ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

LOUIS POLI

Sur les propriétés infinitésimales des mouvements à deux paramètres

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 26 (1934), p. 187-302
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1934_3_26__187_0>

SUR LES PROPRIÉTÉS INFINITÉSIMALES

DES MOUVEMENTS A DEUX PARAMÈTRES

Par M. Louis POLI.

INTRODUCTION

Coordonnées de position d'un solide

1. — Soit un trièdre mobile T dont la position dépend de n paramètres $u_i (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$.

Si l'on fait varier le seul paramètre u_i, le trièdre prend un mouvement dont nous appellerons $\xi_i \eta_i \zeta_i p_i q_i r_i$ les translations et les rotations projetées sur le trièdre mobile T lui-même.

On sait que les quantités ξ_i, p_i ne sont pas arbitraires. Elles sont liées entre elles par les conditions

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial p_j}{\partial u_i} - \frac{\partial p_i}{\partial u_j} &= q_j r_i - q_i r_j, \\ \frac{\partial q_j}{\partial u_i} - \frac{\partial q_i}{\partial u_j} &= r_j p_i - r_i p_j, \\ \frac{\partial r_j}{\partial u_i} - \frac{\partial r_i}{\partial u_j} &= p_j q_i - p_i q_j, \end{aligned} \right.$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \xi_j}{\partial u_i} - \frac{\partial \xi_i}{\partial u_j} &= q_j \zeta_i - q_i \zeta_j + \eta_j r_i - \eta_i r_j, \\ \frac{\partial \eta_j}{\partial u_i} - \frac{\partial \eta_i}{\partial u_j} &= r_j \xi_i - r_i \xi_j + \zeta_j p_i - \zeta_i p_j, \\ \frac{\partial \zeta_j}{\partial u_i} - \frac{\partial \zeta_i}{\partial u_j} &= p_j \eta_i - p_i \eta_j + \xi_j q_i - \xi_i q_j. \end{aligned} \right.$$

Réciproquement si les $6\,n$ quantités $\xi_i \eta_i \zeta_i p_i q_i r_i$ vérifient ces $3\,n(n-1)$ conditions, il leur correspond un mouvement à n paramètres. — Tout ceci est bien connu.

2. — Intégration de ce système. — Considérons le système des équations différentielles (1) et (2). Il n'est pas difficile de l'intégrer. On sait, en effet, que la solution générale est donnée par le mouvement à n paramètres d'un trièdre mobile.

Il suffit donc d'exprimer la position d'un trièdre mobile en fonction des 6 coordonnées dont elle dépend. On suppose ensuite ces 6 coordonnées fonction des n quantités u_i, et on calcule les rotations et translations. Il est une solution particulièrement élégante.

Considérons d'abord le système (1).

Il ne dépend que des rotations. — Les quantités p_i, q_i, r_i resteraient les mêmes si on remplaçait le trièdre T par un autre qui lui serait parallèle. On pourra prendre un trièdre de sommet fixe. Rodrigues a montré qu'on peut déterminer la position d'un solide qui a un point fixe avec 4 paramètres homogènes $\rho\lambda\mu\nu$.

Les cosinus et, par suite, les rotations, s'expriment de façon rationnelle.

On aura

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} p_i = 2\left[+\rho\dfrac{\partial\lambda}{\partial u_i} - \lambda\dfrac{\partial\rho}{\partial u_i} + \nu\dfrac{\partial\mu}{\partial u_i} - \mu\dfrac{\partial\nu}{\partial u_i}\right], \\ q_i,\ r_i = \text{des expressions analogues en permutant circulairement } \lambda,\ \mu \text{ et } \nu \end{array}\right.$$

nous avons supposé $\rho^2 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$ pour simplifier.

Ces formules (3) résolvent le système (1).

3. — Pour résoudre le second système, il suffit de noter qu'il représente les équations aux variations du système (1).

En remplaçant dans (1) $p_i q_i r_i$ par $p_i + \varepsilon\xi_i$, $q_i + \varepsilon\eta_i$, $r_i + \varepsilon\zeta_i$ et convenant de négliger dans les calculs toutes les puissances de ε supérieures à la première, les équations (1) condensent, comme le remarque M. Pérès [1], l'ensemble (1) et (2).

Il suffit par suite, en vertu des propriétés connues des équations aux variations, de remplacer ρ, λ, μ, ν par $\rho + \varepsilon r$, $\lambda + \varepsilon l$, $\mu + \varepsilon m$, $\nu + \varepsilon n$ dans la solution (3) du premier système pour avoir la solution du second.

On trouve ainsi

$$\xi_i = 2\left[+\rho\frac{\partial l}{\partial u_i} - \lambda\frac{\partial r}{\partial u_i} + \nu\frac{\partial m}{\partial u_i} - \mu\frac{\partial n}{\partial u_i} + r\frac{\partial\lambda}{\partial u_i} - l\frac{\partial\rho}{\partial u_i} + n\frac{\partial\mu}{\partial u_i} - m\frac{\partial\nu}{\partial u_i}\right]$$

et 2 équations analogues pour η_i et ζ_i en permutant circulairement λ, μ, ν et aussi l, m, n.

---

[1] *C. R.*, 8 mars 1926.
Voir aussi Buhl. *Aperçus sur la théorie des groupes*, p. 41, 42 (Mémorial des Sc. math.) et Ann. de Toulouse, 1927, p. 21.

On définit ainsi 8 coordonnées (ρ, λ, μ, ν, r, l, m, n) pour fixer la position d'un solide.

Ces 8 coordonnées, généralisation des 4 paramètres de Rodrigues, ont été dégagées d'abord par Study comme application des nombres complexes.

Retrouvées ensuite par Bricard, elles ont été étudiées par Cailler comme représentation d'un quaternion complexe (1).

4. — Coordonnées complexes. — Les nombres complexes de la forme $a + b\varepsilon$ avec $\varepsilon^2 = 0$ permettent, en effet, de ramener à 3 cosinus complexes les 6 coordonnées de Plucker d'une droite.

Elles ramènent aux 4 paramètres de Rodrigues, les 8 paramètres de position d'un solide.

C'est-à-dire qu'elles établissent une relation entre la géométrie des droites de l'espace et la géométrie des droites passant par l'origine.

