}-x_i\frac{d^2y_i}{dt^2}\right)=0.$$

Si on l'écrit sous la forme

$$\frac{1}{\psi(t)}\sum m_i\left(y_i\frac{d^2x_i}{dt^2}-x_i\frac{d^2y_i}{dt^2}\right)=0$$

ou

$$\frac{d}{dt}\sum\frac{m_i}{\psi}\left(y_i\frac{dx_i}{dt}-x_i\frac{dy_i}{dt}\right)-\sum\frac{d}{dt}\left(\frac{m_i}{\psi}\right)\left(y_i\frac{dx_i}{dt}-x_i\frac{dy_i}{dt}\right)=0,$$

on voit que l'on a encore une intégrale première pour $m_i=\mu_i\psi(t)$.

22. — La combinaison des forces vives donne :

$$2\sum_i m_i \mathrm{S}\frac{dx_i}{dt}\frac{d^2x_i}{dt^2}=2\sum_i \mathrm{S}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt},$$

ou, en posant

$$2\mathrm{T}=\sum_i m_i\mathrm{S}\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2$$

et en remarquant que U est fonction de t par l'intermédiaire, non seulement des coordonnées, mais aussi des masses :

$$2\frac{d\mathrm{T}}{dt}-\sum_i\frac{dm_i}{dt}\mathrm{S}\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2=2\frac{d\mathrm{U}}{dt}-2\sum_i\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial m_i}\frac{dm_i}{dt},$$

$$2\frac{d}{dt}(\mathrm{T}-\mathrm{U})=\sum_i\frac{dm_i}{dt}\left[\mathrm{S}\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2-2\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial m_i}\right].$$

Il semble difficile de trouver des cas où cette équation fournisse une intégrale première comme dans le problème des n corps à masses fixes, mais nous verrons au chapitre VI que dans le cas des masses $m_i=\dfrac{\mu_i}{\sqrt{\mathrm{A}t^2+\mathrm{B}t+\mathrm{C}}}$, on peut trouver une équation qui généralise l'intégrale ordinaire des forces vives, quoique ne s'obtenant pas immédiatement à partir de la combinaison des forces vives.

La combinaison des forces vives, quoique non intégrable, peut nous fournir cependant quelques résultats qualitatifs, en particutier dans les cas où l'on suppose toutes les masses croissantes ou toutes les masses décroissantes.

A. — Si les masses sont toutes croissantes, on a :

$$2\frac{d}{dt}(\mathrm{T}-\mathrm{U}\geqslant -2\sum_i \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial m_i}\frac{dm_i}{dt}.$$

Supposons que l'on puisse assigner pour tous les r_{ij} une limite inférieure positive pour toutes les valeurs de t. Nous supposerons en même temps que les masses et leurs dérivées soient toutes limitées supérieurement par un nombre fini. Les $\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial m_i}$ sont alors limitées supérieurement. Dans ces conditions, le second membre de l'inégalité précédente étant limité inférieurement, on a :

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{T}-\mathrm{U})\geqslant h.$$

On en déduit, en intégrant,

$$\mathrm{T}-\mathrm{U}\geqslant ht+h'.$$

Il est facile de voir que, nos hypothèses étant réalisées pendant un temps infini, $\frac{d}{dt}(\mathrm{T}-\mathrm{U})$ ne peut pas rester négatif sans avoir zéro pour limite supérieure. En effet, si $\frac{d}{dt}(\mathrm{T}-\mathrm{U})$ avait un nombre λ négatif comme borne supérieure, on aurait pendant tout le mouvement

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{T}-\mathrm{U})\leqslant\lambda<0,$$

d'où :

$$\mathrm{T}-\mathrm{U}\leqslant\lambda t+\lambda'.$$

Lorsque t tend vers $+\infty$, $\mathrm{T}-\mathrm{U}$ tendrait vers $-\infty$, donc U tendrait vers l'infini, ce qui est contradictoire avec les hypothèses faites.

Supposons alors que l'on prenne pour h exactement la borne inférieure des valeurs de $\frac{d}{dt}(\mathrm{T}-\mathrm{U})$.

On peut ordonner le discussion suivant le signe de h. Quatre cas sont possibles :

1^er^ Cas. — $h>0$: $\frac{d}{dt}(\mathrm{T}-\mathrm{U})$ est toujours >0.

L'inégalité

$$\mathrm{U}<\mathrm{T}-ht-h'$$

montre que T croît indéfiniment lorsque t tend vers l'∞. Les masses étant limitées supérieurement, on en déduit que la plus grande vitesse, V, croît indéfiniment.

2e *Cas.* — $h = 0$: $\frac{d}{dt}(T - U)$ est toujours $\geqslant 0$.

On a alors

$$U < T - h',$$

d'où

$$T > h'.$$

Si $h' > 0$, cette inégalité fournit une limite inférieure pour V.

3e *Cas.* — $h < 0$ et $\frac{d}{dt}(T - U)$ toujours $\leqslant 0$: $\frac{d}{dt}(T - U)$ a zéro pour borne supérieure.

La combinaison des forces vives montre que pour certains indices i au moins, on a :

$$v_i^2 - 2\frac{\partial U}{\partial m_i} < 0;$$

on en déduit que la plus petite vitesse, v, a une limite supérieure fixe.

Cette propriété est une conséquence aussi de l'inégalité

$$\frac{d}{dt}(T - U) \leqslant 0$$

qui donne

$$T - U \leqslant \lambda',$$

d'où

$$T \leqslant U + \lambda'.$$

4e *Cas.* — $h < 0$ et $\frac{d}{dt}(T - U)$ tantôt > 0, tantôt < 0.

Il y a alors une infinité d'intervalles de temps pendant lesquels, $\frac{d}{dt}(T - U)$ étant < 0, certains $v_i^2 - 2\frac{\partial U}{\partial m_i}$ sont < 0, et pour ces valeurs du temps v a une limite supérieure fixe : donc v ne peut croître indéfiniment.

B. — Supposons maintenant que les masses soient toutes décroissantes, de sorte que la combinaison des forces vives donne :

$$2\frac{d}{dt}(T - U) \leqslant -2\sum_i \frac{\partial U}{\partial m_i}\frac{dm_i}{dt}.$$

Si, comme précédemment, les r_{ij} sont bornés inférieurement pendant tout le mouvement et si les valeurs absolues des $\frac{dm_i}{dt}$ sont bornées supérieurement, les m_i ayant comme limites supérieures leurs valeurs initiales, le second membre de l'inégalité précédente est borné en valeur absolue et l'on peut écrire :

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{T}-\mathrm{U}) \leqslant h.$$

On en déduit par intégration

$$\mathrm{T}-\mathrm{U} \leqslant ht + h'.$$

On peut voir que h ne peut pas être négatif. En effet, U est une fonction bornée d'après nos hypothèses et, d'autre part, l'inégalité précédente, que l'on peut écrire

$$\mathrm{U} \geqslant \mathrm{T} - ht - h',$$

montre que U devrait tendre vers l'infini lorsque t croît indéfiniment, ce qui est en contradiction avec les hypothèses.

Trois cas peuvent donc se présenter :

1er Cas. — $h > 0$ et $\frac{d}{dt}(\mathrm{T}-\mathrm{U})$ toujours $\geqslant 0$.

La combinaison des forces vives montre que pour certains indices i au moins, on a

$$v_i^2 - 2\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial m_i} \leqslant 0;$$

on en déduit pour v l'existence d'une limite supérieure finie.

On a, d'autre part :

$$0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{d}{dt}(\mathrm{T}-\mathrm{U}),$$

d'où

$$\mathrm{T}-\mathrm{U} \geqslant \lambda t + \lambda'.$$

Si $\frac{d}{dt}(\mathrm{T}-\mathrm{U})$ n'a pas zéro pour borne inférieure, λ est $\neq 0$, et l'on voit que V croît indéfiniment;

Si $\frac{d}{dt}(\mathrm{T}-\mathrm{U})$ a zéro pour borne inférieure, $\lambda = 0$, et l'inégalité

$$\mathrm{T}-\mathrm{U} \geqslant \lambda'$$

fournit, si $\lambda' > 0$, une limite inférieure pour V, et ne donne rien si $\lambda' \leqslant 0$.

2° *Cas.* — $h > 0$ et $\frac{d}{dt}(T - U)$ tantôt > 0, tantôt < 0.

Dans certains intervalles de temps et pour certains indices i on a l'inégalité

$$v_i^2 - 2\frac{\partial U}{\partial m_i} < 0;$$

v ne peut donc pas croître indéfiniment.

On a également dans les intervalles où $\frac{d}{dt}(T - U)$ est < 0 et pour certains indices i :

$$v_i^2 - 2\frac{\partial U}{\partial m_i} > 0.$$

Si au moins une distance r_{ij}, qui n'est pas nécessairement toujours la même, est bornée supérieurement et si aucune masse ne tend vers zéro, $2\frac{\partial U}{\partial m_i}$ est bornée inférieurement, et l'on a une limite inférieure de V dans ces intervalles.

3° *Cas.* — $h = 0$: $\frac{d}{dt}(T - U)$ est toujours $\leqslant 0$ et l'on trouve des valeurs de t aussi grandes que l'on veut pour lesquelles $\frac{d}{dt}(T - U)$ est aussi voisin de zéro que l'on veut.

On a encore pour certains indices i :

$$v_i^2 - 2\frac{\partial U}{\partial m_i} > 0;$$

on en tire la même conclusion qu'au second cas.

L'inégalité

$$T < U + h'$$

montre que, si une masse ne tend pas vers zéro, la vitesse correspondante est limitée supérieurement.

Si h' est < 0, l'inégalité

$$U > T - h' > -h'$$

montre qne nous sommes dans le cas où deux masses au moins ne tendent pas vers zéro, et la plus petite des distances r_{ij} est alors limitée supérieurement. En rapprochant ce fait de notre hypothèse, on voit que la plus petite des distances mutuelles des corps est comprise entre deux quantités finies et non nulles.

Remarquons encore que les coordonnées sont développables suivant les puissances de

$$\frac{1 - e^{\frac{\pi}{2\alpha}t}}{1 + e^{\frac{\pi}{2\alpha}t}},$$

2α étant la largeur de la bande parallèle à l'axe réel des t à l'intérieur de laquelle les coordonnées sont des fonctions holomorphes de t.

Enfin, les vitesses étant limitées supérieurement si aucune masse ne tend vers zéro, on a

$$\left|\frac{dx_i}{dt}\right|, \qquad \left|\frac{dy_i}{dt}\right|, \qquad \left|\frac{dz_i}{dt}\right| < \rho,$$

d'où

$$|x_i - x_i^0|, \quad |y_i - y_i^0|, \quad |z_i - z_i^0| < \rho t.$$

Les coordonnées, donc les distances mutuelles si elles deviennent infiniment grandes, seront infiniment grandes d'ordre *un* au plus.

23. — Faisons dans les équations du mouvement :

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = f \sum_{j \neq i} m_j \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3}, \ldots$$

le changement de variables défini par les relations

$$\frac{d\tau}{dt} = \rho(t), \qquad \frac{x_i}{\xi_i} = \frac{y_i}{\eta_i} = \frac{z_i}{\zeta_i} = \sigma(t).$$

Les équations deviennent

$$\frac{d^2\xi_i}{d\tau^2} + \frac{2\rho\sigma' + \rho'\sigma}{\rho^2\sigma}\frac{d\xi_i}{d\tau} + \frac{\sigma''}{\rho^2\sigma}\xi_i = \frac{f}{\rho^2\sigma^3}\sum_{j \neq i} m_j \frac{\xi_j - \xi_i}{\rho_{ij}^3}, \ldots .$$

Si l'on prend $\sigma = t$, $\rho = \frac{1}{t^2}$, on a

$$\frac{d^2\xi_i}{d\tau^2} = ft \sum_{j \neq i} m_j \frac{\xi_j - \xi_i}{\rho_{ij}^3}, \ldots,$$

équations du problème des n corps de masses $m_i t$. Plus généralement, les masses m_i se ramènent aux masses $(at+b)m_i$ en prenant

$$\sigma = at + b, \qquad \rho = \frac{1}{(at+b)^2}.$$

Il n'est intéressant d'ailleurs de faire un tel changement de variables qu'autant que $(at+b)m_i$ exprimé en fonction de τ n'est pas de même forme que $m_i(t)$. Par exemple, on n'obtient rien de nouveau si l'on applique ce changement de variables aux masses $(\alpha_i t + \beta_i)\psi(t)$.

Le problème se ramène au problème des n corps à masses fixes si les masses sont de la forme $m_i = \dfrac{\mu_i}{\alpha t + \beta}$, les μ_i étant des constantes.

Si les masses varient en restant dans des rapports constants, on pourra dans certains cas particuliers se ramener à des problèmes à masses fixes. Nous traiterons cette question dans la seconde partie.

24. — **Application de la variation des constantes.** — Considérons une fonction $\psi(t)$ quelconque et faisons le changement de variables défini par les égalités

$$\frac{d\tau}{dt} = \psi^2, \qquad \frac{x_i}{\xi_i} = \frac{y_i}{\eta_i} = \frac{z_i}{\zeta_i} = \frac{1}{\psi},$$

ce qui revient à prendre $\rho = \psi^2$, $\sigma = \dfrac{1}{\psi}$.

Les équations transformées deviennent, en posant $m_i = \mu_i \psi$:

$$\frac{d^2\xi_i}{d\tau^2} = f \sum_{j \neq i} \mu_j \frac{\xi_j - \xi_i}{\rho_{ij}^3} + \mathrm{F}(t)\,\xi_i, \ \ldots$$

avec

$$\mathrm{F}(t) = -\frac{1}{\psi^3}\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{\psi}\right).$$

Ces équations représentent le mouvement de n points de masses $\dfrac{m_i}{\psi}$ s'attirant suivant la loi de Newton et, de plus, attirés ou repoussés par l'origine proportionnellement à la distance et à la masse, le coefficient d'attraction étant généralement variable.

Posons

$$p_i = \mu_i \frac{d\xi_i}{d\tau}, \qquad q_i = \mu_i \frac{d\eta_i}{d\tau}, \qquad r_i = \mu_i \frac{d\zeta_i}{d\tau},$$

puis

$$H_1 = \frac{1}{2}\sum_i \frac{p_i^2 + q_i^2 + r_i^2}{\mu_i} - \frac{F(t)}{2}\sum_i \mu_i\,(\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2),$$

$$H_2 = -f\sum_{i,j} \frac{\mu_i \mu_j}{\rho_{ij}}.$$

Les équations du mouvement sont alors

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\xi_i}{d\tau} &= \quad \frac{\partial H_1}{\partial p_i}, \ \ldots \\ \frac{dp_i}{d\tau} &= -\frac{\partial H_1}{\partial \xi_i} - \frac{\partial H_2}{\partial \xi_i} + \frac{\mu'_i}{\psi^2}\frac{\partial H_1}{\partial p_i}, \ \ldots \quad \left(\mu'_i = \frac{d\mu_i}{dt}\right). \end{aligned}\right.$$

Intégrons le système

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\xi_i}{d\tau} &= \quad \frac{\partial H_1}{\partial p_i}, \ \ldots, \\ \frac{dp_i}{d\tau} &= -\frac{\partial H_1}{\partial \xi_i} + \frac{\mu'_i}{\psi^2}\frac{\partial H_1}{\partial p_i}, \ \ldots, \end{aligned}\right.$$

qu'on peut écrire $$\frac{d^2\xi_i}{d\tau^2} = F(t)\xi_i, \ \ldots.$$

On en tire :

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi_i &= (a_i t + b_i)\,\psi, & p_i &= \mu_i\left[\frac{\psi'}{\psi^2}(a_i t + b_i) + \frac{a_i}{\psi}\right], \\ \eta_i &= (c_i t + d_i)\,\psi, & q_i &= \mu_i\left[\frac{\psi'}{\psi^2}(c_i t + d_i) + \frac{c_i}{\psi}\right], \\ \zeta_i &= (e_i t + f_i)\,\psi, & r_i &= \mu_i\left[\frac{\psi'}{\psi^2}(e_i t + f_i) + \frac{e_i}{\psi}\right], \end{aligned}\right.$$

a_i, b_i, ... f_i étant les constantes d'intégration.

Utilisant la méthode de la variation des constantes, portons ces valeurs dans le système complet, ces constantes étant alors considérées comme des fonctions de τ. Il vient

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \xi_i}{\partial \tau} + \frac{\partial \xi_i}{\partial a_i}\frac{da_i}{d\tau} + \frac{\partial \xi_i}{\partial b_i}\frac{db_i}{d\tau} = \frac{\partial H_1}{\partial p_i}, \\ &\frac{\partial p_i}{\partial \tau} + \frac{\partial p_i}{\partial a_i}\frac{da_i}{d\tau} + \frac{\partial p_i}{\partial b_i}\frac{db_i}{d\tau} = -\frac{\partial H_1}{\partial \xi_i} + \frac{\mu'_i}{\psi^2}\frac{\partial H_1}{\partial p_i} - \frac{\partial H_2}{\partial \xi_i}, \end{aligned}\right.$$

d'où

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial \xi_i}{\partial a_i}\frac{da_i}{d\tau}+\frac{\partial \xi_i}{\partial b_i}\frac{db_i}{d\tau}=0,\\&\frac{\partial p_i}{\partial a_i}\frac{da_i}{d\tau}+\frac{\partial p_i}{\partial b_i}\frac{db_i}{d\tau}=-\frac{\partial H_2}{\partial \xi_i},\end{aligned}\right.$$

et les équations analogues.

On en déduit les équations

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{da_i}{d\tau}=f\psi\sum_{j\neq i}\mu_j\frac{\xi_j-\xi_i}{\rho_{ij}^3},\ \ldots\\&\frac{db_i}{d\tau}=-ft\psi\sum_{j\neq i}\mu_j\frac{\xi_j-\xi_i}{\rho_{ij}^3},\ \ldots\end{aligned}\right.$$

ou, en revenant à la variable t :

$$(23)\qquad\left\{\begin{aligned}&\frac{da_i}{dt}=f\sum_{j\neq i}m_j\frac{(a_j-a_i)t+(b_j-b_i)}{\{S[(a_j-a_i)t+(b_j-b_i)]^2\}^{\frac{3}{2}}},\\&\frac{db_i}{dt}=-ft\sum_{j\neq i}m_j\frac{(a_j-a_i)t+(b_j-b_i)}{\{S[(a_j-a_i)t+(b_j-b_i)]^2\}^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}\right.$$

En définitive, les coordonnées sont données par les expressions (22), les quantités a_i, ... f_i étant solutions de (23).

Si l'on prend en particulier $\psi=1$, la signification de la méthode précédente est immédiate.

25. — Supposons que les produits $m_i t^{\frac{1}{p}}$ (p entier positif) soient des fonctions holomorphes de t pour t infini. Prenons pour nouvelle variable indépendante $T=\frac{1}{t^{\frac{1}{p}}}$. Les équations (23) deviennent alors

$$\left\{\begin{aligned}&-\frac{1}{p}\frac{da_i}{dT}=fT^p\sum_{j\neq i}\frac{m_j}{T}\frac{(a_j-a_i)+(b_j-b_i)T^p}{\{S[(a_j-a_i)+(b_j-b_i)T^p]^2\}^{\frac{3}{2}}},\\&\frac{1}{p}\frac{db_i}{dT}=f\sum_{j\neq i}\frac{m_j}{T}\frac{(a_j-a_i)+(b_j-b_i)T^p}{\{S[(a_j-a_i)+(b_j-b_i)T^p]^2\}^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}\right.$$

En vertu de l'hypothèse, les seconds membres sont holomorphes pour $T=0$ si l'on part de conditions initiales telles que l'on n'ait pour aucun couple de points M_k, $M_{k'}$, les égalités

$$a_k=a_{k'},\qquad c_k=c_{k'},\qquad e_k=e_{k'}.$$

On peut alors développer les solutions de ce système en séries ordonnées suivant les puissances de T :

$$a_i = a_i^{(0)} + a_i^{(1)} \mathrm{T}^{p+1} + \ldots + a_i^{(n)} \mathrm{T}^{p+n} + \ldots,$$

$$b_i = b_i^{(0)} + b_i^{(1)} \mathrm{T} + \ldots + b_i^{(n)} \mathrm{T}^n + \ldots,$$

les coefficients de T, T^2, ... T^p dans le développement des a_i étant nuls. On en déduit :

$$x_i = a_i t + b_i = \left(a_i^{(0)} + a_i^{(1)} t^{-\frac{p+1}{p}} + a_i^{(2)} t^{-\frac{p+2}{p}} + \ldots + a_i^{(n)} t^{-\frac{p+n}{p}} + \ldots\right) t$$
$$+ \left(b_i^{(0)} + \frac{b_i^{(1)}}{t^{\frac{1}{p}}} + \ldots + \frac{b_i^{(n)}}{t^{\frac{n}{p}}} + \ldots\right),$$

$$x_i = a_i^{(0)} t + b_i^{(0)} + \frac{\alpha_i^{(1)}}{t^{\frac{1}{p}}} + \frac{\alpha_i^{(2)}}{t^{\frac{2}{p}}} + \ldots + \frac{\alpha_i^{(n)}}{t^{\frac{n}{p}}} + \ldots, \quad \text{etc.},$$

séries procédant suivant les puissances négatives de $t^{\frac{1}{p}}$, auxquelles s'ajoute un binôme du 1er degré.

On en déduit que *les distances de deux corps quelconques sont des infiniment grands d'ordre un.*

Tous les points tendent à avoir des mouvements rectilignes et uniformes, sauf, peut-être, l'un d'entre eux pouvant tendre vers un point fixe, sa vitesse tendant vers zéro.

La même conclusion subsiste si les quantités $\frac{m_i}{\mathrm{T}}$ et $m_i \mathrm{T}^{p-1}$ sont holomorphes pour $\mathrm{T} = 0$. $m_i \mathrm{T}^{p-1}$ sera d'ailleurs holomorphe si $\frac{m_i}{\mathrm{T}}$ l'est. Supposons donc que l'on ait :

$$\frac{m_i}{\mathrm{T}} = \lambda_0 + \lambda_1 \mathrm{T} + \lambda_2 \mathrm{T}^2 + \ldots + \lambda_n \mathrm{T}^n + \ldots;$$

on en tire

$$m_i = \frac{\lambda_0}{t^{\frac{1}{p}}} + \frac{\lambda_1}{t^{\frac{2}{p}}} + \ldots + \frac{\lambda_n}{t^{\frac{n+1}{p}}} + \ldots.$$

La conclusion de tout à l'heure subsiste donc si les masses sont développables suivant les puissances négatives de $t^{\frac{1}{p}}$, les développements ne contenant pas de terme constant.

GÉNÉRALISATION. — La propriété précédente peut être étendue au cas où les produits $m_i t^\alpha$, α étant un nombre positif quelconque, ont des limites μ_i quand t croît indéfiniment.

Nous utiliserons pour cela la méthode des approximations successives sous la forme A.

Reprenons les équations (23) et faisons-y le changement de variable $T = \frac{1}{t^\alpha}$. Ces équations deviennent :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{da_i}{dT} &= -\frac{f}{\alpha} T^{\frac{1}{\alpha}} \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{T} \frac{(a_j - a_i) + (b_j - b_i) T^{\frac{1}{\alpha}}}{\left\{ S\left[(a_j - a_i) + (b_j - b_i) T^{\frac{1}{\alpha}}\right]^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}, \\ \frac{db_i}{dT} &= \frac{f}{\alpha} \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{T} \frac{(a_j - a_i) + (b_j - b_i) T^{\frac{1}{\alpha}}}{\left\{ S\left[(a_j - a_i) + (b_j - b_i) T^{\frac{1}{\alpha}}\right]^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}\right.$$

Nous pouvons poser

$$\frac{m_i}{T} = \mu_i + \varepsilon_i(t) = M_i,$$

et soit p un nombre entier positif; posons

$$\frac{1}{\alpha} = p + \varepsilon.$$

Considérons les deux systèmes

$$\left\{\begin{aligned} \frac{da_i}{dT} &= -f(p+\varepsilon) T^{p+\varepsilon} \sum_{j \neq i} M_j \frac{(a_j - a_i) + (b_j - b_i) T^{p+\varepsilon}}{\left\{ S\left[(a_j - a_i) + (b_j - b_i) T^{p+\varepsilon}\right]^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}, \ \ldots \\ \frac{db_i}{dT} &= f(p+\varepsilon) \sum_{j \neq i} M_j \frac{(a_j - a_i) + (b_j - b_i) T^{p+\varepsilon}}{\left\{ S\left[(a_j - a_i) + (b_j - b_i) T^{p+\varepsilon}\right]^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}, \ \ldots \end{aligned}\right.$$

et

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dA_i}{dt} &= -fp\, T^p \sum_{j \neq i} \mu_j \frac{(A_j - A_i) + (B_j - B_i) T^p}{\left\{ S\left[(A_j - A_i) + (B_j - B_i) T^p\right]^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}, \ \ldots \\ \frac{dB_i}{dt} &= fp \sum_{j \neq i} \mu_j \frac{(A_j - A_i) + (B_j - B_i) T^p}{\left\{ S\left[(A_j - A_i) + (B_j - B_i) T^p\right]^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}, \ \ldots . \end{aligned}\right.$$

Dans le second système, les seconds membres sont (sauf pour des valeurs initiales exceptionnelles) des fonctions holomorphes de T, des A, B, ... pour $T = 0$.

On a donc :

$$A_i = A_i^{(0)} + A_i^{(2)} T^2 + \ldots + A_i^{(n)} T^n + \ldots$$

$$B_i = B_i^{(0)} + B_i^{(1)} T + \ldots + B_i^{(n)} T^n + \ldots,$$

et si l'on pose

$$X_i = A_i t + B_i, \ \ldots$$

et

$$R_{ij}^2 = S(X_i - X_j)^2,$$

tous les R_{ij} seront des infiniment grands d'ordre *un* pour les très grandes valeurs de t.

Nous continuerons à désigner par r_{ij}^2 la quantité $S(x_i - x_j)^2$, où $x_i = a_i t + b_i$, ...

On pourra passer d'une solution du second système à une solution du premier système par la méthode des approximations successives si les seconds membres du premier système vérifient les conditions suivantes :

|dérivées des seconds membres par rapport aux a et b| limitées supérieurement,

|dérivées des seconds membres par rapport à ε| limitées supérieurement,

|dérivées des seconds membres par rapport aux ε_i| limitées supérieurement.

Ces conditions fournissent successivement des inégalités de la forme

$$\frac{(p+\varepsilon)\,T^{p+\varepsilon}}{r_{ij}^3} < A \qquad \text{et} \qquad \frac{(p+\varepsilon)\,T^{2(p+\varepsilon)}}{r_{ij}^3} < A,$$

qui se réduisent à

$$\frac{(p+\varepsilon)\,T^{p+\varepsilon}}{r_{ij}^3} < A,$$

d'où

$$r_{ij} > \frac{B}{t^{\frac{1}{3}}};$$

puis

$$\left|(p+\varepsilon)\,T^{p+\varepsilon} \sum_{j \neq i} M_j u_{ij} + T^{p+\varepsilon} \sum_{j \neq i} M_j u_{ij} + (p+\varepsilon)\,T^{p+\varepsilon} \sum_{j \neq i} \frac{M_j\,|b_j - b_i|}{r_{ij}^3}\right| < A,$$

et

$$\left|\sum_{j \neq i} M_j u_{ij} + (p+\varepsilon) \sum_{j \neq i} \frac{M_j\,|b_j - b_i|}{r_{ij}^3}\right| < A,$$

qui seront vérifiées si l'on a

$$M_j\,|u_{ij}| < A, \qquad (p+\varepsilon)\,\frac{M_j\,|b_j - b_i|}{r_{ij}^3} < A,$$

qui donnent

$$r_{ij} > B;$$

et enfin

$$(p+\varepsilon)\,T^{p+\varepsilon}\,|u_{ij}| < A \qquad \text{et} \qquad (p+\varepsilon)\,|u_{ij}| < A,$$

qui se réduisent à

$$(p+\varepsilon)\,|u_{ij}| < A,$$

d'où

$$\frac{1}{r_{ij}^2} < A \qquad \text{ou} \qquad r_{ij} > B,$$

avec

$$u_{ij} = \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3}.$$

Les conditions $r_{ij} > B$ et *a fortiori* $r_{ij} > \dfrac{B}{t^{\frac{1}{3}}}$ sont vérifiées par tous les R_{ij}, puisque leur terme principal est de la forme λt.

On en déduit que si l'on augmente ou diminue tous les A, B, ... de quantités suffisamment petites, les r_{ij} seront encore des infiniment grands du premier ordre et vérifieront également ces conditions. Donc on peut appliquer la méthode des approximations successives et l'on arrive à cette conclusion :

Si les produits $m_i t^\alpha$, α étant un nombre positif quelconque, tendent vers des limites finies quand t croît indéfiniment, toutes les distances mutuelles sont des infiniment grands du premier ordre, sauf pour des conditions initiales exceptionnelles.

Remarque. — Le raisonnement précédent est valable quel que soit le nombre p choisi. On peut en particulier prendre pour p l'entier le plus voisin de $\dfrac{1}{\alpha}$ ou $p = 0$, ce qui revient à prendre $A_i =$ constante, $B_i =$ constante.

26. — Application à l'Astronomie. — On admet[1] que la masse des étoiles décroît selon la loi

$$\frac{dM}{dt} = -aM^2,$$

a étant un coefficient positif[2]. M est donc un infiniment petit d'ordre $\frac{1}{2}$. Le raisonnement précédent s'applique donc dans ce cas, en faisant $p = 2$.

---

(1) EDDINGTON. *Monthly Notices*, 84, p. 308 (1924). Voir également JEANS. *Monthly Notices*, 85, p. 2, 1924.

(2) $a = 5 \cdot 10^{-14}$ (masse du Soleil)$^{-2}$ (année)$^{-1}$.

CHAPITRE IV

Application de la méthode de la variation des constantes.

27. — Considérons n points matériels de masses $m_i(t)$, s'attirant suivant la loi de Newton. Soient x_i, y_i, z_i leurs coordonnées par rapport à des axes fixes, p_i, q_i, r_i les projections sur les mêmes axes de leur quantité de mouvement.

Les équations du mouvement peuvent s'écrire :

$$(24) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \; \ldots\ldots \\ &\frac{dp_i}{dt} - \frac{p_i}{m_i}\frac{dm_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \; \ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

où l'on a posé

$$H = T - U.$$

Supposons que l'on ait intégré les équations :

$$(25) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \; \ldots\ldots \\ &\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \; \ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

où l'on a remplacé les $m_i(t)$ par des constantes que nous représentons par m_i. Ces équations (25) représentent donc le mouvement de n points à masses fixes.

Nous aurons des relations de la forme

$$x_i = \text{fonct.}\,(t,\, c_1,\, c_2,\, \ldots\ldots\, c_{6n},\, m_1,\, \ldots\ldots\, m_n).$$

Prenons ces expressions comme solution de (24) en y remplaçant les m_i par les $m_i(t)$ et en y considérant les c comme des fonctions de t.

Les c sont donnés par les équations

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{6n} \frac{\partial x_i}{\partial c_k}\frac{dc_k}{dt} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial m_k}\frac{dm_k}{dt} = 0, \quad \ldots\ldots \\ &\sum_{k=1}^{6n} \frac{\partial p_i}{\partial c_k}\frac{dc_k}{dt} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial p_i}{\partial m_k}\frac{dm_k}{dt} = X_i, \quad \ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

avec

$$X_i = \frac{p_i}{m_i}\,\frac{dm_i}{dt}, \quad \ldots\ldots$$

Multiplions les équations de la première ligne respectivement par $\frac{\partial p_i}{\partial c_l}, \frac{\partial q_i}{\partial c_l}, \frac{\partial r_i}{\partial c_l}$ et celles de la seconde ligne par $-\frac{\partial x_i}{\partial c_l}, -\frac{\partial y_i}{\partial c_l}, -\frac{\partial z_i}{\partial c_l}$, puis ajoutons-les membre à membre en introduisant les crochets de Lagrange

$$[u, v] = \sum_i \mathrm{S}\left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial x_i}{\partial v}\frac{\partial p_i}{\partial u}\right)$$

et les quantités

$$R_l = \sum_i \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial c_l} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial c_l} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial c_l}\right) = \sum_i \frac{\frac{dm_i}{dt}}{m_i}\left(p_i \frac{\partial x_i}{\partial c_l} + q_i \frac{\partial y_i}{\partial c_l} + r_i \frac{\partial z_i}{\partial c_l}\right).$$

On obtient les équations

$$(26) \qquad \sum_{k=1}^{6n} [c_k, c_l]\frac{dc_k}{dt} + \sum_{k=1}^{n} [m_k, c_l]\frac{dm_k}{dt} + R_l = 0.$$

Ces $6n$ équations aux $6n$ inconnues $\frac{dc_k}{dt}$, dont le déterminant, égal au produit des deux déterminants fonctionnels $\frac{D(x_1, p_1, y_1, q_1, z_1, r_1, x_2, p_2, \ldots)}{D(c_1, c_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, c_{6n})}$ et $\frac{D(p_1, -x_1, q_1, -y_1, r_1, -z_1, p_2, -x_2, \ldots)}{D(c_1, c_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, c_{6n})}$, donc au carré du premier, est différent de zéro, fournisent les $\frac{dc_k}{dt}$, donc les c_k en fonction du temps.

28. — Crochets de Lagrange. — Nous allons étudier les crochets $[\alpha, \beta]$, où α et β représentent deux des éléments t, m_k, c_i. La fonction H dépend des m_k, non seulement directement, mais encore par l'intermédiaire des $x_i, y_i, z_i, p_i, q_i, r_i$. Nous désignerons par $\frac{\partial H}{\partial m_k}$ la dérivée totale de H par rapport à m_k, et par $\frac{\delta H}{\delta m_k}$ la dérivée prise en ne faisant pas varier $x_i, \ldots\ldots, r_i$, de sorte que

$$\frac{\partial H}{\partial m_k} = \frac{\delta H}{\delta m_k} + \sum_i S\left(\frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial m_k} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial m_k}\right).$$

On a :

$$[\alpha, \beta] = \sum_i S\left(\frac{\partial x_i}{\partial \alpha}\frac{\partial p_i}{\partial \beta} - \frac{\partial x_i}{\partial \beta}\frac{\partial p_i}{\partial \alpha}\right),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}[\alpha, \beta] &= \sum_i S\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial \alpha \partial t}\frac{\partial p_i}{\partial \beta} + \frac{\partial x_i}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 p_i}{\partial \beta \partial t} - \frac{\partial^2 x_i}{\partial \beta \partial t}\frac{\partial p_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial x_i}{\partial \beta}\frac{\partial^2 p_i}{\partial \alpha \partial t}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial \alpha}\sum_i S\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{\partial p_i}{\partial \beta} - \frac{\partial x_i}{\partial \beta}\frac{\partial p_i}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial \beta}\sum_i S\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{\partial p_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial x_i}{\partial \alpha}\frac{\partial p_i}{\partial t}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial \alpha}\sum_i S\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial \beta} + \frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \beta}\right) - \frac{\partial}{\partial \beta}\sum_i S\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \alpha}\right).\end{aligned}$$

Si α et β représentent des éléments autres qu'un m, on a, comme dans la théorie classique

$$\frac{\partial}{\partial t}[\alpha, \beta] = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial H}{\partial \beta}\right) - \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha}\right) = 0.$$

Si β représente un m, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}[\alpha, m_k] &= \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial H}{\partial m_k} - \frac{\delta H}{\delta m_k}\right) - \frac{\partial}{\partial m_k}\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha}\right)\\
&= -\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\delta H}{\delta m_k}\right).\end{aligned}$$

Si α et β représentent m_k et m_l, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}[m_k, m_l] &= \frac{\partial}{\partial m_k}\left(\frac{\partial H}{\partial m_l} - \frac{\delta H}{\delta m_l}\right) - \frac{\partial}{\partial m_l}\left(\frac{\partial H}{\partial m_k} - \frac{\delta H}{\delta m_k}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial m_l}\left(\frac{\delta H}{\delta m_k}\right) - \frac{\partial}{\partial m_k}\left(\frac{\delta H}{\delta m_l}\right).\end{aligned}$$

Comme

$$H = \frac{1}{2}\sum_i \frac{p_i^2 + q_i^2 + r_i^2}{m_i} - f\sum \frac{m_i m_j}{r_{ij}},$$

on a

$$\frac{\delta H}{\delta m_k} = -\left(\frac{p_k^2 + q_k^2 + r_k^2}{2 m_k^2} + f\sum_{j \neq k} \frac{m_j}{r_{jk}}\right) = -\left(\frac{V_k^2}{2} + f\sum_{i \neq k} \frac{m_j}{r_{jk}}\right),$$

d'où les formules :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}[\alpha,\ m_k] = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{V_k^2}{2} + f\sum_{j \neq k} \frac{m_j}{r_{jk}}\right), \\ &\frac{\partial}{\partial t}[m_k,\ m_l] = \frac{\partial}{\partial m_k}\left(\frac{V_l^2}{2} + f\sum_{j \neq l} \frac{m_j}{r_{jl}}\right) - \frac{\partial}{\partial m_l}\left(\frac{V_k^2}{2} + f\sum_{j \neq k} \frac{m_j}{r_{jk}}\right). \end{aligned}\right.$$

29. — Supposons que nous ayons résolu le système (25) au moyen de la méthode de Jacobi. Nous aurons donc obtenu une intégrale complète $S(x_i, y_i, z_i, \alpha_1, \ldots, \alpha_{3n}, m_k, t)$ de l'équation

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, x_i, y_i, z_i, \frac{\partial S}{\partial x_i}, \frac{\partial S}{\partial y_i}, \frac{\partial S}{\partial z_i}\right) = 0,$$

puis nous aurons posé

$$(27) \qquad \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \qquad \frac{\partial S}{\partial x_i} = p_i, \text{ etc.},$$

les β_i étant de nouvelles constantes arbitraires.

On peut, au moyen des équations (27), exprimer les $x, y, z, p, q, r,$ au moyen de t, des m, des α et des β, ou, au contraire, les α et β en fonction de t, des m et des $x, y, z, p, q, r,$ et Jacobi a démontré les relations

$$(a) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial \beta_k}{\partial x_i}, & &\frac{\partial x_i}{\partial \beta_k} = \frac{\partial \alpha_k}{\partial p_i}, \\ &\frac{\partial \alpha_k}{\partial x_i} = -\frac{\partial p_i}{\partial \beta_k}, & &\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_k} = -\frac{\partial \beta_k}{\partial p_i}, \end{aligned}\right.$$

et les équations analogues.

Nous allons, en utilisant la méthode de la variation des constantes, calculer $\frac{d\alpha_k}{dt}$ et $\frac{d\beta_k}{dt}$.