Et de même, une relation entre la cinématique du solide libre, et la cinématique du solide à point fixe,

Tout théorème démontré pour un trièdre à point fixe, donne, lorsqu'on y suppose les coordonnées complexes, deux théorèmes pour le trièdre général.

En particulier, on peut introduire, à côté des quaternions représentatifs d'une rotation, des quaternions complexes (ou bi-quaternions de Clifford) (2) représentatifs d'un mouvement hélicoïdal.

Nous nous servirons souvent des coordonnées complexes pour abréger la rédaction en condensant les formules.

L'expression « complexe » signifiera donc, dans tout le cours de ce travail, des nombres de la forme : $a + b\varepsilon$.

Nous réserverons aux nombres complexes ordinaires : $a + bi$ le nom d'imaginaires.

Semblablement, le terme « réel » signifiera : qui ne contient pas de termes en ε.

Si nous voulons désigner un nombre qui n'est pas imaginaire, nous écrirons *réel* en italique.

Nous désignons, en général, par la même lettre, un nombre complexe et sa partie réelle. Il n'en peut résulter de confusion : a deviendra, par exemple, $a + b\varepsilon$ quand on explicitera la partie complexe.

---

(1) STUDY. *Math. Annalen*, 1891.
CAILLER. *Introduction géométrique à la mécanique rationnelle.*

(2) Voir *American Journal*, 1885 (VIII). Bucheim développe les papiers laissés par Clifford.
Cf. PETERSEN. *Nouveau principe pour l'étude de la géométrie des droites* (Bull. Ac. roy. de Copenhague, 1898 et 1900).
Cf. aussi pour la partie analytique : Encyclopédie des Sc. Math. I, vol. I, fasc. 3, édition française par Cartan d'après l'exposé allemand de Study.

Voici l'application aux droites :

Une droite passant par l'origine est définie par 3 cosinus λ, μ, ν vérifiant la relation

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1 .$$

Si l'on suppose les coordonnées complexes en remplaçant λ, μ, ν par $\lambda + \varepsilon l$, $\mu + \varepsilon m$, $\nu + \varepsilon n$, on aura 6 coordonnées $\lambda \mu \nu l m n$ et la relation équivaudra à deux

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1 ,$$
$$\lambda l + \mu m + \nu n = 0 .$$

Ce sont les coordonnées de Plucker normalisées.

Si on avait considéré des paramètres directeurs X, Y, Z, au lieu des cosinus λ, μ, ν et si l'on avait supposé de même ces paramètres complexes

$$X + \varepsilon L, \qquad Y + \varepsilon M, \qquad Z + \varepsilon N$$

on aurait défini la droite par 6 coordonnées qui sont des coordonnées de torseur.

C'est-à-dire que la droite serait l'axe du système de vecteurs de résultante XYZ et de moment LMN.

En général, nous emploierons des coordonnées normalisées, et, dans le cas contraire, l'indiquerons expressément.

Nous dirons pour abréger : droite (λ) ou droite (X), au lieu de droite ($\lambda \mu \nu l m n$), etc.

L'application aux solides est analogue : les 8 coordonnées de Study-Bricard se condensent en les 4 paramètres de Rodrigues et la condition complexe

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2 = 1 \tag{4}$$

se scinde en deux si l'on remplace ρ par $\rho + \varepsilon r$, λ par $\lambda + \varepsilon l$, etc., à savoir

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2 = 1$$

et

$$\lambda l + \mu m + \nu n + \rho r = 0 .$$

Cela fait donc 8 coordonnées, liées par 2 relations. Il reste bien 6 coordonnées indépendantes pour fixer la position du solide.

Nous dirons pour abréger la position (ρ) au lieu de (ρ, λ, μ, ν, r, l, m, n).

Nous supposerons en général et à moins de mention expresse les coordonnées normalisées par la relation (4).

Comme il s'agira surtout de propriétés métriques, les calculs sont beaucoup plus aisés ainsi.

Mais on pourrait aussi considérer des coordonnées de solide homogènes.

A $\rho\lambda\mu\nu$ coordonnées complexes homogènes, correspond une position (1) et une seule, définie par $\frac{\rho}{\tau}, \frac{\lambda}{\tau}, \frac{\mu}{\tau}, \frac{\nu}{\tau}$

$$\text{où} \qquad \tau^2 = \rho^2 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2.$$

5. — Composition des déplacements. — Nous avons défini $\rho\lambda\mu\nu$ comme les coordonnées d'un solide S_1.

Nous pourrions les considérer aussi comme les coordonnées de la rotation (ou, si elles sont complexes, du déplacement hélicoïdal) qui permet de passer du trièdre origine à cette position S_1.

Si l'on effectue successivement deux déplacements : d'abord $(\rho_1\lambda_1\mu_1\nu_1)$ puis $(\rho_2\lambda_2\mu_2\nu_2)$, on obtient le déplacement résultant

$$(5) \qquad \left\{\begin{aligned} \rho &= \rho_1\rho_2 - \lambda_1\lambda_2 - \mu_1\mu_2 - \nu_1\nu_2, \\ \lambda &= \rho_1\lambda_2 + \rho_2\lambda_1 + \nu_1\mu_2 - \nu_2\mu_1, \\ \mu &= \rho_1\mu_2 + \rho_2\mu_1 + \lambda_1\nu_2 - \lambda_2\nu_1, \\ \nu &= \rho_1\nu_2 + \rho_2\nu_1 + \mu_1\lambda_2 - \mu_2\lambda_1. \end{aligned}\right.$$

Si l'on y suppose les coordonnées complexes, on obtient

$$\left\{\begin{aligned} r &= \rho_1 r_2 + \rho_2 r_1 - \lambda_1 l_2 - \lambda_2 l_1 - \mu_1 m_2 - \mu_2 m_1 - \nu_2 n_1 - \nu_1 n_2, \\ l &= \rho_1 l_2 + r_1\lambda_2 + \rho_2 l_1 + r_2\lambda_1 + \nu_1 m_2 - \nu_2 m_1 + n_1\mu_2 - n_2\mu_1, \\ &\qquad \text{et 2 équations analogues pour } m \text{ et } n. \end{aligned}\right.$$

Ces formules sont bien connues (2).