Si F est une fonction de t, des m, des x, y, z, p, q, r, posons

$$\frac{\delta F}{\delta t} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial m_l} \frac{dm_l}{dt}.$$

On aura, en vertu des équations (a) :

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha_k}{dt} &= \frac{\delta \alpha_k}{\delta t} + \sum_{l=1}^{n} \mathrm{S}\left[\frac{\partial \alpha_k}{\partial x_l}\frac{\partial H}{\partial p_l} - \frac{\partial \alpha_k}{\partial p_l}\left(\frac{\partial H}{\partial x_l} - \frac{p_l}{m_l}\frac{dm_l}{dt}\right)\right] \\
&= \frac{\delta \alpha_k}{\delta t} - \sum_{l=1}^{n} \mathrm{S}\left(\frac{\partial H}{\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial \beta_k} + \frac{\partial H}{\partial p_l}\frac{\partial p_l}{\partial \beta_k}\right) + \sum_{l=1}^{n} \frac{\frac{dm_l}{dt}}{m_l}\left(p_l \frac{\partial \alpha_k}{\partial p_l} + q_l \frac{\partial \alpha_k}{\partial q_l} + r_l \frac{\partial \alpha_k}{\partial r_l}\right) \\
&= \frac{\delta \alpha_k}{\delta t} - \frac{\partial H}{\partial \beta_k} + \sum_{l=1}^{n} \frac{\frac{dm_l}{dt}}{m_l}\left(p_l \frac{\partial \alpha_k}{\partial p_l} + q_l \frac{\partial \alpha_k}{\partial q_l} + r_l \frac{\partial \alpha_k}{\partial r_l}\right),
\end{aligned}$$

et de même

$$\frac{d\beta_k}{dt} = \frac{\delta \beta_k}{\delta t} + \frac{\partial H}{\partial \alpha_k} + \sum_{l=1}^{n} \frac{\frac{dm_l}{dt}}{m_l}\left(p_l \frac{\partial \beta_k}{\partial p_l} + q_l \frac{\partial \beta_k}{\partial q_l} + r_l \frac{\partial \beta_k}{\partial r_l}\right).$$

Nous avons donc des équations toutes résolues par rapport aux $\frac{d\alpha_k}{dt}$ et $\frac{d\beta_k}{dt}$.

Pour calculer $\frac{\delta \alpha_k}{\delta t}, \frac{\delta \beta_k}{\delta t}, \frac{\partial \alpha_k}{\partial p_l}, \ldots, \frac{\partial \beta_k}{\partial p_l}, \ldots,$ il nous suffit de dériver convenablement les équations (27).

Nous aurons ainsi

$$(b) \qquad \frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right) + \sum_{k=1}^{3n} \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial \alpha_k} \frac{\delta \alpha_k}{\delta t} = 0,$$

$$(c) \qquad \frac{\delta \beta_k}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha_k}\right) + \sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_j \partial \alpha_k} \frac{\delta \alpha_j}{\delta t},$$

$$(d) \qquad \sum_{k=1}^{3n} \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial \alpha_k} \frac{\partial \alpha_k}{\partial p_l} = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \neq l, \\ 1 & \text{pour } i = l, \end{cases}$$

$$(e) \qquad \frac{\partial \beta_k}{\partial p_l} = \sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_k \partial \alpha_j} \frac{\partial \alpha_j}{\partial p_l},$$

et les équations analogues.

Les équations (b) et (d) nous fourniront respectivement les $\frac{\delta \alpha_k}{\delta t}$ et les $\frac{\partial \alpha_k}{\partial p_l}, \ldots,$ puis les équations (c) et (e) sont résolues par rapport aux $\frac{\delta \beta_k}{\delta t}$ et $\frac{\partial \beta_k}{\partial p_l}$.

Remarque. — En écrivant comme nous l'avons fait le second membre de (c), nous supposons que $\frac{\partial S}{\partial \alpha_k}$ représente la dérivée exprimée, comme elle se présente directement, en fonction des x_i, y_i, z_i, α, m_k et t.

30. — Application. — Proposons-nous de déterminer les masses en fonction du temps de façon que la trajectoire de chaque point M_i soit située sur une surface Σ_i donnée à l'avance, d'équation

$$\mathcal{F}_i(x, y, z) = 0.$$

Les c et les m seront alors solutions des équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}_i(x_i, y_i, z_i) = 0, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{6n} [c_k, c_l] \frac{dc_k}{dt} + \sum_{k=1}^{n} [m_k, c_l] \frac{dm_k}{dt} + R_l = 0, \end{array} \right.$$

les x_i, y_i, z_i, étant supposés remplacés en fonction de t, des c et des m par la méthode précédente.

Ces équations nous fournissent les c et les m en fonction de t et de $6n$ constantes arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{6n}$. Si l'on porte ces valeurs dans les expressions de x_i, y_i, z_i, p_i, q_i, r_i, on obtiendra des fonctions qui, vérifiant (25) et (26), vérifieront (24), donc seront solutions du problème des n corps à masses variables.

On voit donc la possibilité, en général, de déterminer les masses en fonction du temps de telle sorte que chaque point se meuve sur une surface donnée à l'avance.

De plus, ces masses dépendent de $6n$ constantes arbitraires; on pourra donc imposer encore des conditions se traduisant par $6n$ relations.

Par exemple, si l'on veut que le corps M_i passe par le point (x_i^0, y_i^0, z_i^0) situé sur Σ_i, nous serons amené à écrire deux relations de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i^0 = f_i(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_{6n}), \\ y_i^0 = g_i(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_{6n}), \end{array} \right.$$

[la relation $z_i^0 = h_i(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{6n})$ étant conséquence des deux premières], et à éliminer t entre ces deux relations, ce qui nous fournira *une* relation entre les α.

Donc la condition que la trajectoire d'un corps M_i doive passer par un point donné de Σ_i se traduit par *une* relation.

Si l'on se donne de plus le vecteur-vitesse en ce point, on devra éliminer t entre les quatre relations

$$x_i^0 = f_i(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_{6n}), \qquad y_i^0 = g_i(\ldots\ldots),$$
$$x_i'^0 = f_i'(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots), \qquad y_i'^0 = g_i'(\ldots\ldots),$$

ce qui donnera *trois* relations entre les α.

On pourra donc disposer des constantes α ou, ce qui revient au même, on pourra choisir les conditions initiales du mouvement de telle sorte que les trajectoires de chacun des points passent respectivement par six points de la surface correspondante, ou bien par deux points, le vecteur-vitesse en chacun de ces points étant donné, ou bien encore par un point où l'on se donne le vecteur-vitesse et trois autres points.

31. — **Mouvement relatif.** — Supposons que l'on ait $n+1$ corps S et $P_1, P_2, \ldots, P_n$, de masses $m_0, m_1, \ldots, m_n$, S représentant le Soleil, P une planète.

Soient x_i, y_i, z_i, les coordonnées de la planète P_i par rapport à des axes de directions fixes passant par S.

Posons

$$M_k = m_0 + m_k,$$
$$H = \frac{1}{2}\sum_i \left(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2\right) - f\sum_i \frac{M_i}{r_i},$$
$$R_i = f\sum_{j\neq i} m_j\left(\frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j}{r_j^3}\right),$$

Δ_{ij} étant la distance P_iP_j, r_j la distance SP_j.

On démontre, comme en masses fixes, que les équations du mouvement relatif des planètes par rapport au Soleil sont

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{\partial(H - R_i)}{\partial x_i'}, \ldots\ldots \\ \frac{dx_i'}{dt} &= -\frac{\partial(H - R_i)}{\partial x_i}, \ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

On sait intégrer le système

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial x_i'}, \ldots\ldots, \\ \frac{dx_i'}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

où l'on a immobilisé les masses, puisqu'elles représentent le mouvement de P_i par rapport à S, S et P_i étant à masses fixes et seuls en présence. On obtient ainsi

$$\begin{cases} x_i = x_i(t, M_i, c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_6}), \ldots\ldots \\ x'_i = x'_i(t, M_i, c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_6}), \ldots\ldots \end{cases}$$

ou, en négligeant l'indice i :

$$\begin{cases} x_i = x_i(t, M, c_1, c_2, \ldots, c_6), \ldots\ldots \\ x'_i = x'_i(t, M, c_1, c_2, \ldots, c_6), \ldots\ldots \end{cases}$$

Prenant ces expressions comme solutions du système donné, on est conduit aux équations

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{6} \frac{\partial x}{\partial c_k}\frac{dc_k}{dt} + \frac{\partial x}{\partial M}\frac{dM}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial x'} = 0, \ldots\ldots \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{6} \frac{\partial x'}{\partial c_k}\frac{dc_k}{dt} + \frac{\partial x'}{\partial M}\frac{dM}{dt} = \frac{\partial R}{\partial x} \qquad , \ldots\ldots \end{cases}$$

ou, en introduisant encore les crochets de Lagrange

$$\sum_{k=1}^{6} [c_l, c_k]\frac{dc_k}{dt} + [c_l, M]\frac{dM}{dt} = Q_l, \tag{28}$$

avec

$$Q_l = \frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial c_l} + \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial c_l} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial c_l} = \frac{\partial R}{\partial c_l}.$$

32. — Crochets de Lagrange. — α et β étant deux éléments pris parmi t, M, $c_1, c_2, \ldots, c_6$, on a

$$[\alpha, \beta] = S\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial x'}{\partial \beta} - \frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial x'}{\partial \alpha}\right),$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}[\alpha, \beta] &= \frac{\partial}{\partial \alpha} S\left(\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x'}{\partial \beta} - \frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial x'}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial \beta} S\left(\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x'}{\partial \alpha} - \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial x'}{\partial t}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha} S\left(\frac{\partial H}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial \beta} + \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \beta}\right) - \frac{\partial}{\partial \beta} S\left(\frac{\partial H}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial \alpha} + \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right). \end{aligned}$$

Si α et β sont tous deux différents de M, on a

$$\frac{\partial}{\partial t}[\alpha, \beta] = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial H}{\partial \beta}\right) - \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha}\right) = 0.$$

Si β représente M, on a, avec la notation du paragraphe (28) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}[\alpha, M] &= \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial H}{\partial M} - \frac{\delta H}{\delta M}\right) - \frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha}\right)\\ &= -\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\delta H}{\delta M}\right)\end{aligned}$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial t}[\alpha, M] = f\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{r}\right).$$

33. — Si l'on prend comme constantes d'intégration c les éléments osculateurs a, e, ε, ϖ, θ, φ de l'orbite de M :

a, demi grand axe,
e, excentricité,
ε, longitude moyenne de l'époque,
ϖ, longitude du périhélie,
$\omega = \varpi - \theta$,
θ, longitude du nœud,
φ, inclinaison du plan de l'orbite,
$\varkappa = \varepsilon - \varpi$,

on démontre qu'en substituant à la variable $\varkappa$ la variable $\varkappa_1$ définie par l'équation

$$\frac{d\varkappa_1}{dt} = \frac{d\varkappa}{dt} + t\frac{dn}{dt},$$

les équations (28) deviennent

$$[c_i, \theta]\frac{d\theta}{dt} + [c_i, \omega]\frac{d\omega}{dt} + [c_i, \varphi]\frac{d\varphi}{dt} + \Big([c_i, a]\Big)\frac{da}{dt} + [c_i, e]\frac{de}{dt} + \Big([c_i, M]\Big)\frac{dM}{dt} = \frac{\partial R}{\partial c_i}$$

pour c_i autre que a, les équations relatives à $\varkappa_1$ et a respectivement étant

$$([\varkappa, a])\frac{da}{dt} + ([\varkappa, M])\frac{dM}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \varkappa_1}$$

et

$$([a, \theta])\frac{d\theta}{dt} + ([a, \omega])\frac{d\omega}{dt} + ([a, \varphi])\frac{d\varphi}{dt} + ([a, e])\frac{de}{dt} + ([a, \varkappa])\frac{d\varkappa_1}{dt} + ([a, M])\frac{dM}{dt} = \left(\frac{\partial R}{\partial a}\right).$$

La dérivée $\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right)$ et les crochets $([c_i, a])$, $([c_i, M])$, $([a, M])$ se calculent en ne faisant pas varier n dans u.

Le calcul des crochets $[c_k, c_l]$ est classique. Rappelons les résultats :

$$[\theta, \omega] = 0, \quad [\theta, a] = \frac{1}{2} na\sqrt{1-e^2}\cos\varphi, \quad [\omega, a] = \frac{1}{2} na\sqrt{1-e^2}, \quad [\varphi, a] = 0, \quad [a, e] = 0,$$

$$[\theta, \varphi] = -na^2\sqrt{1-e^2}\sin\varphi, \quad [\theta, e] = -\frac{na^2 e}{\sqrt{1-e^2}}\cos\varphi, \quad [\omega, e] = -\frac{na^2 e}{\sqrt{1-e^2}}, \quad [\varphi, e] = 0, \quad [a, \chi] = -\frac{1}{2} n$$

$$[\omega, \varphi] = 0, \quad [\theta, \chi] = 0, \quad [\omega, \chi] = 0, \quad [\varphi, \chi] = 0, \quad [e, \chi] = 0.$$

Les crochets $([c_l, M])$ ont été en partie calculés par M. Mineur [1].

On obtient :

$$([\theta, M]) = \frac{na^2}{2M}\sqrt{1-e^2}\cos\varphi, \qquad ([\omega, M]) = \frac{na^2}{2M}\sqrt{1-e^2}, \qquad ([\varphi, M]) = 0,$$

$$([a, M]) = \frac{nae\sin u}{2M}, \qquad ([e, M]) = \frac{na^2\sin u}{M(1-e\cos u)}, \qquad ([\chi, M]) = \frac{na^2(1+e\cos u)}{2M(1-e\cos u)}.$$

On en déduit les équations qui définissent les variations des éléments, puis en prenant ϖ à la place de ω et $\varepsilon_1 = \chi_1 + \varpi$ à la place de χ_1, on arrive aux équations définitives :

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_1} - \frac{a}{M}\frac{1+e\cos u}{1-e\cos u}\frac{dM}{dt},\\
\frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\frac{\partial R}{\partial \varphi},\\
\frac{d\varpi}{dt} &= \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial \varphi} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\sqrt{1-e^2}\sin u}{Me(1-e\cos u)}\frac{dM}{dt},\\
\frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial \varpi} - \sqrt{1-e^2}\,\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_1} - \frac{(1-e^2)\cos u}{M(1-e\cos u)}\frac{dM}{dt},\\
\frac{d\varphi}{dt} &= -\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\frac{\partial R}{\partial \theta} - \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\partial R}{\partial \varpi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon_1}\right),\\
\frac{d\varepsilon_1}{dt} &= -\frac{2}{na}\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right) + \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial \varphi} + \sqrt{1-e^2}\,\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\left(1-e^3\cos u-\sqrt{1-e^2}\right)\sin u}{Me(1-e\cos u)}\frac{dM}{dt}.
\end{aligned}\right.$$

[1] *La mécanique des masses variables. Le problème des deux corps.* A. E. N. S., 1933.

On voit que les valeurs de $\sin\varphi\,\dfrac{d\theta}{dt}$ et $\dfrac{d\varphi}{dt}$ sont les mêmes en masses variables qu'en masses fixes; cela peut s'interpréter en disant que, si l'on considère le pôle boréal de l'orbite sur la sphère de rayon *un* ayant son centre au Soleil, son vecteur-vitesse est le même en masses variables qu'en masses fixes.

35. — Cas de deux corps. — Dans le cas d'une seule planète en présence du Soleil, on a $R \equiv 0$, d'où les équations :

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= -\frac{a}{M}\,\frac{1+e\cos u}{1-e\cos u}\,\frac{dM}{dt},\\
\frac{d\theta}{dt} &= 0,\\
\frac{d\varpi}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}\sin u}{Me(1-e\cos u)}\,\frac{dM}{dt},\\
\frac{de}{dt} &= -\frac{(1-e^2)\cos u}{M(1-e\cos u)}\,\frac{dM}{dt},\\
\frac{d\varphi}{dt} &= 0,\\
\frac{d\varepsilon_1}{dt} &= \frac{\left(1-e^3\cos u-\sqrt{1-e^2}\right)\sin u}{Me(1-e\cos u)}\,\frac{dM}{dt}.
\end{aligned}\right.$$

L'élimination de $\cos u$ entre la première et la quatrième de ces relations donne

$$\frac{\dfrac{da}{dt}}{a}+\frac{\dfrac{dM}{dt}}{M}-\frac{2e\dfrac{de}{dt}}{1-e^2}=0,$$

d'où l'intégrale :

$$aM(1-e^2)=C^{te}.$$

Le paramètre de l'orbite osculatrice varie donc en raison inverse de M [1].

---

[1] D'après une remarque de M. Chazy, cette propriété se voit aussi immédiatement sur l'intégrale des aires : on sait, en effet, que la constante des aires est égale à $\sqrt{fMa(1-e^2)}$.

Elle est également conséquence de l'équation

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}+\frac{1}{M}\frac{dM}{dt}=\frac{2}{\sqrt{fMP}}\left(\frac{\partial R}{\partial\varpi}+\frac{\partial R}{\partial\varepsilon_1}\right)$$

qui fournit le paramètre P dans le cas de n corps.

36. — **Applications.** — I. Supposons que les masses des deux corps varient de telle sorte que leur somme reste constante. L'un des deux corps décrit par rapport à l'autre une conique képlérienne. On connaît donc les rapports $\frac{x_2 - x_1}{r^3}, \ldots$ en fonction du temps.

Les équations

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = f m_2 \frac{x_2 - x_1}{r^3}, \; \ldots\ldots$$

fournissent alors, au moyen de deux quadratures chacune, x_1, y_1, z_1, c'est-à-dire déterminent par *six* quadratures le mouvement d'entraînement du système.

II. Supposons maintenant que la somme des masses aille constamment en croissant.

En donnant à $\cos u$ ses deux valeurs extrêmes -1 et $+1$, on obtient les inégalités

$$\frac{1-e}{1+e} < \frac{1+e\cos u}{1-e\cos u} < \frac{1+e}{1-e},$$

$$-\frac{1}{1+e} < \frac{\cos u}{1-e\cos u} < \frac{1}{1-e},$$

d'où, les accents désignant des dérivées :

$$-\frac{M'}{M}\frac{1+e}{1-e} < \frac{a'}{a} < -\frac{M'}{M}\frac{1-e}{1+e},$$

$$-\frac{M'}{M}(1+e) < e' < \frac{M'}{M}(1-e).$$

Les dernières inégalités donnent, en intégrant :

$$\frac{C}{M} - 1 < e < 1 - \frac{C'}{M},$$

$$C = M_0(1+e_0), \qquad C' = M_0(1-e_0).$$

Si M reste pendant tout le mouvement inférieur à $M_0(1+e_0)$, on a une limite inférieure utile de e.

Si M ne croît pas indéfiniment avec t, on a une limite supérieure utile de e.

On a ensuite, en se servant de ces inégalités :

$$-\frac{M'}{M}\frac{2-\frac{C'}{M}}{\frac{C'}{M}} < \frac{a'}{a} < -\frac{M'}{M}\frac{\frac{C'}{M}}{2-\frac{C'}{M}},$$

d'où, par intégration et en introduisant deux nouvelles constantes k et k' :

$$k\,\mathrm{M}\,\mathrm{E}^{-\frac{2\mathrm{M}}{\mathrm{C}'}} < a < \frac{k'\mathrm{M}}{2\mathrm{M} - \mathrm{C}'},$$

(E, base des logarithmes népériens).

On obtient ainsi des limites pour les valeurs de a.

En particulier, si M croît indéfiniment, a reste inférieur à

$$\frac{k'}{2} = a_0 \frac{1 + e_0}{2}.$$

III. Si la somme des masses va constamment en décroissant, on démontre de même les inégalités

$$1 - \frac{\mathrm{C}'}{\mathrm{M}} < e < \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{M}} - 1,$$

$$k\,\mathrm{M}\,\mathrm{E}^{-\frac{2\mathrm{M}}{\mathrm{C}}} < a < \frac{k'\mathrm{M}}{2\mathrm{M} - \mathrm{C}}.$$

Notons, en particulier, que, si M tend vers zéro, a tend aussi vers zéro quand t augmente indéfiniment.

Remarque. — Les conclusions précédentes ne sont valables qu'autant que l'orbite osculatrice reste elliptique et ne devient pas hyperbolique à un certain moment.

CHAPITRE V

Le problème des n corps traité à partir de l'égalité de M. Levi-Civita.

37. — Généralités. — Si nous supposons que le mouvement d'une masse variable est donné par l'égalité

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{mv}) = \overrightarrow{F},$$

les équations du problème des n corps à masses variables seront

$$\frac{d}{dt}\left(m_i \frac{dx_i}{dt}\right) = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \;\ldots\ldots$$

Elles admettent les intégrales premières :

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{dx_i}{dt} = c^{te}, \;\ldots\ldots,$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \left(y_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dy_i}{dt}\right) = c^{te}, \;\ldots\ldots$$

La combinaison des forces vives donne

$$2\sum_i m_i \,\mathrm{S}\, \frac{dx_i}{dt}\frac{d^2x_i}{dt^2} + 2\sum_i \frac{dm_i}{dt}\,\mathrm{S}\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 = 2\sum_i \mathrm{S}\,\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}$$

ou

$$\frac{d}{dt}\sum_i m_i \,\mathrm{S}\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \sum_i \frac{dm_i}{dt}\,\mathrm{S}\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 = 2\frac{dU}{dt} - 2\sum_i \frac{\partial U}{\partial m_i}\frac{dm_i}{dt},$$

$$2\frac{d}{dt}(T-U) = -\sum_i \frac{dm_i}{dt}\left[\mathrm{S}\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial U}{\partial m_i}\right],$$

relation tout à fait analogue à celle obtenue au chapitre III.

Les crochets qui sont au second membre sont essentiellement positifs. Donc, si les $\frac{dm_i}{dt}$ sont tous de même signe et gardent un signe constant pendant tout le mouvement, on aura uue inégalité de la forme

$$2\frac{d}{dt}(\mathrm{T}-\mathrm{U}) \gtrless 0,$$

selon que ce signe sera $-$ ou $+$, d'où

$$\mathrm{T}-\mathrm{U} \gtrless h.$$

38. — **Cas d'équivalence entre les deux lois.** — Effectuons sur les équations du mouvement

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}+\frac{dm_i}{dt}\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_i}, \; \ldots\ldots$$

un changement de variables de la forme

$$\frac{d\tau}{dt}=f(t), \qquad \frac{x_i}{\xi_i}=\frac{y_i}{\eta_i}=\frac{z_i}{\zeta_i}=\varphi(\tau).$$

Soient

$$f'=\frac{df}{dt}, \qquad \varphi'=\frac{d\varphi}{d\tau}.$$

On a :

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{d\xi_i}{d\tau}f\varphi+\xi_i f\varphi',$$

$$\frac{d^2x_i}{dt^2}=\frac{d^2\xi_i}{d\tau^2}f^2\varphi+\frac{d\xi_i}{d\tau}(f'\varphi+2f^2\varphi')+\xi_i(f'\varphi'+f^2\varphi'').$$

L'équation relative à x_i devient donc

$$m_i f^2\varphi\frac{d^2\xi_i}{d\tau^2}+m_i(f'\varphi+2f^2\varphi')\frac{d\xi_i}{d\tau}+m_i(f'\varphi'+f^2\varphi'')\xi_i+\frac{dm_i}{dt}\left(f\varphi\frac{d\xi_i}{d\tau}+f\varphi'\xi_i\right)=\frac{1}{\varphi^2}\frac{\partial \mathrm{U}_1}{\partial \xi_i},$$

où

$$\mathrm{U}_1=\sum\frac{m_i m_j}{\rho_{ij}},$$

$\left(\rho_{ij}=\sqrt{(\xi_j-\xi_i)^2+(\eta_j-\eta_i)^2+(\zeta_j-\zeta_i)^2},\right.$ constante d'attraction égale à l'unité$\left.\right)$.

Le problème traité à partir de l'égalité $\frac{d}{dt}(\overrightarrow{mv}) = \overrightarrow{F}$ sera donc équivalent au problème traité à partir de $m\frac{\overrightarrow{dv}}{dt} = \overrightarrow{F}$, si les deux conditions suivantes sont réalisées :

$$\begin{cases} m_i(f'\varphi + 2f^2\varphi') + \dfrac{dm_i}{dt}f\varphi = 0, \\ m_i(f'\varphi' + f^2\varphi'') + \dfrac{dm_i}{dt}f\varphi' = 0. \end{cases}$$

On voit tout d'abord que le quotient $\frac{1}{m_i}\frac{dm_i}{dt}$ doit être indépendant de l'indice i, ce qui entraîne que les masses soient de la forme $\mu_i\psi(t)$, les μ_i étant des constantes.

On doit avoir, d'autre part

$$\frac{f'\varphi + 2f^2\varphi'}{\varphi} = \frac{f'\varphi' + f^2\varphi''}{\varphi'},$$

d'où

$$\frac{2\varphi'}{\varphi} = \frac{\varphi''}{\varphi'},$$

$$\varphi^2 = -\frac{\varphi'}{a},$$

$$\varphi = \frac{1}{a\tau + b}.$$

Si l'on fait alors $m_i = \mu_i\psi(t)$, la fonction f sera donnée par

$$\psi(f' - 2af^2\varphi) + \psi' f = 0,$$

d'où :

$$\frac{\frac{df}{d\tau}}{f} = \frac{2a}{a\tau + b} - \frac{\frac{d\psi}{d\tau}}{\psi},$$

d'où

$$f = c\,\frac{(a\tau + b)^2}{\psi}.$$

Nous commencerons donc par déterminer τ en fonction de t par l'équation

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{c(a\tau + b)^2}{\psi}$$

ou

$$\frac{d\tau}{(a\tau + b)^2} = c\frac{dt}{\psi},$$

d'où

$$-\frac{1}{a(a\tau + b)} = c\int \frac{dt}{\psi} + d.$$

Les équations du mouvement deviennent alors

$$\mu_i \frac{d^2\xi_i}{d\tau^2} = \frac{\psi}{f^2\varphi^3}\frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \ldots\ldots,$$

avec

$$U' = \sum \frac{\mu_i \mu_j}{\rho_{ij}}.$$

Ce sont les mêmes que l'on obtiendrait avec la loi $m\,\overrightarrow{\frac{dv}{dt}} = \overrightarrow{F}$ appliquée aux masses $\mu_i \Psi$, où

$$\Psi = \frac{\psi}{f^2\varphi^3},$$

ou

$$\Psi = \frac{\psi^3}{c^2(a\tau + b)}.$$

En particulier, prenons

$$a = 0, \qquad b = 1, \qquad c = 1.$$

On a

$$\varphi = 1, \qquad \xi_i = x_i, \ldots\ldots$$

puis

$$f = \frac{1}{\psi},$$

d'où

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\psi}$$

et

$$\Psi = \psi^3.$$

39. — Cas d'équivalence avec le problème à masses fixes. — Le changement de variables précédent montre que l'on se ramène au problème des n corps à masses fixes si l'on a

$$m_i = \mu_i \psi(t)$$

et si, de plus

$$\frac{f^2 \varphi^3}{\psi} = \mathrm{c^{te}}.$$

On en déduit facilement que m_i doit être de la forme

$$m_i = \frac{\mu_i}{\sqrt{t+a}},$$

et l'on est amené à faire le changement de variables défini par les égalités

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{x_i}{\xi_i} = \frac{y_i}{\eta_i} = \frac{z_i}{\zeta_i} = (t+a)^{\frac{3}{2}}, \\ & \frac{dt}{d\tau} = (t+a)^{\frac{5}{2}}. \end{aligned} \right.$$

40. — Limite inférieure des rayons de convergence des séries. — Si l'on prend pour variables les coordonnées x_i, y_i, z_i, et les composantes p_i, q_i, r_i de la quantité de mouvement des points du système, les équations du mouvement sont :

$$(29) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \frac{dx_i}{dt} = \frac{p_i}{m_i}, \; \ldots\ldots \\ & \frac{dp_i}{dt} = m_i \sum_{j \neq i} m_j \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3}, \; \ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

Nous supposerons les masses fonctions holomorphes du temps, nous désignerons par μ une limite supérieure de leur somme, par ν une limite inférieure *positive* de chacune d'elles pendant tout le mouvement, par μ' une limite supérieure de la plus grande des masses : $\mu' < \mu$.

Nous supposerons qu'à l'instant t_0, on ait

$$(30) \qquad r_{ij}^0 \geqslant 14\lambda > 0, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots\ldots, n).$$

Nous nous proposons d'avoir une limite inférieure des rayons de convergence des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de $t - t_0$, en lesquelles on peut développer les $x, \ldots, p, \ldots$.

Nous chercherons donc d'abord des limites supérieures des valeurs que prennent les modules des seconds membres des équations (29) pour les valeurs des $x, \ldots,$ $p, \ldots, t$, vérifiant les inégalités

$$(31)\qquad \begin{cases} |x_i - x_i^0|, & |y_i - y_i^0|, & |z_i - z_i^0| < \lambda_0, \\ |p_i - p_i^0|, & |q_i - q_i^0|, & |r_i - r_i^0| < \lambda'_0 \nu, \\ & & |t - t_0| < \tau, \end{cases}$$

τ, λ_0 et λ'_0 étant des quantités positives à déterminer de façon que les développements des seconds membres de (29) suivant les puissances de $t - t_0$, $x_i - x_i^0, \ldots,$ $p_i - p_i^0, \ldots,$ soient convergents tant que les conditions (31) sont vérifiées.

Les $\dfrac{p_i}{m_i}$ sont développables, en vertu des hypothèses, pour toutes les valeurs de t, suivant les puissances de $t - t_0$ et $p_i - p_i^0$.

Cherchons à déterminer λ'_0 et τ de façon que les seconds membres des équations

$$\frac{dp_i}{dt} = m_i \sum_{j \neq i} m_j \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3}$$

soient développables comme on a dit.

Remarquons qu'ils le seront tant que les quotients $\dfrac{1}{r_{ij}}$ le seront eux-mêmes.

Les quantités p_i, q_i, r_i ayant des valeurs finies pour $t = t_0$, leurs modules ont une limite supérieure que nous désignerons par $\rho\nu$:

$$|p_i^0|, \quad |q_i^0|, \quad |r_i^0| < \rho\nu.$$

Les inégalités $|p_i - p_i^0| < \lambda'_0 \nu$ donnent

$$|p_i| < |p_i^0| + \lambda'_0 \nu,$$

d'où

$$\frac{|p_i|}{m_i} < \frac{|p_i^0|}{\nu} + \lambda'_0,$$

d'où, en intégrant à partir de t_0 dans un intervalle inférieur à τ :

$$|x_i - x_i^0| < \left[\frac{|p_i^0|}{\nu} + \lambda'_0\right]\tau < (\rho + \lambda'_0)\tau.$$

D'autre part, on a

$$r_{ij}^2 = (r_{ij}^0)^2 + P(x_i - x_i^0, \quad y_i - y_i^0, \quad z_i - z_i^0, \quad x_j - x_j^0, \quad \ldots\ldots),$$

P étant un polynôme dont le module est certainement inférieur à

$$12 r_{ij}^0 (\rho + \lambda'_0)\tau + 12(\rho + \lambda'_0)^2 \tau^2,$$

tant que

$$|x_i - x_i^0|, \quad |y_i - y_i^0|, \quad |z_i - z_i^0| < (\rho + \lambda'_0)\tau.$$

On en déduit que $\dfrac{1}{r_{ij}}$ est développable tant que

$$|x_i - x_i^0|, \ldots < (\rho + \lambda'_0)\tau,$$

si l'on a

$$(\rho + \lambda'_0)\tau < \frac{r_{ij}^0}{6 + 4\sqrt{3}}.$$

Nous poserons

$$(32) \qquad (\rho + \lambda'_0)\tau = \frac{r_{ij}^0}{14}.$$

On voit alors que l'on a

$$r_{ij} > \frac{2}{7} r_{ij}^0,$$

$$|x_j - x_i|, \ldots < \frac{8}{7} r_{ij}^0,$$

et par suite

$$\left| \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3} \right|, \ldots < \frac{1}{4(\rho + \lambda'_0)^2 \tau^2}$$

tant que l'on a

$$|x_i - x_i^0|, \ldots < (\rho + \lambda'_0)\tau,$$

ou, *a fortiori*, d'après (30) et (32), si l'on a

$$(31') \qquad |x_i - x_i^0|, \ldots < \lambda.$$

Nous prendrons donc : $\lambda_0 = \lambda$.

Dans ces conditions, les expressions des $\dfrac{dp_i}{dt}$, ... ont toutes leurs modules inférieurs à $\dfrac{\mu\mu'}{4\lambda^2}$.

Nous avons entre λ'_0 et τ une première relation :

$$(\rho + \lambda'_0)\tau \geqslant \lambda,$$

d'où

$$\lambda'_0 \geqslant \frac{\lambda - \rho\tau}{\tau}.$$

Les inégalités

$$\left|\frac{dp_i}{dt}\right|, \ldots < \frac{\mu\mu'}{4\lambda^2}$$

donnent par intégration

$$|p_i - p_i^0|, \ldots < \frac{\mu\mu'}{4\lambda^2}\tau.$$

Nous pourrons donc prendre

$$\lambda'_0 \nu \geqslant \frac{\mu\mu'}{4\lambda^2}\tau,$$

d'où

$$\lambda'_0 \geqslant \frac{\mu\mu'\tau}{4\lambda^2\nu}.$$

L'équation

$$\frac{\mu\mu'\tau}{4\lambda^2\nu} = \frac{\lambda - \rho\tau}{\tau}$$

a une seule racine positive τ, que nous adopterons pour valeur de τ.

On a

$$\mu\mu'\tau^2 + 4\lambda^2\nu\rho\tau - 4\lambda^3\nu = 0,$$

d'où

$$\tau = \frac{-2\lambda^2\nu\rho + 2\lambda\sqrt{\lambda\nu(\lambda\nu\rho^2 + \mu\mu')}}{\mu\mu'}.$$

En définitive, nous prenons :

$$\left\{\begin{aligned} \lambda_0 &= \lambda, \\ \lambda'_0\nu &= \frac{\mu\mu'\tau}{4\lambda^2}, \\ \tau &= \frac{-2\lambda^2\nu\rho + 2\lambda\sqrt{\lambda\nu(\lambda\nu\rho^2 + \mu\mu')}}{\mu\mu'}. \end{aligned}\right.$$

Les seconds membres de (29) ont alors des modules au plus égaux à

$$\rho + \frac{\mu\mu'\tau}{4\lambda^2\nu} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mu\mu'}{4\lambda^2}.$$

En effet, on a

$$|p_i - p_i^0|, \ldots < \frac{\mu\mu'\tau}{4\lambda^2},$$

d'où

$$|p_i| < |p_i^0| + \frac{\mu\mu'\tau}{4\lambda^2},$$

$$\left|\frac{p_i}{m_i}\right| < \left|\frac{p_i^0}{\nu}\right| + \frac{\mu\mu'\tau}{4\lambda^2\nu} < \rho + \frac{\mu\mu'\tau}{4\lambda^2\nu}.$$

Donc, une limite inférieure des rayons de convergence cherchée sera la plus petite des quantités

$$\tau, \qquad \frac{\lambda}{\rho + \frac{\mu\mu'\tau}{4\lambda^2\nu}}, \qquad \frac{\frac{\mu\mu'\tau}{4\lambda^2}}{\frac{\mu\mu'}{4\lambda^2}},$$

c'est-à-dire τ, valeur commune de ces trois quantités.

Nous avons donc obtenu le théorème suivant :

Théorème. — *Si les masses sont des fonctions holomorphes du temps dans l'intervalle* $(-\infty, +\infty)$, *si* μ' *est une limite supérieure pour chacune d'elles,* μ *une limite supérieure de leur somme,* ν *une limite inférieure pour chacune d'elles, supposée différente de zéro; si, de plus, pour* $t = t_0$, *les* $x_i, y_i, z_i, p_i, q_i, r_i$ *sont finis et vérifient les inégalités*

$$r_{ij}^0 \geqq 14\lambda > 0 \qquad \text{et} \qquad |p_i^0|, \quad |q_i^0|, \quad |r_i^0| < \rho\nu,$$

les équations données admettent un système de solutions développables en séries procédant suivant les puissances de $t - t_0$ *et prenant à l'instant* t_0 *les valeurs initiales données. Une limite inférieure des rayons de convergence de ces séries est la quantité*

$$\tau = \frac{-2\lambda^2\nu\rho + 2\lambda\sqrt{\lambda\nu(\lambda\nu\rho^2 + \mu\mu')}}{\mu\mu'}.$$

On déduit de là que *le mouvement ne peut cesser d'être régulier à un instant* t_1 *que si la plus petite des distances* r_{ij} *a zéro pour limite inférieure lorsque* t *tend vers* t_1, *à moins que la plus petite des masses n'ait zéro pour limite inférieure dans les mêmes conditions.*

41. — Comparaison avec un problème à masses fixes. — Supposons que les masses soient de la forme $m_i = \mu_i + \varepsilon_i(t)$, les $\varepsilon_i(t)$ tendant vers zéro lorsque t croît indéfiniment. Proposons-nous de comparer les mouvements obtenus avec les masses variables m_i et les masses fixes μ_i pour les très grandes valeurs de t.

Les équations pour ces deux mouvements sont

$$(33)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = \dfrac{p_i}{m_i}, \ \dots \\[2mm] \dfrac{dp_i}{dt} = \dfrac{\partial U}{\partial x_i} = f_i(x_l, y_l, z_l, m_k), \ \dots \end{cases} \quad \text{et} \quad (34)\quad \begin{cases} \dfrac{dX_i}{dt} = \dfrac{P_i}{\mu_i}, \ \dots \\[2mm] \dfrac{dP_i}{dt} = \dfrac{\partial U_1}{\partial X_i} = f_i(X_l, Y_l, Z_l, \mu_k), \ \dots . \end{cases}$$

Considérons une solution du second système vérifiant les conditions suivantes :

1° Les $|(m_i - \mu_i)P_i|, \dots,$ sont des infiniment petits d'ordre au moins égal à $\alpha > 1$, les μ_i étant, de plus, supposés tous différents de zéro.

2° Pour x_l et x'_l compris entre $X_l - b_l$ et $X_l + b_l$, etc., on a :

$$(35)\qquad |f_i(x_l, y_l, z_l, m_k) - f_i(X_l, Y_l, Z_l, \mu_k)| < \frac{A}{t^{\alpha+1}},$$

$$(36)\qquad |f_i(x'_l, y'_l, z'_l, m_k) - f_i(x_l, y_l, z_l, m_k)| < \frac{\sum_l C_l |x'_l - x_l|}{t^{\alpha+1}} \ (^1).$$

Posons alors

$$\begin{cases} p_i^{(1)} = P_i + \displaystyle\int_\infty^t [f_i(X_l, Y_l, Z_l, m_k) - f_i(X_l, Y_l, Z_l, \mu_k)]\,dt, & x_i^{(1)} = X_i + \displaystyle\int_\infty^t \left(\frac{p_i^{(1)}}{m_i} - \frac{P_i}{\mu_i}\right) dt, \\ p_i^{(2)} = P_i + \displaystyle\int_\infty^t [f_i(x_l^{(1)}, \dots, m_k) - f_i(X_l, \dots, \mu_k)]\,dt, & x_i^{(2)} = X_i + \displaystyle\int_\infty^t \left(\frac{p_i^{(2)}}{m_i} - \frac{P_i}{\mu_i}\right) dt, \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ p_i^{(n)} = P_i + \displaystyle\int_\infty^t [f_i(x_l^{(n-1)}, \dots, m_k) - f_i(X_l, \dots, \mu_k)]\,dt, & x_i^{(n)} = X_i + \displaystyle\int_\infty^t \left(\frac{p_i^{(n)}}{m_i} - \frac{P_i}{\mu_i}\right) dt, \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Dans ces conditions, on a

$$|p_i^{(1)} - P_i| < \left| \int_\infty^t \frac{A\,dt}{t^{\alpha+1}} \right| = \frac{A}{\alpha t^\alpha}.$$

(1) Pour ne pas surcharger, nous n'écrivons que les termes relatifs aux x.

On a

$$\frac{p_i^{(1)}}{m_i} - \frac{P_i}{\mu_i} = \frac{p_i^{(1)} - P_i}{\mu_i} + p_i^{(1)} \frac{\mu_i - m_i}{m_i \mu_i}.$$

Désignons par ν_i une limite inférieure de m_i et μ_i. On aura

$$\left| \frac{p_i^{(1)}}{m_i} - \frac{P_i}{\mu_i} \right| < \frac{1}{\mu_i} \frac{A}{\alpha t^\alpha} + \left[|P_i| + \frac{A}{\alpha t^\alpha} \right] \frac{|m_i - \mu_i|}{\nu_i^2}.$$

D'après les hypothèses, on a

$$\left| \frac{p_i^{(1)}}{m_i} - \frac{P_i}{\mu_i} \right| < \frac{B_i}{t^\alpha},$$

B_i étant une quantité finie, d'où

$$|x_i^{(1)} - X_i| < \left| \int_\infty^t \frac{B_i\, dt}{t^\alpha} \right| = \frac{B_i}{\alpha(\alpha - 1) t^{\alpha-1}}.$$

Nous pourrons répéter de proche en proche le raisonnement, et nous verrons que toutes les quantités $|p_i^{(n)} - P_i|$ sont inférieures à $\frac{A}{\alpha t^\alpha}$, toutes les quantités $|x_i^{(n)} - X_i|$ inférieures à $\frac{B_i}{\alpha(\alpha - 1) t^{\alpha-1}}$.

Nous avons donc, en particulier

$$|p_i^{(1)} - P_i| < \frac{A}{\alpha t^\alpha}, \qquad |x_i^{(1)} - X_i| < \frac{B_i}{\alpha(\alpha - 1) t^{\alpha-1}}.$$

$$p_i^{(2)} - p_i^{(1)} = \int_\infty^t \left[f_i(x_l^{(1)}, \ldots, m_k) - f_i(X_l, \ldots, m_k) \right] dt,$$

d'où

$$|p_i^{(2)} - p_i^{(1)}| < \left| \int_\infty^t \frac{\sum_l C_l |x_l^{(1)} - X_l|}{t^{\alpha+1}} dt \right|$$

$$< \left| \int_\infty^t \frac{B_i C\, dt}{\alpha(\alpha - 1) t^{2\alpha}} \right| = \frac{B_i C}{\alpha(\alpha - 1)(2\alpha - 1) t^{2\alpha-1}},$$

avec $C = \sum_l C_l$.

On en déduit

$$|x_i^{(2)} - x_i^{(1)}| < \left| \int_\infty^t \frac{p_i^{(2)} - p_i^{(1)}}{\nu_i} \right| dt = \frac{1}{\nu_i} \frac{B_i C}{2!\,\alpha(\alpha-1)^2(2\alpha-1)\,t^{2(\alpha-1)}}.$$

Supposons démontrée l'inégalité

$$|x_i^{(n-1)} - x_i^{(n-2)}| < \frac{1}{\nu_i^{n-2}} \frac{B_i C^{n-2}}{(n-1)!\,\alpha(\alpha-1)^{n-1}(2\alpha-1)(3\alpha-2)\ldots[(n-1)\alpha-(n-2)]\,t^{(n-1)(\alpha-1)}}.$$

On aura alors

$$|p_i^{(n)} - p_i^{(n-1)}| < \left| \int_\infty^t \frac{\sum_l C_l |x_l^{(n-1)} - x_l^{(n-2)}|}{t^{\alpha+1}} dt \right|$$

$$< \frac{1}{\nu_i^{n-2}} \left| \int_\infty^t \frac{B_i C^{n-1}\,dt}{(n-1)!\,\alpha(\alpha-1)^{n-1}(2\alpha-1)\ldots[(n-1)\alpha-(n-2)]\,t^{n\alpha-(n-2)}} \right|.$$

ou

$$|p_i^{(n)} - p_i^{(n-1)}| < \frac{1}{\nu_i^{n-2}} \frac{B_i C^{n-1}}{(n-1)!\,\alpha(\alpha-1)^{n-1}(2\alpha-1)(3\alpha-2)\ldots[n\alpha-(n-1)]\,t^{n\alpha-(n-1)}} = u'_n,$$

d'où

$$|x_i^{(n)} - x_i^{(n-1)}| < \frac{1}{\nu_i} \left| \int_\infty^t (p_i^{(n)} - p_i^{(n-1)})\,dt \right| = \frac{1}{\nu_i^{n-1}} \frac{B_i C^{n-1}}{n!\,\alpha(\alpha-1)^n(2\alpha-1)(3\alpha-2)\ldots[n\alpha-(n-1)]\,t^{n(\alpha-1)}} = u_n.$$

Ces formules sont donc générales.

Les séries

$$\varphi_i(t) = X_i(t) + (x_i^{(1)} - X_i) + (x_i^{(2)} - x_i^{(1)}) + \ldots + (x_i^{(n)} - x_i^{(n-1)}) + \ldots,$$

$$\psi_i(t) = P_i(t) + (p_i^{(1)} - P_i) + (p_i^{(2)} - p_i^{(1)}) + \ldots + (p_i^{(n)} - p_i^{(n-1)}) + \ldots,$$

dont tous les termes sont des fonctions continues de t, sont donc uniformément convergentes pour t assez grand et sont des fonctions continues de t.

Cela prouve que les fonctions $x_i^{(n)}$, $p_i^{(n)}$ ont pour limites $\varphi_i(t)$ et $\psi_i(t)$ lorsque n tend vers l'infini.

Si dans les relations :

$$\frac{dx_i^{(n)}}{dt} = \frac{p_i^{(n)}}{m_i} \qquad \text{et} \qquad \frac{dp_i^{(n)}}{dt} = f_i(x_l^{(n-1)}, m_k),$$

on fait tendre n vers l'infini, il vient à la limite

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{p_i}{m_i} \qquad \text{et} \qquad \frac{dp_i}{dt}=f_i(x_l, m_k).$$

On démontre facilement les deux inégalités

$$\left\{\begin{aligned}
&|\varphi_i(t)-X_i(t)|<\frac{B_i\nu_i}{C\alpha}\left[e^{\frac{C}{\nu_i(\alpha-1)t^{\alpha-1}}}-1\right],\\
&|\psi_i(t)-P_i(t)|<\frac{A}{\alpha t^\alpha}+\frac{B_i\nu_i}{\alpha t^\alpha}\left[e^{\frac{C}{\nu_i(\alpha-1)t^{\alpha-1}}}-1\right].
\end{aligned}\right.$$

Nous venons de trouver une solution du système (37) asymptote à une solution de (38) vérifiant certaines conditions. Nous remarquerons qu'il suffit que ces conditions soient vérifiées lorsqu'on remplace les b_l par des quantités de la forme $\frac{c_l}{t^{\alpha-1}}$.

Nous allons voir qu'un tel système est unique.

Soit, en effet, une solution (Φ_i, Ψ_i) telle que $|\Phi_i - X_i|$ et $|\Psi_i - P_i|$ tendent vers zéro lorsque t croît indéfiniment. Posons

$$\Psi_i = P_i + \rho_i(t).$$

On a

$$\frac{d\Psi_i}{dt}=f_i(\Phi_l, m_k)$$

et

$$\frac{dP_i}{dt}=f_i(X_l, m_k),$$

d'où

$$\frac{d\rho_i}{dt}=f_i(\Phi_l, m_k)-f_i(X_l, \mu_k).$$

On a donc

$$\rho_i(t)=\int_\infty^t [f_i(\Phi_l, m_k)-f_i(X_l, \mu_k)]\,dt,$$

d'où

$$\Psi_i(t)=P_i(t)+\int_\infty^t [f_i(\Phi_l, m_k)-f_i(X_l, \mu_k)]\,dt.$$

On a, d'autre part

$$\Phi_i(t) = X_i + \int_\infty^t \left(\frac{\Psi_i}{m_i} - \frac{P_i}{\mu_i}\right) dt.$$

Les différences $\Phi_i - X_i$, tendant vers zéro lorsque t tend vers l'infini, sont inférieures à b_i à partir d'un certain instant. On a donc

$$|f_i(\Phi_l, m_k) - f_i(X_l, \mu_k)| < \frac{A}{t^{\alpha+1}}.$$

On en déduit de proche en proche que les différences $\Phi_i - x_i^{(n)}$ et $\Psi_i - p_i^{(n)}$ tendent vers zéro lorsque t croît indéfiniment.

Donc $\Phi_i - \varphi_i$ et $\Psi_i - \psi_i$ tendent vers zéro aussi, et la solution trouvée précédemment est unique. C. Q. F. D.

Reprenons les hypothèses faites. La condition (36) peut s'écrire :

$$\left|\sum_l (x'_l - x_l)\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_l}\right)_m\right| < \frac{\sum_l C_l\,|x'_l - x_l|}{t^{\alpha+1}},$$

et sera vérifiée si l'on a

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_l}\right| < \frac{C_l}{t^2}$$

pour x_l et x'_l compris entre $X_l - \frac{c_l}{t^{\alpha-1}}$ et $X_l + \frac{c_l}{t^{\alpha-1}}$, etc.

La condition (35) peut s'écrire

$$\left|\sum_l (x_l - X_l)\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_l}\right)_m + \sum_k (m_k - \mu_k)\left(\frac{\partial f_i}{\partial m_k}\right)_{m}\right| < \frac{A}{t^{\alpha+1}},$$

et sera vérifiée également si l'on a encore

$$\left|(m_k - \mu_k)\frac{\partial f_i}{\partial m_k}\right| < \frac{\mathcal{A}}{t^{\alpha+1}}$$

à partir d'un certain moment, c'est-à-dire

$$\left|(m_k - \mu_k) f \frac{x_k - x_i}{r_{ik}^3}\right| < \frac{\mathcal{A}}{t^{\alpha+1}} \qquad \text{pour} \quad i \neq k$$

et

$$\left|(m_k - \mu_k) f \sum_{j \neq k} \frac{x_j - x_k}{r_{jk}^3}\right| < \frac{\mathcal{A}}{t^{\alpha+1}} \qquad \text{pour} \quad i = k.$$

Considérons la condition $\left|\dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}\right| < \dfrac{C_k}{t^2}$.

Soit d'abord $k \neq i$ et $f_i = f \sum_{j \neq i} m_j \dfrac{x_j - x_i}{r_{ij}^3}$.

Posons

$$\lambda_{ij} = x_j - x_i, \qquad \mu_{ij} = y_j - y_i, \qquad \nu_{ij} = z_j - z_i,$$

$$\frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3} = \frac{\lambda_{ij}}{(\lambda_{ij}^2 + \mu_{ij}^2 + \nu_{ij}^2)^{\frac{3}{2}}} = u(\lambda_{ij}, \mu_{ij}, \nu_{ij}), \ \ldots\ldots$$

On a

$$f_i = f \sum_{j \neq i} m_j u(\lambda_{ij}, \mu_{ij}, \nu_{ij}),$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} = f m_k \frac{\partial u(\lambda_{ik}, \mu_{ik}, \nu_{ik})}{\partial \lambda_{ik}}.$$

Si M_k désigne une limite supérieure de m_k, on a

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right| < f M_k \left|\frac{\partial u(\lambda_{ik}, \ldots)}{\partial \lambda_{ik}}\right|.$$

et comme $\left|\dfrac{\partial u(\lambda_{ik}, \ldots)}{\partial \lambda_{ik}}\right| < \dfrac{4}{r_{ik}^3}$:

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right| < \frac{4 f M_k}{r_{ik}^3}.$$

Nous sommes donc amenés à supposer que l'on a : $r_{ik} > L_{ik} t^{\frac{2}{3}}$.

Même résultat pour $k = i$, et si nous remplaçons les x par les y ou les z. Nous devons donc vérifier simultanément les conditions

$$\left\{\begin{array}{l} r_{ij} > L_{ij}\, t^{\frac{2}{3}}, \\ \left|(m_k - \mu_k)\dfrac{x_j - x_i}{r_{ij}^3}\right|, \ \ldots\ldots < \dfrac{A'}{t^{\alpha+1}}, \\ |(m_k - \mu_k) P_k|, \ \ldots\ldots\ldots\ldots < \dfrac{b_k}{t^\alpha}. \end{array}\right.$$

Si l'on a $$R_{ij} > L_{ij}\, t^{\frac{2}{3}},$$ on aura :

$$\left|\frac{dP_i}{dt}\right| = \left| f\mu_i \sum_{j\neq i} \mu_j \frac{X_j - X_i}{R_{ij}^3}\right| < f\mu_i \sum_{j\neq i} \frac{\mu_j}{R_{ij}^2} < \frac{\mathcal{B}_i}{t^{\frac{4}{3}}},$$

d'où

$$|P_i - P_i^0| < \mathcal{C}_i\left(\frac{1}{t_0^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{t^{\frac{1}{3}}}\right),$$

t_0 étant une certaine valeur de t. Les $|P_i|$, ..., seront donc limitées supérieurement pour toutes les valeurs de t.

Les conditions $|(m_k - \mu_k)\, P_k| < \dfrac{b_k}{t^\alpha}$ seront donc vérifiées si l'on a

$$|m_k - \mu_k| < \frac{c_k}{t^\alpha}.$$

Les conditions $\left|(m_k - \mu_k)\dfrac{x_j - x_i}{r_{ij}^3}\right|, \ldots < \dfrac{\mathcal{A}'}{t^{\alpha+1}}$ seront alors vérifiées si l'on a

$$\frac{1}{r_{ij}^2} < \frac{\mathcal{C}_{ij}}{t}$$

ou

$$r_{ij} > \mathcal{D}_{ij}\, t^{\frac{1}{2}}.$$

En définitive, toutes nos conditions sont vérifiées si l'on a

$$|m_k - \mu_k| < \frac{c_k}{t^\alpha}, \qquad r_{ij} > L_{ij}\, t^{\frac{2}{3}}.$$

Considérons alors un mouvement à masses μ_i pour lequel on ait $R_{ij} > L_{ij}\, t^{\frac{2}{3}}$.

Si tous les R_{ij} sont d'ordre β au moins, c'est que les X_i, Y_i, Z_i sont aussi au moins de cet ordre (sauf, peut-être, quelques-uns).

On aura alors

$$\left\{\begin{aligned} X_i &= \mathcal{A}_i\, t^{\beta+\gamma} + \ldots\ldots \\ Y_i &= \mathcal{B}_i\, t^{\beta+\gamma'} + \ldots\ldots \\ Z_i &= \mathcal{C}_i\, t^{\beta+\gamma''} + \ldots\ldots \end{aligned}\right. \qquad \left(\beta \geqslant \frac{2}{3}, \quad \gamma, \gamma', \gamma'' \geqslant 0\right),$$

les termes non écrits étant d'ordres inférieurs.

Or, nous sommes amenés à considérer des x_i, y_i, z_i ne différant des X_i, Y_i, Z_i que de termes de la forme $\frac{c}{t^{\alpha-1}}$.

Ces termes n'influent pas sur l'ordre de grandeur des distances mutuelles des corps. Donc les r_{ij} seront encore des infiniment grands d'ordre β au moins.

Nous arrivons donc à cette conclusion :

Si les masses sont de la forme $\mu_i + \varepsilon_i(t)$, les μ_i étant des nombres fixes positifs et les $\varepsilon_i(t)$ des infiniment petits d'ordre supérieur à un *pour les très grandes valeurs du temps, la méthode des approximations successives permet de déduire de toute solution du problème à masses fixes μ_i dans laquelle les distances mutuelles sont des infiniment grands d'ordre au moins égal à $\frac{2}{3}$, une solution du problème à masses variables asymptote, et réciproquement.*

Dans le cas de trois corps, les mouvements du problème à masses fixes auxquels ce théorème s'applique sont les mouvements hyperboliques, paraboliques et hyperboliques-paraboliques, dans lesquels les distances mutuelles sont d'ordre 1 ou $\frac{2}{3}$ par rapport au temps.

42. — Application de la méthode de la variation des constantes. — Les équations du mouvement peuvent s'écrire, en utilisant toujours les coordonnées et les composantes des quantités de mouvement des points du système, sous la forme canonique

$$(37)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \; \ldots\ldots \\ \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i}, \; \ldots\ldots \end{cases}$$

où

$$H = T - U = \frac{1}{2}\sum_i \frac{p_i^2 + q_i^2 + r_i^2}{m_i} - U.$$

Les équations

$$(38)\qquad \begin{cases} \dfrac{dX_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial P_i}, \; \ldots\ldots \\ \dfrac{dP_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i}, \; \ldots\ldots \end{cases}$$

où les masses sont immobilisées, représentent les équations du problème ordinaire des n corps.

En désignant par $c_1, \ldots, c_{6n}$ les constantes d'intégration de ce problème, la méthode de la variation des constantes permettra de résoudre le système (37) au moyen du système (38) par l'intermédiaire des équations

$$\sum_{k=1}^{6n} [c_k, c_l] \frac{dc_k}{dt} + \sum_{k=1}^{n} [m_k, c_l] \frac{dm_k}{dt} = 0.$$

Les crochets ont déjà été étudiés au chapitre IV.

On déduit de là qu'*étant données n surfaces, on peut choisir les masses de façon que chacun des n points se meuve sur la surface correspondante, et on peut imposer encore 6n conditions supplémentaires au mouvement.*

43. — Mouvement relatif des planètes par rapport au Soleil. — Soient $n+1$ points S, $P_1, \ldots, P_n$, et soient x_i, y_i, z_i les coordonnées de la planète P_i par rapport à des axes de directions fixes passant par le Soleil S de coordonnées absolues ξ_0, η_0, ζ_0.

Les équations du mouvement relatif de P_i par rapport à S sont

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial(H - R_i)}{\partial x_i'}, \quad \ldots\ldots \\ &\frac{dx_i'}{dt} + \frac{m_i'}{m_i}\frac{dx_i}{dt} = -\frac{\partial(H - R_i)}{\partial x_i} + \left(\frac{m_0'}{m_0} - \frac{m_i'}{m_i}\right)\frac{d\xi_0}{dt}, \quad \ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

avec

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) - f\sum_{i=1}^{n} \frac{m_0 + m_i}{r_i},$$

$$R_i = f\sum_{j\neq i} m_j\left(\frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j}{r_j^3}\right)$$

(notations du chapitre IV).

Pour établir rapidement ces équations, il suffit de reprendre les résultats du chapitre IV, paragraphe 31, et de remarquer que dans le cas actuel le Soleil et la planète sont soumis en plus à des forces de composantes respectives $-\frac{dm_0}{dt}\frac{d\xi_0}{dt}, \ldots,$ et $-\frac{dm_i}{dt}\frac{d\xi_i}{dt}, \ldots\ldots$

Nous écrirons ces équations sous la forme

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{\partial(\mathrm{H}-\mathrm{R}_i)}{\partial x'_i}, \quad \ldots\ldots \\ \frac{dx'_i}{dt} &= -\frac{\partial(\mathrm{H}-\mathrm{R}_i)}{\partial x_i} - \frac{m'_i}{m_i}\frac{\partial(\mathrm{H}-\mathrm{R}_i)}{\partial x'_i} + \left(\frac{m'_0}{m_0} - \frac{m'_i}{m_i}\right)\frac{d\xi_0}{dt}, \quad \ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

et nous ajouterons les équations qui fournissent le mouvement absolu du Soleil :

$$(40)\qquad \frac{d^2\xi_0}{dt^2} + \frac{m'_0}{m_0}\frac{d\xi_0}{dt} = f\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i x_i}{r_i^3}, \quad \ldots\ldots$$

Le système (39), (40) est d'ordre $6(n+1)$, comme le système primitif.

Rapprochons de ce système le système

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dX_i}{dt} &= \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial X'_i}, && \ldots\ldots \\ \frac{dX'_i}{dt} &= -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial X_i}, && \ldots\ldots \\ \frac{d\xi_0}{dt} &= \xi'_0, && \ldots\ldots \\ \frac{d\xi'_0}{dt} &= 0, && \ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

où les masses sont immobilisées. Ces équations représentent le mouvement relatif en masses fixes, le corps central étant animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

Appliquons encore la méthode de la variation des constantes. X_i, Y_i, Z_i sont fonctions de t, de la seule masse $m_0 + m_i = M_i$ et de six constantes c_{i1}, c_{i2}, $\ldots$, c_{i6}.

Quant aux dernières équations, elles donnent :

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \lambda t + \lambda', & \eta_0 &= \lambda_1 t + \lambda'_1, & \zeta_0 &= \lambda_2 t + \lambda'_2, \\ \xi'_0 &= \lambda, & \eta'_0 &= \lambda_1, & \zeta'_0 &= \lambda_2. \end{aligned}$$

On obtient donc les équations suivantes, pour déterminer les constantes d'intégration :

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{6}\frac{\partial X}{\partial c_k}\frac{dc_k}{dt} + \frac{\partial X}{\partial M}\frac{dM}{dt} = 0, \quad \ldots\ldots \\ &\sum_{k=1}^{6}\frac{\partial X'}{\partial c_k}\frac{dc_k}{dt} + \frac{\partial X'}{\partial M}\frac{dM}{dt} = \frac{\partial R}{\partial X} - \frac{m'}{m}X' + \left(\frac{m'_0}{m_0} - \frac{m'}{m}\right)\lambda, \quad \ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

(on a omis les indices i).

On en déduit :

$$\sum_{k=1}^{6}[c_l, c_k]\frac{dc_k}{dt}+[c_l, \mathrm{M}]\frac{d\mathrm{M}}{dt}=\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial c_l}-\frac{m'}{m}\mathrm{S}x'\frac{\partial x}{\partial c_l}+\left(\frac{m'_0}{m_0}-\frac{m'}{m}\right)\left(\lambda\frac{\partial x}{\partial c_l}+\lambda_1\frac{\partial y}{\partial c_l}+\lambda_2\frac{\partial z}{\partial c_l}\right),$$

et, de plus :

$$\begin{cases}\dfrac{d\lambda}{dt}+\dfrac{m'_0}{m_0}\lambda=f\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i x_i}{r_i^3}, & \ldots\ldots\\[2ex] \dfrac{d\lambda'}{dt}+t\dfrac{d\lambda}{dt}=0, & \ldots\ldots\end{cases}$$

Prenons pour variables c les éléments $a, e, \varkappa, \theta, \omega, \varphi$ et posons

$$\frac{d\varkappa_1}{dt}=\frac{d\varkappa}{dt}+t\frac{dn}{dt}.$$

Les équations donnant les variations des éléments elliptiques seront :

$$[c_l, \theta]\frac{d\theta}{dt}+[c_l, \omega]\frac{d\omega}{dt}+[c_l, \varphi]\frac{d\varphi}{dt}+([c_l, a])\frac{da}{dt}+[c_l, e]\frac{de}{dt}+([c_l, \mathrm{M}])\frac{d\mathrm{M}}{dt}$$
$$=\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial c_l}-\frac{m'}{m}\mathrm{S}x'\frac{\partial x}{\partial c_l}+\left(\frac{m'_0}{m_0}-\frac{m'}{m}\right)\mathrm{S}\lambda\frac{\partial x}{\partial c_l}$$

pour c_l autre que a ou $\varkappa$, puis :

$$([\varkappa, a])\frac{da}{dt}+([\varkappa, \mathrm{M}])\frac{d\mathrm{M}}{dt}=\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \varkappa}-\frac{m'}{m}\mathrm{S}x'\frac{\partial x}{\partial \varkappa}+\left(\frac{m'_0}{m_0}-\frac{m'}{m}\right)\mathrm{S}\lambda\frac{\partial x}{\partial \varkappa}$$

et

$$([a, \theta])\frac{d\theta}{dt}+([a, \omega])\frac{d\omega}{dt}+([a, \varphi])\frac{d\varphi}{dt}+([a, e])\frac{de}{dt}+([a, \varkappa])\frac{d\varkappa_1}{dt}+([a, \mathrm{M}])\frac{d\mathrm{M}}{dt}$$
$$=\left(\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial a}\right)-\frac{m'}{m}\mathrm{S}x'\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)+\left(\frac{m'_0}{m_0}-\frac{m'}{m}\right)\mathrm{S}\lambda\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right).$$

Nous avons indiqué au chapitre précédent les valeurs des crochets. Calculons les $\mathrm{S}x'\dfrac{\partial x}{\partial c_l}$.

Pour cela, désignons par ξ, η, o les coordonnées de la planète rapportées à des axes passant par le Soleil :

axe des ξ : grand axe de l'ellipse,
axe des η : parallèle au petit axe,
axe des ζ : perpendiculaire au plan de l'orbite.

Indiquons dans un tableau les cosinus des angles que font les axes ξ, η, ζ avec x, y, z :

	ξ	η	ζ
x	α	α'	α''
y	β	β'	β''
z	γ	γ'	γ''

Si K représente θ, ω ou φ, on a

$$\begin{aligned} Sx'\frac{\partial x}{\partial K} &= S(\alpha\xi' + \alpha'\eta')\left(\xi\frac{\partial\alpha}{\partial K} + \eta\frac{\partial\alpha'}{\partial K}\right) = \left(\alpha'\frac{\partial\alpha}{\partial K} + \beta'\frac{\partial\beta}{\partial K} + \gamma'\frac{\partial\gamma}{\partial K}\right)(\xi\eta' - \eta\xi') \\ &= na^2\sqrt{1-e^2}\left(\alpha'\frac{\partial\alpha}{\partial K} + \beta'\frac{\partial\beta}{\partial K} + \gamma'\frac{\partial\gamma}{\partial K}\right). \end{aligned}$$

Or

$$\left\{\begin{aligned} S\alpha'\frac{\partial\alpha}{\partial\theta} &= \alpha\beta' - \beta\alpha' = \gamma'' = \cos\varphi, \\ S\alpha'\frac{\partial\alpha}{\partial\omega} &= \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1, \\ S\alpha'\frac{\partial\alpha}{\partial\varphi} &= \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0. \end{aligned}\right.$$

Donc

$$\left\{\begin{aligned} Sx'\frac{\partial x}{\partial\theta} &= na^2\sqrt{1-e^2}\cos\varphi, \\ Sx'\frac{\partial x}{\partial\omega} &= na^2\sqrt{1-e^2}, \\ Sx'\frac{\partial x}{\partial\varphi} &= 0. \end{aligned}\right.$$

Si L représente a, e ou $\varkappa$, on a

$$Sx'\frac{\partial x}{\partial I} = S(\alpha\xi' + \alpha'\eta')\left(\alpha\frac{\partial\xi}{\partial L} + \alpha'\frac{\partial\eta}{\partial L}\right) = \xi'\frac{\partial\xi}{\partial L} + \eta'\frac{\partial\eta}{\partial L}.$$

On obtient

$$\left\{\begin{aligned}
&\mathrm{S}x'\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right) = nae\sin u,\\
&\mathrm{S}x'\frac{\partial x}{\partial e} = \frac{2na^2\sin u}{1-e\cos u},\\
&\mathrm{S}x'\frac{\partial x}{\partial \varkappa} = \frac{na^2(1+e\cos u)}{1-e\cos u}.
\end{aligned}\right.$$

On a encore

$$\frac{\partial x}{\partial \mathrm{K}} = \xi\frac{\partial \alpha}{\partial \mathrm{K}} + \eta\frac{\partial \alpha'}{\partial \mathrm{K}},\qquad \frac{\partial y}{\partial \mathrm{K}} = \xi\frac{\partial \beta}{\partial \mathrm{K}} + \eta\frac{\partial \beta'}{\partial \mathrm{K}},\qquad \frac{\partial z}{\partial \mathrm{K}} = \xi\frac{\partial \gamma}{\partial \mathrm{K}} + \eta\frac{\partial \gamma'}{\partial \mathrm{K}},$$

$$\frac{\partial x}{\partial \mathrm{L}} = \alpha\frac{\partial \xi}{\partial \mathrm{L}} + \alpha'\frac{\partial \eta}{\partial \mathrm{L}},\qquad \frac{\partial y}{\partial \mathrm{L}} = \beta\frac{\partial \xi}{\partial \mathrm{L}} + \beta'\frac{\partial \eta}{\partial \mathrm{L}},\qquad \frac{\partial z}{\partial \mathrm{L}} = \gamma\frac{\partial \xi}{\partial \mathrm{L}} + \gamma'\frac{\partial \eta}{\partial \mathrm{L}}.$$

Les équations que l'on obtient sont compliquées. Bornons-nous à les écrire dans le cas de deux corps :

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{da}{dt} = \frac{2}{na}\left\{\varkappa\right\} - \frac{a}{\mathrm{M}}\frac{1+e\cos u}{1-e\cos u}\frac{d\mathrm{M}}{dt},\\
&\frac{de}{dt} = \frac{1-e^2}{na^2e}\left\{\varkappa\right\} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\left\{\varpi\right\} - \frac{(1-e^2)\cos u}{\mathrm{M}(1-e\cos u)}\frac{d\mathrm{M}}{dt},\\
&\frac{d\varpi}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\left\{e\right\} - \frac{\sqrt{1-e^2}\sin u}{\mathrm{M}e(1-e\cos u)}\frac{d\mathrm{M}}{dt},\\
&\frac{d\varkappa_1}{dt} = -\frac{1-e^2}{na^2e}\left\{e\right\} - \frac{2}{na}\left\{a\right\} + \frac{(1-e^3\cos u)\sin u}{\mathrm{M}e(1-e\cos u)}\frac{d\mathrm{M}}{dt},
\end{aligned}\right.$$

le symbole $\left\{c_l\right\}$ ayant la signification

$$\left\{c_l\right\} = -\frac{m'}{m}\mathrm{S}x'\frac{\partial x}{\partial c_l} + \left(\frac{m'_0}{m_0} - \frac{m'}{m}\right)\mathrm{S}\lambda\frac{\partial x}{\partial c_l}.$$

On a

$$\left\{a\right\} = -\frac{m'}{m}nae\sin u + a\left(\frac{m'_0}{m_0} - \frac{m'}{m}\right)\left[(\cos u - e)\alpha + \sqrt{1-e^2}\sin u\,.\,\beta\right],$$

$$\left\{e\right\} = -\frac{m'}{m}\frac{2na^2\sin u}{1-e\cos u} - \frac{a}{1-e\cos u}\left(\frac{m'_0}{m_0} - \frac{m'}{m}\right)\left[(1+\sin^2 u - e\cos u)\alpha - \frac{(\cos u - e)\sin u}{\sqrt{1-e^2}}\beta\right],$$

$$\left\{\varpi\right\} = -\frac{m'}{m}na^2\sqrt{1-e^2} - a\left(\frac{m'_0}{m_0} - \frac{m'}{m}\right)\left[\sqrt{1-e^2}\sin u\,.\,\alpha - (\cos u - e)\beta\right],$$

$$\left\{\varkappa\right\} = -\frac{m'}{m}\frac{na^2(1+e\cos u)}{1-e\cos u} - \frac{a}{1-e\cos u}\left(\frac{m'_0}{m_0} - \frac{m'}{m}\right)\left[\sin u\,.\,\alpha - \sqrt{1-e^2}\cos u\,.\,\beta\right],$$

où

$$\alpha = \lambda\cos\varpi + \lambda_1\sin\varpi,\qquad \beta = -\lambda\sin\varpi + \lambda_1\cos\varpi,$$

représentent les composantes de la vitesse du Soleil suivant la direction du périhélie et la direction perpendiculaire.

Dans le cas où $m_i = \mu_i \psi(t)$, les μ_i étant des constantes, les parenthèses précédentes se simplifient et les équations se réduisent à

$$\left\{\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -3a\frac{1+e\cos u}{1-e\cos u}\frac{\psi'}{\psi}, \\ \frac{de}{dt} &= -3\frac{(1-e^2)\cos u}{1-e\cos u}\frac{\psi'}{\psi}, \\ \frac{d\varpi}{dt} &= -3\frac{\sqrt{1-e^2}\sin u}{e(1-e\cos u)}\frac{\psi'}{\psi}, \\ \frac{d\chi_1}{dt} &= 3\frac{(1-e^3\cos u)\sin u}{e(1-e\cos u)}\frac{\psi'}{\psi}. \end{aligned}\right.$$

Elles admettent l'intégrale

$$\psi^3 a(1-e^2) = \text{const.}$$

ou

$$\psi^3 \mathrm{P} = \text{const.},$$

P *désignant le paramètre.*

Cette intégrale se déduit d'ailleurs immédiatement dans ce cas particulier de l'équation

$$\frac{1}{\mathrm{P}}\frac{d\mathrm{P}}{dt} + \frac{3}{\mathrm{M}}\frac{d\mathrm{M}}{dt} = -\frac{2}{na\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{m'_0}{m_0} - \frac{m'}{m}\right)\left[\alpha\sqrt{1-e^2}\sin u - \beta(\cos u - e)\right]$$

qui donne le paramètre.

On peut la retrouver facilement aussi au moyen des équations cartésiennes. Si, en effet, x, y sont les coordonnées relatives d'un corps par rapport à l'autre, on établit la relation

$$\psi\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) + \psi'\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = 0$$

qui donne

$$\psi\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \text{const.},$$

d'où

$$\psi^3 \mathrm{P} = \text{const.}$$

en vertu de

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = \sqrt{f\mathrm{MP}}.$$

DEUXIÈME PARTIE

CAS PARTICULIER : MASSES $m_i = \mu_i \psi(t)$.

CHAPITRE VI

Généralités.

Nous nous proposons dans les chapitres qui suivent d'étudier le cas particulier où les masses varient en restant dans des rapports constants. On pourra donc poser $m_i = \mu_i \psi(t)$, les μ_i étant des constantes.

44. — Les équations du mouvement sont

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = f\psi(t) \sum_{j \neq i} \mu_j \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3}, \quad \ldots\ldots$$

Si l'on pose

$$p_i = \mu_i \frac{dx_i}{dt}, \qquad q_i = \mu_i \frac{dy_i}{dt}, \qquad r_i = \mu_i \frac{dz_i}{dt},$$

on obtient les équations canoniques

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{dx_i}{dt} = \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i}, & \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_i}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

$$\mathrm{H} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^2 + q_i^2 + r_i^2}{\mu_i} - \frac{\mathrm{U}}{\psi}.$$

45. — Intégrales premières. — Posons

$$U_1 = \frac{U}{\psi^2} = f \sum_{i,j} \frac{\mu_i \mu_j}{r_{ij}}, \qquad 2T_1 = \frac{2T}{\psi} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i S \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2.$$

Les équations du mouvement sont alors

$$\mu_i \psi(t) \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \psi^2(t) \frac{\partial U_1}{\partial x_i}, \quad \ldots\ldots$$

ou

$$(41) \qquad \mu_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \psi \frac{\partial U_1}{\partial x_i}, \quad \ldots\ldots$$

On en déduit

$$\sum_i \mu_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum_i \mu_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \sum_i \mu_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = 0,$$

d'où

$$(42) \qquad \left\{ \begin{aligned} \sum \mu_i x_i &= a_1 t + b_1, \\ \sum \mu_i y_i &= a_2 t + b_2, \\ \sum \mu_i z_i &= a_3 t + b_3. \end{aligned} \right.$$

Ces équations écrites sous la forme

$$\frac{\Sigma \mu_i x_i}{\Sigma \mu_i} = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i} = \frac{a_1 t + b_1}{\Sigma \mu_i}, \text{ etc.},$$

montrent que le centre de gravité du système décrit une droite d'un mouvement uniforme.

On a également

$$\sum \mu_i \left(y_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} - z_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \right) = 0, \quad \ldots\ldots,$$

d'où les intégrales des aires

$$(43)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum \mu_i \left(y_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dy_i}{dt}\right) = c_1, \\ &\sum \mu_i \left(z_i \frac{dx_i}{dt} - x_i \frac{dz_i}{dt}\right) = c_2, \\ &\sum \mu_i \left(x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt}\right) = c_3. \end{aligned}\right.$$

La combinaison des forces vives donne

$$\sum \mu_i \mathrm{S} \frac{dx_i}{dt} \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \psi \sum \mathrm{S} \frac{\partial \mathrm{U}_1}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt},$$

ou

$$(44)\qquad \frac{d\mathrm{T}_1}{dt} - \psi \frac{d\mathrm{U}_1}{dt} = 0.$$

Cette équation mise sous la forme

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{T}_1 - \psi \mathrm{U}_1) + \mathrm{U}_1 \psi' = 0,$$

montre que $\mathrm{T}_1 - \psi \mathrm{U}_1$ varie en sens inverse de ψ. Si donc $\psi(t)$ est une fonction toujours décroissante, on aura une relation de la forme

$$\mathrm{T}_1 - \psi \mathrm{U}_1 > h;$$

si $\psi(t)$ est toujours croissante, on aura

$$\mathrm{T}_1 - \psi \mathrm{U}_1 < h.$$

46. — **Généralisation de la relation de Lagrange-Jacobi.** — La combinaison des forces vives nous fournit, comme dans le cas des masses fixes, une relation entre le temps, les distances mutuelles et leurs dérivées. On a en effet

$$\sum \mu_i \mathrm{S}\, x_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \psi \sum \mathrm{S}\, x_i \frac{\partial \mathrm{U}_1}{\partial x_i} = -\psi \mathrm{U}_1,$$

puisque U_1 est une fonction homogène de degré -1 en x_i, y_i, z_i.