La manière la plus simple pour les obtenir consiste à multiplier symboliquement les quaternions représentant le déplacement.

Il faut noter que dans ces formules les déplacements (ρ_1) (ρ_2) et le déplacement résultant (ρ) sont rapportés au même trièdre fixe.

On a besoin parfois de composer des déplacements qui ne sont pas rapportés au même trièdre. Il faut connaître pour cela les formules du changement de coordonnées.

---

(1) Il faudrait étudier à part le cas où l'on aurait $\rho^2 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0$, comme on étudie à part les droites isotropes $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0$.

(2) Pour les parties réelles cf. KŒNIGS. *Leçons de cinématique*, p. 464.

6. — Changement de coordonnées. — Soit à composer deux déplacements définis ainsi :

Un trièdre S_1 a les coordonnées $\rho_1 \lambda_1 \mu_1 \nu_1$ dans le trièdre fixe S_0.

Un autre trièdre S_2 a pour coordonnées $\rho_2 \lambda_2 \mu_2 \nu_2$ dans le trièdre S_1. Les coordonnées $\rho \lambda \mu \nu$ du trièdre S_2 dans le trièdre S_1 s'obtiendront encore en multipliant (mais dans l'ordre inverse) les quaternions représentant les déplacements.

On obtient ainsi :

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} \rho &= \rho_1\rho_2 - \lambda_1\lambda_2 - \mu_1\mu_2 - \nu_1\nu_2, \\ \lambda &= \rho_1\lambda_2 + \rho_2\lambda_1 - \mu_2\nu_1 + \mu_1\nu_2, \\ \mu &= \rho_1\mu_2 + \rho_2\mu_1 - \nu_2\lambda_1 + \nu_1\lambda_2, \\ \nu &= \rho_1\nu_2 + \rho_2\nu_1 - \lambda_2\mu_1 + \lambda_1\mu_2. \end{aligned} \right.$$

7. — Substitutions orthogonales. — Étudions l'effet, sur les coordonnées de position d'un solide, d'une substitution linéaire orthogonale.

Nous supposons les coordonnées complexes, et les coefficients de la substitution complexes aussi.

Soit d'abord une substitution de la forme

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} \rho &= a\rho_1 - b\lambda_1 - c\mu_1 - d\nu_1, \\ \lambda &= b\rho_1 + a\lambda_1 + d\mu_1 - c\nu_1, \\ \mu &= c\rho_1 + a\mu_1 + b\nu_1 - d\lambda_1, \\ \nu &= d\rho_1 + a\nu_1 + c\lambda_1 - b\mu_1, \end{aligned} \right.$$

$$\text{avec} \qquad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1.$$

Une telle substitution s'interprète immédiatement par les formules (5).

(a, b, c, d) sont les coordonnées d'un déplacement hélicoïdal auquel on soumet la position (ρ_1) donnée.

On peut interpréter autrement ces formules.

La représentation d'un solide par la donnée de $\rho_1 \lambda_1 \mu_1 \nu_1$ suppose un double système de référence :

α) un trièdre S_0, fixe dans l'espace;

β) un trièdre S, fixe dans le corps mobile.

Les coordonnées $(\rho_1 \lambda_1 \mu_1 \nu_1)$ définissent le déplacement de S_0 à S.

Supposons que l'on change le trièdre S_0, et qu'on le remplace par un autre trièdre fixe S'_0.

Soient a, b, c, d les coordonnées de S_0 dans S'_0.

Pour avoir les coordonnées $\rho \lambda \mu \nu$ de S dans S'_0, il suffit de composer $(abcd)$ et $(\rho_1 \lambda_1 \mu_1 \nu_1)$ par les formules (6).

On retrouve justement la substitution (7).

Mais on n'a pas ainsi le changement de coordonnées le plus général.

Le changement de coordonnées le plus général comprend, en effet, à la fois le changement de S_0 et celui de S. La substitution (7) a donné le changement de S_0. Le changement de S est donné lui aussi par la composition, mais dans l'ordre inverse, de $(\rho_1 \lambda_1 \mu_1 \nu_1)$ et de $(a'b'c'd')$. Ici, $(a'b'c'd')$ sont les coordonnées du nouveau trièdre mobile S' par rapport à l'ancien S.

On a alors :

$$
(8) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\rho &= a'\rho_1 - b'\lambda_1 - c'\mu_1 - d'\nu_1, \\
\lambda &= b'\rho_1 + a'\lambda_1 + c'\nu_1 - d'\mu_1, \\
\mu &= c'\rho_1 + a'\mu_1 + d'\lambda_1 - b'\nu_1, \\
\nu &= d'\rho_1 + a'\nu_1 + b'\mu_1 - c'\lambda_1.
\end{aligned}
\right.
$$

Les deux substitutions (7) et (8) effectuées successivement donnent la transformation orthogonale la plus générale à 4 paramètres.

Et, réciproquement, si l'on fait subir aux coordonnées complexes d'un solide, une transformation orthogonale à coefficients complexes, on obtient un changement de coordonnées.

Cherchons, par exemple, un changement de coordonnées qui se réduirait à une translation pure.

La direction des axes du trièdre mobile ne varie pas, et par suite la partie réelle des variables $\rho\lambda\mu\nu$ reste inchangée.

Cela exige que l'on ait pour le tableau des coefficients de la transformation (j'explicite les parties complexes)

$$
\begin{vmatrix}
1 + \varepsilon a_1 & \varepsilon b_1 & \varepsilon c_1 & \varepsilon d_1 \\
a_2 & 1 + \varepsilon b_2 & \varepsilon c_2 & \varepsilon d_2 \\
a_3 & b_3 & 1 + \varepsilon c_3 & \varepsilon d_3 \\
a_4 & b_4 & \varepsilon c_4 & 1 + \varepsilon d_4
\end{vmatrix}.
$$

Ce déterminant doit être orthogonal.

Écrivant que la somme des carrés des éléments de chaque ligne est 1, il vient :

$$a_1 = b_2 = c_3 = d_4 = 0.$$

Faisant ensuite pour deux lignes quelconques la somme des produits de même rang, on trouve que les parties complexes forment un déterminant symétrique gauche.