Donc

$$\sum \mu_i \, \mathrm{S} \, x_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \sum \mu_i \, \mathrm{S} \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 = \frac{d}{dt} \sum \mu_i \, \mathrm{S} \, x_i \frac{dx_i}{dt} = -\psi \mathrm{U}_1 + 2\mathrm{T}_1$$

ou

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^2}{dt^2} \sum \mu_i r_i^2 = 2(2\mathrm{T}_1 - \psi \mathrm{U}_1)$$

avec

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2.$$

Or, on a les identités

$$\sum_i \mu_i \sum_i \mu_i x_i^2 - \left(\sum_i \mu_i x_i\right)^2 = \sum_i \sum_j \mu_i \mu_j (x_i^2 + x_j^2 - 2 x_i x_j) = \sum_i \sum_j \mu_i \mu_j (x_i - x_j)^2, \text{ etc.}.$$

On en tire par addition

$$\sum_i \mu_i \sum_i \mu_i r_i^2 - \mathrm{S} \left(\sum_i \mu_i x_i\right)^2 = \sum_i \sum_j \mu_i \mu_j \, \mathrm{S} (x_i - x_j)^2,$$

d'où, en vertu des équations (42) :

$$\sum_i \mu_i \sum_i \mu_i r_i^2 = (a_1 t + b_1)^2 + (a_2 t + b_2)^2 + (a_3 t + b_3)^2 + \sum_i \sum_j \mu_i \mu_j r_{ij}^2.$$

Posons

$$\mu = \sum \mu_i, \qquad \mathrm{K} = \sum_i \sum_j \frac{\mu_i \mu_j r_{ij}^2}{\mu}, \qquad \mathrm{L} = \sum_i \mu_i r_i^2.$$

La relation précédente peut s'écrire

$$\mathrm{L} = \mathrm{K} + \frac{1}{\mu}[(a_1 t + b_1)^2 + (a_2 t + b_2)^2 + (a_3 t + b_3)^2],$$

d'où

$$\frac{d^3 \mathrm{L}}{dt^3} = \frac{d^3 \mathrm{K}}{dt^3}.$$

La relation (A) donne $\dfrac{d^2L}{dt^2} = 2(2T_1 - \psi U_1)$, d'où, par dérivation :

$$\frac{d^3K}{dt^3} = \frac{d^3L}{dt^3} = 4\frac{dT_1}{dt} - 2\psi\frac{dU_1}{dt} - 2\psi' U_1,$$

et, en vertu de (44) :

$$\frac{d^3K}{dt^3} = 2\left(\psi\frac{dU_1}{dt} - \psi' U_1\right).$$

C'est la relation cherchée :

$$\frac{1}{\psi^2}\frac{d^3K}{dt^3} = 2\frac{d}{dt}\left(\frac{U_1}{\psi}\right). \tag{45}$$

Cette relation fait intervenir le temps, les r_{ij} et leurs dérivées jusqu'à l'ordre *trois*. Elle généralise la relation de Lagrange-Jacobi.

Posons
$$\frac{2U_1}{\psi} = V.$$

(45) peut s'écrire

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\psi^2}\frac{d^2K}{dt^2} + 2\frac{\psi'}{\psi^3}\frac{dK}{dt} - 2K\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'}{\psi^3}\right)\right] + 2K\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\psi'}{\psi^3}\right) = \frac{dV}{dt}.$$

On a donc une intégrale première pour $\dfrac{d^2}{dt^2}\left(\dfrac{\psi'}{\psi^3}\right) = 0$, ou

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{At^2 + Bt + C}}.$$

On obtient alors

$$(At^2 + Bt + C)\frac{d^2K}{dt^2} - (2At + B)\frac{dK}{dt} + 2AK = V + h. \tag{46}$$

Comme cas particuliers de $\psi = \dfrac{1}{\sqrt{At^2 + Bt + C}}$, signalons $\psi = \dfrac{1}{\sqrt{Bt + C}}$ et $\psi = \dfrac{1}{\alpha t + \beta}$; ce dernier cas se ramène aux masses fixes.

L'équation (45) peut s'écrire

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2K}{dt^2} - 2\psi U_1\right) + 4\psi' U_1 = 0.$$

Sous cette forme, elle montre que $\frac{d^2K}{dt^2} - 2\psi U_1$ varie en sens inverse de ψ. Si donc ψ est une fonction toujours décroissante ou toujours croissante, $\frac{d^2K}{dt^2} - 2\psi U_1$, variant toujours dans le même sens, aura à partir d'un certain instant un signe constant.

Supposons par exemple ψ' toujours < 0; si $\frac{d^2K}{dt^2} - 2\psi U_1$ est égal à un certain instant à $k > 0$, on aura à partir de cet instant

$$\frac{d^2K}{dt^2} - 2\psi U_1 > k,$$

et *a fortiori*

$$\frac{d^2K}{dt^2} > k,$$

d'où

$$K > \frac{k}{2}t^2 + k't + k''.$$

K tendra donc vers l'infini avec t, donc la plus grande des distances mutuelles, R, tendra vers l'infini et le rapport $\frac{R}{t}$ aura une limite inférieure positive et non nulle.

Dans les mêmes conditions, $\frac{d^2K}{dt^2}$ étant toujours positif, K ne pourra passer pendant tout le mouvement par un maximum et présentera au plus un minimum, à condition que le mouvement ne soit pas limité par un choc.

Si $\psi(t)$ va toujours en décroissant et tend pour t infini vers une valeur ψ_1 non nulle, on voit facilement que tous les r_{ij} ne peuvent pas tendre à la fois vers zéro pour t infini.

En effet, l'équation (45) donne par intégration

$$\frac{d^2K}{dt^2} = 2\psi U_1 - 4\int_0^t \psi' U_1 dt + k.$$

Si tous les r_{ij} tendaient vers zéro, U_1 tendrait vers l'infini, et comme $-4\int_0^t \psi' U_1 dt$ est > 0, le second membre, donc $\frac{d^2K}{dt^2}$ tendraient vers l'infini, ce qui est contradictoire avec ce fait que K tendrait vers zéro.

47. — Cas où la combinaison des forces vives fournit une intégrale première. — L'application du changement de variables indiqué au Chapitre III, paragraphe 24 :

$$\frac{d\tau}{dt} = \psi^2, \qquad \frac{x_i}{\xi_i} = \frac{y_i}{\eta_i} = \frac{z_i}{\zeta_i} = \frac{1}{\psi},$$

conduit dans le cas actuel aux équations

$$(47) \qquad \frac{d^2\xi_i}{d\tau^2} = f\sum_{j\neq i} \mu_j \frac{\xi_j - \xi_i}{\rho_{ij}^3} + \mathrm{F}(t)\xi_i, \quad \ldots\ldots$$

avec

$$\mathrm{F}(t) = -\frac{1}{\psi^3}\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{\psi}\right).$$

On retrouve facilement sur ces équations la condition pour que la combinaison des forces vives fournisse une intégrale première. Les équations (47) peuvent en effet s'écrire, en posant $\mathrm{U}' = f\sum_{i,j} \frac{\mu_i\mu_j}{\rho_{ij}}$:

$$\mu_i \frac{d^2\xi_i}{d\tau^2} = \frac{\partial \mathrm{U}'}{\partial \xi_i} + \mu_i \mathrm{F}(t)\xi_i, \quad \ldots\ldots$$

Formons la combinaison des forces vives

$$\sum_i \mu_i \mathrm{S}\frac{d\xi_i}{d\tau}\frac{d^2\xi_i}{d\tau^2} = \sum_i \mathrm{S}\frac{\partial \mathrm{U}'}{\partial \xi_i}\frac{d\xi_i}{d\tau} + \mathrm{F}(t)\sum_i \mu_i \mathrm{S}\,\xi_i \frac{d\xi_i}{d\tau},$$

ou, en posant $2\mathrm{T}' = \sum_i \mu_i \mathrm{S}\left(\frac{d\xi_i}{d\tau}\right)^2, \qquad \mathrm{L}' = \sum_i \mu_i(\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2)$:

$$\frac{d\mathrm{T}'}{d\tau} - \frac{d\mathrm{U}'}{d\tau} = \frac{\mathrm{F}(t)}{2}\frac{d}{d\tau}\sum_i \mu_i(\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2) = \frac{1}{2}\left\{\frac{d}{d\tau}[\mathrm{F}(t)\mathrm{L}'] - \mathrm{L}'\frac{d\mathrm{F}}{d\tau}\right\},$$

$$\frac{d}{d\tau}\left[\mathrm{T}' - \mathrm{U}' - \frac{\mathrm{F}(t)}{2}\mathrm{L}'\right] = -\frac{\mathrm{L}'}{2}\frac{d\mathrm{F}}{d\tau} = -\frac{\mathrm{L}'}{2\psi^2}\mathrm{F}'(t).$$

Pour $\mathrm{F}'(t) = 0$, on a l'intégrale

$$\mathrm{T}' - \mathrm{U}' - \frac{\mathrm{F}(t)}{2}\mathrm{L}' = \mathrm{c}^{\mathrm{te}} = k.$$

La relation $\mathrm{F}'(t) = 0$ fournit précisément $\psi = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{A}t^2 + \mathrm{B}t + \mathrm{C}}}$.

Nous plaçant dans ce cas, cherchons ce que devient avec les variables x, y, z l'intégrale

$$T' - U' - \frac{F(t)}{2} L' = k.$$

On a

$$2T' = \frac{1}{\psi^4} \sum_i \mu_i S\left(\psi \frac{dx_i}{dt} + \psi' x_i\right)^2 = \frac{2T_1}{\psi^2} + \frac{\psi'}{\psi^3}\frac{dL}{dt} + \frac{\psi'^2}{\psi^4} L,$$

$$U' = \frac{U_1}{\psi},$$

$$L' = \psi^2 L.$$

L'équation précédente devient ainsi

$$T_1 + \frac{\psi'}{2\psi}\frac{dL}{dt} + \left[\frac{\psi'^2}{2\psi^2} - \frac{F(t)\psi^4}{2}\right] L - \psi U_1 = k\psi^2,$$

ou, en ayant égard aux relations

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{At^2 + Bt + C}}, \qquad \frac{\psi'}{2\psi} = -\frac{2At + B}{4(At^2 + Bt + C)}, \qquad \frac{\psi'^2}{2\psi^2} - \frac{F(t)\psi^4}{2} = \frac{A}{2(At^2 + Bt + C)}:$$

$$T_1 - \frac{2At + B}{4(At^2 + Bt + C)}\frac{dL}{dt} + \frac{A}{2(At^2 + Bt + C)} L - \frac{U_1}{\sqrt{At^2 + Bt + C}} = \frac{k}{At^2 + Bt + C}.$$

Introduisons K à la place de L au moyen des formules

$$L = K + \frac{1}{\mu}(\alpha t^2 + \beta t + \gamma),$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dK}{dt} + \frac{1}{\mu}(2\alpha t + \beta).$$

On obtient, après quelques simplifications

$$(48) \qquad T_1 - \psi U_1 - \frac{2At + B}{4(At^2 + Bt + C)}\frac{dK}{dt} + \frac{A}{2(At^2 + Bt + C)} K = \frac{k_1}{At^2 + Bt + C} + k_2.$$

On peut obtenir également cette formule en combinant les relations (44) et (46). On en déduit en effet

$$\left[(At^2 + Bt + C)\frac{d^2K}{dt^2} - (2At + B)\frac{dK}{dt} + 2AK\right]\frac{\psi\psi'}{2} = \psi' U_1 + h\frac{\psi\psi'}{2} - \frac{dT_1}{dt} + \psi\frac{dU_1}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}\left[-\frac{2At + B}{4(At^2 + Bt + C)}\frac{dK}{dt} + \frac{A}{2(At^2 + Bt + C)} K + T_1 - \psi U_1 - \frac{h}{4}\frac{1}{At^2 + Bt + C}\right] = 0.$$

L'intégration de cette équation donne l'équation (48).

(48) se réduit pour $A = B = 0$ à l'intégrale des forces vives.

48. — Mouvement relatif. — Gardant le changement de variables du numéro précédent, soient $n+1$ corps $M_0, M_1, \ldots, M_n$, et soient $P_0, P_1, \ldots, P_n$ les points de coordonnées ξ_i, η_i, ζ_i, le temps étant τ. L'étude des mouvements des $M_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ par rapport à M_0 se ramène à celle des mouvements des P_i par rapport à P_0.

Posons

$$X_i = \xi_i - \xi_0, \qquad Y_i = \eta_i - \eta_0, \qquad Z_i = \zeta_i - \zeta_0.$$

On a alors les équations

$$\frac{d^2 X_i}{d\tau^2} + f(\mu_0 + \mu_i)\frac{X_i}{\rho_i^3} = \frac{\partial R_i}{\partial X_i}, \;\ldots\ldots,$$

avec $$R_i = \sum_{j \neq i} f\mu_j \left(\frac{1}{\rho_{ij}} - \frac{X_i X_j + Y_i Y_j + Z_i Z_j}{\rho_j^3}\right) + \frac{F(t)}{2}(X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2),$$

$$\rho_{ij} = P_i P_j, \qquad \rho_j = P_0 P_j.$$

Ce sont les mêmes équations que dans le problème ordinaire des n corps, mais les fonctions R_i contiennent en plus $\dfrac{F(t)}{2}(X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2)$.

On pourra donc développer la théorie de Lagrange et l'on arrivera en prenant les éléments elliptiques des mouvements des P_i par rapport à P_0, aux mêmes équations. (Voir Tisserand, tome I, page 169, équations (h)).

Les développements de $\dfrac{\partial R}{\partial \theta}$, $\dfrac{\partial R}{\partial \omega}$ et $\dfrac{\partial R}{\partial \varphi}$ seront les mêmes, et à ceux de $\left(\dfrac{\partial R}{\partial a}\right)$, $\dfrac{\partial R}{\partial e}$, $\dfrac{\partial R}{\partial \varepsilon_1}$, il faudra ajouter respectivement :

$$F(t)\rho_i\left(\frac{\partial \rho_i}{\partial a}\right), \qquad F(t)\rho_i\frac{\partial \rho_i}{\partial e}, \qquad F(t)\rho_i\frac{\partial \rho_i}{\partial \varepsilon_1}.$$

Comme $$\rho = a(1 - e\cos u),$$

d'où

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial a}\right) = 1 - e\cos u, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial e} = \frac{a(e - \cos u)}{1 - e\cos u}, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial \varepsilon_1} = \frac{ae\sin u}{1 - e\cos u},$$

on ajoutera respectivement

$$F(t)a(1 - e\cos u)^2, \qquad F(t)a^2(e - \cos u), \qquad F(t)a^2 e\sin u.$$

49. — Cas où le problème à masses variables se ramène à un problème à masses fixes. — Reprenons les équations du mouvement

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = f\psi \sum_{\neq i} \mu_j \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3}, \quad \ldots\ldots,$$

et effectuons le changement de variables défini par

$$\frac{d\tau}{dt} = \rho(t), \qquad \frac{x_i}{\xi_i} = \frac{y_i}{\eta_i} = \frac{z_i}{\zeta_i} = \sigma(t).$$

Il vient

$$\frac{d^2\xi_i}{d\tau^2} + \frac{2\rho\sigma' + \rho'\sigma}{\rho^2\sigma} \frac{d\xi_i}{d\tau} + \frac{\sigma''}{\rho^2\sigma}\xi_i = f\frac{\psi}{\rho^2\sigma^3} \sum_{j \neq i} \mu_j \frac{\xi_j - \xi_i}{\rho_{ij}^3}, \quad \ldots\ldots$$

On peut simplifier ces équations en choisissant convenablement les fonctions ρ et σ.

1° Prenons $\sigma'' = 0$, d'où $\sigma = \alpha t + \beta$,

et $2\rho\sigma' + \rho'\sigma = 0$, d'où $\rho = \frac{\gamma}{\sigma^2} = \frac{\gamma}{(\alpha t + \beta)^2}$ (α, β, γ constantes).

$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\gamma}{\sigma^2}$ nous permet de prendre $\tau = -\frac{1}{\alpha(\alpha t + \beta)}$, et les équations du mouvement deviennent

$$\frac{d^2\xi_i}{d\tau^2} = -f\frac{\psi}{\alpha\gamma^2\tau} \sum_{j \neq i} \mu_j \frac{\xi_j - \xi_i}{\rho_{ij}^3}, \quad \ldots\ldots$$

On est donc ramené au problème des n corps de masses $\nu_i \frac{\psi}{\tau}$ ($\nu_i = \text{const.}$).

Pour $\psi = k\tau = \frac{k}{\alpha t + \beta}$, on a le problème des n corps à masses fixes.

2° Prenons $\rho^2\sigma^3 = \psi$, $2\rho\sigma' + \rho'\sigma = 0$,

d'où $\rho = \frac{1}{\sigma^2}$ et $\sigma = \frac{1}{\psi}$,

donc $\rho = \psi^2$.

On obtient alors les équations

$$\frac{d^2\xi_i}{d\tau^2} = f\sum_{j \neq i} \mu_j \frac{\xi_j - \xi_i}{\rho_{ij}^3} - \frac{1}{\psi^3}\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{\psi}\right)\xi_i, \quad \ldots\ldots$$

qui représentent le mouvement de n points de masses fixes μ_i s'attirant suivant la loi de Newton, et, de plus, attirés ou repoussés par l'origine proportionnellement à la masse et à la distance, le coefficient d'attraction ou de répulsion étant en général variable avec le temps, étant constant pour $\psi = \dfrac{1}{\sqrt{At^2 + Bt + C}}$.

3° Prenons $\sigma'' = 0$, d'où $\sigma = \alpha t + \beta$.

Le coefficient de ξ_i devient nul, les équations représentent le mouvement de n points de masses $\mu_i \dfrac{\psi}{\rho^2\sigma^3}$ s'attirant suivant la loi de Newton, avec une résistance du milieu proportionnelle à la masse et à la vitesse.

Cherchons si l'on peut avoir à la fois

$$\frac{\psi}{\rho^2\sigma^3} = c^{te} = \gamma \qquad \text{et} \qquad \frac{2\rho\sigma' + \rho'\sigma}{\rho^2\sigma} = c^{te} = \delta.$$

La seconde de ces relations donne

$$\rho = \frac{1}{\varepsilon(\alpha t + \beta)^2 + \dfrac{\delta}{\alpha}(\alpha t + \beta)},$$

puis la première donne

$$\psi = \gamma\rho^2\sigma^3 = \frac{\gamma(\alpha t + \beta)}{\left[\varepsilon(\alpha t + \beta) + \dfrac{\delta}{\alpha}\right]^2}.$$

On peut donc dire qu'en choisissant convenablement la représentation du temps, on doit avoir $\psi = \dfrac{t}{(t+a)^2}$ et nous prendrons

$$\rho = \frac{1}{t^2 + at}, \qquad \sigma = t.$$

Les équations deviennent alors

$$\frac{d^2\xi_i}{d\tau^2} = f\sum_{i \neq i} \mu_j \frac{\xi_j - \xi_i}{\rho_{ij}^3} - a\frac{d\xi_i}{d\tau}, \quad \ldots\ldots$$

Nous sommes ramenés à un problème à masses fixes.

4° Plus généralement, nous serons ramenés à un problème à masses fixes si l'on peut choisir ρ et σ de façon que

$$\frac{\psi}{\rho^2\sigma^3} = \alpha, \qquad \frac{\sigma''}{\rho^2\sigma} = \beta, \qquad \frac{2\rho\sigma' + \rho'\sigma}{\rho^2\sigma} = \gamma,$$

α, β, γ étant des constantes. (Le cas $\beta = \gamma = 0$ a été traité dans le 1°, le cas $\beta = 0$ a été traité dans le 3°.)

Les trois équations précédentes vont nous fournir les fonctions ψ, ρ, σ, et nous serons dans ce cas ramenés au mouvement de n points de masses fixes s'attirant suivant la loi de Newton et, de plus, attirés ou repoussés par l'origine proportionnellement à la masse et à la distance et soumis à une résistance (positive ou négative) ayant même direction que la vitesse et proportionnelle à cette vitesse en même temps qu'à la masse.

Posons
$$\rho\sigma = u;$$
on devra avoir
$$\frac{\sigma\sigma''}{u^2} = \beta \qquad \text{et} \qquad \frac{\sigma u' + u\sigma'}{u^2} = \gamma,$$
avec
$$\psi = \alpha u^2\sigma = \alpha\frac{\sigma^2\sigma''}{\beta}.$$

L'élimination de u entre les deux premières équations donne

$$\sigma\sigma''' + 3\sigma'\sigma'' = \frac{2\gamma}{\sqrt{\beta}}\sqrt{\sigma}\,\sigma''^{\frac{3}{2}}.$$

Supposant $\beta \neq 0$ et posant $\dfrac{\gamma}{\sqrt{\beta}} = A$, on a

$$\sigma\sigma''' + 3\sigma'\sigma'' = 2A\sqrt{\sigma}\,\sigma''^{\frac{3}{2}}.$$

Si l'on pose $\sigma = e^{\int v\,dt}$, v est solution de

$$v'' + 6vv' + 4v^3 = 2A(v' + v^2)^{\frac{3}{2}}.$$

En posant $v' = w$ et en prenant v pour variable indépendante, on a l'équation

$$w\frac{dw}{dv} + 6vw + 4v^3 = 2A(w + v^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Posons encore
$$w = v^2(X^2 - 1).$$

X est solution de

$$\frac{dv}{v} + \frac{(X^2 - 1)dX}{X(X^2 - AX + 1)} = 0$$

qui donne

$$v = c\frac{X}{X^2 - AX + 1}.$$

Or

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dX}\frac{dX}{dt} = -c\frac{X^2 - 1}{(X^2 - AX + 1)^2}\frac{dX}{dt},$$

et, d'autre part,

$$\frac{dv}{dt} = w = v^2(X^2 - 1) = c^2\frac{X^2(X^2 - 1)}{(X^2 - AX + 1)^2}.$$

La comparaison de ces deux valeurs donne

$$\frac{dX}{dt} = -cX^2,$$

d'où

$$X = \frac{1}{ct + c'}.$$

On en déduit

$$\sigma = e^{-\int \frac{dX}{X(X^2 - AX + 1)}}.$$

La forme de l'intégrale dépend de la réalité des racines du trinôme $X^2 - AX + 1$.

Premier cas. — $A^2 - 4 > 0$. X_1 et X_2 étant les racines de ce trinôme, on obtient

$$\sigma = c''\frac{(X - X_2)^{\frac{X_1}{\sqrt{A^2 - 4}}}}{X(X - X_1)^{\frac{X_2}{\sqrt{A^2 - 4}}}},$$

d'où

$$\sigma' = v\sigma = cc''(X - X_1)^{-\frac{X_1}{X_1 - X_2}}(X - X_2)^{\frac{X_2}{X_1 - X_2}},$$

$$\sigma'' = -c^2c''X^2\Big[-\frac{X_1}{X_1 - X_2}(X - X_1)^{-\frac{X_1}{X_1 - X_2} - 1}(X - X_2)^{\frac{X_2}{X_1 - X_2}}$$
$$+ \frac{X_2}{X_1 - X_2}(X - X_1)^{-\frac{X_1}{X_1 - X_2}}(X - X_2)^{\frac{X_2}{X_1 - X_2} - 1}\Big].$$

On a donc

$$\psi = \frac{\alpha}{\beta}\sigma^2\sigma'' = -\frac{\alpha}{\beta}c^2c''^3\left[-\frac{X_1}{X_1-X_2}(X-X_1)^{-\frac{2X_1+X_2}{X_1-X_2}}(X-X_2)^{\frac{2X_1+X_2}{X_1-X_2}}\right.$$
$$\left.+\frac{X_2}{X_1-X_2}(X-X_1)^{-\frac{X_1+2X_2}{X_1-X_2}}(X-X_2)^{\frac{2X_2+X_1}{X_1-X_2}}\right].$$

ψ n'étant déterminé qu'à un facteur près, nous pourrons, sans diminuer la généralité, prendre

$$\psi = X_1\left(\frac{X-X_2}{X-X_1}\right)^{\frac{2X_1+X_2}{X_1-X_2}} - X_2\left(\frac{X-X_2}{X-X_1}\right)^{\frac{X_1+2X_2}{X_1-X_2}},$$

puis, comme on le calcule facilement :

$$\rho = \frac{X^2}{X^2-AX+1} \qquad \text{et} \qquad \sigma = \frac{(X-X_2)^{\frac{X_1}{X_1-X_2}}}{X(X-X_1)^{\frac{X_2}{X_1-X_2}}}.$$

On a alors

$$\frac{\psi}{\rho^2\sigma^3} = X_1 - X_2 = \sqrt{A^2-4}, \qquad \frac{\sigma''}{\rho^2\sigma} = c^2, \qquad \frac{2\rho\sigma'+\rho'\sigma}{\rho^2\sigma} = Ac,$$

et les équations du mouvement deviennent

$$\frac{d^2\xi_i}{d\tau^2} = f\sqrt{A^2-4}\sum_{j\neq i}\mu_j\frac{\xi_j-\xi_i}{\rho_{ij}^3} - Ac\frac{d\xi_i}{d\tau} - c^2\xi_i, \;\ldots\ldots$$

Deuxième cas. — $A^2-4=0$. Soit d'abord $A=+2$.

On a alors

$$\sigma = e^{-\int\frac{dX}{X(X-1)^2}} = c''\frac{X-1}{X}e^{\frac{1}{X-1}}.$$

On en tire

$$\sigma' = v\sigma = \frac{cc''}{X-1}e^{\frac{1}{X-1}}$$

et

$$\sigma'' = \frac{d\sigma'}{dX}\frac{dX}{dt} = c^2c''\left(\frac{X}{X-1}\right)^3 e^{\frac{1}{X-1}},$$

puis

$$\psi = \frac{\alpha}{\beta}\sigma^2\sigma'' = \frac{\alpha}{\beta}c^2 c''^3 \frac{X}{X-1} e^{\frac{3}{X-1}}.$$

Nous prendrons

$$\psi = \frac{X}{X-1} e^{\frac{3}{X-1}},$$

puis

$$\rho = \left(\frac{X}{X-1}\right)^2, \qquad \sigma = \frac{X-1}{X} e^{\frac{1}{X-1}}.$$

Dans ces conditions, on a

$$\frac{\psi}{\rho^2\sigma^3} = 1, \qquad \frac{\sigma''}{\rho^2\sigma} = c^2, \qquad \frac{2\rho\sigma' + \rho'\sigma}{\rho^2\sigma} = 2c.$$

Les équations du mouvement deviennent alors

$$\frac{d^2\xi_i}{d\tau^2} = f\sum_{j\neq i}\mu_j\frac{\xi_j - \xi_i}{\rho_{ij}^3} - 2c\frac{d\xi_i}{d\tau} - c^2\xi_i, \; \ldots\ldots$$

Pour $A = -2$, des calculs analogues nous amènent à prendre

$$\psi = \frac{X}{X+1} e^{-\frac{3}{X+1}},$$

puis

$$\rho = \left(\frac{X}{X+1}\right)^2, \qquad \sigma = \frac{X+1}{X} e^{-\frac{1}{X+1}}.$$

Les équations du mouvement deviennent

$$\frac{d^2\xi_i}{d\tau^2} = f\sum_{j\neq i}\mu_j\frac{\xi_j - \xi_i}{\rho_{ij}^3} + 2c\frac{d\xi_i}{d\tau} - c^2\xi_i, \; \ldots\ldots$$

$A = 2$ et $A = -2$ nous amènent donc à l'étude du même mouvement.

Troisième cas. — $A^2 - 4 < 0$. On a

$$\sigma = c'' \frac{\sqrt{X^2 - AX + 1}}{X} e^{-\frac{A}{\sqrt{4-A^2}} \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{2}{\sqrt{4-A^2}}\left(X - \frac{A}{2}\right)\right]},$$

d'où

$$\sigma' = \frac{cc''}{\sqrt{X^2 - AX + 1}} e^{-\frac{A}{\sqrt{4-A^2}} \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{2}{\sqrt{4-A^2}}\left(X - \frac{A}{2}\right)\right]},$$

$$\sigma'' = c^2 c'' \frac{X^3}{(X^2 - AX + 1)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{A}{\sqrt{4-A^2}} \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{2}{\sqrt{4-A^2}}\left(X - \frac{A}{2}\right)\right]}.$$

On a alors

$$\psi = \frac{\alpha}{\beta}\sigma^2\sigma'' = \frac{\alpha}{\beta} c^2 c''^3 \frac{X}{\sqrt{X^2 - AX + 1}} e^{-\frac{3A}{\sqrt{4-A^2}} \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{2}{\sqrt{4-A^2}}\left(X - \frac{A}{2}\right)\right]}.$$

Nous prendrons

$$\psi = \frac{X}{\sqrt{X^2 - AX + 1}} e^{-\frac{3A}{\sqrt{4-A^2}} \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{2}{\sqrt{4-A^2}}\left(X - \frac{A}{2}\right)\right]},$$

$$\rho = \frac{X^2}{X^2 - AX + 1},$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{X^2 - AX + 1}}{X} e^{-\frac{A}{\sqrt{4-A^2}} \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{2}{\sqrt{4-A^2}}\left(X - \frac{A}{2}\right)\right]}.$$

On a alors

$$\frac{\psi}{\rho^2\sigma^3} = 1, \qquad \frac{\sigma''}{\rho^2\sigma} = c^2, \qquad \frac{2\rho\sigma' + \rho'\sigma}{\rho^2\sigma} = Ac,$$

et les équations du mouvement deviennent

$$\frac{d^2\xi_i}{d\tau^2} = f\sum_{j \neq i} \mu_j \frac{\xi_j - \xi_i}{\rho_{ij}^3} - Ac\frac{d\xi_i}{d\tau} - c^2\xi_i.$$

Cherchons comment se comporte $\psi(t)$ pour les très grandes valeurs de t dans tous les cas envisagés ci-dessus.

Pour $A^2 - 4 > 0$, X étant un infiniment petit du premier ordre en t, nous aurons

$$\frac{X - X_2}{X - X_1} = \frac{X_2}{X_1} + \frac{X_2 - X_1}{X_1^2} X + \ldots\ldots,$$

d'où

$$\psi = X_1 \left(\frac{X_2}{X_1} + \frac{X_2 - X_1}{X_1^2} X + \ldots\ldots \right)^{\frac{2X_1 + X_2}{X_1 - X_2}} - X_2 \left(\frac{X_2}{X_1} + \frac{X_2 - X_1}{X_1^2} X + \ldots\ldots \right)^{\frac{X_1 + 2X_2}{X_1 - X_2}}$$

$$= 2 \left(\frac{X_2}{X_1} \right)^{\frac{2X_1 + X_2}{X_1 - X_2}} \left(\frac{X_2}{X_1} - \frac{X_1}{X_2} \right) X + \ldots\ldots$$

ψ est donc un infiniment petit du premier ordre au moins, et du second ordre au moins pour $X_1 + X_2 = 0$.

Pour $A = \pm 2$, $\qquad \psi = \dfrac{X}{X + 1} e^{-\frac{3}{X+1}} = (X - X^2 + X^3 - \ldots) e^{-\frac{3}{X+1}}$.

Si t tend vers l'infini, ψ tend vers zéro, et la partie principale de ψ est Xe^{-3} : donc ψ est un infiniment petit du premier ordre.

Enfin, pour $A^2 - 4 < 0$, on a

$$\psi = \frac{X}{\sqrt{X^2 - AX + 1}} e^{-\frac{3A}{\sqrt{4 - A^2}} \operatorname{arc\,tg} \left[\frac{2}{\sqrt{4 - A^2}} \left(X - \frac{A}{2} \right) \right]},$$

dont la partie principale est $X e^{-\frac{3A}{\sqrt{4-A^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{-A}{\sqrt{4-A^2}}}$: ψ est encore un infiniment petit du premier ordre.

En définitive, *dans tous les cas précédents,* $\psi(t)$ *est pour les très grandes valeurs de* t, *un infiniment petit du premier ordre au moins. Donc, d'après un résultat antérieur, les mouvements de tous les points tendent en général à être rectilignes et uniformes.*

CHAPITRE VII

Cas où les distances mutuelles gardent des rapports constants.

50. — Trajectoires particulières. — Nous allons montrer qu'il est facile d'obtenir des trajectoires rectilignes avec choc qui généralisent celles indiquées par M. Chazy (*Bulletin astronomique*, 35, 1918, page 324).

Le mouvement étant rapporté au centre de gravité, cherchons si les équations (41) admettent une solution de la forme

$$x_i = C_i \varphi(t), \qquad y_i = C'_i \varphi(t), \qquad z_i = C''_i \varphi(t).$$

On devra avoir

$$C_i \varphi''(t) = f \frac{\psi}{\varphi^2} \sum_{j \neq i} \mu_j \frac{C_j - C_i}{\mathfrak{D}_{ij}^3}, \; \ldots\ldots$$

avec
$$\mathfrak{D}_{ij}^2 = (C_j - C_i)^2 + (C'_j - C'_i)^2 + (C''_j - C''_i)^2.$$

Supposons donc que les constantes C_i, C'_i, C''_i vérifient le système algébrique

$$\frac{f}{C_i} \sum_{j \neq i} \mu_j \frac{C_j - C_i}{\mathfrak{D}_{ij}^3} = \frac{f}{C'_i} \sum_{j \neq i} \mu_j \frac{C'_j - C'_i}{\mathfrak{D}_{ij}^3} = \frac{f}{C''_i} \sum_{j \neq i} \mu_j \frac{C''_j - C''_i}{\mathfrak{D}_{ij}^3} = \lambda,$$

λ étant une constante, la même pour toutes les valeurs de i, et déterminons la fonction φ par la relation

$$\varphi^2 \varphi'' = \lambda \psi.$$

On doit d'ailleurs supposer $\lambda \neq 0$, car le système précédent peut s'écrire

$$\lambda C_i = \frac{\partial U}{\partial C_i}, \; \ldots\ldots$$

avec

$$U = f \sum_{i,j} \frac{\mu_i \mu_j}{\mathfrak{D}_{ij}},$$

et si λ était nul, on aurait

$$\frac{\partial U}{\partial C_i} = \frac{\partial U}{\partial C'_i} = \frac{\partial U}{\partial C''_i} = 0,$$

d'où l'on tirerait

$$\sum_{i=1}^{n} \left(C_i \frac{\partial U}{\partial C_i} + C'_i \frac{\partial U}{\partial C'_i} + C''_i \frac{\partial U}{\partial C''_i} \right) = 0$$

ou

$$U = 0,$$

ce qui est impossible.

Il n'y aura choc, au centre de gravité, que si φ s'annule. Selon la forme de la fonction φ, on pourra donc avoir :

ou choc au bout d'un temps fini,

ou mouvement asymptotique de tous les corps vers l'origine,

ou mouvement de tous les corps vers l'infini,

ou oscillations pour chacun à distance finie.

Il sera facile d'obtenir à l'aide des équations aux variations des mouvements infiniment voisins des précédents.

Posons

$$\begin{aligned} X_i &= C_i \varphi(t), & P_i &= C_i \mu_i \varphi'(t), \\ Y_i &= C'_i \varphi(t), & Q_i &= C'_i \mu_i \varphi'(t), \\ Z_i &= C''_i \varphi(t), & R_i &= C''_i \mu_i \varphi'(t), \end{aligned}$$

qui vérifient le système canonique

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, & \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \\ \frac{dy_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial q_i}, & \frac{dq_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial y_i}, \\ \frac{dz_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial r_i}, & \frac{dr_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial z_i}, \end{aligned} \right. \qquad H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^2 + q_i^2 + r_i^2}{\mu_i} - f\psi \sum_{i,j} \frac{\mu_i \mu_j}{r_{ij}},$$

et cherchons une solution de ce système de la forme

$$\begin{aligned} x_i &= X_i + \xi_i, & p_i &= P_i + \pi_i, \\ y_i &= Y_i + \eta_i, & q_i &= Q_i + \chi_i, \\ z_i &= Z_i + \zeta_i, & r_i &= R_i + \rho_i, \end{aligned}$$

les $\xi, \eta, \zeta, \pi, \chi, \rho$ étant supposés assez petits pour que l'on puisse négliger leurs carrés dans un certain intervalle de temps.

On voit facilement que ces fonctions sont solutions des équations aux variations

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{d\xi_i}{dt} &= \frac{\pi_i}{\mu_i}, & \frac{d\pi_i}{dt} &= \frac{\psi}{\varphi^3}\sum_{k=1}^{n}(\mathcal{A}_{ik}\xi_k + \mathcal{B}_{ik}\eta_k + \mathcal{C}_{ik}\zeta_k),\\
\frac{d\eta_i}{dt} &= \frac{\chi_i}{\mu_i}, & \frac{d\chi_i}{dt} &= \frac{\psi}{\varphi^3}\sum_{k=1}^{n}(\mathcal{A}'_{ik}\xi_k + \mathcal{B}'_{ik}\eta_k + \mathcal{C}'_{ik}\zeta_k),\\
\frac{d\zeta_i}{dt} &= \frac{\rho_i}{\mu_i}, & \frac{d\rho_i}{dt} &= \frac{\psi}{\varphi^3}\sum_{k=1}^{n}(\mathcal{A}''_{ik}\xi_k + \mathcal{B}''_{ik}\eta_k + \mathcal{C}''_{ik}\zeta_k),
\end{aligned}\right.$$

les coefficients $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ étant des constantes vérifiant les égalités

$$\left\{\begin{aligned}
\mathcal{A}_{ik} &= \mathcal{A}_{ki}, & \mathcal{B}_{ik} &= \mathcal{A}'_{ki}, & \mathcal{C}_{ik} &= \mathcal{A}''_{ki},\\
\mathcal{A}'_{ik} &= \mathcal{B}_{ki}, & \mathcal{B}'_{ik} &= \mathcal{B}'_{ki}, & \mathcal{C}'_{ik} &= \mathcal{B}''_{ki},\\
\mathcal{A}''_{ik} &= \mathcal{C}_{ki}, & \mathcal{B}''_{ik} &= \mathcal{C}'_{ki}, & \mathcal{C}''_{ik} &= \mathcal{C}''_{ki}.
\end{aligned}\right.$$

51. — Cas où les distances mutuelles restent dans des rapports constants. — Nous venons de trouver des mouvements dans lesquels les distances mutuelles restaient dans des rapports constants.

Nous allons nous proposer d'étudier dans sa généralité le cas où les distances mutuelles restent dans des rapports constants. Nous suivrons pour cela, en la généralisant, l'exposition qu'a donnée M. Meyer dans sa Thèse en ce qui concerne la même question relativement au problème des n corps à masses fixes.

Nous supposerons le centre de gravité immobile, et nous le prendrons pour origine d'un trièdre fixe T. La configuration du système à un instant t se déduit de sa configuration à un instant t_0 par une homothétie et une rotation autour de l'origine O. Il existe donc un trièdre mobile T' par rapport auquel chaque point du système décrit une droite passant par O; nous supposerons qu'à l'instant initial T' coïncide avec T. A l'instant initial, M_i a pour coordonnées par rapport à T ou T' x_i, y_i, z_i. A l'instant t il a pour coordonnées par rapport à T'

$$\xi_i = \lambda x_i, \qquad \eta_i = \lambda y_i, \qquad \zeta_i = \lambda z_i.$$

Soient p, q, r les composantes sur T' de la rotation de T' à l'instant t. Les composantes de la vitesse de M_i sur les axes T' sont :

$$\left\{\begin{aligned}
V_{x_i} &= -\lambda(r y_i - q z_i) + \lambda' x_i,\\
V_{y_i} &= -\lambda(p z_i - r x_i) + \lambda' y_i,\\
V_{z_i} &= -\lambda(q x_i - p y_i) + \lambda' z_i.
\end{aligned}\right.$$

Celles de l'accélération de M_i sont

$$\left\{\begin{aligned}
J_{x_i} &= -rV_{y_i} + qV_{z_i} + \frac{dV_{x_i}}{dt},\\
J_{y_i} &= -pV_{z_i} + rV_{x_i} + \frac{dV_{y_i}}{dt},\\
J_{z_i} &= -qV_{x_i} + pV_{y_i} + \frac{dV_{z_i}}{dt}.
\end{aligned}\right.$$

De plus, M_i est soumis de la part des autres points à des attractions dont les composantes sur T′ sont

$$\left\{\begin{aligned}
X_i &= \frac{\psi}{\lambda^2}\sum_{j\neq i}\mu_j\frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3},\\
Y_i &= \frac{\psi}{\lambda^2}\sum_{i\neq i}\mu_j\frac{y_j - y_i}{r_{ij}^3},\\
Z_i &= \frac{\psi}{\lambda^2}\sum_{\neq i}\mu_j\frac{z_j - z_i}{r_{ij}^3},
\end{aligned}\right.$$

le coefficient d'attraction f étant supposé égal à l'unité.

Les équations du mouvement de M sont donc $X_i = J_{x_i}$, etc., c'est-à-dire

$$(49)\quad\left\{\begin{aligned}
&x_i[\lambda\lambda'' - \lambda^2(q^2+r^2)] + y_i[\lambda^2 pq - (\lambda^2 r)'] + z_i[\lambda^2 pr + (\lambda^2 q)'] = \frac{\psi}{\lambda}\sum_{j\neq i}\mu_j\frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3},\\
&x_i[\lambda^2 pq + (\lambda^2 r)'] + y_i[\lambda\lambda'' - \lambda^2(p^2+r^2)] + z_i[\lambda^2 qr - (\lambda^2 p)'] = \frac{\psi}{\lambda}\sum_{j\neq i}\mu_j\frac{y_j - y_i}{r_{ij}^3},\\
&x_i[\lambda^2 pr - (\lambda^2 q)'] + y_i[\lambda^2 qr + (\lambda^2 p)'] + z_i[\lambda\lambda'' - \lambda^2(p^2+q^2)] = \frac{\psi}{\lambda}\sum_{i\neq i}\mu_j\frac{z_j - z_i}{r_{ij}^3}.
\end{aligned}\right.$$

Cas où les masses sont alignées. — Supposons d'abord que tous les points restent alignés ($n \geqslant 2$) sur une droite que nous prendrons pour axe $O\xi$. On a alors $y_i = z_i = 0$. Nous pourrons de plus choisir $O\eta$ de manière que q soit $\equiv 0$; il suffira, pour cela, de prendre à chaque instant $O\eta$ perpendiculaire au plan $O\xi\Omega$, $O\Omega$ étant la rotation instantanée de T′.

Les équations (49) se réduiront alors à

$$(50)\quad\left\{\begin{aligned}
&\lambda'' - \lambda r^2 = \frac{\psi}{\lambda^2}\frac{1}{x_i}\sum_{j\neq i}\mu_j\frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3},\\
&(\lambda^2 r)' = \lambda^2 pr = 0.
\end{aligned}\right.$$

Les deux dernières donnent :

soit $r = 0$ ($O\xi$ fixe, mouvement rectiligne),

soit $p = 0$, $\lambda^2 r = \mu = c^{te}$ ($O\xi$ tourne autour de Oz, mouvement plan).

Dans tous les cas, les n premières équations (50) deviennent

$$\lambda'' - \frac{\mu^2}{\lambda^3} = \frac{\psi}{\lambda^2}\frac{1}{x_i}\sum_{j\neq i}\mu_j\frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3},$$

les n quantités $\dfrac{1}{x_i}\sum\limits_{j\neq i}\mu_j\dfrac{x_j - x_i}{r_{ij}^3}$ doivent être égales à une même constante $-k^2$, et l'on a

$$\left\{\begin{aligned} \lambda'' &= \frac{\mu^2}{\lambda^3} - \frac{k^2\psi}{\lambda^2},\\ r\lambda^2 &= \mu. \end{aligned}\right.$$

Ces deux équations fournissent λ et r. $r\lambda^2 = \mu$ montre que chaque point décrit sa trajectoire selon la loi des aires.

Les conditions de possibilité sont données par les équations

$$X_i \equiv \sum_{j\neq i}\mu_j\frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3} + k^2 x_i = 0.$$

On a la relation $$\sum \mu_i X_i = 0.$$

Restent donc $n-1$ relations pour déterminer $n-1$ paramètres de forme : les différences $x_j - x_i$, x_1 étant arbitraire et k étant donné.

Dans le cas $n = 2$, on trouve (r étant la distance M_1M_2 à l'instant t_0) :

$$x_1 = -\frac{m_2 r}{m_1 + m_2}, \qquad x_2 = \frac{m_1 r}{m_1 + m_2}, \qquad k^2 = \frac{m_1 + m_2}{r^3}.$$

Dans le cas $n = 3$, on montre qu'à chaque disposition relative des trois points il correspond une solution.

Plus généralement, n points peuvent avoir $\dfrac{n!}{2}$ dispositions relatives. A chacune de ces dispositions il correspond une solution.

Cas où les masses sont dans un plan. — Supposons maintenant que les masses restent toujours dans un même plan ($n \geqslant 3$), que nous prendrons pour plan $\zeta = 0$. Le système (49) se réduit à :

$$(51)\quad \left\{ \begin{array}{l} x_i[\lambda\lambda'' - \lambda^2(q^2+r^2)] + y_i[\lambda^2 pq - (\lambda^2 r)'] = \dfrac{\psi}{\lambda} \displaystyle\sum_{j \neq i} \mu_j \dfrac{x_j - x_i}{r_{ij}^3}, \\ x_i[\lambda^2 pq + (\lambda^2 r)'] + y_i[\lambda\lambda'' - \lambda^2(p^2+r^2)] = \dfrac{\psi}{\lambda} \displaystyle\sum_{\neq i} \mu_j \dfrac{y_j - y_i}{r_{ij}^3}, \\ x_i[\lambda^2 pr - (\lambda^2 q)'] + y_i[\lambda^2 qr + (\lambda^2 p)'] = 0. \end{array} \right.$$

On a donc, les rapports $\dfrac{y_i}{x_i}$ n'étant pas tous égaux entre eux (les points sont supposés non alignés) :

$$\lambda^2 pr - (\lambda^2 q)' = \lambda^2 qr + (\lambda^2 p)' = 0.$$

L'élimination de r donne $$\lambda^2 p(\lambda^2 p)' + \lambda^2 q(\lambda^2 q)' = 0,$$

d'où $$\lambda^4(p^2+q^2) = \text{const.} = \alpha.$$

Les deux premiers groupes d'équations montrent que l'on a

$$\lambda\lambda'' - \lambda^2(q^2+r^2) = \mathrm{K}\frac{\psi}{\lambda}, \qquad \lambda\lambda'' - \lambda^2(p^2+r^2) = \mathrm{K}'\frac{\psi}{\lambda}, \qquad \lambda^2 pq = \mathrm{K}''\frac{\psi}{\lambda}, \qquad (\lambda^2 r)' = \mathrm{K}'''\frac{\psi}{\lambda}.$$

On en déduit l'équation

$$\lambda^2(q^2 - p^2) = (\mathrm{K}' - \mathrm{K})\frac{\psi}{\lambda},$$

qui, rapprochée de $\lambda^2 pq = \mathrm{K}''\dfrac{\psi}{\lambda}$, donne

$$\left\{ \begin{array}{l} p^2 = \dfrac{\psi}{2\lambda^3}(\mathrm{K} - \mathrm{K}' + \beta), \\ q^2 = \dfrac{\psi}{2\lambda^3}(\mathrm{K}' - \mathrm{K} + \beta), \end{array} \right.$$

avec $$\beta = \sqrt{(\mathrm{K} - \mathrm{K}')^2 + 4\mathrm{K}''^2}.$$

On a donc $$p^2 + q^2 = \beta\frac{\psi}{\lambda^3}.$$

Comme on a aussi $$p^2 + q^2 = \frac{\alpha}{\lambda^4},$$

on a :

ou bien $$p = q = 0,$$

ou bien $$\psi\lambda = \text{const.} = c,$$

d'où $$\lambda = \frac{c}{\psi}.$$

1° Étudions le cas où $\lambda = \dfrac{c}{\psi}$.

On a alors $$p^2 = \frac{c}{2\lambda^4}(K - K' + \beta),$$

$$q^2 = \frac{c}{2\lambda^4}(K' - K + \beta),$$

d'où $$\lambda^2 p = \text{const.}, \qquad \lambda^2 q = \text{const.}.$$

Les relations $$\lambda^2 pr - (\lambda^2 q)' = \lambda^2 qr + (\lambda^2 p)' = 0$$

donnent alors $$\lambda^2 pr = \lambda^2 qr = 0,$$

d'où les deux conclusions possibles :

$$p = q = 0 \quad \text{(déjà trouvée)}, \qquad \text{ou } r = 0.$$

Supposons $r = 0$. Le rapport $\dfrac{p}{q}$ est constant. Donc la rotation a une direction fixe dans le plan $\xi O \eta$. Prenons cette direction pour axe des ξ, de sorte que $q = 0$, d'où

$$\beta = K - K', \qquad p^2 = \frac{c(K - K')}{\lambda^4}.$$

On a alors

$$\lambda\lambda'' = K\frac{\psi}{\lambda} = \frac{Kc}{\lambda^2}.$$

Cette relation nous fournit

$$\lambda = \sqrt{\gamma t^2 + 2\delta t + \frac{\delta^2 + Kc}{\gamma}}.$$

ψ est de la forme $\dfrac{1}{\sqrt{At^2 + Bt + C}}$.

Les conditions de possibilité sont dans ce cas

$$\left\{\begin{aligned} Kx_i &= \sum_{j\neq i} \mu_j \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3},\\ K'y_i &= \sum_{j\neq i} \mu_j \frac{y_j - y_i}{r_{ij}^3}. \end{aligned}\right.$$

Si K et K′ sont $\neq 0$, on en déduit

$$\sum \mu_i x_i = \sum \mu_i y_i = 0.$$

K et K′ ne peuvent d'ailleurs être nuls. En effet, pour $K = 0$, on aurait

$$0 = \sum_{j\neq i} \mu_j \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3},$$

d'où

$$0 = \sum_i \mu_i x_i \sum_{j\neq i} \mu_j \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3},$$

ou

$$\sum_i \sum_j \mu_i \mu_j \frac{(x_j - x_i)^2}{r_{ij}^3} = 0,$$

relation qui ne peut être satisfaite.

En résumé, le cas $\lambda = \dfrac{c}{\psi}$ ne peut donner une solution que si ψ est de la forme $\dfrac{1}{\sqrt{At^2 + Bt + C}}$.

2° Étudions le cas où $p = q = 0$. Les équations (49) deviennent

$$\left\{\begin{aligned} x_i(\lambda\lambda'' - \lambda^2 r^2) - y_i(\lambda^2 r)' &= \frac{\psi}{\lambda} \sum_{j\neq i} \mu_j \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3},\\ x_i(\lambda^2 r)' + y_i(\lambda\lambda'' - \lambda^2 r^2) &= \frac{\psi}{\lambda} \sum_{j\neq i} \mu_j \frac{y_j - y_i}{r_{ij}^3}, \end{aligned}\right.$$

d'où l'on tire

$$(\lambda^2 r)'(x_i^2 + y_i^2) = \frac{\psi}{\lambda} \sum_{j \neq i} \mu_j \frac{x_i y_j - x_j y_i}{r_{ij}^3},$$

puis

$$(\lambda^2 r)' \sum \mu_i (x_i^2 + y_i^2) = 0,$$

d'où

$$(\lambda^2 r)' = 0,$$
$$\lambda^2 r = \mu.$$

et

$$\lambda\lambda'' - \frac{\mu^2}{\lambda^2} = \frac{\psi}{\lambda x_i} \sum_{j \neq i} \mu_j \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3} = \frac{\psi}{\lambda y_i} \sum_{j \neq i} \mu_j \frac{y_j - y_i}{r_{ij}^3},$$

$$\lambda'' - \frac{\mu^2}{\lambda^3} = \frac{\psi}{\lambda^2} \frac{1}{x_i} \sum_{j \neq i} \mu_j \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3} = \frac{\psi}{\lambda^2} \frac{1}{y_i} \sum_{j \neq i} \mu_j \frac{y_j - y_i}{r_{ij}^3}.$$

Les quantités $\frac{1}{x_i} \sum_{j \neq i} \mu_j \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3}$ et $\frac{1}{y_i} \sum_{j \neq i} \mu_j \frac{y_j - y_i}{r_{ij}^3}$ doivent être égales à une même quantité $-k^2$, et l'on a

$$\begin{cases} \lambda^2 r = \mu, \\ \lambda'' = -\dfrac{k^2 \psi}{\lambda^2} + \dfrac{\mu^2}{\lambda^3}. \end{cases}$$

Chaque point décrit encore sa trajectoire suivant la loi des aires.

Les conditions de possibilité sont données par les équations

$$(\alpha) \quad \begin{cases} X_i \equiv \displaystyle\sum_{j \neq i} \mu_j \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3} + k^2 x_i = 0, \\ Y_i \equiv \displaystyle\sum_{j \neq i} \mu_j \frac{y_j - y_i}{r_{ij}^3} + k^2 y_i = 0. \end{cases}$$

En tenant compte des relations

$$\sum \mu_i X_i = \sum \mu_i Y_i = \sum \mu_i (x_i Y_i - y_i X_i) = 0,$$

il reste $2n - 3$ relations pour déterminer $2n - 3$ paramètres de forme du système (k étant donné).

On a les relations

$$(x_i - x_j)(Y_i - Y_j) - (y_i - y_j)(X_i - X_j) = 0,$$

qui s'écrivent

$$\sum \mu_k (i, j, k)\left[\frac{1}{r_{ik}^3} - \frac{1}{r_{jk}^3}\right] = 0 \qquad (k \neq i \text{ et } j),$$

avec

$$(i, j, k) = \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{vmatrix}.$$

(i, j, k) représente le double de l'aire du triangle $M_i M_j M_k$.

Les relations obtenues ne renferment donc que les masses et les distances mutuelles.

On peut remarquer aussi que les équations de condition (α) expriment que la fonction

$$V = \sum \frac{\mu_i \mu_j}{r_{ij}} + \frac{k^2}{2M} \sum \mu_i \mu_j r_{ij}^2 = U_1 + \frac{k^2}{2} K \qquad (M = \Sigma \mu_i)$$

satisfait aux conditions de premier ordre : ses dérivées premières sont toutes nulles, comme il arrive dans la recherche des maxima et minima.

Dans le cas de trois corps, les trois distances sont des variables indépendantes, et, en annulant les trois dérivées de V par rapport aux r_{ij}, on obtient

$$r_{12} = r_{13} = r_{23} :$$

les trois points forment un triangle équilatéral.

Remarque. — Dans le cas des masses fixes ($\psi = c^{te}$), on peut avoir l'équilibre relatif ($\lambda = c^{te}$, $r = c^{te}$). Dans le cas des masses variables, on ne pourrait avoir que l'équilibre absolu ($\lambda = c^{te}$, $r = 0$); cela résulte des relations

$$\lambda^2 r = \mu, \qquad \lambda'' = -\frac{k^2 \psi}{\lambda^2} + \frac{\mu^2}{\lambda^3};$$

mais alors on aurait $k = 0$, ce qui est impossible.

Cas où les masses sont dans l'espace. — Supposons enfin que les masses ne soient pas dans un plan ($n \geqslant 4$).

Les équations (49) montrent que $\lambda^2 pq$, $\lambda^2 qr$, $\lambda^2 rp$ sont de la forme $\frac{K}{\lambda}$; donc p, q, r restent proportionnels à des nombres fixes pendant tout le mouvement : la rotation a une direction fixe que nous pouvons prendre pour axe $Oz (p = q = 0)$.

Les équations (49) deviennent alors

$$(52)\quad \left\{\begin{aligned} x_i(\lambda\lambda'' - \lambda^2 r^2) - y_i(\lambda^2 r)' &= \frac{\psi}{\lambda}\sum_{j\neq i}\mu_j\frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3},\\ x_i(\lambda^2 r)' + y_i(\lambda\lambda'' - \lambda^2 r^2) &= \frac{\psi}{\lambda}\sum_{j\neq i}\mu_j\frac{y_j - y_i}{r_{ij}^3},\\ z_i\lambda\lambda'' &= \frac{\psi}{\lambda}\sum_{j\neq i}\mu_j\frac{z_j - z_i}{r_{ij}^3}. \end{aligned}\right.$$

Les premières équations donnent

$$(\lambda^2 r)'(x_i^2 + y_i^2) = 0,$$

d'où

$$\lambda^2 r = \text{const.}$$

D'autre part,

$$\lambda^2 r^2 = K\frac{\psi}{\lambda}.$$

Donc,

ou bien $$r = 0,$$

ou bien $$r = K'\frac{\psi}{\lambda},$$

d'où

$$\lambda^2 r = K'\psi\lambda :$$

on a alors

$$\psi\lambda = \text{const.},\qquad \lambda = \frac{c}{\psi},$$

d'où, en vertu des équations (52) :

$$\lambda\lambda'' = \frac{cK_1}{\lambda^2}.$$

On en déduit que ψ est de la forme $\dfrac{1}{\sqrt{At^2 + Bt + C}}$.

On a les conditions de possibilité

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{j\neq i}\mu_j\frac{x_j-x_i}{r_{ij}^3}+(\mathrm{K}-\mathrm{K}_1)x_i=0,\\ &\sum_{j\neq i}\mu_j\frac{y_j-y_i}{r_{ij}^3}+(\mathrm{K}-\mathrm{K}_1)y_i=0,\\ &\sum_{j\neq i}\mu_j\frac{z_j-z_i}{r_{ij}^3}-\mathrm{K}_1 z_i=0,\end{aligned}\right.$$

d'où l'on tire

$$\sum\mu_i x_i=\sum\mu_i y_i=\sum\mu_i z_i=0,$$

sauf que $\mathrm{K}=\mathrm{K}_1$ ou $\mathrm{K}_1=0$, c'est-à-dire sauf que $\lambda\lambda''=0$ ou $\lambda\lambda''-\lambda^2r^2=0$.

Mais $\lambda\lambda''$ ne peut être nul, sans quoi on aurait

$$0=\sum_{j\neq i}\mu_j\frac{z_j-z_i}{r_{ij}^3}.$$

$\lambda\lambda''-\lambda^2r^2$ ne peut pas non plus être nul, car on aurait

$$0=\sum_{j\neq i}\mu_j\frac{x_j-x_i}{r_{ij}^3}=\sum_{j\neq i}\mu_j\frac{y_j-y_i}{r_{ij}^3}.$$

Donc on ne peut avoir $\lambda=\dfrac{c}{\psi}$ que dans un cas particulier des masses.

Pour $r=0$, on a

$$x_i\lambda\lambda''=\frac{\psi}{\lambda}\sum_{j\neq i}\mu_j\frac{x_j-x_i}{r_{ij}^3},$$

d'où

$$\lambda^2\lambda''=-\mathrm{K}^2\psi.$$

Chaque point M décrit une droite, et l'on a les conditions de possibilité

$$(\beta)\qquad \sum_{j\neq i}\mu_j\frac{x_j-x_i}{r_{ij}^3}+\mathrm{K}^2x_i=\sum_{j\neq i}\mu_j\frac{y_j-y_i}{r_{ij}^3}+\mathrm{K}^2y_i=\sum_{j\neq i}\mu_j\frac{z_j-z_i}{r_{ij}^3}+\mathrm{K}^2z_i=0.$$

En tenant compte des six relations

$$\sum \mu_i x_i = 0, \ldots\ldots,$$

$$\sum \mu_i (y_i Z_i - z_i Y_i) = 0, \ldots\ldots,$$

on a $3n - 6$ relations qui déterminent $3n - 6$ paramètres de forme (K étant donné).

On peut former les relations

$$\begin{vmatrix} y_i & z_i & 1 \\ y_j & z_j & 1 \\ y_h & z_h & 1 \end{vmatrix} (X_i - X_j) + \begin{vmatrix} z_i & x_i & 1 \\ z_j & x_j & 1 \\ z_h & x_h & 1 \end{vmatrix} (Y_i - Y_j) + \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_h & y_h & 1 \end{vmatrix} (Z_i - Z_j) = 0,$$

ou

$$\sum m_k (i, j, h, k) \left[\frac{1}{r_{ik}^3} - \frac{1}{r_{jk}^3} \right] = 0 \qquad (k \neq i, j, h),$$

ou remarquer que les équations de condition (β) expriment que la fonction

$$V = \sum \frac{\mu_i \mu_j}{r_{ij}} + \frac{K^2}{2M} \sum \mu_i \mu_j r_{ij}^2$$

satisfait aux conditions du premier ordre.

Dans le cas de quatre points, tous les r_{ij} sont égaux : les points forment un tétraèdre régulier.

CHAPITRE VIII

Le problème des trois corps traité par la méthode de Lagrange (¹).

Utilisant dans ce chapitre une méthode analogue à celle de Lagrange pour traiter le problème des trois corps, nous montrons que l'ordre du système dont dépend la recherche des distances mutuelles est en général égal à neuf, mais s'abaisse d'une unité dans le cas des masses $m_i = \mu_i \psi(t)$ ($\mu_i =$ const.) et devient égal à sept pour $\psi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{At^2 + Bt + C}}$.

52. — **Cas général.** — Soient P, P′, P″ les trois corps. Posons :

$$P'P'' = r, \qquad P''P = r', \qquad PP' = r'';$$

soient m, m', m'' les produits de leurs masses par le coefficient d'attraction,

$$M = m + m' + m''.$$

Soient encore

x, y, z	les coordonnées de	P″	par rapport à	P′	pris pour origine,
x', y', z'	—	P	—	P″	— ,
x'', y'', z''	—	P′	—	P	— ,

ces coordonnées étant comptées parallèlement à des axes fixes rectangulaires.

Posons avec Lagrange :

$$(a) \qquad \frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r''^3} = q, \qquad \frac{1}{r''^3} - \frac{1}{r^3} = q', \qquad \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3} = q'',$$

puis

$$(b) \quad -p = x'x'' + y'y'' + z'z'', \quad -p' = x''x + y''y + z''z, \quad -p'' = xx' + yy' + zz',$$

(¹) Pour le détail des démonstrations, voir Tisserand, t. I, chap. VIII.

et enfin :

$$(c) \qquad u^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2, \qquad u'^2 = \left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dt}\right)^2,$$

$$u''^2 = \left(\frac{dx''}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy''}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz''}{dt}\right)^2.$$

On démontre, comme en masses fixes, les relations

$$(53) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d^2 r^2}{dt^2} + \frac{M}{r} + m(p'q' - p''q'') - u^2 = 0, \\ &\frac{1}{2}\frac{d^2 r'^2}{dt^2} + \frac{M}{r'} + m'(p''q'' - pq) - u'^2 = 0. \\ &\frac{1}{2}\frac{d^2 r''^2}{dt^2} + \frac{M}{r''} + m''(pq - p'q') - u''^2 = 0, \end{aligned} \right.$$

qui fournissent u, u', u'' en fonction de r, r', r''. $\frac{dr}{dt}, \frac{dr'}{dt}, \frac{dr''}{dt}, \frac{d^2r}{dt^2}, \frac{d^2r'}{dt^2}, \frac{d^2r''}{dt^2}$,

puis la relation

$$(54) \qquad \begin{aligned} &(v'v'' + v''v + vv')(p'p'' + p''p + pp') - (v\Sigma + v'\Sigma' + v''\Sigma'') \\ &\qquad + \frac{1}{16}\left(\rho^2 + \frac{dp'}{dt}\frac{dp''}{dt} + \frac{dp''}{dt}\frac{dp}{dt} + \frac{dp}{dt}\frac{dp'}{dt}\right)^2 = 0, \end{aligned}$$

qui est du second ordre par rapport aux rayons vecteurs.

On a posé

$$v = \frac{u'^2 + u''^2 - u^2}{2}, \qquad v' = \frac{u''^2 + u^2 - u'^2}{2}, \qquad v'' = \frac{u^2 + u'^2 - u''^2}{2},$$

$$\begin{aligned} \rho &= \left(x'\frac{dx''}{dt} + y'\frac{dy''}{dt} + z'\frac{dz''}{dt}\right) - \left(x''\frac{dx'}{dt} + y''\frac{dy'}{dt} + z''\frac{dz'}{dt}\right) \\ &= \left(x''\frac{dx}{dt} + y''\frac{dy}{dt} + z''\frac{dz}{dt}\right) - \left(x\frac{dx''}{dt} + y\frac{dy''}{dt} + z\frac{dz''}{dt}\right) \\ &= \left(x\frac{dx'}{dt} + y\frac{dy'}{dt} + z\frac{dz'}{dt}\right) - \left(x'\frac{dx}{dt} + y'\frac{dy}{dt} + z'\frac{dz}{dt}\right), \end{aligned}$$

et enfin

$$\left\{ \begin{aligned} 4\Sigma &= \rho^2(p' + p'') + 2\rho\left(p'\frac{dp''}{dt} - p''\frac{dp'}{dt}\right) + p'\left(\frac{dp''}{dt}\right)^2 + p''\left(\frac{dp'}{dt}\right)^2 + p\left(\frac{dp'}{dt} + \frac{dp''}{dt}\right)^2, \\ 4\Sigma' &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ 4\Sigma'' &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \right.$$

On a, d'autre part

$$\frac{du^2}{dt} = -\frac{2M}{r^2}\frac{dr}{dt} + m\left(q''\frac{dp''}{dt} - q'\frac{dp'}{dt} - q\rho\right),$$

et, en vertu de (53) :

$$\frac{du^2}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d^3r^2}{dt^3} - \frac{M}{r^2}\frac{dr}{dt} + \frac{1}{r}\frac{dM}{dt} + \frac{dm}{dt}(p'q' - p''q'') + m\frac{d}{dt}(p'q' - p''q'').$$

La comparaison de ces deux expressions et des expressions analogues conduit aux formules

$$(55)\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}\frac{d^3r^2}{dt^3} + \frac{M}{r^2}\frac{dr}{dt} + \frac{1}{r}\frac{dM}{dt} + m\left[\frac{d}{dt}(p'q' - p''q'') - \left(q''\frac{dp''}{dt} - q'\frac{dp'}{dt} - q\rho\right)\right] + \frac{dm}{dt}(p'q' - p''q'') = 0,\\ \dotfill\\ \dotfill\end{array}\right.$$

Les équations (55) fournissent pour ρ trois valeurs; en les portant successivement dans (54), on obtient trois équations du troisième ordre par rapport à r, r', r''.

La recherche des distances mutuelles dans le problème des trois corps dépend donc en général d'un système d'ordre neuf.

Pour déterminer $x, y, z, x', y', z', x'', y'', z''$, partons des relations (b), (c), et

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2, \qquad r''^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2.$$

Posons

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta, \qquad \text{etc.}.$$

On a

$$\left\{\begin{array}{l}\sin\theta'\sin\theta''\cos(\varphi' - \varphi'') + \cos\theta'\cos\theta'' = -\frac{p}{r'r''},\\ \sin\theta''\sin\theta\cos(\varphi'' - \varphi) + \cos\theta''\cos\theta = -\frac{p'}{r''r},\\ \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi') + \cos\theta\cos\theta' = -\frac{p''}{rr'},\end{array}\right.$$

et

$$\left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r^2\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = u^2,\\
&\left(\frac{dr'}{dt}\right)^2 + r'^2\left(\frac{d\theta'}{dt}\right)^2 + r'^2\sin^2\theta'\left(\frac{d\varphi'}{dt}\right)^2 = u'^2,\\
&\left(\frac{dr''}{dt}\right)^2 + r''^2\left(\frac{d\theta''}{dt}\right)^2 + r''^2\sin^2\theta''\left(\frac{d\varphi''}{dt}\right)^2 = u''^2.
\end{aligned}\right.$$

Ces six relations, dont trois sont du premier ordre, nous fourniront θ, θ', θ'', φ, φ', φ''.

53. — **Cas particulier.** — Envisageons le cas particulier où les masses restent dans des rapports constants, et posons :

$$\frac{m}{\mu} = \frac{m'}{\mu'} = \frac{m''}{\mu''} = \psi(t),$$

μ, μ', μ'' étant des constantes.

Les équations du mouvement relatif sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (\mu+\mu'+\mu'')\psi\frac{x}{r^3} - \mu\psi\left(\frac{x}{r^3}+\frac{x'}{r'^3}+\frac{x''}{r''^3}\right) = 0, \;\ldots\ldots,$$

et admettent les intégrales des aires

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu}\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) + \frac{1}{\mu'}\left(y'\frac{dz'}{dt} - z'\frac{dy'}{dt}\right) + \frac{1}{\mu''}\left(y''\frac{dz''}{dt} - z''\frac{dy''}{dt}\right) = a,\\
&\frac{1}{\mu}\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = b,\\
&\frac{1}{\mu}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = c.
\end{aligned}\right.$$

On a, d'autre part

$$2\,\mathrm{S}\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = -2(\mu+\mu'+\mu'')\psi\frac{\mathrm{S}\,x\dfrac{dx}{dt}}{r^3} + 2\mu\psi\,\mathrm{S}\left(\frac{x}{r^3}+\frac{x'}{r'^3}+\frac{x''}{r''^3}\right)\frac{dx}{dt}, \;\ldots\ldots.$$

On en déduit, avec les notations précédentes, par addition membre à membre de ces relations après divisions par μ, μ', μ'' :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{u^2}{\mu}+\frac{u'^2}{\mu'}+\frac{u''^2}{\mu''}\right) = 2(\mu+\mu'+\mu'')\psi\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\mu r}+\frac{1}{\mu' r'}+\frac{1}{\mu'' r''}\right)$$
$$+\,2\psi\,\mathrm{S}\left(\frac{x}{r^3}+\frac{x'}{r'^3}+\frac{x''}{r''^3}\right)\left(\frac{dx}{dt}+\frac{dx'}{dt}+\frac{dx''}{dt}\right),$$

ou, en vertu de $x + x' + x'' = y + y' + y'' = z + z' + z'' = 0$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{u^2}{\mu} + \frac{u'^2}{\mu'} + \frac{u''^2}{\mu''}\right) = 2(\mu + \mu' + \mu'')\psi\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\mu r} + \frac{1}{\mu' r'} + \frac{1}{\mu'' r''}\right).$$

L'addition membre à membre des équations (53) donne, d'autre part

$$\frac{u^2}{\mu} + \frac{u'^2}{\mu'} + \frac{u''^2}{\mu''} = \frac{1}{2\mu}\frac{d^2 r^2}{dt^2} + \frac{1}{2\mu'}\frac{d^2 r'^2}{dt^2} + \frac{1}{2\mu''}\frac{d^2 r''^2}{dt^2} + (\mu + \mu' + \mu'')\psi\left(\frac{1}{\mu r} + \frac{1}{\mu' r'} + \frac{1}{\mu'' r''}\right).$$

Le rapprochement de ces deux équations fournit

$$(53')\qquad \begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d^3}{dt^3}\left(\frac{r^2}{\mu} + \frac{r'^2}{\mu'} + \frac{r''^2}{\mu''}\right) - (\mu + \mu' + \mu'')\psi\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\mu r} + \frac{1}{\mu' r'} + \frac{1}{\mu'' r''}\right) \\ &\qquad + (\mu + \mu' + \mu'')\psi'\left(\frac{1}{\mu r} + \frac{1}{\mu' r'} + \frac{1}{\mu'' r''}\right) = 0. \end{aligned}$$

On établit comme en masses fixes les deux équations

$$(55')\qquad \frac{d\rho}{dt} + \psi(\mu p q + \mu' p' q' + \mu'' p'' q'') = 0$$

et

$$(56)\qquad \begin{aligned} &\frac{r^2}{\mu^2}\left(u^2 - \frac{dr^2}{dt^2}\right) + \frac{r'^2}{\mu'^2}\left(u'^2 - \frac{dr'^2}{dt^2}\right) + \frac{r''^2}{\mu''^2}\left(u''^2 - \frac{dr''^2}{dt^2}\right) + \frac{2}{\mu'\mu''}\left(pv - \frac{1}{4}\frac{dp^2}{dt^2}\right) \\ &+ \frac{2}{\mu''\mu}\left(p'v' - \frac{1}{4}\frac{dp'^2}{dt^2}\right) + \frac{2}{\mu\mu'}\left(p''v'' - \frac{1}{4}\frac{dp''^2}{dt^2}\right) + \frac{\mu + \mu' + \mu''}{2\mu\mu'\mu''}\rho^2 = a^2 + b^2 + c^2. \end{aligned}$$

La recherche de r, r', r'' est ramenée à l'intégration des équations (53'), (55') et (56) : (53') et (55') sont du troisième ordre, (56) est du second ordre.

Donc, *dans le cas particulier étudié, la détermination des distances mutuelles ne dépend que d'un système du huitième ordre.*

Si l'on suppose $\psi(t) \equiv \dfrac{1}{\sqrt{At^2 + Bt + C}}$, on pourra remplacer l'équation (53') par l'équation (46) établie au chapitre VI :

$$(At^2 + Bt + C)\frac{d^2 K}{dt^2} - (2At + B)\frac{dK}{dt} + 2AK = 2U_1\sqrt{At^2 + Bt + C} + h,$$

où

$$U_1 = f\left(\frac{\mu'\mu''}{r} + \frac{\mu''\mu}{r'} + \frac{\mu\mu'}{r''}\right)$$

et

$$K = \frac{\mu'\mu''r^2 + \mu''\mu r'^2 + \mu\mu' r''^2}{\mu + \mu' + \mu''}.$$

L'ordre du système est alors abaissé d'une unité, et *réduit au septième ordre*, comme dans le cas des masses fixes.

Dans le cas particulier envisagé dans ce paragraphe, le calcul des coordonnées s'achèverait comme en masses fixes.

CHAPITRE IX

Problème des deux corps.

54. — Forme canonique des équations. — En désignant par O et M les deux points, O étant pris pour origine des coordonnées, les équations du mouvement relatif de M par rapport à O sont :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\psi(t)\frac{x}{r^3}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\psi(t)\frac{y}{r^3}. \end{aligned}\right.$$

Désignons par r et v les coordonnées polaires, par f le double de la vitesse aréolaire de M, et soit

$$\rho = \frac{dr}{dt}.$$

Posons

$$U = \frac{\psi(t)}{r}, \qquad U' = -U + \frac{\rho^2}{2} + \frac{f^2}{2r^2}.$$

On a

$$\rho = \frac{dr}{dt} = \frac{\partial U'}{\partial \rho},$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{f}{r^2},$$

ou

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial U'}{\partial f}.$$

D'autre part, on a $\qquad r^2 = x^2 + y^2,$

d'où

$$r\frac{d^2r}{dt^2} = -\psi\frac{x\cos v + y\sin v}{r^2} + r^2\left(\frac{dv}{dt}\right)^2.$$

Or

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d\rho}{dt}.$$

Donc

$$r\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\psi}{r} + r^2\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = -\frac{\psi}{r} + \frac{f^2}{r^2},$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\psi}{r^2} + \frac{f^2}{r^3} = -\frac{\partial U'}{\partial r}.$$

Enfin, la combinaison

$$\frac{d}{dt}\left(y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt}\right) = 0,$$

montre que l'on a

$$\frac{df}{dt} = 0 = -\frac{\partial U'}{\partial v}.$$

Nous pourrons donc écrire les équations sous la forme canonique

$$(57)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{\partial U'}{\partial \rho}, \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial U'}{\partial f}, \\ \frac{d\rho}{dt} &= -\frac{\partial U'}{\partial r}, \\ \frac{df}{dt} &= -\frac{\partial U'}{\partial v}. \end{aligned}\right.$$

55. — Intégration des équations. — Posons

$$U'' = \frac{\rho^2}{2} + \frac{f^2}{2r^2}.$$

Les équations (57) s'écriront

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial(U'' - U)}{\partial \rho}, \text{ etc.}.$$

Intégrons le système

$$(58) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{\partial U''}{\partial \rho}, \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial U''}{\partial f}, \\ \frac{d\rho}{dt} &= -\frac{\partial U''}{\partial r}, \\ \frac{df}{dt} &= -\frac{\partial U''}{\partial v}. \end{aligned} \right.$$

L'équation de Jacobi correspondante est

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial v}\right)^2 = 0.$$

Cette équation ne contenant explicitement ni t, ni v, posons

$$S = \alpha v - \frac{\beta^2}{2} t + S_1(r),$$

α et β étant deux constantes.

Il viendra alors

$$-\beta^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial r}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{r^2} = 0.$$

On en déduit facilement

$$S_1 = \sqrt{\beta^2 r^2 - \alpha^2} - \alpha \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{\beta^2 r^2 - \alpha^2}}{\alpha},$$

d'où

$$S = \alpha v - \frac{\beta^2}{2} t + \sqrt{\beta^2 r^2 - \alpha^2} - \alpha \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{\beta^2 r^2 - \alpha^2}}{\alpha}.$$

En désignant par γ et δ deux nouvelles constantes arbitraires, l'intégrale générale de (58) est donnée par

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \alpha} &= \gamma, \\ \frac{\partial S}{\partial \beta} &= \delta, \\ \frac{\partial S}{\partial r} &= \rho, \\ \frac{\partial S}{\partial v} &= f. \end{aligned} \right.$$

Développons ces équations. Il vient après simplifications :

$$\left\{\begin{aligned}
&v - \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{\beta^2 r^2 - \alpha^2}}{\alpha} = \gamma,\\
&-\beta t + \frac{\sqrt{\beta^2 r^2 - \alpha^2}}{\beta} = \delta,\\
&\frac{\sqrt{\beta^2 r^2 - \alpha^2}}{r} = \rho,\\
&\alpha = f.
\end{aligned}\right.$$

On en tire

$$(59)\qquad \left\{\begin{aligned}
&r^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2(\beta t + \delta)^2}{\beta^2},\\
&v = \gamma + \operatorname{arc\,tg} \frac{\beta(\beta t + \delta)}{\alpha},\\
&\rho = \frac{\beta^2(\beta t + \delta)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2(\beta t + \delta)^2}},\\
&f = \alpha.
\end{aligned}\right.$$

Nous allons maintenant intégrer le système (57) par la méthode de la variation des constantes. Nous prendrons les formules (59) en définissant α, β, γ, δ par les équations

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial U}{\partial \gamma},\\
&\frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial U}{\partial \delta},\\
&\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \alpha},\\
&\frac{d\delta}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \beta},
\end{aligned}\right.$$

ou

$$(60)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d\alpha}{dt} = 0,\\
&\frac{d\beta}{dt} = -\psi \frac{\beta^3(\beta t + \delta)}{[\alpha^2 + \beta^2(\beta t + \delta)^2]^{\frac{3}{2}}},\\
&\frac{d\gamma}{dt} = \psi \frac{\alpha\beta}{[\alpha^2 + \beta^2(\beta t + \delta)^2]^{\frac{3}{2}}},\\
&\frac{d\delta}{dt} = \psi \frac{\beta^3 t(\beta t + \delta) - \alpha^2}{[\alpha^2 + \beta^2(\beta t + \delta)^2]^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}\right.$$

α étant constant, nous devrons résoudre la seconde et la quatrième équations en β et δ, puis une quadrature nous fournira γ.

56. — Interprétation des formules (59). — Les formules (59) représentent le mouvement d'un point libre.

Or l'équation polaire d'une droite est

$$r\cos(v-\theta)=p$$

(v, angle polaire, θ, angle avec l'axe polaire de la direction perpendiculaire à la droite, p, distance de l'origine à la droite).