8. — Signification géométrique des coordonnées d'un solide. — On connaît la signification géométrique des coordonnées de Rodrigues. Le trièdre mobile est obtenu par une rotation d'angle θ défini par

$$\rho = \cos\frac{\theta}{2} \tag{9}$$

autour d'un axe de paramètres directeurs λ, μ, ν.

Les coordonnées complexes substituent à cette rotation un déplacement hélicoïdal dont les éléments s'obtiennent ainsi :

L'équation (9) devient en explicitant les parties complexes

$$\rho + \varepsilon r = \cos\frac{\theta + \varepsilon\tau}{2}$$

c'est-à-dire

$$r = -\frac{\tau}{2}\sin\frac{\theta}{2}. \tag{10}$$

On a un mouvement hélicoïdal de rotation θ, de translation τ, effectué autour de l'axe de paramètres directeurs complexes λ, μ, ν.

Comme je l'ai indiqué déjà, λ, μ, ν, lmn ne sont pas des coordonnées pluckeriennes, mais des coordonnées de torseur.

On a en effet

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1 - \rho^2$$

ou (partie complexe)

$$\lambda l + \mu m + \nu n = -\rho r.$$

Pour avoir des coordonnées de Plucker, il faudrait que l'on ait

$$\rho r = 0$$

c'est-à-dire que le déplacement se réduise à une rotation pure $(r = 0)$, ou à un renversement suivi d'une translation $(\rho = 0)$.

Il faut noter que les parties complexes $rlmn$ employées ici sont les coordonnées correspondantes de Bricard au facteur $-\frac{1}{2}$ près.

On aurait donc les coordonnées de l'origine du trièdre mobile par les formules :

$$\begin{aligned}
x &= 2[\rho l - r\lambda + n\mu - m\nu],\\
y &= 2[\rho m - r\mu + l\nu - n\lambda],\\
z &= 2[\rho n - r\nu + m\lambda - l\mu]
\end{aligned}$$

déduites des formules de Bricard (*Leçons de cinématique*, I, p. 322).

9. — Géométrie des positions. — Study, Saussure [1], puis Bricard et Cailler [2] ont édifié une géométrie dont l'élément fondamental est la position d'un solide libre dans l'espace — de même que la géométrie réglée a pour élément la droite.

L'étude en est grandement facilitée par l'emploi des paramètres $\lambda\mu\nu\rho lmnr$. — C'est une géométrie à 6 dimensions. Bricard a remarqué justement le parallélisme avec les coordonnées pluckeriennes d'une droite, et retrouvé analytiquement les principaux résultats de Saussure.

Nous résumons ici ce qu'il faut en savoir pour la suite de ce travail.

Par analogie avec les coordonnées réelles, on appelle angle complexe de 2 droites de coordonnées $(\lambda\mu\nu)$ $(\lambda'\mu'\nu')$, l'angle V défini par l'équation

$$\cos V = \lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu'.$$

Si l'on explicite la partie complexe en écrivant

$$V + \varepsilon d \quad \text{au lieu de} \quad V$$

il vient

$$\cos (V + \varepsilon d) = (\lambda + \varepsilon l)(\lambda' + \varepsilon l') + (\mu + \varepsilon m)(\mu' + \varepsilon m') + (\nu + \varepsilon n)(\nu' + \varepsilon n')$$

ou

$$\cos V = \lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu'$$

c'est l'angle ordinaire

et

$$d \sin V = \Sigma(\lambda l' + \lambda' l) = \lambda l' + \lambda' l + \mu m' + \mu' m + \nu n' + \nu' n.$$

Comme dans toute la suite de ce travail le signe Σ indique ici une somme étendue par permutation circulaire à toutes les coordonnées. On doit donc permuter respectivement $(\lambda\mu\nu)$, $(\lambda'\mu'\nu')$, (lmn) et $(l'm'n')$.

Pour un solide Σ indiquera une somme étendue aux 4 coordonnées.

Des formules connues de géométrie analytique montrent que d représente la plus courte distance des deux droites.

---

(1) STUDY. *Geometrie der dynamen.*
SAUSSURE. *Geometrie des feuillets* (Archives Sc. phys. et naturelles, Genève, 1902, 1904-6, 1910).

(2) BRICARD. *Nouv. Ann. de Math.*, 1910, et *Leçons de cinématique*, I, p. 319.
CAILLER. *Introduction géométrique à la mécanique rationnelle.*
H. BECK. *Lineare Somenmannigfaltigkeiten* (Math. Ann. 81).
MÜHLENDYCK. *Kinematische Einleilung der reellen analytischen Somenman* (Jahresb. deutschen Math. Vereinigung, Sept. 1928).

On a donc les cas particuliers suivants :

A) Droites orthogonales :

La partie réelle de $(\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu')$ est nulle.

B) Droites sécantes :

La partie complexe de $(\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu')$ est nulle.

C'est-à-dire

$$\Sigma(\lambda l' + \lambda' l) = 0.$$

C) Droites se coupant à angle droit

$$\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' = 0.$$

Semblablement soient deux solides S et S' de coordonnées complexes normales $(\rho\lambda\mu\nu)$ et $(\rho'\lambda'\mu'\nu')$.

On appelle angle complexe des deux positions l'angle V tel que

$$\cos V = \rho\rho' + \lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu'.$$

Or, d'après les formules données au n° 5, si nous composons ensemble les deux déplacements $(\rho\lambda\mu\nu)$ et $(\rho'\lambda'\mu'\nu')$ nous obtenons justement pour le déplacement résultant (toutes les coordonnées de la position résultante sont changées de signe, ce qui ne modifie pas la position)

$$\rho_1 = \rho\rho' + \lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' = \cos V$$

explicitant les parties complexes

$$\rho_1 + \varepsilon r_1 = \cos(V + \varepsilon T),$$

ou

$$\rho_1 = \cos V,$$
$$r_1 = -T \sin V.$$

D'après la signification donnée de ρ et de r (n° 8), on voit que V représente la $1/2$ rotation et T la $1/2$ translation amenant de la première position à la deuxième.