Les formules (59) donnent

$$\operatorname{tg}(v-\gamma)=\frac{\beta(\beta t+\delta)}{\alpha},$$

d'où

$$\frac{1}{\sin^2(v-\gamma)}=\frac{\alpha^2+\beta^2(\beta t+\delta)^2}{\beta^2(\beta t+\delta)^2},$$

d'où

$$r^2=\frac{(\beta t+\delta)^2}{\sin^2(v-\gamma)}=\frac{\alpha^2}{\beta^2}\frac{1}{\cos^2(v-\gamma)}.$$

On a donc

$$r\cos(v-\gamma)=\frac{\alpha}{\beta}.$$

γ représente donc l'angle θ, $\frac{\alpha}{\beta}$ est la distance p de l'origine à la droite.

La droite est parcourue avec une vitesse dont le carré est

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{f^2}{r^2}=\rho^2+\frac{f^2}{r^2}=\beta^2.$$

δ est évidemment lié à l'origine prise pour le temps.

57. — Remarques. — Mettons de côté le cas où l'on aurait $\alpha=0$. Dans ce cas, en effet, on aurait $\gamma=c^{te}$ et $v=c^{te}$: le mouvement se ferait sur une droite passant par l'origine.

La première équation (59) montre que l'on ne peut avoir pour aucune valeur finie du temps $\beta=0$. Donc β garde un signe constant pendant tout le mouvement.

L'équation (60) relative à γ montre alors que $\frac{d\gamma}{dt}$ a un signe constant, donc que γ varie toujours dans le même sens.

58. — Cas particulier : $\psi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{At^2 + Bt + C}}$. — Prenons comme variables

$$\xi = x\psi, \qquad \eta = y\psi,$$

d'où

$$\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = r\psi,$$

et τ défini par

$$\frac{d\tau}{dt} = \psi^2.$$

Les équations du mouvement deviennent

$$(61) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \frac{\xi}{\rho^3} - \frac{\Delta}{4}\xi = 0, \\ &\frac{d^2\eta}{d\tau^2} + \frac{\eta}{\rho^3} - \frac{\Delta}{4}\eta = 0, \end{aligned} \right. \qquad (\Delta = B^2 - 4AC).$$

Soit θ l'angle polaire dans le plan (ξ, η). La combinaison des forces vives et la combinaison des aires donnent des intégrales que l'on peut écrire

$$\left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{d\rho}{d\tau}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{\rho} - \frac{\Delta}{8}\rho^2 = h, \\ &\rho^2\frac{d\theta}{dt} = c. \end{aligned} \right.$$

L'élimination de θ donne

$$\left(\frac{d\rho}{d\tau}\right)^2 = \frac{\frac{\Delta}{8}\rho^4 + h\rho^2 + \rho - c^2}{\rho^2}.$$

On en tire

$$d\tau = \frac{\pm \rho\, d\rho}{\sqrt{\frac{\Delta}{8}\rho^4 + h\rho^2 + \rho - c^2}}.$$

Le problème est donc ramené aux quadratures, l'intégration se faisant en général par les fonctions elliptiques.

Bornons-nous au cas particulier simple où $\Delta = 0$.

Les équations (61) se réduisent alors à

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \frac{\xi}{\rho^3} = \frac{d^2\eta}{d\tau^2} + \frac{\eta}{\rho^3} = 0,$$

et représentent les équations du problème des deux corps à masses fixes.

Supposons par exemple que le mouvement du point (ξ, η) soit elliptique. On aura alors

$$\left\{\begin{aligned} \rho &= a(1 - e\cos u), \\ \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{u}{2}, \\ u - e\sin u &= \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}}(\tau - \tau_0), \end{aligned}\right.$$

a et e étant des constantes qui remplacent h et c.

Si l'on remarque que l'on a

$$\frac{x}{\xi} = \frac{y}{\eta} = \frac{r}{\rho},$$

de sorte que les angles polaires dans les deux plans (x, y) et (ξ, η) sont les mêmes, en vertu de

$$\frac{d\tau}{dt} = \psi^2 = \frac{1}{A\left(t + \frac{B}{2A}\right)^2} \qquad (A > 0),$$

d'où l'on tire

$$\tau = -\frac{1}{A\left(t + \frac{B}{2A}\right)},$$

les formules précédentes donnent

$$\left\{\begin{aligned} r &= \frac{a(1 - e\cos u)}{\psi}, \\ \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{u}{2}, \\ u - e\sin u &= \frac{1}{Aa^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{1}{t_0 + \frac{B}{2A}} - \frac{1}{t + \frac{B}{2A}}\right). \end{aligned}\right.$$

Éliminons t. On a

$$\frac{1}{t + \frac{B}{2A}} = A\alpha - Aa^{\frac{3}{2}}(u - e\sin u),$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{A\left(t_0 + \frac{B}{2A}\right)}.$$

Donc

$$r = a(1 - e\cos u)\frac{\sqrt{A}}{A\alpha - Aa^{\frac{3}{2}}(u - e\sin u)}.$$

La forme de la trajectoire est donnée par les deux relations

$$\left\{\begin{aligned} r &= \frac{a(1 - e\cos u)}{\sqrt{A}\left[\alpha - a^{\frac{3}{2}}(u - e\sin u)\right]},\\ \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{u}{2},\end{aligned}\right.$$

qui fournissent r et θ en fonction d'un paramètre u.

La forme de la courbe se déduit d'ailleurs d'une façon immédiate du fait que la courbe (ρ, θ) est une conique et que

$$r = \sqrt{A}\,\rho\left(t + \frac{B}{2A}\right).$$

On ne peut évidemment envisager que les valeurs de $t \geqslant -\frac{B}{2A}$.

Lorsque t varie entre $-\frac{B}{2A}$ et $+\infty$, τ varie entre $-\infty$ et zéro.

a) Si le point (ξ, η) décrit une ellipse, il la décrit donc une infinité de fois et s'arrête en un point de cette ellipse (ρ_0, θ_0) correspondant à $\tau = 0$. Lorsque τ tend vers $-\infty$, $\frac{\rho}{\tau}$ tend vers 0, r tend vers 0.

La trajectoire du point (x, y) s'enroule autour de l'origine et a une asymptote parallèle à la droite $\theta = \theta_0$.

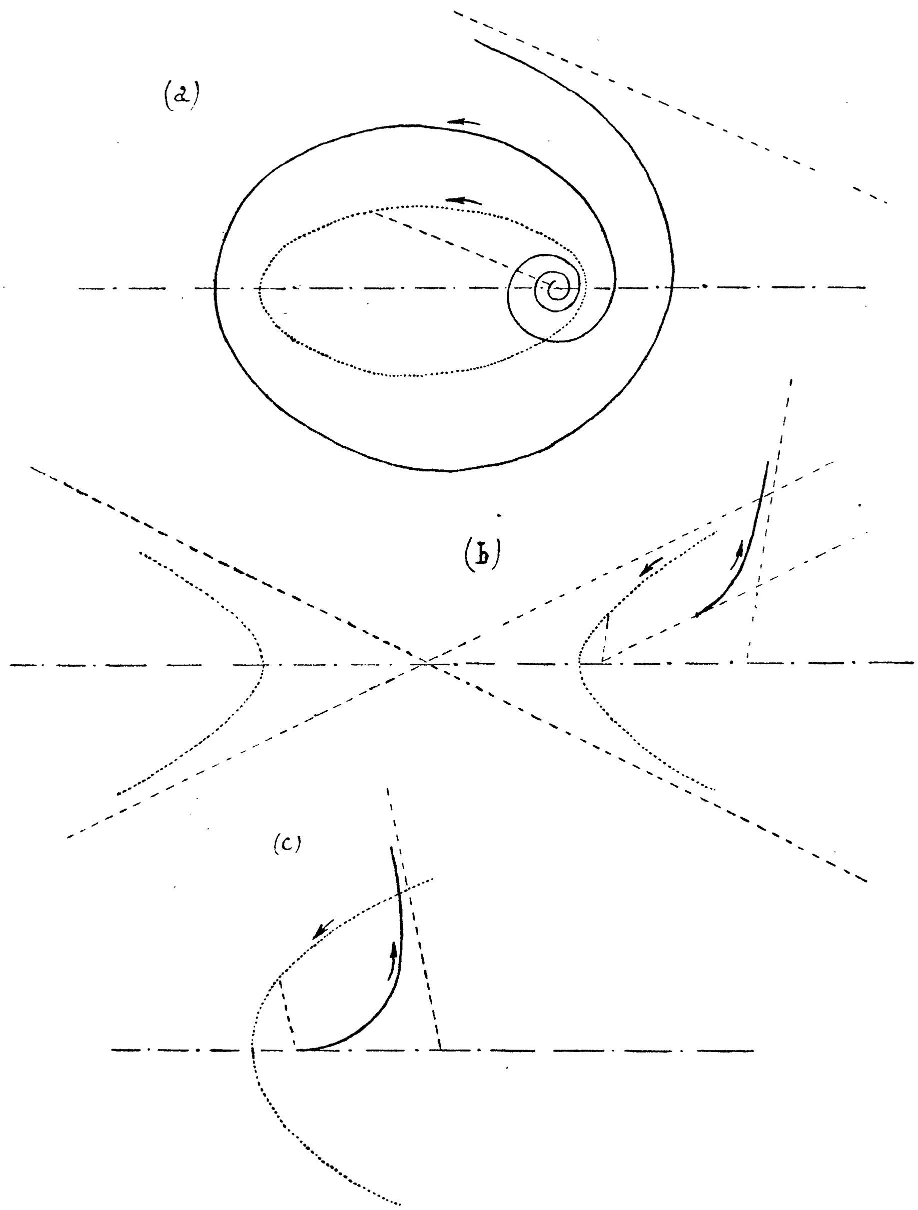
b) Si le point (ξ, η) a une trajectoire hyperbolique, il vient de l'infini et parcourt une portion seulement d'une des branches de l'hyperbole, s'arrêtant au point (ρ_0, θ_0). h est > 0, $\frac{d\rho}{d\tau}$ tend vers $-\sqrt{h}$ pour $\tau = -\infty$; $\frac{\rho}{\tau}$ tend également vers $-\sqrt{h}$, donc r tend vers une valeur finie.

On en déduit que le point (x, y) décrit une courbe ayant une asymptote parallèle à la droite $\theta = \theta_0$ et tend vers un point à distance finie sur la droite menée par l'origine parallèlement à l'asymptote utile.

c) Résultat analogue au précédent dans le cas du mouvement parabolique du point (ξ, η). $\frac{\rho}{\tau}$ tend vers 0 pour $\tau = -\infty$; donc le point (x, y) tend vers l'origine avec une tangente confondue avec l'axe de la parabole.

On a représenté en pointillés sur les figures suivantes la trajectoire du point (ξ, η) et en traits pleins celle du point (x, y).

Les flèches indiquent le sens du parcours des courbes.



59. — **Application.** — Supposons que les masses des deux corps soient de la forme

$$m_1 = (\alpha_1 t + \beta_1)\psi(t), \qquad m_2 = (\alpha_2 t + \beta_2)\psi(t),$$

avec

$$\psi(t) = \frac{1}{[(\alpha_1 + \alpha_2)t + (\beta_1 + \beta_2)]\sqrt{At^2 + Bt + C}}.$$

On a trois intégrales telles que

$$(\alpha_1 t + \beta_1)\frac{dx_1}{dt} + (\alpha_2 t + \beta_2)\frac{dx_2}{dt} - \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 = c^{te},$$

que l'on peut écrire

$$[(\alpha_1 + \alpha_2)t + (\beta_1 + \beta_2)]\frac{dx_1}{dt} - (\alpha_1 + \alpha_2)x_1 = (\alpha_2 t + \beta_2)\frac{d(x_2 - x_1)}{dt} + \alpha_2(x_2 - x_1) + c^{te},$$

ou

$$(ct + d)\frac{dx_1}{dt} - cx_1 = f(t),$$

$f(t)$ étant une fonction connue de t, puisque $m_1 + m_2 = \dfrac{1}{\sqrt{At^2 + Bt + C}}$.

L'équation précédente donne

$$x_1 = (ct + d)\int \frac{f(t)\,dt}{(ct + d)^2},$$

et de même pour y_1 et z_1.

Le mouvement relatif d'un corps par rapport à l'autre et le mouvement d'entraînement du système sont donc ramenés l'un et l'autre aux quadratures.

CHAPITRE X

Problème des trois corps.

60. — Équations du mouvement rapporté à des axes particuliers. — Il nous sera utile d'avoir les équations des mouvements des corps rapportés à des axes particuliers.

Considérons les corps $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n$, de coordonnées absolues (ξ_0, η_0, ζ_0), $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1), \ldots, (\xi_n, \eta_n, \zeta_n)$.

Soient

$$\begin{array}{llll} G_1 & \text{le centre de gravité de} & M_0 & \text{et} \quad M_1, \\ G_2 & \quad — & G_1 & \text{et} \quad M_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ G_n = G & \quad — & G_{n-1} & \text{et} \quad M_n, \end{array}$$

et soient $X_1, X_2, \ldots, X_n = X$, etc., leurs coordonnées.

Soient :

$$\begin{array}{lllll} x_1, y_1, z_1 & \text{les coordonnées de} & M_1 & \text{par rapport à} & M_0, \\ x_2, y_2, z_2 & \quad — & M_2 & \quad — & G_1, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n, y_n, z_n & \quad — & M_n & \quad — & G_{n-1}. \end{array}$$

Posons

$$m_0 + m_1 + \ldots + m_i = \nu_i, \qquad m_0 + m_1 \ldots + m_n = \nu_n = M.$$

On a les relations

$$\left\{ \begin{aligned} \xi_n &= X + \nu_{n-1} \frac{x_n}{\nu_n}, \\ \xi_{n-1} &= X - m_n \frac{x_n}{\nu_n} + \nu_{n-2} \frac{x_{n-1}}{\nu_{n-1}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_1 &= X - m_n \frac{x_n}{\nu_n} - m_{n-1} \frac{x_{n-1}}{\nu_{n-1}} \ldots - m_2 \frac{x_2}{\nu_2} + \nu_0 \frac{x_1}{\nu_1}, \\ \xi_0 &= X - m_n \frac{x_n}{\nu_n} - m_{n-1} \frac{x_{n-1}}{\nu_{n-1}} \ldots - m_2 \frac{x_2}{\nu_2} - m_1 \frac{x_1}{\nu_1}, \end{aligned} \right.$$

qui sont de la forme

$$\left\{\begin{array}{l} \xi_0 = X + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + \ldots + a_{0n}x_n, \\ \xi_1 = X + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_n = X + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{array}\right.$$

avec

$$\left\{\begin{array}{ll} a_{ij} = -\dfrac{m_j}{\nu_j} & \text{pour } i < j, \\ a_{ij} = 0 & \text{pour } i > j, \\ a_{ii} = \dfrac{\nu_{i-1}}{\nu_i}. \end{array}\right.$$

On a les relations

$$\sum_{i=0}^{n} m_i a_{ij} = 0, \qquad \sum_{i=0}^{n} m_i a_{ij} a_{ik} = 0 \quad \text{pour } j \neq k, \qquad \sum_{i=0}^{n} m_i a_{ij}^2 = \frac{\nu_{j-1}}{\nu_j} m_j.$$

On en déduit

$$\sum_{i=0}^{n} m_i \xi_i^2 = \nu_n X^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\nu_{i-1}}{\nu_i} m_i x_i^2,$$

et les formules analogues.

Ces relations sont valables, quelle que soit la forme des masses. Plaçons-nous maintenant dans le cas particulier des masses

$$m_i = \mu_i \psi(t), \qquad (\mu_i = \text{const.}).$$

Les a_{ij} sont alors des constantes, et l'on a entre les dérivées $\dfrac{dX}{dt}, \dfrac{d\xi_i}{dt}, \dfrac{dx_i}{dt}$ des relations de même forme. On en déduit

$$\sum_{i=0}^{n} m_i \xi_i'^2 = \nu_n X'^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\nu_{i-1}}{\nu_i} m_i x_i'^2,$$

d'où

$$\sum_{i=0}^{n} \mu_i \xi_i'^2 = X'^2 \sum_{i=0}^{n} \mu_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\sum\limits_{k=0}^{i-1} \mu_{k-1}}{\sum\limits_{k=0}^{i} \mu_k} \mu_i x_i'^2, \qquad \text{etc.},$$

d'où

$$2T_1 = \frac{2T}{\psi} = \sum_{i=0}^{n} \mu_i \left[\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{dt}\right)^2\right] + \sum_{i=1}^{n} \frac{\sum\limits_{k=0}^{i-1} \mu_{k-1}}{\sum\limits_{k=0}^{i} \mu_k} \mu_i \left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right].$$

61. — Supposant toujours $m_i = \mu_i \psi(t)$, les équations du mouvement rapporté à des axes fixes peuvent s'écrire

$$\mu_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \psi(t) \frac{\partial U_1}{\partial x_i}, \quad \ldots\ldots,$$

ou

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial x_i'}\right) - \psi \frac{\partial U_1}{\partial x_i} = 0, \quad \ldots\ldots,$$

U_1 et $2T_1$ ayant la même signification qu'au chapitre VI.

Faisons un changement de variables défini par

$$\xi_k = \sum_i b_{ki} x_i, \qquad \eta_k = \sum_i c_{ki} y_i, \qquad \zeta_k = \sum_i d_{ki} z_i,$$

les b, c, d étant des constantes.

On en tire

$$\xi_k' = \sum_i b_{ki} x_i', \quad \ldots\ldots,$$

d'où

$$\frac{\partial T_1}{\partial x_i'} = \sum_k \frac{\partial T_1}{\partial \xi_k'} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i'} = \sum_k b_{ki} \frac{\partial T_1}{\partial \xi_k'}, \quad \ldots\ldots$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_i} = \sum_k \frac{\partial U_1}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} = \sum_k b_{ki} \frac{\partial U_1}{\partial \xi_k}, \quad \ldots\ldots$$

Les équations du mouvement peuvent donc s'écrire

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_k b_{ki}\frac{\partial T_1}{\partial \xi'_k}\right) - \psi\sum_k b_{ki}\frac{\partial U_1}{\partial \xi_k} = 0, \;\ldots.$$

ou

$$\sum_k b_{ki}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial \xi'_k}\right) - \psi\frac{\partial U_1}{\partial \xi_k}\right] = 0, \;\ldots\ldots$$

Supposant le déterminant des b_{ki} différent de 0, ainsi que ceux des c_{ki} et des d_{ki}, on en tire les équations

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial \xi'_k}\right) - \psi\frac{\partial U_1}{\partial \xi_k} = 0,$$

et les analogues.

62. — Appliquons au cas de $n+1$ corps $M_0, M_1, \ldots. M_n$ de masses respectives $\mu_i\psi(t)$, et posons

$$\nu_i = \mu_0 + \mu_1 + \ldots + \mu_i, \qquad \nu_n = \mu_0 + \mu_1 + \ldots + \mu_n.$$

On a, d'après le paragraphe 60 :

$$2T_1 = \nu_n(X'^2 + Y'^2 + Z'^2) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\nu_{i-1}}{\nu_i}\mu_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2).$$

U_1 ne dépend que des différences $x_i - x.$, ..., donc ne dépendra pas de X après le changement de variables. On a donc : $\frac{\partial U_1}{\partial X} = 0$, d'où l'équation de Lagrange relative à X :

$$\frac{d}{dt}(\nu_n X') = 0,$$

d'où

$$X' = c^{te}.$$

On obtient ainsi les équations du centre de gravité.

On a, d'autre part

$$\frac{\partial T_1}{\partial x'_i} = \frac{\nu_{i-1}}{\nu_i}\mu_i x'_i, \qquad \text{etc.}.$$

On a donc les équations

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\nu_{i-1}}{\nu_i}\mu_i\dfrac{d^2x_i}{dt^2} = \psi\dfrac{\partial U_1}{\partial x_i}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

On a

$$U_1 = f\mu_0\left(\frac{\mu_1}{\Delta_{0,1}} + \frac{\mu_2}{\Delta_{0,2}} + \dots\right) + f\mu_1\left(\frac{\mu_2}{\Delta_{1,2}} + \frac{\mu_3}{\Delta_{1,3}} + \dots\right) + \dots\dots$$

avec

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta_{0,1}^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \\ \Delta_{0,2}^2 = S\left(x_2 + \dfrac{\mu_1}{\nu_1}x_1\right)^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

On a ainsi un système de $3n$ équations différentielles du second ordre, qui admet les intégrales premières

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\nu_{i-1}}{\nu_i}\mu_i\left(y_i\frac{dz_i}{dt} - z_i\frac{dy_i}{dt}\right) = \text{const.}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

63. — Problème des trois corps. — Envisageons le cas de trois corps.

Les équations du mouvement peuvent se mettre sous la forme canonique avec neuf degrés de liberté; il résulte des recherches de Poincaré (¹) que l'on peut ramener le système à quatre degrés de liberté. C'est cette réduction que nous allons effectuer en suivant Tisserand (²), méthode qui généralise celle indiquée dans le chapitre précédent pour le cas de deux corps.

Soient trois corps S, M, M', de masses $\psi(t)$, $\mu\psi(t)$ et $\mu'\psi(t)$,
G le centre de gravité de S et M, $SM = r$, $GM' = r'$,
X, Y, Z, X', Y', Z' les projections de r et r' sur trois axes fixes.

(¹) *Les méthodes nouvelles*, t. I, p. 33.
(²) *Mécanique céleste*, t. IV, chap. XXVI.

Posons

$$\nu = \frac{\mu}{1+\mu}, \qquad \nu' = \frac{(1+\mu)\mu'}{1+\mu+\mu'}.$$

On a les équations différentielles suivantes :

$$(62) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \nu \dfrac{d^2X}{dt^2} = \psi \dfrac{\partial U_1}{\partial X}, & \nu' \dfrac{d^2X'}{dt^2} = \psi \dfrac{\partial U_1}{\partial X'}, \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \end{array} \right.$$

avec

$$(63) \quad \left\{ \begin{array}{l} r^2 = X^2 + Y^2 + Z^2, \qquad r'^2 = X'^2 + Y'^2 + Z'^2, \\ R = SM = r, \qquad R' = SM', \qquad \Delta = MM', \\ R'^2 = r'^2 + \dfrac{2\mu}{1+\mu}(XX' + YY' + ZZ') + \left(\dfrac{\mu r}{1+\mu}\right)^2, \\ \Delta^2 = r'^2 - \dfrac{2}{1+\mu}(XX' + YY' + ZZ') + \left(\dfrac{r}{1+\mu}\right)^2, \\ U_1 = \dfrac{\mu}{R} + \dfrac{\mu'}{R'} + \dfrac{\mu\mu'}{\Delta}, \end{array} \right.$$

(f est pris égal à l'unité).

Quand on aura intégré le système (62), les coordonnées $\xi, \dots, \xi', \dots$ de M et M' rapportés à des axes parallèles aux axes fixes et se coupant en S, seront

$$\xi = X, \dots\dots$$

$$\xi' = X' + \frac{\mu}{1+\mu} X, \dots\dots$$

Les équations (62) admettent les intégrales des aires :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu\left(Y\dfrac{dZ}{dt} - Z\dfrac{dY}{dt}\right) + \nu'\left(Y'\dfrac{dZ'}{dt} - Z'\dfrac{dY'}{dt}\right) = C_1, \\ \nu\left(Z\dfrac{dX}{dt} - X\dfrac{dZ}{dt}\right) + \nu'\left(Z'\dfrac{dX'}{dt} - X'\dfrac{dZ'}{dt}\right) = C_2, \\ \nu\left(X\dfrac{dY}{dt} - Y\dfrac{dX}{dt}\right) + \nu'\left(X'\dfrac{dY'}{dt} - Y'\dfrac{dX'}{dt}\right) = C_3. \end{array} \right.$$

Changeons d'axes de coordonnées et prenons Ox, Oy, Oz, Ox étant dans le plan

XOY. Soient N la longitude du nœud ascendant du plan xy par rapport à XY, J l'angle de ces deux plans. Nous aurons

$$(\alpha)\quad \left\{\begin{aligned} X &= x\cos N - y\cos J\sin N + z\sin J\sin N,\\ Y &= x\sin N + y\cos J\cos N - z\sin J\cos N,\\ Z &= \phantom{x\sin N +{}} y\sin J + z\cos J , \end{aligned}\right.$$

et de même pour X′, Y′, Z′.

Si l'on détermine J et N par les relations

$$\sin J = \frac{\sqrt{C_1^2 + C_1'^2}}{\sqrt{C_1^2 + C_1'^2 + C_1''^2}}, \qquad \cos J = \frac{C_1''}{\sqrt{C_1^2 + C_1'^2 + C_1''^2}},$$

$$\sin N = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_1'^2}}, \qquad \cos N = \frac{C_1'}{\sqrt{C_1^2 + C_1'^2}},$$

et si l'on pose
$$C = \sqrt{C_1^2 + C_1'^2 + C_1''^2},$$

on trouve que les intégrales des aires deviennent :

$$(64)\quad \left\{\begin{aligned} &\nu\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) + \nu'\left(x'\frac{dy'}{dt} - y'\frac{dx'}{dt}\right) = C,\\ &\nu\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) + \nu'\left(y'\frac{dz'}{dt} - z'\frac{dy'}{dt}\right) = 0,\\ &\nu\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) + \nu'\left(z'\frac{dx'}{dt} - x'\frac{dz'}{dt}\right) = 0. \end{aligned}\right.$$

(62) et (63) donnent

$$(62')\quad \left\{\begin{array}{ll} \nu\dfrac{d^2x}{dt^2} = \psi\dfrac{\partial U_1}{\partial x}, & \nu'\dfrac{d^2x'}{dt^2} = \psi\dfrac{\partial U_1}{\partial x'},\\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

$$(63')\quad \left\{\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 + z^2, \qquad r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2, \qquad R = r,\\ R'^2 &= r'^2 + \frac{2\mu}{1+\mu}(xx' + yy' + zz') + \left(\frac{\mu r}{1+\mu}\right)^2,\\ \Delta^2 &= r'^2 - \frac{2}{1+\mu}(xx' + yy' + zz') + \left(\frac{r}{1+\mu}\right)^2,\\ U_1 &= \frac{\mu}{R} + \frac{\mu'}{R'} + \frac{\mu\mu'}{\Delta}, \end{aligned}\right.$$

les constantes arbitraires C_1, C_1', C_1'', étant remplacées par C, J, N.

Le nouveau plan fixe des xy est le plan invariable du système composé des deux points M et M′ de masses ν et ν' et de coordonnées x, y, z et x', y', z'.

Nous appellerons plan de l'orbite de M à l'époque t le plan qui passe par l'origine, la position et la vitesse de M au même instant, et de même pour M′. Soient

i et i' les angles formés à l'époque t par les plans des deux orbites avec le plan des xy;

h et h' les longitudes de leurs nœuds ascendants sur le plan des xy, comptées à partir de Ox;

f et f' les doubles des vitesses aréolaires des rayons r et r'.

Les équations (64) pourront s'écrire

$$\left\{\begin{aligned} &\mu f \cos i + \mu' f' \cos i' = C,\\ &\mu f \sin i \sin h + \mu' f' \sin i' \sin h' = 0,\\ &\mu f \sin i \cos h + \mu' f' \sin i' \cos h' = 0.\end{aligned}\right.$$

On en conclut $h' = h + 180°$, $\mu f \sin i = \mu' f' \sin i'$.

C'est la généralisation du résultat de Jacobi :

Les deux orbites coupent le plan invariable suivant la même droite.

Soit I l'inclinaison mutuelle des deux orbites, on aura les formules

$$(65)\quad \left\{\begin{aligned} &I = i + i', && \cos I = \frac{C^2 - \nu^2 f^2 - \nu'^2 f'^2}{2\nu\nu' f f'},\\ &\cos i = \frac{\nu f + \nu' f' \cos I}{C}, && \cos i' = \frac{\nu' f' + \nu f \cos I}{C},\\ &\sin i = \frac{\nu' f'}{C}\sin I, && \sin i' = \frac{\nu f}{C}\sin I.\end{aligned}\right.$$

Soient v et v' les distances angulaires de M et M′ aux nœuds ascendants de leurs orbites sur le plan invariable, V l'angle MOM′ des deux rayons vecteurs r et r', on aura

$$(66)\qquad xx' + yy' + zz' = rr' \cos V.$$

Le triangle sphérique MM′J donne

$$(67)\qquad \cos V = -\cos v \cos v' - \sin v \sin v' \cos I.$$

En ayant égard à (63), (65), (66) et (67), on voit que U_1 dépend de r, r', v, v', f et f', les quantités i, i', h et h' ne figurent plus dans U_1.

Posons alors

$$\left\{\begin{aligned}
&\rho_1 = \nu \frac{dr}{dt}, && \rho'_1 = \nu' \frac{dr'}{dt},\\
&f_1 = \nu f, && f'_1 = \nu' f',\\
&\mathrm{H} = -\psi \mathrm{U}_1 + \frac{\rho_1^2}{2\nu} + \frac{\rho_1'^2}{2\nu'} + \frac{f_1^2}{2\nu r^2} + \frac{f_1'^2}{2\nu' r'^2}.
\end{aligned}\right.$$

On obtient les équations

$$(68)\qquad \begin{aligned}
&\frac{dr}{\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \rho_1}} = \frac{dv}{\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial f_1}} = -\frac{d\rho_1}{\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial r}} = -\frac{df_1}{\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial v}}\\
&= \frac{dr'}{\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \rho'_1}} = \frac{dv'}{\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial f'_1}} = -\frac{d\rho'_1}{\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial r'}} = -\frac{df'_1}{\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial v'}} = dt.
\end{aligned}$$

Intégrons d'abord le système obtenu en remplaçant H par

$$\mathrm{K} = \frac{\rho_1^2}{2\nu} + \frac{\rho_1'^2}{2\nu'} + \frac{f_1^2}{2\nu r^2} + \frac{f_1'^2}{2\nu' r'^2}.$$

$$\frac{dr}{\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial \rho_1}} = \ldots\ldots\ldots\ldots = -\frac{df'_1}{\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial v'}} = dt.$$

Utilisant la méthode de Jacobi, nous chercherons une intégrale complète de l'équation

$$\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial t} + \frac{1}{2\nu}\left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2\nu'}\left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial r'}\right)^2 + \frac{1}{2\nu r^2}\left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial v}\right)^2 + \frac{1}{2\nu' r'^2}\left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial v'}\right)^2 = 0.$$

Posons

$$\mathrm{S} = \alpha_1 v + \alpha'_1 v' + (\alpha_2 + \alpha'_2)t + \mathrm{S}_1(r) + \mathrm{S}_2(r')$$

et

$$\left\{\begin{aligned}
&\alpha_2 + \frac{1}{2\nu}\left(\frac{\partial \mathrm{S}_1}{\partial r}\right)^2 + \frac{\alpha_1^2}{2\nu r^2} = 0,\\
&\alpha'_2 + \frac{1}{2\nu'}\left(\frac{\partial \mathrm{S}_2}{\partial r'}\right)^2 + \frac{\alpha_1'^2}{2\nu' r'^2} = 0.
\end{aligned}\right.$$

On en tire

$$\left\{\begin{aligned} S_1 &= \int \frac{\sqrt{-(2\nu\alpha_2 r^2+\alpha_1^2)}}{r}\,dr,\\ S_2 &= \int \frac{\sqrt{-(2\nu'\alpha_2' r'^2+\alpha_1'^2)}}{r'}\,dr'. \end{aligned}\right.$$

On a donc

$$S = \alpha_1 v + \alpha_1' v' + (\alpha_2+\alpha_2')t + \int \frac{\sqrt{-(2\nu\alpha_2 r^2+\alpha_1^2)}}{r}\,dr + \int \frac{\sqrt{-(2\nu'\alpha_2' r'^2+\alpha_1'^2)}}{r'}\,dr'.$$

Soient β_1 et β_2 deux nouvelles constantes arbitraires. Nous poserons

$$\left\{\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{\sqrt{-(2\nu\alpha_2 r^2+\alpha_1^2)}}{r},\\ f_1 &= \alpha_1 = \mathrm{c^{te}},\\ \beta_1 &= v - \int \frac{\alpha_1\,dr}{r\sqrt{-(2\nu\alpha_2 r^2+\alpha_1^2)}},\\ \beta_2 &= t - \int \frac{\nu r\,dr}{\sqrt{-(2\nu\alpha_2 r^2+\alpha_1^2)}}, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \rho_1' &= \frac{\sqrt{-(2\nu'\alpha_2' r'^2+\alpha_1'^2)}}{r'},\\ f_1' &= \alpha_1' = \mathrm{c^{te}},\\ \beta_1' &= v' - \int \frac{\alpha_1'\,dr'}{r'\sqrt{-(2\nu'\alpha_2' r'^2+\alpha_1'^2)}},\\ \beta_2' &= t - \int \frac{\nu' r'\,dr'}{\sqrt{-(2\nu'\alpha_2' r'^2+\alpha_1'^2)}}. \end{aligned}\right.$$

En effectuant les intégrations, on trouve

$$(69)\quad \left\{\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{\sqrt{-(2\nu\alpha_2 r^2+\alpha_1^2)}}{r},\\ f_1 &= \alpha_1,\\ \beta_1 &= v - \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{-(2\nu\alpha_2 r^2+\alpha_1^2)}}{\alpha_1},\\ \beta_2 &= t + \frac{\sqrt{-(2\nu\alpha_2 r^2+\alpha_1^2)}}{\alpha_2}, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \rho_1' &= \frac{\sqrt{-(2\nu'\alpha_2' r'^2+\alpha_1'^2)}}{r'},\\ f_1' &= \alpha_1',\\ \beta_1' &= v' - \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{-(2\nu'\alpha_2' r'^2+\alpha_1'^2)}}{\alpha_1'},\\ \beta_2' &= t + \frac{\sqrt{-(2\nu'\alpha_2' r'^2+\alpha_1'^2)}}{\alpha_2'}. \end{aligned}\right.$$

Pour avoir les solutions du système (68), nous prendrons ces expressions en y considérant les constantes arbitraires comme des variables qui seront définies par les équations

$$\begin{aligned} &\frac{d\alpha_1}{\frac{\partial U_1}{\partial\beta_1}} = \frac{d\alpha_2}{\frac{\partial U_1}{\partial\beta_2}} = -\frac{d\beta_1}{\frac{\partial U_1}{\partial\alpha_1}} = -\frac{d\beta_2}{\frac{\partial U_1}{\partial\alpha_2}}\\ &= \frac{d\alpha_1'}{\frac{\partial U_1}{\partial\beta_1'}} = \frac{d\alpha_2'}{\frac{\partial U_1}{\partial\beta_2'}} = -\frac{d\beta_1'}{\frac{\partial U_1}{\partial\alpha_1'}} = -\frac{d\beta_2'}{\frac{\partial U_1}{\partial\alpha_2'}} = \psi\,dt. \end{aligned}$$

En ayant égard aux relations (69) et en tenant compte de la relation

$$xx' + yy' + zz' = -rr'(\cos v \cos v' + \sin v \sin v' \cos \mathrm{I}),$$

où

$$\cos \mathrm{I} = \frac{\mathrm{C}^2 - f_1^2 - f_1'^2}{2 f_1 f_1'} = \frac{\mathrm{C}^2 - \alpha_1^2 - \alpha_1'^2}{2\alpha_1 \alpha_1'},$$

on voit que U_1, qui est une fonction de r, r' et de $xx' + yy' + zz'$, sera une fonction connue de t et des huit nouvelles variables $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_2', \beta_2'$.

Posons

$$k^2 = \frac{\mu}{\nu}, \qquad k'^2 = \frac{\mu'}{\nu'}, \qquad n = \frac{1}{k^2}\left(-\frac{2\alpha_2}{\nu}\right)^{\frac{3}{2}}, \qquad n' = \frac{1}{k'^2}\left(-\frac{2\alpha_2'}{\nu'}\right)^{\frac{3}{2}},$$

et prenons comme nouvelles variables

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathrm{L} = \nu k^2 \sqrt{-\dfrac{\nu}{2\alpha_2}}, & \mathrm{L}' = \nu' k'^2 \sqrt{-\dfrac{\nu'}{2\alpha_2'}}, \\ l = n(t - \beta_2), & l' = n'(t - \beta_2'), \\ \mathrm{G} = \alpha_1, & \mathrm{G}' = \alpha_1', \\ g = \beta_1, & g' = \beta_1', \end{array}\right.$$

et comme nouvelle fonction à la place de $\psi \mathrm{U}_1$:

$$\mathfrak{R} = \psi \mathrm{U}_1 + \frac{\nu^3 k^4}{2\mathrm{L}^2} + \frac{\nu'^3 k'^4}{2\mathrm{L}'^2}.$$

On obtient les équations

$$(70) \qquad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{d\mathrm{L}}{dt} = \dfrac{\partial \mathfrak{R}}{\partial l}, & \dfrac{d\mathrm{L}'}{dt} = \dfrac{\partial \mathfrak{R}}{\partial l'}, \\ \dfrac{d\mathrm{G}}{dt} = \dfrac{\partial \mathfrak{R}}{\partial g}, & \dfrac{d\mathrm{G}'}{dt} = \dfrac{\partial \mathfrak{R}}{\partial g'}, \\ \dfrac{dl}{dt} = -\dfrac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \mathrm{L}}, & \dfrac{dl'}{dt} = -\dfrac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \mathrm{L}'}, \\ \dfrac{dg}{dt} = -\dfrac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \mathrm{G}}, & \dfrac{dg'}{dt} = -\dfrac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \mathrm{G}'}. \end{array}\right.$$

Si l'on pose

$$\mathrm{U}_2 = \frac{\nu^3 k^4}{2\mathrm{L}^2} + \frac{\nu'^3 k'^4}{2\mathrm{L}'^2},$$

on a

$$\mathfrak{R} = \psi \mathrm{U}_1 + \mathrm{U}_2.$$

U_1 et U_2 ne dépendent plus maintenant que des huit variables $L, G, l, g, L', G', l', g'$, mais ne contiennent pas le temps explicitement. On a donc la relation simple

$$\psi \frac{dU_1}{dt} + \frac{dU_2}{dt} = 0,$$

mais qui n'est pas intégrable.

Quand on aura intégré le système (70), on connaîtra R', Δ, $r = R$, v, v' et I en fonction de t et de huit constantes arbitraires, ou plutôt de neuf, en comptant C. On connaîtra donc en particulier les distances mutuelles des trois corps; pour achever la solution du problème, il faut obtenir h, i et i'.

On a la généralisation d'une formule de Radau :

$$\frac{dh}{dt} = -\psi \frac{\partial U_1}{\partial C} = -\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial C};$$

en intégrant, on introduira une nouvelle constante arbitraire.

On aura ensuite

$$\left\{\begin{array}{ll} \sin i = \dfrac{G'}{C} \sin I, & \sin i' = \dfrac{G}{C} \sin I, \\[2ex] \cos i = \dfrac{G + G' \cos I}{C}, & \cos i' = \dfrac{G' + G \cos I}{C}, \\[2ex] h' = h + 180^\circ, & \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = r(\cos v \cos h - \sin v \sin h \cos i), \\ y = r(\cos v \sin h + \sin v \cos h \cos i), \\ z = r \sin v \sin i, \\[2ex] x' = -r'(\cos v' \cos h - \sin v' \sin h \cos i'), \\ y' = -r'(\cos v' \sin h + \sin v' \cos h \cos i'), \\ z' = r' \sin v' \sin i'. \end{array}\right.$$

Donc x, y, z, x', y', z' se trouvent exprimés en fonction de t et de dix constantes arbitraires.

Les formules (α) introduisent deux nouvelles arbitraires J et N; de sorte qu'on aura X, Y, Z, X', Y', Z' et, par suite, $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$ en fonction de t et de douze constantes arbitraires.

CHAPITRE XI

Quelques résultats concernant les chocs de deux ou plusieurs corps.

Supposant toujours les masses de la forme $m_i = \mu_i \psi(t)$, nous nous proposons d'étudier le mouvement au voisinage d'un instant t_1, où le mouvement cesse d'être régulier.

A. — Cas des masses croissantes.

64. — Nous avons déjà démontré au chapitre I, paragraphe 7, que, si la fonction $\psi(t)$ est croissante dans un intervalle comprenant t_1, le mouvement ne peut cesser d'être régulier à cet instant que si la plus petite des distances mutuelles tend vers zéro lorsque t tend vers t_1.

On peut, de plus, en généralisant un raisonnement de M. Chazy, montrer que, dans le cas de trois corps, c'est toujours la même distance qui tend vers zéro.

Soient, en effet, M_1, M_2, M_3, les trois corps.

Désignons par r_1, r_2, $r_3 = r$ les trois distances M_2M_3, M_3M_1, M_1M_2.

Soient x, y, z les coordonnées de M_2 par rapport à des axes parallèles aux axes fixes, issus de M_1; ξ, η, ζ celles de M_3 par rapport à des axes issus du centre de gravité de M_1 et M_2.

Si l'on pose

$$\lambda = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}, \qquad \nu = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}, \qquad g = \frac{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}{\mu_3(\mu_1 + \mu_2)}, \qquad k = \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2},$$

les équations du mouvement sont

$$(71) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{m_1 + m_2}{r^3} x = -m_3 x \left(\frac{\nu}{r_1^3} + \frac{\lambda}{r_2^3} \right) + m_3 \xi \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right), \; \ldots\ldots$$

$$(72) \qquad \frac{d^2\xi}{dt^2} = -M \xi \left(\frac{\lambda}{r_1^3} + \frac{\nu}{r_2^3} \right) + \lambda\nu M x \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right), \; \ldots\ldots$$

avec $M = m_1 + m_2 + m_3 = (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)\psi(t)$.

Nous devons montrer qu'il est impossible que dans un temps arbitrairement court, M_3 soit voisin de M_1 et M_2, puis s'écarte à distance finie de M_1 et M_2 qui restent voisins, puis revienne au voisinage de M_1 et M_2.

En désignant par d le maximum de la distance ρ de M_3 au centre de gravité de M_1 et M_2 dans le mouvement considéré, ρ varierait de $\frac{d}{2}$ à d, puis de d à $\frac{d}{2}$.

Les expressions trouvées précédemment pour $\frac{d^2\xi}{dt^2}, \ldots,$ montrent que ces dérivées secondes sont bornées. Donc, ou bien ξ', η', ζ' sont bornés et le point (ξ, η, ζ) ne peut parcourir une longueur $\frac{d}{2}$ dans un temps infiniment petit; ou bien ξ', η', ζ' ne sont pas bornés, mais varient infiniment peu, et le point (ξ, η, ζ) a un mouvement sensiblement rectiligne et uniforme, et non un mouvement d'aller et retour. C. Q. F. D.

65. — Choc de deux corps. — Supposant toujours $\psi(t)$ croissante et le cas de trois corps, soit r la distance qui tend vers zéro lorsque t tend vers t_1, r_1 et r_2 ne tendant pas vers zéro.

La combinaison des forces vives donne

$$g\,\mathrm{S}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + k\,\mathrm{S}\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 < 2\psi U_1 + 2h,$$

d'où, en remplaçant $x'^2 + y'^2 + z'^2$ par $r'^2 + \frac{\mathrm{S}(yz'-zy')^2}{r^2}$:

$$gr'^2 + g\frac{\mathrm{S}(yz'-zy')^2}{r^2} + k\,\mathrm{S}\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 < \frac{2}{\psi}\left(\frac{m_2m_3}{r_1} + \frac{m_3m_1}{r_2} + \frac{m_1m_2}{r}\right) + 2h.$$

On en déduit que chacune des quantités

$$r^2r'^2, \qquad (yz'-zy')^2, \qquad (zx'-xz')^2, \qquad (xy'-yx')^2,$$

est inférieure à l'expression

$$\frac{2r}{g\psi}\left(\frac{m_2m_3r}{r_1} + \frac{m_3m_1r}{r} + m_1m_2\right) + \frac{2hr}{g},$$

donc tend vers o lorsque t tend vers t_1.

Le problème admet les intégrales des aires

$$g\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) + k(\eta\zeta' - \zeta\eta') = \lambda k, \ldots\ldots$$

a) Supposons d'abord que les constantes des aires ne soient pas toutes les trois nulles, de sorte que nous pourrons prendre pour plan des xy le plan du maximum des aires; les deux premières constantes des aires seront alors nulles, et la troisième, λ'', sera différente de zéro.

Si nous nous plaçons à l'instant du choc, ces intégrales s'écriront :

$$\eta\zeta' - \zeta\eta' = \zeta\xi' - \xi\zeta' = 0, \qquad \xi\eta' - \eta\xi' = \lambda''.$$

Dans les deux premières équations, le déterminant $\xi\eta' - \eta\xi'$ n'est pas nul; donc ζ et ζ' sont nuls à l'instant t_1.

Donc, à l'instant du choc, le troisième corps et, par conséquent, *les trois corps sont situés dans le plan du maximum des aires* et *la trajectoire du troisième corps est tangente au plan du maximum des aires.*

b) Supposons maintenant que les trois constantes des aires soient nulles.

Si l'on désigne par $\lambda_1 k$, $\lambda_1' k$, $\lambda_1'' k$ les constantes des aires dans le mouvement autour du centre de gravité, on a

$$\frac{\lambda}{\lambda_1} = \frac{\lambda'}{\lambda_1'} = \frac{\lambda''}{\lambda_1''} = gk.$$

Donc, les trois constantes des aires autour du centre de gravité seront aussi nulles.

Or, on démontre, comme dans le cas des masses fixes [1], que *si les trois constantes des aires dans le mouvement autour du centre de gravité sont nulles, le mouvement est plan.*

Si l'on prend alors le plan du mouvement comme plan des xy, à l'instant du choc des deux masses m_1 et m_2, l'intégrale des aires se réduit à

$$\xi\eta' - \eta\xi' = 0.$$

Donc, *la tangente à la trajectoire du troisième corps passe au centre de gravité des deux premiers, donc au point où a lieu le choc.*

B. — Cas des masses décroissantes.

66. — Supposons maintenant $\psi(t)$ décroissante dans un intervalle de temps entourant l'instant t_1, et supposons que, lorsque t tend vers t_1, la plus petite des distances r_{ij} tend vers zéro.

---

(1) Voir, par exemple, CHAZY (*Bulletin astronomique*, 1918, p. 335, en note).

La relation (45) donne

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2 K}{dt^2} - 2\psi U_1\right) > 0,$$

d'où

$$\frac{d^2 K}{dt^2} > 2\psi U_1 + h.$$

En vertu de l'hypothèse, si ψ ne tend pas vers zéro pour $t = t_1$, le second membre de cette inégalité croît indéfiniment, donc est positif pendant un certain intervalle (t_2, t_1). On en déduit que $\frac{dK}{dt}$, allant constamment en croissant dans cet intervalle, finit par avoir un signe constant, donc que K, variant toujours dans le même sens, a une limite lorsque t tend vers t_1.

Si cette limite est nulle, tous les r_{ij} tendent vers zéro et tous les corps se choquent à l'instant t_1.

Si cette limite est positive, bornons-nous au cas de trois corps. On peut voir que c'est toujours la même distance qui tend vers zéro. Car s'il n'en était pas ainsi, il y aurait échange à un instant t'; à cet instant deux distances seraient égales et inférieures à un nombre arbitrairement petit ε. La troisième distance serait inférieure ou égale à 2ε, et l'on aurait

$$K < 4\varepsilon^2 \frac{\mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_3\mu_1}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}.$$

Donc K n'aurait pas une limite positive.

C'est donc toujours la même distance qui tend vers zéro.

C. Q. F. D.

En observant que cette distance est supérieure ou égale à la différence des deux autres, on déduit de ce que K a une limite, que les deux autres distances tendent vers une même limite positive.

En résumé, *lorsque ψ est une fonction décroissante de t*, nous voyons que, *si la plus petite des trois distances des corps tend vers zéro lorsque t tend vers t_1, ou bien les trois corps se choquent à l'instant t_1, ou bien deux des corps se choquent, leurs distances au troisième tendant vers une même limite positive.*

Dans ce dernier cas, on peut même montrer que la distance qui tend vers zéro va continuellement en décroissant lorsque t tend vers t_1.

M_1 et M_2 étant encore les deux corps qui se choquent, on a avec les notations précédentes

$$(\lim r)_{t=t_1} = 0,$$

tandis qu'il existe une constante b telle que r_1 et r_2 restent $> b$ lorsque t reste dans un certain intervalle $(t_1 - \tau, t_1)$.

En vertu des relations

$$r_1^2 = S(\xi - \nu x)^2, \qquad r_2^2 = S(\xi + \lambda x)^2,$$

les équations (72) donnent

$$\left|\frac{d^2\xi}{dt^2}\right|, \left|\frac{d^2\eta}{dt^2}\right|, \left|\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right| < \frac{M}{b^2}.$$

Intégrons à partir d'un certain instant compris dans l'intervalle $(t_1 - \tau, t_1)$.

On déduit des inégalités précédentes que $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$, donc ξ, η, ζ tendent vers des limites finies et déterminées lorsque t tend vers t_1.

Or on a

$$\frac{1}{2}\frac{d^2r^2}{dt^2} = Sx\frac{d^2x}{dt^2} + S\left(\frac{dx}{dt}\right)^2,$$

et la combinaison des forces vives donne

$$\frac{d}{dt}\left\{gS\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + kS\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2\right\} - 2\psi\frac{dU_1}{dt} = 0,$$

d'où

$$gS\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + kS\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 > 2\psi U_1 + 2h.$$

On a donc

$$\frac{d^2r^2}{dt^2} > 2Sx\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2}{g}\left[2\psi U_1 + 2h - kS\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2\right],$$

ou, en vertu des équations (71) :

$$\frac{d^2r^2}{dt^2} > \frac{2(m_1 + m_2)}{r} - 2L,$$

avec

$$L = \frac{k}{g}(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) + m_3r^2\left(\frac{\nu}{r_1^3} + \frac{\lambda}{r_2^3}\right) + m_3\left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_1^3}\right)(x\xi + y\eta + z\zeta) - \frac{2m_3}{\nu r_1} - \frac{2m_3}{\lambda r_2} - \frac{2h}{g}.$$

L tend vers une limite finie et déterminée lorsque t tend vers t_1.

Donc, à partir d'un certain moment, $\dfrac{d^2 r^2}{dt^2}$ sera positif.

$\dfrac{dr^2}{dt}$ va donc en croissant constamment, donc garde un signe constant à partir d'un certain moment; ce signe ne peut être que le signe *moins* puisque r tend vers o.

Donc r *va constamment en décroissant lorsque* t *tend vers* t_1.

67. — Choc des *n* corps[1]. — Nous nous proposons d'établir dans ce paragraphe une propriété relative au choc de n corps de masses $\mu_i \psi(t)$ décroissantes.

Nous envisagerons des valeurs positives de t et supposerons que le choc a lieu pour $t = 0$, de sorte que, si nous appelons t_0 la valeur initiale de t, nous supposerons que t va en décroissant de t_0 à o. Nous supposerons que les $3n$ fonctions $x_i(t)$, $y_i(t)$, $z_i(t)$ définies par des conditions initiales rendant tous les $r_{ij} \neq 0$, holomorphes lorsque t décroît de t_0 à o, cessent de l'être pour $t = 0$, toutes les distances r_{ij} tendant vers zéro lorsque t tend vers zéro. De plus, nous nous bornerons au cas ou $\psi'(t)$ est supérieur à zéro, ce qui revient à l'étude d'un choc de masses décroissantes. Nous supposerons enfin que pour $0 \leqslant t \leqslant t_0$, ψ reste compris entre deux quantités finies et non nulles ψ_α et ψ_β :

$$\psi_\alpha < \psi < \psi_\beta .$$

La relation

$$\frac{1}{\psi^2} \frac{d^3 L}{dt^3} = 2 \frac{d}{dt}\left(\frac{U_1}{\psi}\right),$$

où

$$L = \sum \mu_i r_i^2,$$

donne

$$\frac{d^2 L}{dt^2} = 2\psi U_1 - 4 \int_t^t \psi' U_1 \, dt + h,$$

d'où, à cause de $\psi' > 0$:

$$\frac{d^2 L}{dt^2} > 2\psi U_1 + h,$$

d'où

$$(\alpha) \qquad \frac{d^2 L}{dt^2} > 2\psi_\alpha U_1 + h .$$

[1] Cf. CHAZY (*Bulletin Astronomique*, 35, 1918, p. 330).

U_1 tendant vers l'∞ lorsque t tend vers o, $\frac{d^2L}{dt^2}$ tend aussi vers $+\infty$, donc $\frac{dL}{dt}$ va en décroissant comme t et garde un signe constant à partir d'une certaine valeur de t suffisamment voisine de zéro.

Si nous supposons que nous étudions le mouvement par rapport au centre de gravité, le choc a lieu à l'origine, et par suite L tend vers zéro quand t tend vers zéro.

L étant $\geqslant 0$ et tendant vers o, ne peut finir par croître; donc, à partir d'un certain moment, $\frac{dL}{dt}$ est >0 et tend vers une limite.

Nous en déduisons que *le rapport* $\frac{L}{t}$ *tend vers une limite quand* t *tend vers zéro.*

Cette conclusion serait valable aussi si ψ' était <0, en ajoutant cette condition que $\frac{dU_1}{dt}$ soit constamment positif pendant tout l'intervalle de temps considéré, ce qui arriverait par exemple si tous les r_{ij} allaient constamment en diminuant.

On aurait, en effet

$$\int_{t_0}^{t} \psi' U_1 dt = [\psi U_1]_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t} \psi \frac{dU_1}{dt} dt = [\psi U_1]_{t_0}^{t} - \psi_m \int_{t_0}^{t} \frac{dU_1}{dt} dt,$$

ψ_m désignant une valeur de ψ intermédiaire entre $\psi(t_0)$ et $\psi(t)$, la formule de la moyenne étant applicable à cause de l'hypothèse faite sur le signe de $\frac{dU_1}{dt}$.

On en déduit

$$\int_{t_0}^{t} \psi' U_1 dt = (\psi - \psi_m) U_1 - (\psi_{t_0} - \psi_m)(U_1)_{t_0},$$

d'où

$$\frac{d^2L}{dt^2} = -2\psi U_1 + 4\psi_m U_1 + 4(\psi_{t_0} - \psi_m)(U_1)_{t_0} + h.$$

ψ_0 désignant la valeur de ψ pour $t = 0$, on peut écrire :

$$\frac{d^2L}{dt^2} = 2[\psi_0 + (\psi_0 - \psi) + 2(\psi_m - \psi_0)] U_1 + 4(\psi_{t_0} - \psi_m)(U_1)_{t_0} + h,$$

d'où

$$\frac{d^2L}{dt^2} > 2[\psi_0 + 2(\psi_m - \psi_0)] U_1 + 4(\psi_{t_0} - \psi_m)(U_1)_{t_0} + h.$$

ψ_0 étant $\neq 0$, on peut prendre t_0 assez voisin de zéro pour que $\psi_0 - \psi_{t_0}$ soit inférieur à $\frac{\psi_0}{4}$ par exemple, de sorte que $2(\psi_0 - \psi_m)$ est $< \frac{\psi_0}{2}$, et le coefficient de U_1 est supérieur à $2\left(\psi_0 - \frac{\psi_0}{2}\right) = \psi_0$.

On a alors

$$\frac{d^2L}{dt^2} > \psi_0 U_1 + 4(\psi_{t_0} - \psi_m)(U_1)_{t_0} + h > \psi_0 U_1 + [h - \psi_0 (U_1)_{t_0}],$$

inégalité de même forme que (α) et qui conduit à la même conclusion.

Revenons au cas où ψ' est > 0. La combinaison des forces vives peut s'écrire

$$T_1 = \psi U_1 - \int_{t_0}^{t} \psi' U_1 \, dt + c^{te},$$

et comme

$$\frac{d^2L}{dt^2} = 2\psi U_1 - 4\int_{t_0}^{t} \psi' U_1 \, dt + c^{te},$$

on a

$$\frac{d^2L}{dt^2} - 2T_1 = -2\int_{t_0}^{t} \psi' U_1 \, dt + c^{te} = -2\int_{t_0}^{t} \psi' U_1 \, dt + 2h_1,$$

d'où

$$(\beta) \qquad \frac{d^2L}{dt^2} > 2T_1 + 2h_1.$$

Transformons $2T_1$. On a, d'après l'identité de Lagrange

$$Sx_i^2 Sx_i'^2 = (Sx_i x_i')^2 + S(y_i z_i' - z_i y_i')^2,$$

ou, d'après l'équation $\qquad Sx_i x_i' = r_i r_i'$:

$$Sx_i'^2 = r_i'^2 + S\frac{(y_i z_i' - z_i y_i')^2}{r_i^2},$$

d'où

$$2T_1 = \sum \mu_i r_i'^2 + S\sum \frac{\mu_i (y_i z_i' - z_i y_i')^2}{r_i^2}.$$

En multipliant chacun des quatre termes du second membre par $L = \Sigma \mu_i r_i^2$ et en appliquant à nouveau à chacun des quatre produits obtenus l'identité de Lagrange, on obtient

$$\sum \mu_i r_i^2 \times \sum \frac{\mu_i (y_i z_i' - z_i y_i')^2}{r_i^2} = \left[\sum \mu_i (y_i z_i' - z_i y_i')\right]^2 + \sum \mu_i \mu_j \left[(y_i z_i' - z_i y_i') \frac{r_j}{r_i} - (y_j z_j' - z_j y_j') \frac{r_i}{r_j}\right]^2.$$

D'après l'équation

$$L' = 2 \sum \mu_i r_i r_i'$$

et les trois intégrales des aires

$$\sum \mu_i (y_i z_i' - z_i y_i') = c_1, \ldots\ldots$$

on déduit la nouvelle expression

$$2T_1 = \frac{\frac{L'^2}{4} + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + Q^2}{L},$$

Q^2 désignant une somme de $2n(n-1)$ carrés.

En substituant dans (β), on a

$$L'' > \frac{\frac{L'^2}{4} + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + Q^2}{L} + 2h_1.$$

$$L'' - \frac{L'^2}{4L} > \frac{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}{L} + \frac{Q^2}{L} + 2h_1.$$

Supposons que, lorsque t tend vers zéro, L' soit > 0 à partir de $t_1 (0 < t_1 \leqslant t_0)$. Multiplions les deux membres de l'inégalité précédente par $\frac{L'}{\sqrt{L}}$ et intégrons entre t_1 et $t (0 < t < t_1)$; il vient

$$\frac{L'^2}{2\sqrt{L}} < -2 \frac{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}{\sqrt{L}} + \int_{t_1}^{t} \frac{Q^2 L'}{L^{\frac{3}{2}}} dt + 4h_1\sqrt{L} + c^{te}.$$

Le premier membre de cette inégalité est positif, le premier terme du second membre est négatif et tend vers $-\infty$ quand t tend vers zéro, à moins que l'on n'ait $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

De plus, $\displaystyle\int_{t_1}^{t} \frac{Q^2 L'}{L^{\frac{3}{2}}}\, dt$ est négative. Donc cette inégalité n'est possible que si $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ et que si $\displaystyle\int_{t_1}^{t} \frac{Q^2 L'}{L^{\frac{3}{2}}}\, dt$ a une limite quand t tend vers zéro, et par suite si $\dfrac{L'^2}{\sqrt{L}}$ en a une aussi. Soit l la limite de $\dfrac{L'}{L^{\frac{1}{4}}}$; l est $\geqslant 0$. Nous pouvons donc poser

$$\frac{L'}{L^{\frac{1}{4}}} = l + \varepsilon,$$

ε tendant vers zéro avec t, d'où, puisque L tend vers zéro en même temps :

$$L^{\frac{\ }{4}} = (l + \eta)\, t,$$

η tendant aussi vers zéro avec t.

Donc, *le choc des n corps en un même point ne peut avoir lieu que si les trois constantes des aires sont nulles et si* $\dfrac{L}{t^{\frac{4}{3}}}$ *tend vers une limite,* $t = 0$ *étant l'instant du choc.*

TROISIÈME PARTIE

APPLICATIONS

CHAPITRE XII

Évolution de l'orbite d'une particule dans le champ d'une Céphéide.

68. — Considérons une masse centrale dont la masse $M(t)$ soit telle que sa dérivée logarithmique soit une fonction périodique du temps. Cherchons l'évolution de l'orbite d'une particule placée dans le champ de cette masse, en nous attachant spécialement aux variations du grand axe et de l'excentricité.

En désignant par τ l'instant d'un passage au périhélie et en introduisant la variable $-n\tau = \varkappa$, les équations qui fournissent les variations de a, e, $\varkappa$ sont

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d \log a}{dt} &= -\frac{1 + e\cos u}{1 - e\cos u}\frac{d\log M}{dt}, \\ \frac{d\log(1-e^2)}{dt} &= \frac{2e\cos u}{1-e\cos u}\frac{d\log M}{dt}, \\ \frac{d\varkappa}{dt} &= \left[\frac{(1-e^3\cos u)\sin u}{e(1-e\cos u)} - nt\frac{2+e\cos u}{1-e\cos u}\right]\frac{d\log M}{dt}. \end{aligned}\right.$$

Nous nous occuperons seulement des variations séculaires de ces éléments.

On a les développements suivants :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1+e\cos u}{1-e\cos u} &= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \cos\frac{2i\pi(t-\tau)}{P}, \\ \frac{2e\cos u}{1-e\cos u} &= \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \cos\frac{2i\pi(t-\tau)}{P}, \\ \frac{(1-e^3\cos u)\sin u}{e(1-e\cos u)} &= \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \sin\frac{2i\pi(t-\tau)}{P}, \\ n\frac{2+e\cos u}{1-e\cos u} &= 2n + \sum_{=1}^{\infty} \delta_i \cos\frac{2i\pi(t-\tau)}{P}, \end{aligned}\right.$$

P désignant la période de la planète à l'instant considéré, avec

$$\left\{\begin{aligned}
\alpha_i &= 4\,\mathrm{J}_i(ie),\\
\gamma_i &= \frac{2}{ie}\frac{d\mathrm{J}_i(ie)}{de} - \frac{2e}{i}\frac{d\mathrm{J}_i(ie)}{de} + \frac{2}{i}\,\mathrm{J}_i(ie),\\
\delta_i &= 6n\,\mathrm{J}_i(ie),
\end{aligned}\right.$$

où les symboles J_i représentent les fonctions de Fourier-Bessel d'ordre i.

On aura, d'autre part

$$\frac{1}{\mathrm{M}}\frac{d\mathrm{M}}{dt} = \mu_0 + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\mu_i \cos\frac{2i\pi t}{\mathrm{T}} + \pi_i \sin\frac{2i\pi t}{\mathrm{T}}\right).$$

69. — Cas particulier. — Tout d'abord, si l'on suppose l'excentricité petite, les équations relatives à a et e donnent approximativement

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{d\log a}{dt} &= -\frac{1}{\mathrm{M}}\frac{d\mathrm{M}}{dt},\\
\frac{d\log(1-e^2)}{dt} &= 0,
\end{aligned}\right.$$

d'où $$a\mathrm{M} = \mathrm{c}^{\mathrm{te}}, \qquad e = \mathrm{c}^{\mathrm{te}}.$$

70. — Cas général. — Dans le cas général, on a

$$(73)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{d\log a}{dt} &= -\mu_0 - \mu_0\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\cos\frac{2i\pi(t-\tau)}{\mathrm{P}} - \sum_{i=1}^{\infty}\left(\mu_i\cos\frac{2i\pi t}{\mathrm{T}} + \pi_i\sin\frac{2i\pi t}{\mathrm{T}}\right)\\
&\quad - \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{i'=1}^{\infty}\alpha_i\cos\frac{2i\pi(t-\tau)}{\mathrm{P}}\left(\mu_{i'}\cos\frac{2i'\pi t}{\mathrm{T}} + \pi_{i'}\sin\frac{2i'\pi t}{\mathrm{T}}\right),\\
\frac{d\log(1-e^2)}{dt} &= \mu_0\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\cos\frac{2i\pi(t-\tau)}{\mathrm{P}} + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{i'=1}^{\infty}\alpha_i\cos\frac{2i\pi(t-\tau)}{\mathrm{P}}\left(\mu_{i'}\cos\frac{2i'\pi t}{\mathrm{T}} + \pi_{i'}\sin\frac{2i'\pi t}{\mathrm{T}}\right),\\
\frac{d\chi}{dt} &= \mu_0\sum_{i=1}^{\infty}\gamma_i\sin\frac{2i\pi(t-\tau)}{\mathrm{P}} + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{i'=1}^{\infty}\gamma_i\sin\frac{2i\pi(t-\tau)}{\mathrm{P}}\left(\mu_{i'}\cos\frac{2i'\pi t}{\mathrm{T}} + \pi_{i'}\sin\frac{2i'\pi t}{\mathrm{T}}\right)\\
&\quad - t\left[2\mu_0 n + 2n\sum_{i=1}^{\infty}\left(\mu_i\cos\frac{2i\pi t}{\mathrm{T}} + \pi_i\sin\frac{2i\pi t}{\mathrm{T}}\right) + \mu_0\sum_{i=1}^{\infty}\delta_i\cos\frac{2i\pi(t-\tau)}{\mathrm{P}}\right.\\
&\quad\left. + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{i'=1}^{\infty}\delta_i\cos\frac{2i\pi(t-\tau)}{\mathrm{P}}\left(\mu_{i'}\cos\frac{2i'\pi t}{\mathrm{T}} + \pi_{i'}\sin\frac{2i'\pi t}{\mathrm{T}}\right)\right].
\end{aligned}\right.$$

Deux cas se présentent :

1° $P \neq T$ (¹) : Cela revient à supposer que M varie lentement, et, en se bornant aux termes séculaires, on pourra écrire

$$\frac{d \log a}{dt} = -\mu_0,$$
$$\frac{d \log (1 - e^2)}{dt} = 0,$$

d'où

$$\log \frac{a}{a_0} = -\mu_0(t - t_0),$$
$$a = a_0 E^{-\mu_0(t-t_0)} \qquad \text{(E, base des logarithmes népériens)},$$
$$e = e_0.$$

M serait de la forme $M_0 E^{\mu_0(t-t_0)}$. On aurait donc $aM = a_0 M_0$, résultat indiqué par M. Mineur.

2° $P = T$: Si l'on remplace les seconds membres par leurs moyennes, on aura

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d \log a}{dt} &= -\mu_0 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \left(\mu_i \cos \frac{2 i \pi \tau}{T} + \pi_i \sin \frac{2 i \pi \tau}{T}\right), \\ \frac{d \log (1 - e^2)}{dt} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \left(\mu_i \cos \frac{2 i \pi \tau}{T} + \pi_i \sin \frac{2 i \pi \tau}{T}\right), \end{aligned}\right.$$

d'où

$$\left\{\begin{aligned} \log \frac{a}{a_0} &= -\left[\mu_0 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \left(\mu_i \cos \frac{2 i \pi \tau}{T} + \pi_i \sin \frac{2 i \pi \tau}{T}\right)\right](t - t_0), \\ \log \frac{1 - e^2}{1 - e_0^2} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \left(\mu_i \cos \frac{2 i \pi \tau}{T} + \pi_i \sin \frac{2 i \pi \tau}{T}\right)(t - t_0). \end{aligned}\right.$$

Dans ces formules, on doit remplacer a, e, τ par leurs valeurs initiales. Si l'on considère que τ peut varier entre $-\frac{T}{2}$ et $+\frac{T}{2}$, les moyennes des coefficients

(¹) On suppose, plus généralement, $\frac{P}{T}$ incommensurable.

de $t - t_0$ dans les seconds membres se réduisent à $-\mu_0$ et o, et l'on a, comme dans le cas $P \neq T$:

$$\log \frac{a}{a_0} = -\mu_0(t - t_0), \qquad e = e_0.$$

71. — Approximations successives. — Pour préciser, nous allons résoudre le système (73) par approximations successives, en nous bornant aux premiers termes des développements des seconds membres et en négligeant les termes périodiques. Nous prendrons donc les équations

$$(74) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d \log a}{dt} &= -\mu_0 - \alpha_1 \cos \frac{2\pi(t-\tau)}{P}\left(\mu_1 \cos \frac{2\pi t}{T} + \pi_1 \sin \frac{2\pi t}{T}\right), \\ \frac{d \log(1-e^2)}{dt} &= \alpha_1 \cos \frac{2\pi(t-\tau)}{P}\left(\mu_1 \cos \frac{2\pi t}{T} + \pi_1 \sin \frac{2\pi t}{T}\right), \\ \frac{d\varkappa}{dt} &= \left[\gamma_1 \sin \frac{2\pi(t-\tau)}{P} - \delta_1 t \cos \frac{2\pi(t-\tau)}{P}\right]\left(\mu_1 \cos \frac{2\pi t}{T} + \pi_1 \sin \frac{2\pi t}{T}\right) - 2\mu_0 nt. \end{aligned} \right.$$

Posons :

$$a = a_0 + y, \qquad e = e_0 + z, \qquad \varkappa = \varkappa_0 + \rho,$$

y, z, ρ étant supposés de petites quantités, et supposons les unités choisies de façon que $f = 4\pi^2$, de sorte que

$$P = a^{\frac{3}{2}} M^{-\frac{1}{2}}, \qquad n = \frac{2\pi\sqrt{M}}{a^{\frac{3}{2}}}.$$

On aura

$$\frac{2\pi(t-\tau)}{P} = \frac{2\pi(t-\tau)}{(a_0+y)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{M},$$

ou, en remplaçant $\sqrt{M}$ par sa valeur initiale $\dfrac{a_0^{\frac{3}{2}}}{T}$:

$$\frac{2\pi(t-\tau)}{P} = \frac{2\pi(t-\tau)\, a_0^{\frac{3}{2}}}{T(a_0+y)^{\frac{3}{2}}}.$$

D'autre part,

$$\log a = \log a_0 + \frac{y}{a_0},$$

$$\log(1 - e^2) = \log(1 - e_0^2) - \frac{2e_0 z}{1 - e_0^2},$$

d'où les équations

$$\left\{\begin{aligned} &-\frac{1}{a_0}\frac{dy}{dt} = \mu_0 + \alpha_1 \cos\frac{2\pi(t-\tau)}{P}\left(\mu_1 \cos\frac{2\pi t}{T} + \pi_1 \sin\frac{2\pi t}{T}\right),\\ &-\frac{2e_0}{1-e_0^2}\frac{dz}{dt} = \alpha_1 \cos\frac{2\pi(t-\tau)}{P}\left(\mu_1 \cos\frac{2\pi t}{T} + \pi_1 \sin\frac{2\pi t}{T}\right),\\ &\frac{d\rho}{dt} = \left[\gamma_1 \sin\frac{2\pi(t-\tau)}{P} - \delta_1 t \cos\frac{2\pi(t-\tau)}{P}\right]\left(\mu_1 \cos\frac{2\pi t}{T} + \pi_1 \sin\frac{2\pi t}{T}\right) - 2\mu_0 n t. \end{aligned}\right.$$

Première approximation. — Nous prenons

$$a = a_0, \qquad e = e_0, \qquad \tau = \tau_0, \qquad P = T, \qquad n = n_0.$$

On a alors, en négligeant les termes périodiques :

$$-\frac{1}{a_0}\frac{dy}{dt} = \mu_0 + \frac{\alpha_1^0\mu_1}{2}\cos\frac{2\pi\tau_0}{T} + \frac{\alpha_1^0\pi_1}{2}\sin\frac{2\pi\tau_0}{T},$$

d'où

$$y = -a_0\left(\mu_0 + \frac{\alpha_1^0\mu_1}{2}\cos\frac{2\pi\tau_0}{T} + \frac{\alpha_1^0\pi_1}{2}\sin\frac{2\pi\tau_0}{T}\right)(t-t_0).$$

De même :

$$-\frac{2e_0}{1-e_0^2}\frac{dz}{dt} = \frac{\alpha_1^0\mu_1}{2}\cos\frac{2\pi\tau_0}{T} + \frac{\alpha_1^0\pi_1}{2}\sin\frac{2\pi\tau_0}{T},$$

d'où

$$z = -\frac{1-e_0^2}{2e_0}\left(\frac{\alpha_1^0\mu_1}{2}\cos\frac{2\pi\tau_0}{T} + \frac{\alpha_1^0\pi_1}{2}\sin\frac{2\pi\tau_0}{T}\right)(t-t_0).$$

Enfin

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\gamma_1^0}{2}\left(-\mu_1 \sin\frac{2\pi\tau_0}{T} + \pi_1 \cos\frac{2\pi\tau_0}{T}\right) - \left[\frac{\delta_1^0}{2}\left(\mu_1 \cos\frac{2\pi\tau_0}{T} + \pi_1 \sin\frac{2\pi\tau_0}{T}\right) + 2\mu_0 n_0\right]t,$$

$$\rho = \frac{\gamma_1^0}{2}\left(-\mu_1 \sin\frac{2\pi\tau_0}{T} + \pi_1 \cos\frac{2\pi\tau_0}{T}\right)(t-t_0) - \left[\frac{\delta_1^0}{4}\left(\mu_1 \cos\frac{2\pi\tau_0}{T} + \pi_1 \sin\frac{2\pi\tau_0}{T}\right) + \mu_0 n_0\right](t^2-t_0^2),$$

d'où

$$\tau - \tau_0 = \frac{\gamma_1^0}{2n_0}\left(\mu_1 \sin\frac{2\pi\tau_0}{T} - \pi_1 \cos\frac{2\pi\tau_0}{T}\right)(t-t_0) + \left[\mu_0 + \frac{\delta_1^0}{4n_0}\left(\mu_1 \cos\frac{2\pi\tau_0}{T} + \pi_1 \sin\frac{2\pi\tau_0}{T}\right)\right](t^2-t_0^2).$$

Deuxième approximation. — Nous prendrons dans les seconds membres, à la place de a, e, τ, les valeurs obtenues dans la première approximation :

$$\left\{\begin{aligned}
y_1 &= -a_0\left(\mu_0 + \frac{\alpha_1^0\mu_1}{2}\cos\frac{2\pi\tau_0}{T} + \frac{\alpha_1^0\pi_1}{2}\sin\frac{2\pi\tau_0}{T}\right)(t-t_0) = -\mathrm{A}a_0(t-t_0),\\
z_1 &= -\frac{1-e_0^2}{2e_0}\left(\frac{\alpha_1^0\mu_1}{2}\cos\frac{2\pi\tau_0}{T} + \frac{\alpha_1^0\pi_1}{2}\sin\frac{2\pi\tau_0}{T}\right)(t-t_0) = -\mathrm{B}\frac{1-e_0^2}{2e_0}(t-t_0),\\
\tau_1-\tau_0 &= \frac{\gamma_1^0}{2n_0}\left(\mu_1\sin\frac{2\pi\tau_0}{T} - \pi_1\cos\frac{2\pi\tau_0}{T}\right)(t-t_0)\\
&\quad + \left[\mu_0 + \frac{\delta_1^0}{4n_0}\left(\mu_1\cos\frac{2\pi\tau_0}{T} + \pi_1\sin\frac{2\pi\tau_0}{T}\right)\right](t^2-t_0^2) = \mathrm{C}(t-t_0) + \mathrm{D}(t^2-t_0^2),
\end{aligned}\right.$$

avec

$$\left\{\begin{aligned}
\alpha_1^0 &= 4\mathrm{J}_1(e_0),\\
\gamma_1^0 &= 2\,\frac{1-e_0^2}{e_0}\left(\frac{d\mathrm{J}_1}{de}\right)_0 + 2\mathrm{J}_1(e_0),\\
\delta_1^0 &= 6n_0\mathrm{J}_1(e_0),
\end{aligned}\right.$$

puis

$$\alpha_1 = 4\mathrm{J}_1(e_0) + 4z_1\left(\frac{d\mathrm{J}_1}{de}\right)_0 = 4\mathrm{J}_1(e_0) - 2\mathrm{B}\frac{1-e_0^2}{e_0}\left(\frac{d\mathrm{J}_1}{de}\right)_0(t-t_0) = \alpha_1^0 - \alpha_1^1(t-t_0),$$

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= 2\,\frac{1-(e_0+z_1)^2}{e_0+z_1}\,\frac{d\mathrm{J}_1(e_0+z_1)}{de} + 2\mathrm{J}_1(e_0+z_1)\\
&\mathrel{\#} 2\left[\mathrm{J}_1(e_0) + \frac{1-e_0^2}{e_0}\left(\frac{d\mathrm{J}_1}{de}\right)_0\right] - \mathrm{B}\frac{1-e_0^2}{e_0}\left[\frac{1-e_0^2}{e_0}\left(\frac{d^2\mathrm{J}_1}{de^2}\right)_0 - \frac{1}{e_0^2}\left(\frac{d\mathrm{J}_1}{de}\right)_0\right](t-t_0) = \gamma_1^0 - \gamma_1^1(t-t_0),
\end{aligned}$$

$$n = n_1 = n_0 - \frac{3}{2}\frac{n_0}{a_0}y_1 = n_0 + \frac{3}{2}n_0\mathrm{A}(t-t_0) = n_0 + n_1'(t-t_0),$$