Si donc on passe d'une position $S(\rho\lambda\mu\nu)$ à une autre $S'(\rho'\lambda'\mu'\nu')$ par la rotation θ et la translation τ, on aura

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} \cos\frac{\theta}{2} &= \rho\rho' + \lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' = \rho_1, \\ -\frac{\tau}{2}\sin\frac{\theta}{2} &= \Sigma(\rho r' + \rho' r) = r_1. \end{aligned} \right.$$

Si l'on voulait l'axe du déplacement hélicoïdal permettant de passer d'une position à une autre, les mêmes formules du n° 5 nous donneraient ses coordonnées de torseur

$$\lambda_1 = + \rho\lambda' - \rho'\lambda + \mu\nu' - \mu'\nu \tag{12}$$

et deux formules analogues pour μ_1 et ν_1.

Comme pour les droites on a les cas particuliers :

A) partie réelle de $\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' + \rho\rho' = 0$.

Ce sont les solides tels qu'on passe de S à S' par un renversement suivi d'une translation.

B) partie complexe de $\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' + \rho\rho' = 0$,

c'est-à-dire $\Sigma(\rho r' + \rho' r) = 0$.

Les deux positions sont dites sécantes : on passe de S à S' par une rotation pure.

C) Enfin $\Sigma\rho\rho' = 0$.

Les deux positions sont symétriques par rapport à l'axe (λ_1), donné ci-dessus (12).

Les coordonnées $(\lambda_1 \mu_1 \nu_1)$ étant ici des coordonnées de Plucker.

10. — Comme il y a des systèmes de droites à 1, 2 ou 3 paramètres (surfaces réglées, congruences, complexes), il y a des systèmes de positions à 1, 2, 3, ..., 5 paramètres[1].

Par exemple, on appellera *pentasérie linéaire* (analogue au complexe linéaire), l'ensemble des positions dont les coordonnées vérifient la relation

$$a\rho + b\lambda + c\mu + d\nu + er + fl + gm + hn = 0$$

$(a, b, c, \ldots, h)$ sont des constantes.

Un changement de coordonnées permet de ramener cette équation à la forme

$$r + k\rho = 0.$$

Géométriquement, c'est donc l'ensemble des positions que l'on obtient en soumettant une position fixe à un mouvement hélicoïdal dont la translation T et la rotation θ sont liées par la relation

$$\frac{T}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2} = k.$$

[1] « Somenmannigfaltigkeiten » de Study.

Si les coordonnées $a, b, c, \dots$, au lieu d'être quelconques vérifient la relation

$$ae + bf + cg + dh = 0$$

on peut les considérer comme les coordonnées d'une position S et la pentasérie sera l'ensemble des positions qui sont sécantes avec S, au sens défini (n° 9).

On a alors une pentasérie spéciale (analogue aux complexes spéciaux de la géométrie réglée).

On aurait de même des tétraséries, triséries, biséries et monoséries linéaires.

On en trouve l'étude aux lieux cités (voir, en particulier, Saussure).

Parmi les tétraséries linéaires, on peut signaler spécialement celles dont les deux équations se condensent en une seule, en employant les coordonnées complexes (*couronoïde*).

On a donc

$$a\rho + b\lambda + c\mu + d\nu = 0.$$

Et si l'on regarde (a, b, c, d) comme les coordonnées d'une position, on voit que le couronoïde est l'ensemble des solides symétriques par rapport à toutes les droites de l'espace, d'un solide fixe.

Le couronoïde est, en géométrie des positions, l'analogue du plan en géométrie ponctuelle.

Et de même, parmi les biséries linéaires, nous signalerons la *couronne*, analogue à la droite. C'est l'intersection de deux couronoïdes.

11. — Mais cela fait deux façons distinctes d'étudier la géométrie des positions.

D'abord, nous comparons une position à une droite, et nous obtenons une sorte d'analogue de la géométrie réglée, mais avec deux variables de plus (6 au lieu de 4).

Nous trouvons ainsi les pentaséries analogues aux complexes, les tétraséries analogues aux congruences, etc.

Une autre façon consiste à regarder une position comme l'analogue d'un point complexe.

Les coordonnées $(\rho\lambda\mu\nu)$ définissent un point de l'espace elliptique à 3 dimensions.

C'est dans cet espace que le couronoïde est l'analogue d'un plan et la couronne d'une droite.

On rejoint ici les recherches de Cartan et de Cotton (1).

(1) COTTON. *Ann. Éc. Norm. Sup.*, 1903, p. 155-179.

CARTAN. *Géom. des groupes de transformation* (J. Math. pures et appliquées, VI, 1927, cf. p. 24) et aussi *Leçons de géométrie projective complexe*.

A la suite des travaux de Study déjà cités, Mühlendyck est revenu à différentes reprises sur la géométrie de positions. — On consultera en particulier pour les variétés

Il est parfois utile, dans ce dernier cas, d'étudier la géométrie de position sous forme projective.

On laisse les coordonnées $\rho\lambda\mu\nu$ homogènes comme je l'ai signalé au n° 4.

Une transformation linéaire

$$\begin{aligned}
\rho' &= a_1\rho + b_1\lambda + c_1\mu + d_1\nu,\\
\lambda' &= a_2\rho + b_2\lambda + c_2\mu + d_2\nu,\\
\mu' &= a_3\rho + b_3\lambda + c_3\mu + d_3\nu,\\
\nu' &= a_4\rho + b_4\lambda + c_4\mu + d_4\nu,
\end{aligned}$$

où les a_i, b_i, ..., sont des nombres complexes quelconques, définit alors une homographie.

On retrouve exactement la géométrie projective complexe de l'espace à 3 dimensions.

On pourrait aussi considérer les transformations

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= a_1\bar{\rho} + b_1\bar{\lambda} + c_1\bar{\mu} + d_1\bar{\nu},\\
\lambda_1 &= \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

où $\bar{\rho}$ désigne la quantité conjuguée de ρ, c'est-à-dire $\rho - \varepsilon r$.

Ces transformations définissent une antihomographie. On trouvera dans les *Leçons de géométrie projective complexe*, de Cartan, l'étude des homographies et antihomographies (et plus particulièrement des involutions et antiinvolutions) de l'espace complexe qu'on appliquera aisément aux positions des solides.

12. — On peut définir aussi des corrélations et un principe de dualité (¹).

A une position donnée $(\rho\lambda\mu\nu)$ correspond un couronoïde : l'ensemble des positions (RLMN) qu'on peut déduire de $(\rho\lambda\mu\nu)$ par une symétrie.

Les coordonnées (RLMN) de toutes ces positions vérifient l'équation

$$R\rho + L\lambda + M\mu + N\nu = 0.$$

à une dimension Sitzungber. der Berl. Math. Gessel. Dec. 1924. — Pour les variétés à deux dimensions. Math. Ann. 97 (1927) pag. 419. « Beitrag zur Differentialgeometrie der regularen Somenkongruenzen ». Nous avons retrouvé, sans les connaître, plusieurs résultats de ce Mémoire. Enfin pour les variétés à 3 ou plus de dimensions : Tokohu Math. Journal Juin 1929.

(¹) Comme il existe une polarité par rapport à un complexe linéaire, on peut définir des positions conjuguées par rapport à une pentasérie linéaire. — L'étude en a été faite par Cailler, *loc. cit.*

Nous appellerons $(\rho\lambda\mu\nu)$ les coordonnées tangentielles de ce couronoïde.

Semblablement à deux positions (ρ) et (ρ') correspond une couronne.

C'est l'infinité de positions

$$\begin{aligned} R &= a\rho + b\rho', \\ L &= a\lambda + b\lambda', \\ M &= a\mu + b\mu', \\ N &= a\nu + b\nu', \end{aligned}$$

où a et b sont deux nombres complexes quelconques.

On pourrait lui donner 6 coordonnées analogues aux coordonnées de droites de la forme

$$\begin{aligned} p_{12} &= \rho\lambda' - \rho'\lambda, \\ p_{13} &= \rho\mu' - \rho'\mu, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Corrélativement une couronne peut encore se définir comme l'intersection de deux couronoïdes.

Il lui correspond des coordonnées tangentielles (p_{ij}) qui sont les mêmes que les précédentes, mais dans un autre ordre.

Enfin une position est l'intersection de 3 couronoïdes.

On peut donc définir des corrélations, des anticorrélations, et un principe de dualité, tout comme en géométrie ponctuelle.

13. — Mouvements à deux paramètres. — Si on ne considère plus des séries linéaires, mais des séries quelconques, et si on y ajoute la considération du temps, on aura ce qu'on appelle en cinématique, mouvements à plusieurs paramètres.

Nous étudierons plus spécialement ici les mouvements à deux paramètres que nous appellerons pour abréger des M_2. Les coordonnées complexes $(\rho\lambda\mu\nu)$ seront fonction de deux variables u et v (réelles).

Une relation entre u et v définira un M_1 élémentaire contenu dans le M_2.

Nous emploierons ordinairement les projections des rotations (p_i) et des translations ξ_i sur les axes mobiles. Il semble même que les nombres complexes ne soient utilisables que pour ces projections-là, d'après la démonstration donnée ci-dessus (n° 3).

En réalité, on peut appliquer le calcul complexe même aux projections sur les axes fixes, mais en prenant des précautions.

Une rotation complexe est représentée par un système de vecteurs (torseur) qui aurait, à l'origine mobile, pour résultante : $p_1 q_1 r_1$, et pour moment : $\xi_1 \eta_1 \zeta_1$.

Si nous changeons de coordonnées, et passons aux axes fixes, nous obtenons la résultante : $p'_1 q'_1 r'_1$, et le moment : $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}$ par rapport à l'origine mobile. (J'appelle : xyz les coordonnées de l'origine mobile par rapport aux axes fixes.)

Mais la partie complexe de $p'_1 q'_1 r'_1$, c'est-à-dire le moment par rapport à l'origine fixe, représente $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}$ augmenté du moment de $p_1 q_1 r_1$ placé à l'origine mobile par rapport à l'origine fixe.

C'est-à-dire, évidemment (au signe près), les rotations et translations dans le mouvement réciproque projetées sur les axes mobiles. On vérifie, en effet, que les projections des rotations sur les axes fixes

$$v'_1 = 2\left[\rho \frac{\partial \lambda}{\partial u} - \lambda \frac{\partial \rho}{\partial u} + \mu \frac{\partial \nu}{\partial u} - \nu \frac{\partial \mu}{\partial u}\right]$$

ont pour partie complexe

$$\xi'_1 = 2\left[\rho \frac{\partial l}{\partial u} - \lambda \frac{\partial r}{\partial u} + \mu \frac{\partial n}{\partial u} - \nu \frac{\partial m}{\partial u} + r \frac{\partial \lambda}{\partial u} - l \frac{\partial \rho}{\partial u} + m \frac{\partial \nu}{\partial u} - n \frac{\partial \mu}{\partial u}\right]$$

ce qui n'est pas égal à $\frac{\partial x}{\partial u}$.

14. — **Plan**. — Le but de ce travail est l'étude des propriétés infinitésimales des M_2.

A) Dans une première partie, nous laissant guider par le parallélisme constaté entre les coordonnées de positions et les coordonnées de droites, nous étudierons un M_2 comme on étudie une congruence.

Sannia a proposé pour définir les congruences de droites deux formes quadratiques dont les invariants déterminent les propriétés intrinsèques de la congruence. Lorsqu'on impose à ces invariants des conditions particulières, on a les congruences isotropes, paraboliques, normales, pseudo-sphériques, etc. Les coordonnées complexes permettent de condenser ces deux formes en une forme unique, l'élément linéaire complexe de la congruence.

Semblablement, nous définirons pour un M_2 un élément linéaire complexe dont les invariants nous permettront de définir des M_2 spéciaux (paraboliques, isotropes, normaux, pseudo-sphériques, etc.) les premiers signalés par Bricard, les autres, me semble-t-il, nouveaux. Il est facile de construire un exemple de chacun ; il suffit de prendre les symétriques d'un solide fixe par rapport aux droites d'une congruence ayant la même singularité. On peut adjoindre à la symétrie une translation variable quelconque.