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= 6n_1\left[\mathrm{J}_1(e_0) + z_1\left(\frac{d\mathrm{J}_1}{de}\right)_0\right]\\
&\mathrel{\#} 6n_0\mathrm{J}_1(e_0) + 6\left[n_1'\mathrm{J}_1(e_0) - \mathrm{B}\frac{1-e_0^2}{2e_0}n_0\left(\frac{d\mathrm{J}_1}{de}\right)_0\right](t-t_0) = \delta_1^0 + \delta_1^1(t-t_0),
\end{aligned}$$

$$\frac{2\pi(t-\tau)}{\mathrm{P}} = \frac{2\pi(t-\tau)}{\mathrm{T}}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{y_1}{a_0}\right),$$

$$\begin{aligned}
\cos\frac{2\pi(t-\tau)}{\mathrm{P}} &= \cos\frac{2\pi(t-\tau)}{\mathrm{T}} + \frac{3\pi(t-\tau)}{\mathrm{T}}\frac{y_1}{a_0}\sin\frac{2\pi(t-\tau)}{\mathrm{T}}\\
&\mathrel{\#} \cos\frac{2\pi(t-\tau_0)}{\mathrm{T}} + \frac{\pi}{\mathrm{T}}\sin\frac{2\pi(t-\tau_0)}{\mathrm{T}}[2\mathrm{C} + 2\mathrm{D}(t+t_0) - 3\mathrm{A}(t-\tau_0)](t-t_0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin\frac{2\pi(t-\tau)}{\mathrm{P}} &= \sin\frac{2\pi(t-\tau)}{\mathrm{T}} - \frac{3\pi(t-\tau)}{\mathrm{T}}\frac{y_1}{a_0}\cos\frac{2\pi(t-\tau)}{\mathrm{T}}\\
&\mathrel{\#} \sin\frac{2\pi(t-\tau_0)}{\mathrm{T}} - \frac{\pi}{\mathrm{T}}\cos\frac{2\pi(t-\tau_0)}{\mathrm{T}}[2\mathrm{C} + 2\mathrm{D}(t+t_0) - 3\mathrm{A}(t-\tau_0)](t-t_0),
\end{aligned}$$

d'où

$$\left(\mu_1 \cos\frac{2\pi t}{T} + \pi_1 \sin\frac{2\pi t}{T}\right)\cos\frac{2\pi(t-\tau)}{P} = \frac{1}{2}\left(\mu_1\cos\frac{2\pi\tau_0}{T} + \pi_1\sin\frac{2\pi\tau_0}{T}\right)$$
$$+\frac{\pi}{T}\sin\frac{2\pi(t-\tau_0)}{T}[2C+2D(t+t_0)-3A(t-\tau_0)]\left(\mu_1\cos\frac{2\pi t}{T}+\pi_1\sin\frac{2\pi t}{T}\right)(t-t_0),$$

$$\left\{\frac{d}{dt}\left[\alpha_1\left(\mu_1\cos\frac{2\pi t}{T}+\pi_1\sin\frac{2\pi t}{T}\right)\cos\frac{2\pi(t-\tau)}{P}\right]\right\}_0 = -\frac{\alpha_1^1}{2}\left(\mu_1\cos\frac{2\pi\tau_0}{T}+\pi_1\sin\frac{2\pi\tau_0}{T}\right)$$
$$+\alpha_1^0\frac{\pi}{T}\sin\frac{2\pi(t_0-\tau_0)}{T}[2C+4Dt_0-3A(t_0-\tau_0)]\left(\mu_1\cos\frac{2\pi t_0}{T}+\pi_1\sin\frac{2\pi t_0}{T}\right)=\alpha,$$

$$\left(\mu_1 \cos\frac{2\pi t}{T} + \pi_1 \sin\frac{2\pi t}{T}\right)\sin\frac{2\pi(t-\tau)}{P} = \frac{1}{2}\left(-\mu_1\sin\frac{2\pi\tau_0}{T} + \pi_1\cos\frac{2\pi\tau_0}{T}\right)$$
$$-\frac{\pi}{T}\cos\frac{2\pi(t-\tau_0)}{T}[2C+2D(t+t_0)-3A(t-\tau_0)]\left(\mu_1\cos\frac{2\pi t}{T}+\pi_1\sin\frac{2\pi t}{T}\right)(t-t_0),$$

$$\left\{\frac{d}{dt}\left[\gamma_1\left(\mu_1\cos\frac{2\pi t}{T}+\pi_1\sin\frac{2\pi t}{T}\right)\sin\frac{2\pi(t-\tau)}{P}\right]\right\}_0 = -\frac{\gamma_1^1}{2}\left(-\mu_1\sin\frac{2\pi\tau_0}{T}+\pi_1\cos\frac{2\pi\tau_0}{T}\right)$$
$$-\gamma_1^0\frac{\pi}{T}\cos\frac{2\pi(t_0-\tau_0)}{T}[2C+4Dt_0-3A(t_0-\tau_0)]\left(\mu_1\cos\frac{2\pi t_0}{T}+\pi_1\sin\frac{2\pi t_0}{T}\right)=\gamma,$$

$$\left\{\frac{d}{dt}\left[\delta_1\left(\mu_1\cos\frac{2\pi t}{T}+\pi_1\sin\frac{2\pi t}{T}\right)\cos\frac{2\pi(t-\tau)}{P}\right]\right\}_0 = \frac{\delta_1^1}{2}\left(\mu_1\cos\frac{2\pi\tau_0}{T}+\pi_1\sin\frac{2\pi\tau_0}{T}\right)$$
$$+\delta_1^0\frac{\pi}{T}\sin\frac{2\pi(t_0-\tau_0)}{T}[2C+4Dt_0-3A(t_0-\tau_0)]\left(\mu_1\cos\frac{2\pi t_0}{T}+\pi_1\sin\frac{2\pi t_0}{T}\right)=\delta.$$

On en tire

$$\left\{\begin{aligned}
&-\frac{1}{a_0}\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = \mu_0 + \frac{\alpha_1^0}{2}\left(\mu_1\cos\frac{2\pi\tau_0}{T}+\pi_1\sin\frac{2\pi\tau_0}{T}\right) = A,\\
&-\frac{1}{a_0}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)_0 = \alpha,
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
&-\frac{2e_0}{1-e_0^2}\left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = \frac{\alpha_1^0}{2}\left(\mu_1\cos\frac{2\pi\tau_0}{T}+\pi_1\sin\frac{2\pi\tau_0}{T}\right) = B,\\
&-\frac{2e_0}{1-e_0^2}\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)_0 = \alpha,
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_0 = \frac{\gamma_1^0}{2}\left(-\mu_1\sin\frac{2\pi\tau_0}{T}+\pi_1\cos\frac{2\pi\tau_0}{T}\right) - \frac{\delta_1^0 t_0}{2}\left(\mu_1\cos\frac{2\pi\tau_0}{T}+\pi_1\sin\frac{2\pi\tau_0}{T}\right) - 2\mu_0 n_0 t_0 = \sigma,\\
&\left(\frac{d^2\rho}{dt^2}\right)_0 = \gamma - \delta t_0 - \frac{\delta_1^0}{2}\left(\mu_1\cos\frac{2\pi\tau_0}{T}+\pi_1\sin\frac{2\pi\tau_0}{T}\right) - 2\mu_0(n_0+n_1' t_0) = \sigma'.
\end{aligned}\right.$$

On en déduit

$$\left\{\begin{aligned}
y &= y_2 = -\mathrm{A}a_0(t-t_0) - a_0\frac{\alpha}{2}(t-t_0)^2,\\
z &= z_2 = -\frac{1-e_0^2}{2e_0}\left[\mathrm{B}(t-t_0)+\frac{\alpha}{2}(t-t_0)^2\right],\\
\rho &= \rho_2 = \sigma(t-t_0)+\frac{\sigma'}{2}(t-t_0)^2,\\
\tau-\tau_0 &= \tau_2-\tau_0 = -\frac{\rho_2}{n_0+n_1'(t-t_0)} = -\frac{\sigma}{n_0}(t-t_0)+\frac{\sigma n_1' - \frac{\sigma'}{2}n_0}{n_0^2}(t-t_0)^2 = -\nu(t-t_0)+\nu'(t-t_0)^2.
\end{aligned}\right.$$

Troisième approximation. — Nous prenons dans les seconds membres y_2, z_2, τ_2 comme valeurs de y, z, τ, puis

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= 4\mathrm{J}_1(e) = 4\mathrm{J}_1(e_0) + 4z_2\left(\frac{d\mathrm{J}_1}{de}\right)_0 + 2z_2^2\left(\frac{d^2\mathrm{J}_1}{de^2}\right)_0\\
&= 4\mathrm{J}_1(e_0) - 2\mathrm{B}\frac{1-e_0^2}{e_0}\left(\frac{d\mathrm{J}_1}{de}\right)_0(t-t_0) + \frac{1-e_0^2}{e_0}\left[\mathrm{B}\frac{1-e_0^2}{2e_0}\left(\frac{d^2\mathrm{J}_1}{de^2}\right)_0 - \alpha\left(\frac{d\mathrm{J}_1}{de}\right)_0\right](t-t_0)^2\\
&= \alpha_1^0 - \alpha_1^1(t-t_0) + \alpha_1^2(t-t_0)^2,
\end{aligned}$$

$$\cos\frac{2\pi(t-\tau)}{\mathrm{P}} = \cos\left\{\frac{2\pi(t-\tau)}{\mathrm{T}}\left[1-\frac{3}{2}\frac{y}{a_0}+\frac{15}{8}\left(\frac{y}{a_0}\right)^2\right]\right\},$$

ou, en développant jusqu'aux termes en $(t-t_0)^2$:

$$\begin{aligned}
\cos\frac{2\pi(t-\tau)}{\mathrm{P}} &= \cos\frac{2\pi(t-\tau_0)}{\mathrm{T}} - (t-t_0)\left[\frac{2\pi\nu}{\mathrm{T}}\sin\frac{2\pi(t-\tau_0)}{\mathrm{T}} + \frac{3\pi}{\mathrm{T}}\mathrm{A}(t-\tau_0)\sin\frac{2\pi(t-\tau_0)}{\mathrm{T}}\right]\\
&+ (t-t_0)^2\left\{\begin{aligned}
&\frac{2\pi\nu'}{\mathrm{T}}\sin\frac{2\pi(t-\tau_0)}{\mathrm{T}} - \frac{2\pi^2\nu^2}{\mathrm{T}^2}\cos\frac{2\pi(t-\tau_0)}{\mathrm{T}} - \frac{3\pi}{\mathrm{T}}\mathrm{A}\nu\left[\sin\frac{2\pi(t-\tau_0)}{\mathrm{T}} + \frac{2\pi(t-\tau_0)}{\mathrm{T}}\cos\frac{2\pi(t-\tau_0)}{\mathrm{T}}\right.\\
&-\frac{3\pi}{2\mathrm{T}}\alpha(t-\tau_0)\sin\frac{2\pi(t-\tau_0)}{\mathrm{T}} - \mathrm{A}^2\left[\frac{15}{4}\frac{\pi(t-\tau_0)}{\mathrm{T}}\sin\frac{2\pi(t-\tau_0)}{\mathrm{T}} + \frac{9}{2}\frac{\pi^2(t-\tau_0)^2}{\mathrm{T}^2}\cos\frac{2\pi(t-\tau_0)}{\mathrm{T}}\right.
\end{aligned}\right.
\end{aligned}$$

d'où, en négligeant les termes périodiques :

$$\begin{aligned}
\cos\frac{2\pi t}{\mathrm{T}}\cos\frac{2\pi(t-\tau)}{\mathrm{P}} &= \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi\tau_0}{\mathrm{T}} - (t-t_0)\cos\frac{2\pi t}{\mathrm{T}}\left[\frac{2\pi\nu}{\mathrm{T}}\sin\frac{2\pi(t-\tau_0)}{\mathrm{T}} + \frac{3\pi}{\mathrm{T}}\mathrm{A}(t-\tau_0)\sin\frac{2\pi(t-\tau_0)}{\mathrm{T}}\right]\\
&+ (t-t_0)^2\cos\frac{2\pi t}{\mathrm{T}}\left\{\begin{aligned}
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.
\end{aligned}$$

$$\left\{\frac{d}{dt}\left[\cos\frac{2\pi t}{T}\cos\frac{2\pi(t-\tau)}{P}\right]\right\}_0 = -\cos\frac{2\pi t_0}{T}\sin\frac{2\pi(t_0-\tau_0)}{T}\left[\frac{2\pi\nu}{T}+\frac{3\pi}{T}A(t_0-\tau_0)\right],$$

$$\begin{aligned}
&\left\{\frac{d^2}{dt^2}\left[\cos\frac{2\pi t}{T}\cos\frac{2\pi(t-\tau)}{P}\right]\right\}_0\\
&\quad = 2\cos\frac{2\pi t_0}{T}\left\{\begin{aligned}&\frac{2\pi\nu'}{T}\sin\frac{2\pi(t_0-\tau_0)}{T}-\frac{2\pi^2\nu^2}{T^2}\cos\frac{2\pi(t_0-\tau_0)}{T}-\frac{3\pi}{T}A\nu\left[\sin\frac{2\pi(t_0-\tau_0)}{T}+\frac{2\pi(t_0-\tau_0)}{T}\cos\frac{2\pi(t_0-\tau_0)}{T}\right]\\
&-\frac{3\pi}{2T}\alpha(t_0-\tau_0)\sin\frac{2\pi(t_0-\tau_0)}{T}-A^2\left[\frac{15}{4}\frac{\pi(t_0-\tau_0)}{T}\sin\frac{2\pi(t_0-\tau_0)}{T}+\frac{9}{2}\frac{\pi^2(t_0-\tau_0)^2}{T^2}\cos\frac{2\pi(t_0-\tau_0)}{T}\right]\end{aligned}\right\}\\
&\quad -\frac{4\pi}{T}\cos\left(\frac{4\pi t_0}{T}-\frac{2\pi\tau_0}{T}\right)\left[\frac{2\pi\nu}{T}+\frac{3\pi}{T}A(t_0-\tau_0)\right]-\frac{3\pi}{T}A\left[\sin\left(\frac{4\pi t_0}{T}-\frac{2\pi\tau_0}{T}\right)-\sin\frac{2\pi\tau_0}{T}\right]=\mathcal{A},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin\frac{2\pi t}{T}\cos\frac{2\pi(t-\tau)}{P} &= \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi\tau_0}{T}-(t-t_0)\sin\frac{2\pi t}{T}\left[\frac{2\pi\nu}{T}\sin\frac{2\pi(t-\tau_0)}{T}+\frac{3\pi}{T}A(t-\tau_0)\sin\frac{2\pi(t-\tau_0)}{T}\right]\\
&\quad +(t-t_0)^2\sin\frac{2\pi t}{T}\left\{\begin{aligned}&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\},
\end{aligned}$$

$$\left\{\frac{d}{dt}\left[\sin\frac{2\pi t}{T}\cos\frac{2\pi(t-\tau)}{P}\right]\right\}_0 = -\sin\frac{2\pi t_0}{T}\sin\frac{2\pi(t_0-\tau_0)}{T}\left[\frac{2\pi\nu}{T}+\frac{3\pi}{T}A(t_0-\tau_0)\right],$$

$$\begin{aligned}
&\left\{\frac{d^2}{dt^2}\left[\sin\frac{2\pi t}{T}\cos\frac{2\pi(t-\tau)}{P}\right]\right\}_0\\
&\quad = 2\sin\frac{2\pi t_0}{T}\left\{\begin{aligned}&\frac{2\pi\nu'}{T}\sin\frac{2\pi(t_0-\tau_0)}{T}-\frac{2\pi^2\nu^2}{T^2}\cos\frac{2\pi(t_0-\tau_0)}{T}-\frac{3\pi}{T}A\nu\left[\sin\frac{2\pi(t_0-\tau_0)}{T}+\frac{2\pi(t_0-\tau_0)}{T}\cos\frac{2\pi(t_0-\tau_0)}{T}\right]\\
&-\frac{3\pi}{2T}\alpha(t_0-\tau_0)\sin\frac{2\pi(t_0-\tau_0)}{T}-A^2\left[\frac{15}{4}\frac{\pi(t_0-\tau_0)}{T}\sin\frac{2\pi(t_0-\tau_0)}{T}+\frac{9}{2}\frac{\pi^2(t_0-\tau_0)^2}{T^2}\cos\frac{2\pi(t_0-\tau_0)}{T}\right]\end{aligned}\right\}\\
&\quad -\frac{4\pi}{T}\sin\left(\frac{4\pi t_0}{T}-\frac{2\pi\tau_0}{T}\right)\left[\frac{2\pi\nu}{T}+\frac{3\pi}{T}A(t_0-\tau_0)\right]-\frac{3\pi}{T}A\left[\cos\frac{2\pi\tau_0}{T}-\cos\left(\frac{4\pi t_0}{T}-\frac{2\pi\tau_0}{T}\right)\right]=\mathcal{B}.
\end{aligned}$$

On aura alors

$$\left\{\begin{aligned}
&-\frac{1}{a_0}\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = A,\\
&-\frac{1}{a_0}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)_0 = -\alpha_1^0\left(\mu_1\cos\frac{2\pi t_0}{T}+\pi_1\sin\frac{2\pi t_0}{T}\right)\sin\frac{2\pi(t_0-\tau_0)}{T}\left[\frac{2\pi\nu}{T}+\frac{3\pi}{T}A(t_0-\tau_0)\right]\\
&\qquad\qquad -\frac{\alpha_1^1}{2}\left(\mu_1\cos\frac{2\pi\tau_0}{T}+\pi_1\sin\frac{2\pi\tau_0}{T}\right)=A',\\
&-\frac{1}{a_0}\left(\frac{d^3y}{dt^3}\right)_0 = \alpha_1^0(\mathcal{A}\mu_1+\mathcal{B}\pi_1)+2\alpha_1^1\sin\frac{2\pi(t_0-\tau_0)}{T}\left(\mu_1\cos\frac{2\pi t_0}{T}+\pi_1\sin\frac{2\pi t_0}{T}\right)\left[\frac{2\pi\nu}{T}+\frac{3\pi}{T}A(t_0-\tau_0)\right]\\
&\qquad\qquad +\alpha_1^2\left(\mu_1\cos\frac{2\pi\tau_0}{T}+\pi_1\sin\frac{2\pi\tau_0}{T}\right)=A''.
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &-\frac{2e_0}{1-e_0^2}\left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = \mathrm{B} = \mathrm{A}-\mu_0,\\ &-\frac{2e_0}{1-e_0^2}\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)_0 = \mathrm{A}',\\ &-\frac{2e_0}{1-e_0^2}\left(\frac{d^3z}{dt^3}\right)_0 = \mathrm{A}''. \end{aligned}\right.$$

On en déduit

$$\left\{\begin{aligned} y &= -a_0\left[\mathrm{A}(t-t_0)+\frac{\mathrm{A}'}{2}(t-t_0)^2+\frac{\mathrm{A}''}{6}(t-t_0)^3\right],\\ z &= -\frac{1-e_0^2}{2e_0}\left[(\mathrm{A}-\mu_0)(t-t_0)+\frac{\mathrm{A}'}{2}(t-t_0)^2+\frac{\mathrm{A}''}{6}(t-t_0)^3\right]. \end{aligned}\right.$$

72. — Application aux Céphéides. — Devant la complication des résultats et la difficulté d'application, nous allons chercher des résultats d'ordre statistique.

Tout d'abord, nous pourrons, sans diminuer la généralité, donner à t une valeur particulière : nous choisirons zéro.

A, A′, A″, deviennent alors des fonctions de τ_0, que nous remplacerons par leurs valeurs moyennes lorsque τ_0 varie entre $-\frac{\mathrm{T}}{2}$ et $+\frac{\mathrm{T}}{2}$. Nous poserons $\lambda = \frac{2\pi\tau_0}{\mathrm{T}}$ et nous ferons varier λ entre $-\pi$ et $+\pi$. On trouve ainsi, les traits indiquant que l'on a pris des valeurs moyennes :

$$\overline{\mathrm{A}} = \mu_0,$$

$$\overline{\mathrm{A}'} = \alpha_1^0\mu_1\left[\frac{3\alpha_1^0\mu_1}{16}-\frac{3\mu_0}{2}-\frac{\gamma_1^0\mu_1}{4}\right]-\frac{1-e_0^2}{4e_0}\left(\frac{d\mathrm{J}_1}{de}\right)_0\alpha_1^0(\mu_1^2+\pi_1^2),$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{A}''} = {}&\alpha_1^0\mu_1\left[\frac{3}{4}\gamma_1^0\mu_0\mu_1-\frac{1}{4}\delta_1^0\pi_1+\frac{1}{4}\alpha_1^0\gamma_1^0\pi_1^2+\frac{3}{4}\mu_0^2+\frac{(\alpha_1^0)^2\mu_1^2}{16}-\frac{3}{8}(\alpha_1^0)^2\pi_1^2-\frac{3}{16}\alpha_1^0\mu_0\mu_1\right]\\ &-\frac{2\pi}{\mathrm{T}}\alpha_1^0\pi_1\left[\gamma_1^0\mu_1+3\left(\mu_0-\frac{\alpha_1^0\mu_1}{4}\right)\right]+\frac{1-e_0^2}{e_0}\left(\frac{d\mathrm{J}_1}{de}\right)_0\alpha_1^0\left[\begin{aligned}&\frac{5}{8}\mu_0\mu_1^2+\frac{\gamma_1^0\mu_1}{8}(\mu_1^2+\pi_1^2)+2\mu_0\pi_1^2+\frac{3}{16}\alpha_1^0\mu_1^2\pi_1\\ &+\frac{17}{64}\alpha_1^0\mu_1^3+\frac{37}{64}\alpha_1^0\mu_1\pi_1^2\end{aligned}\right]\end{aligned}$$

Si l'on néglige ensuite les puissances de e supérieures à la seconde, on obtient :

$$\overline{\mathrm{A}} = \mu_0,$$

$$\overline{\mathrm{A}'} = e_0^2\frac{11\mu_1^2+3\pi_1^2}{8}-3e_0\mu_0\mu_1-\frac{3\mu_1^2+\pi_1^2}{4},$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{A}''} = {}&e_0^2\left[\frac{5\pi}{\mathrm{T}}\mu_1\pi_1-\frac{3\mu_0}{2}\left(\frac{13\mu_1^2}{8}+2\pi_1^2\right)\right]+e_0\left[\frac{3\mu_0^2\mu_1}{2}-\frac{12\pi}{\mathrm{T}}\mu_0\pi_1+\frac{\mu_1^3}{16}+\frac{27\mu_1\pi_1^2}{16}+\frac{3\mu_1^2\pi_1}{8}\right]\\ &+\left[\frac{17}{8}\mu_0\mu_1^2+2\mu_0\pi_1^2-\frac{4\pi}{\mathrm{T}}\mu_1\pi_1\right]+\mu_1\frac{\mu_1^2+\pi_1^2}{4e_0}.\end{aligned}$$

Au point de vue pratique, ce que l'on connaît, ce ne sont pas les valeurs de μ_0, μ_1, μ_2, mais c'est la courbe de lumière de la Céphéide. Portons en abcisses le temps, en ordonnées la magnitude, et supposons que la courbe obtenue, qui a pour période T, puisse être représentée avec une approximation suffisante par une équation de la forme

$$m = m_0 + m_1 \cos \frac{2\pi t}{T} + m_2 \sin \frac{2\pi t}{T}. \tag{75}$$

E désignant l'éclat de l'étoile, on a

$$\frac{dM}{dt} = KE \qquad (K = c^{te}),$$

et, d'autre part

$$m = -2{,}5 \log E,$$

d'où

$$m = -2{,}5 \log \frac{1}{K} \frac{dM}{dt},$$

$$\frac{dM}{dt} = Ke^{-0{,}4m} = Ke^{-0{,}4m_0} e^{-0{,}4m_1 \cos \frac{2\pi t}{T} - 0{,}4m_2 \sin \frac{2\pi t}{T}} \qquad (e, \text{ base des logarithmes népériens}),$$

d'où l'égalité approchée :

$$\frac{1}{M} \frac{dM}{dt} = \frac{Ke^{-0{,}4m_0}}{M} \left[1 - 0{,}4m_1 \cos \frac{2\pi t}{T} - 0{,}4m_2 \sin \frac{2\pi t}{T}\right].$$

La comparaison de cette formule avec

$$\frac{1}{M} \frac{dM}{dt} = \mu_0 + \mu_1 \cos \frac{2\pi t}{T} + \pi_1 \sin \frac{2\pi t}{T},$$

donne

$$\frac{\mu_1}{\mu_0} = -0{,}4m_1, \qquad \frac{\mu_2}{\mu_0} = -0{,}4m_2.$$

De plus, la courbe de lumière est rapportée à une origine du temps différente de l'instant que nous considérons, de sorte que m_1 et m_2 sont de la forme

$$\left\{\begin{aligned} m_1 &= m_1^0 \cos \frac{2\pi t_0}{T} - m_2^0 \sin \frac{2\pi t_0}{T}, \\ m_2 &= m_1^0 \sin \frac{2\pi t_0}{T} + m_2^0 \cos \frac{2\pi t_0}{T}, \end{aligned}\right.$$

si m_1^0 et m_2^0 sont les valeurs de m_1 et m_2 lorsqu'on prend comme origine du temps l'instant considéré.

Nous remplacerons encore tous les termes dépendant de m_1, m_2 par leur valeur moyenne lorsque t_0 varie entre $-\frac{T}{2}$ et $+\frac{T}{2}$.

On obtient ainsi, en désignant par $\overline{\overline{A}}$, $\overline{\overline{A'}}$, $\overline{\overline{A''}}$ les nouvelles valeurs moyennes de A, A', A'' :

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{A}} &= \mu_0, \\
\overline{\overline{A'}} &= \mu_0^2(0{,}14\,e_0^2 - 0{,}08)\,[(m_1^0)^2 + (m_2^0)^2], \\
\overline{\overline{A''}} &= \mu_0^3(2{,}17 - 0{,}43\,e_0^2)\,[(m_1^0)^2 + (m_2^0)^2].
\end{aligned}$$

Nous arrivons donc en définitive à

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{y}{a_0} &= -\mu_0(t-t_0) - \mu_0^2(0{,}07\,e_0^2 - 0{,}04)\,[(m_1^0)^2 + (m_2^0)^2]\,(t-t_0)^2 - \frac{\mu_0^3}{6}(2{,}17 - 0{,}43\,e_0^2)\,[(m_1^0)^2 + (m_2^0)^2]\,(t-t_0)^3, \\
\frac{2e_0}{1-e_0^2}\,z &= -\mu_0^2(0{,}07\,e_0^2 - 0{,}04)\,[(m_1^0)^2 + (m_2^0)^2]\,(t-t_0)^2 - \frac{\mu_0^3}{6}(2{,}17 - 0{,}43\,e_0^2)\,[(m_1^0)^2 + (m_2^0)^2]\,(t-t_0)^3,
\end{aligned}\right.$$

ces équations n'étant valables que pour des valeurs de $t - t_0$ suffisamment petites.

Nous avons indiqué là une méthode. Quand on cherche à représenter effectivement la courbe de lumière d'une Céphéide, on s'aperçoit que la formule (75) est insuffisante en général. Il y aurait donc lieu, en vue des applications, d'introduire les termes suivants dans l'expression de la magnitude et de pousser en conséquence plus loin les développements des seconds membres des équations (74).

CHAPITRE XIII

Mouvement d'une planète ou d'une comète dans un milieu résistant.

73. — Équations qui définissent les éléments osculateurs. — Considérons une planète de masse variable m attirée par le Soleil; soit M la somme des masses de ces deux corps. Supposons le Soleil fixe et la planète soumise à une résistance de milieu mF opposée à la vitesse.

Soit à chaque instant une orbite osculatrice qui serait décrite par la planète dont aurait immobilisé la masse à cet instant et qui ne serait pas soumise à la résistance du milieu.

En désignant par v l'anomalie vraie, les résultats qui précèdent et ceux indiqués par Tisserand (*Traité de Mécanique céleste*, t. IV, chap. XIII) permettent d'écrire rapidement les équations qui fournissent les variations des éléments elliptiques de la planète. On obtient ainsi :

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= -\frac{2\mathrm{F}}{n\sqrt{1-e^2}}\sqrt{1+e^2+2e\cos v} - \frac{a}{\mathrm{M}}\,\frac{1+e\cos u}{1-e\cos u}\,\frac{d\mathrm{M}}{dt},\\
\frac{de}{dt} &= -\frac{2\mathrm{F}\sqrt{1-e^2}}{na}\,\frac{\cos v+e}{\sqrt{1+e^2+2e\cos v}} - \frac{(1-e^2)\cos u}{\mathrm{M}(1-e\cos u)}\,\frac{d\mathrm{M}}{dt},\\
e\frac{d\varpi}{dt} &= -\frac{2\mathrm{F}\sqrt{1-e^2}}{na}\,\frac{\sin v}{\sqrt{1+e^2+2e\cos v}} - \frac{\sqrt{1-e^2}\sin u}{\mathrm{M}(1-e\cos u)}\,\frac{d\mathrm{M}}{dt},\\
\frac{d\chi_1}{dt} &= \frac{2\mathrm{F}(1-e^2)\sin v}{nae\sqrt{1+e^2+2e\cos v}}\left(1+\frac{e^2}{1+e\cos v}\right) + \frac{(1-e^3\cos u)\sin u}{\mathrm{M}e(1-e\cos u)}\,\frac{d\mathrm{M}}{dt}.
\end{aligned}\right.$$

V étant la vitesse de la planète, r sa distance au Soleil, nous supposerons que la résistance est de la forme

$$\mathrm{F} = k\frac{\mathrm{V}^{2p}}{r^q} = k\,n^{2p}a^{2p-q}\,\frac{(1+e\cos u)^p}{(1-e\cos u)^{p-q}},$$

k, p et q étant des constantes.

Les équations précédentes deviennent, en introduisant l'anomalie excentrique à la place de l'anomalie vraie :

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= -\alpha \mathrm{M}^{p-\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}-p-q} \frac{(1+e\cos u)^{p+\frac{1}{2}}}{(1-e\cos u)^{p+q+\frac{1}{2}}} - \frac{a}{\mathrm{M}} \frac{1+e\cos u}{1-e\cos u} \frac{d\mathrm{M}}{dt},\\
\frac{de}{dt} &= -\alpha(1-e^2) \mathrm{M}^{p-\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}-p-q} \frac{(1+e\cos u)^{p-\frac{1}{2}}}{(1-e\cos u)^{p+q+\frac{1}{2}}} \cos u - \frac{(1-e^2)\cos u}{\mathrm{M}(1-e\cos u)} \frac{d\mathrm{M}}{dt},\\
e\frac{d\varpi}{dt} &= -\alpha\sqrt{1-e^2}\, \mathrm{M}^{p-\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}-p-q} \frac{(1+e\cos u)^{p-\frac{1}{2}}}{(1-e\cos u)^{p+q+\frac{1}{2}}} \sin u - \frac{\sqrt{1-e^2}\sin u}{\mathrm{M}(1-e\cos u)} \frac{d\mathrm{M}}{dt},\\
e\frac{d\varkappa_1}{dt} &= \alpha \mathrm{M}^{p-\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}-p-q} \frac{(1+e\cos u)^{p-\frac{1}{2}}}{(1-e\cos u)^{p+q+\frac{1}{2}}} (1-e^3\cos u)\sin u + \frac{(1-e^3\cos u)\sin u}{\mathrm{M}(1-e\cos u)} \frac{d\mathrm{M}}{dt},
\end{aligned}\right.$$

$$\alpha = 2kf^{p-\frac{1}{2}}.$$

74. — Inégalités séculaires. — Pratiquement, la variation de M est très lente; nous pouvons donc supposer $\frac{d\mathrm{M}}{dt}$ constant pendant un temps très long. Pour avoir les termes séculaires qui, seuls, nous importent, nous pouvons prendre les valeurs moyennes des seconds membres pendant une révolution. On obtiendrait les mêmes résultats en supposant que M varie avec une période différente de celle de la révolution de la planète.

Les traits indiquant des valeurs moyennes, on a :

$$\overline{\frac{1+e\cos u}{1-e\cos u}} = 1, \qquad \overline{\frac{\cos u}{1-e\cos u}} = \overline{\frac{\sin u}{1-e\cos u}} = \overline{\frac{\sin u \cos u}{1-e\cos u}} = 0,$$

$$\overline{\frac{(1+e\cos u)^{p-\frac{1}{2}}}{(1-e\cos u)^{p+\frac{1}{2}}}\sin u} = \overline{\frac{(1+e\cos u)^{p-\frac{1}{2}}}{(1-e\cos u)^{p+\frac{1}{2}}}\sin u\cos u} = 0.$$

Quel que soit p, on a donc

$$\frac{d\varpi}{dt} = \frac{d\varkappa_1}{dt} = 0,$$

d'où :

$$\varpi = \text{const.}, \qquad \varkappa_1 = \text{const.}.$$

La direction du périhélie reste fixe, ainsi que la longitude moyenne de l'époque zéro.

La relation

$$\frac{1}{a}\frac{da}{dt}+\frac{1}{\mathrm{M}}\frac{d\mathrm{M}}{dt}=-\alpha\mathrm{M}^{p-\frac{1}{2}}a^{\frac{3}{2}-p-q}\,\overline{\frac{(1+e\cos u)^{p+\frac{1}{2}}}{(1-e\cos u)^{p+q+\frac{1}{2}}}}$$

montre que *le produit* $a\mathrm{M}$ *va continuellement en décroissant.*

Si donc M va en croissant, ce qui serait le cas de la Terre par suite de la chute des météorites, a décroît : *la Terre se rapprocherait du Soleil.*

Une intégration par parties donne

$$\int_0^{2\pi}\frac{(1+e\cos u)^{p-\frac{1}{2}}}{(1-e\cos u)^{p+q-\frac{1}{2}}}\cos u\,du$$

$$=\frac{e}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 u\,\frac{(1+e\cos u)^{p-\frac{3}{2}}}{(1-e\cos u)^{p+q+\frac{1}{2}}}\left[(2p-1)(1-e\cos u)+(2p+2q-1)(1+e\cos u)\right]du,$$

d'où l'inégalité

$$\overline{\frac{(1+e\cos u)^{p-\frac{1}{2}}}{(1-e\cos u)^{p+q+\frac{1}{2}}}\cos u}>0 \qquad \text{pour} \quad p>\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad q>0.$$

Dans ces conditions,

$$\frac{de}{dt}=-\alpha(1-e^2)\mathrm{M}^{p-\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}-p-q}\,\overline{\frac{(1+e\cos u)^{p-\frac{1}{2}}}{(1-e\cos u)^{p+q+\frac{1}{2}}}\cos u}$$

est négatif, et l'excentricité va continuellement en décroissant.

Si, au contraire, on a

$$p<\frac{1}{2}, \qquad q<0,$$

l'excentricité va continuellement en croissant.

Mais l'hypothèse $q<0$, qui correspond à une résistance qui augmenterait avec la distance au Soleil, ne semble pas se présenter dans la réalité.

Cas particuliers.

75. — Dans le cas simple

$$p = \frac{1}{2}, \qquad q = 0,$$

on a

$$\frac{1}{a}\frac{da}{dt} + \frac{1}{M}\frac{dM}{dt} = -2k,$$

$$\frac{de}{dt} = 0.$$

On en déduit, en prenant l'origine de temps à l'instant considéré :

$$aM = a_0 M_0 E^{-2kt}, \qquad e = \text{const.}.$$

Si la résistance, indépendante de la distance au Soleil, est proportionnelle à la vitesse, le produit du demi-grand axe par la masse va en décroissant comme une exponentielle, l'excentricité reste constante.

Si la masse varie suivant une loi exponentielle, il en sera de même du grand axe.

76. — Envisageons encore le cas d'une résistance indépendante de la distance au Soleil et proportionnelle au cube de la vitesse (les calculs sont plus simples que dans le cas du carré) :

$$p = \frac{3}{2},$$

$$\overline{\left(\frac{1 + e\cos u}{1 - e\cos u}\right)^{p+\frac{1}{2}}} = \frac{4 - 3\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2}}, \qquad \overline{\frac{(1+e\cos u)^{p-\frac{1}{2}}}{(1-e\cos u)^{p+\frac{1}{2}}}\cos u} = \frac{2}{e}\,\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2}}.$$

Les variations séculaires de a et e sont données par les deux équations

$$\frac{1}{a}\frac{da}{dt} + \frac{1}{M}\frac{dM}{dt} = -\alpha\frac{M}{a}\,\frac{4 - 3\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2}},$$

$$\frac{e}{\sqrt{1-e^2}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)}\,\frac{de}{dt} = -2\alpha\frac{M}{a}.$$

77. — Si la résistance est proportionnelle à la vitesse et inversement proportionnelle à la distance au Soleil :

$$p = \frac{1}{2}, \qquad q = 1,$$

on trouve de même les équations

$$\frac{da}{dt} + \frac{a}{M}\frac{dM}{dt} = -\alpha\frac{2-\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2}},$$

$$\frac{e}{\sqrt{1-e^2}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)}\frac{de}{dt} = -\frac{\alpha}{a}.$$

78. — Quoique n'ayant probablement pas d'application pratique, signalons le cas où

$$p+q=\frac{1}{2}.$$

On a alors

$$\frac{de}{dt} = -\alpha(1-e^2)M^{p-\frac{1}{2}}\frac{(1+e\cos u)^{p-\frac{1}{2}}}{1-e\cos u}\cos u,$$

équation à variables séparées, donc qui se ramène aux quadratures.

On a ensuite

$$\frac{1}{a}\frac{da}{dt} + \frac{1}{M}\frac{dM}{dt} = -\alpha M^{p-\frac{1}{2}}\frac{(1+e\cos u)^{p+\frac{1}{2}}}{1-e\cos u},$$

qui donne le produit aM par une quadrature.

Appliquons au cas d'une résistance proportionnelle à la fois au cube de la vitesse et à la distance au Soleil :

$$p=\frac{3}{2}, \qquad q=1.$$

On a :

$$\frac{(1+e\cos u)^{p-\frac{1}{2}}}{1-e\cos u}\cos u = \frac{e}{2}, \qquad \frac{(1+e\cos u)^{p-\frac{1}{2}}}{1-e\cos u} = 1+\frac{e^2}{2},$$

d'où

$$\frac{2}{e(1-e^2)}\frac{de}{dt} + \alpha M = 0,$$

qui donne

$$e^2 = \frac{KE^{-\alpha\mu}}{KE^{-\alpha\mu}-1}, \qquad \left(K = \text{const.}, \qquad \mu = \int M\,dt\right),$$

puis

$$\frac{1}{a}\frac{da}{dt} + \frac{1}{M}\frac{dM}{dt} = -\alpha M\frac{3KE^{-\alpha\mu}-2}{2(KE^{-\alpha\mu}-1)},$$

qui donne

$$a = \frac{K_1}{M} E^{-\frac{\alpha}{2}\mu_1}, \qquad \left(K_1 = \text{const.}, \qquad \mu_1 = \int M \frac{3KE^{-\alpha\mu} - 2}{KE^{-\alpha\mu} - 1} dt\right).$$

79. — Cas d'une excentricité négligeable. — Si l'on suppose l'excentricité négligeable, on a

$$\frac{de}{dt} = 0, \qquad e = \text{const.}$$

et

$$\frac{da}{dt} = -\alpha M^{p-\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}-p-q} - \frac{a}{M}\frac{dM}{dt},$$

équation qui, écrite sous la forme

$$a^{p+q-\frac{3}{2}}\frac{da}{dt} + \frac{a^{p+q-\frac{1}{2}}}{M}\frac{dM}{dt} = -\alpha M^{p-\frac{1}{2}},$$

nous amène à poser

$$aM = C.$$

C est alors donné par l'équation

$$C^{p+q-\frac{3}{2}}\frac{dC}{dt} = -\alpha M^{2p+q-1}.$$

On trouve

$$C = \left[K - \alpha\left(p + q - \frac{1}{2}\right)\int M^{2p+q-1}\,dt\right]^{\frac{2}{2(p+q)-1}},$$

d'où

$$a = \frac{1}{M}\left[K - \alpha\left(p + q - \frac{1}{2}\right)\int M^{2p+q-1}\,dt\right]^{\frac{2}{2(p+q)-1}}.$$

Remarquons que ce calcul écarte l'hypothèse $p + q = \frac{1}{2}$. On voit directement dans ce cas que l'on a

$$a = \frac{K}{M} E^{-\alpha\mu},$$

avec

$$\mu = \int M^{p-\frac{1}{2}} dt.$$

TABLE DES MATIÈRES DE CE MÉMOIRE