B) Mais on ne saurait poursuivre plus loin l'analogie. La forme complexe des congruences n'est pas arbitraire, et elle suffit à définir la congruence. Il n'en est pas ainsi pour les M_2. Considérant plutôt alors une position comme l'analogue d'un point de l'espace elliptique, nous ferons correspondre au M_2 une surface (complexe) ayant pour élément linéaire le ds^2 du M_2. On voit alors que cette forme est complètement arbitraire et qu'il faut lui adjoindre, pour déterminer le mouvement, une seconde forme (complexe) dont les coefficients sont liés à ceux de la première par les relations de Gauss-Codazzi, et dont on a une interprétation géométrique assez élégante par la définition du M_2 polaire du premier.

C) Enfin, dans une troisième partie, nous déterminerons quelques-uns des M_2 spéciaux définis au début. En général, la recherche d'un M_2 de ds^2 donné nous ramène, les coordonnées étant complexes, à la recherche d'une surface admettant un ds^2 voisin d'un ds^2 donné.

Mais la recherche des M_2 spéciaux définis dans la première partie, est un problème plus facile. Un système de coordonnées assez analogues aux coordonnées tangentielles de Weingarten permet d'avoir, sans intégration, un grand nombre de M_2 spéciaux, et, en particulier, tous les M_2 isotropes, paraboliques ou normaux.

Nous ajouterons quelques mots sur deux autres classes de M_2 spéciaux : les M_2 qui correspondent aux congruences normales de l'espace elliptique, et les M_2 dont l'enveloppée moyenne est un point (ces derniers parfaitement analogues aux congruences d'Appell).

Nous déterminerons tous ces M_2 et signalerons quelques-unes de leurs propriétés.

PREMIÈRE PARTIE

La première forme complexe.

Systèmes de droites. — Mouvements à un, à deux paramètres : la première forme. — M_1 remarquables contenus dans un M_2 : M_1 centraux, principaux, conjugués, rotations pures. — M_2 isotropes, paraboliques, normaux, pseudo-sphériques : exemples et propriétés. — M_2 contenus dans un couronoïde. — M_2 et cylindroïde.

15. — Systèmes de droites. — Supposons que les coordonnées normalisées $(\lambda\mu\nu)$ d'une droite dépendent d'une, deux, trois variables : la droite décrira une surface réglée, une congruence, un complexe.

Menons par l'origine une parallèle à chaque droite; la trace de cette parallèle sur la sphère de rayon unité qui a son centre à l'origine, aura pour coordonnées λ, μ, ν; et l'élément d'arc complexe de cette représentation sphérique, c'est-à-dire l'angle des deux génératrices (λ) et $(\lambda + d\lambda)$ voisines sera

$$ds^2 = d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2. \tag{1}$$

La partie réelle donne l'arc ordinaire et, en explicitant les parties complexes, on a la distance

$$dh = \frac{\Sigma\, d\lambda\, dl}{ds} \tag{2}$$

des deux génératrices voisines.

S'il n'y a qu'une variable, on a affaire à une surface réglée, et le paramètre de distribution du plan tangent le long de la génératrice considérée, sera

$$p = \frac{dh}{ds} = \frac{\Sigma\, d\lambda\, dl}{ds^2}. \tag{3}$$

La surface sera développable si ce paramètre est nul.

$$\Sigma\, d\lambda\, dl = 0. \tag{4}$$

Plus particulièrement, on aura un cône avec sommet à l'origine si

$$l = m = n = 0.$$

S'il y a deux variables, u et v, la droite décrit une congruence. La forme devient :

$$ds^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2. \tag{5}$$

Nous représenterons sa demi-partie complexe par

$$dh\,ds = D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2.$$

Ces deux formes quadratiques (5) et (6) sont les formes introduites par Sannia [1] pour définir intrinsèquement une congruence.

L'emploi des coordonnées complexes permet de les condenser en une seule, la forme (5), comme l'a remarqué M. Pérès [2].

Si l'on établit une relation entre u et v, on a une surface réglée de la congruence (surface élémentaire) dont le paramètre de distribution est donné par le quotient $p = \dfrac{dh}{ds}$.

On aura une surface développable en annulant la partie complexe

$$D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2 = 0.$$

Il y en a deux en général.

16. — **Mouvements à un paramètre.** — Supposons, d'une façon analogue, les coordonnées $(\rho, \lambda, \mu, \nu)$ d'une position exprimées en fonction d'une variable. On aura un mouvement à un paramètre (M_1).

Deux positions voisines (ρ) et $(\rho + d\rho)$ définiront un M_1 hélicoïdal que nous dirons tangent au premier, et dont les éléments sont aisés à calculer.

Sa demi-rotation, c'est-à-dire le demi-angle des deux positions est :

$$ds^2 = d\rho^2 + d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2.$$

La partie complexe de cette expression fournirait la demi-translation (que j'appelle h)

$$dh\,.\,ds = d\rho\,dr + d\lambda\,dl + d\mu\,dm + d\nu\,dn.$$

Le pas réduit de ce M_1 hélicoïdal (on dit encore la flèche) est donné par le quotient

$$\frac{dh}{ds} = \frac{\Sigma\,d\rho\,dr}{\Sigma\,d\rho^2}.$$

---

(1) *Ann. di Matematica*, 1908, p. 143.
Voir aussi BIANCHI. *Lezioni di Geom. differenziale*, I, p. 493.

(2) *C. R.*, 8 mars 1926.

Son axe enfin nous serait fourni par les formules du n° 5. Il faut composer $(\rho\lambda\mu\nu)$ et $[-(\rho+d\rho),\ \lambda+d\lambda,\ \mu+d\mu,\ \nu+d\nu]$.

On trouve

$$\left\{\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda d\rho - \rho d\lambda + \mu d\nu - \nu d\mu, \\ \mu_1 &= \mu d\rho - \rho d\mu + \nu d\lambda - \lambda d\nu, \\ \nu_1 &= \nu d\rho - \rho d\nu + \lambda d\mu - \mu d\lambda, \end{aligned}\right.$$

$(\lambda_1\mu_1\nu_1)$ sont les coordonnées de torseur de l'axe dans le trièdre mobile.

Comme

$$\lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2 = d\rho^2 + d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2 = ds^2$$

on trouve pour les cosinus

$$\alpha = \frac{\lambda_1}{ds} = \lambda\frac{d\rho}{ds} - \rho\frac{d\lambda}{ds} + \mu\frac{d\nu}{ds} - \nu\frac{d\mu}{ds}$$

et deux expressions analogues pour β et γ.

Les cosinus dans le trièdre fixe s'obtiennent simplement en changeant le signe de ρ. On a :

$$\alpha' = \rho\frac{d\lambda}{ds} - \lambda\frac{d\rho}{ds} + \nu\frac{d\mu}{ds} - \mu\frac{d\nu}{ds}$$

et deux expressions analogues pour β' et γ'.

Quand le solide est animé d'un M_1, cet axe décrit dans l'espace fixe et dans l'espace mobile deux surfaces réglées qui virent l'une sur l'autre.

Si nous calculons l'angle de deux génératrices voisines de ces surfaces réglées, dans l'espace fixe, et dans l'espace mobile, nous trouvons qu'ils sont égaux.

$$d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2 = d\alpha'^2 + d\beta'^2 + d\gamma'^2.$$

Cette égalité, d'après l'interprétation de l'angle complexe que nous avons donnée au paragraphe précédent, résume deux théorèmes bien connus.

Tout M_1 est engendré par le virement l'une sur l'autre de deux surfaces réglées

1) dont les cônes directeurs découpent des arcs égaux sur la sphère-unité,
2) et dont le paramètre de distribution est le même le long de la génératrice de contact.

Si la flèche est nulle, c'est-à-dire si $\Sigma d\rho dr = 0$, on aura une rotation pure et le M_1 sera défini par le roulement l'une sur l'autre de deux surfaces réglées applicables.

Plus particulièrement encore, le solide gardera l'origine fixe si les coordonnées sont réelles.

$$r = l = m = n = 0.$$

On aura le roulement de deux cônes.

La flèche p est un nombre absolu. Nous aurons besoin cependant de lui donner un signe pour étudier sa variation autour d'une position d'un M_2 comme on donne un signe aux courbures des sections normales d'une surface autour d'un point.

Nous définirons p en grandeur et signe, par la formule :

$$p = \frac{\Sigma d\rho\, dr}{\Sigma d\rho^2}$$

Ce qui correspond à un M_1 hélicoïdal ayant le sens du trièdre des coordonnées.

17. — Mouvements à deux paramètres. — Supposons à présent les coordonnées d'une position (ρ) fonction de deux paramètres : u et v.

Nous définirons une forme quadratique complexe qui donnera la distance de deux positions voisines

$$ds^2 = \Sigma d\rho^2 = \mathrm{E}du^2 + 2\mathrm{F}du\,dv + \mathrm{G}dv^2.$$

Sa partie réelle ne dépend que des rotations du trièdre mobile (S). Elle resterait la même pour un autre trièdre que l'on construirait en menant par un point fixe des parallèles aux axes de S, et dont nous dirons qu'il fournit la représentation sphérique du M_2 donné.

Sa partie complexe que nous écrirons

$$2\,dh\,ds = 2\,\Sigma d\rho\, dr,$$

$$\text{ou} \quad = -2[\mathrm{D}du^2 + 2\mathrm{D}'du\,dv + \mathrm{D}''dv^2]$$

fournit, si on l'égale à 0, les rotations du M_2 considéré. Il y en a deux en général.

Cette forme complexe reste évidemment invariante par la transformation orthogonale la plus générale, c'est-à-dire par le changement du système de référence. Cela résulte de sa forme même ($\Sigma d\rho^2$) ou aussi de sa signification géométrique.

Si l'on établit une relation entre u et v, on aura un M_1 contenu dans le M_2.

Tous ces M_1 sont tangents à des mouvements hélicoïdaux élémentaires définis par la position considérée du trièdre mobile, et la position voisine. Les formules du numéro précédent nous en donneront les divers éléments.

En particulier, l'axe du M_1 défini par les accroissements du et dv a pour cosinus directeurs dans les axes mobiles

$$\alpha = \lambda \frac{d\rho}{ds} - \rho \frac{d\lambda}{ds} + \mu \frac{d\nu}{ds} - \nu \frac{d\mu}{ds}$$

et deux formules analogues pour β et γ.

Mais ici, les coordonnées sont fonctions de deux variables, et $\frac{d\rho}{ds}$ par exemple ne représente pas une dérivée, mais le quotient

$$\frac{\frac{\partial \rho}{\partial u} du + \frac{\partial \rho}{\partial v} dv}{\sqrt{E du^2 + 2 F du dv + G dv^2}}.$$

Un second M_1 défini par δu et δv aurait semblablement pour cosinus de son axe

$$\alpha_1 = \lambda \frac{\delta \rho}{\delta s} - \rho \frac{\delta \lambda}{\delta s} + \mu \frac{\delta \nu}{\delta s} - \nu \frac{\delta \mu}{\delta s}$$

et deux formules analogues pour β_1 et γ_1.

L'angle de leurs axes est donné par

$$\cos V = \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 = \frac{E du \delta u + F(du \delta v + dv \delta u) + G dv \delta v}{ds \,.\, \delta s}$$

comme on le calcule aisément.

La même formule donne dans les congruences l'angle des plans centraux des deux surfaces réglées élémentaires.

En particulier, l'angle des axes des M_1 que nous appellerons coordonnés, c'est-à-dire les $M_1 u = C^{te}$ ou $v = C^{te}$ sera :

$$\cos \omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Ces deux axes sont orthogonaux si $F = 0$.

Ils sont orthogonaux et se coupent si l'on a, en explicitant la partie complexe : $F - 2\varepsilon D' = 0$, c'est-à-dire

$$F = D' = 0.$$

Enfin, l'angle de l'axe d'un M_1 avec l'axe du M_1 coordonné $v = C^{te}$ est donné par la formnle

(6) $$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{E}} \left[E \frac{du}{ds} + F \frac{dv}{ds} \right]$$

ou :

(7) $$\sin \theta = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}} \frac{dv}{ds}.$$

18. — **M_1 centraux.** — Un changement des variables indépendantes u et v revient à changer ce que nous avons appelé les M_1 coordonnés.

On sait qu'étant données deux formes quadratiques réelles, on peut toujours par un changement de paramétrage faire disparaître dans chacune le terme rectangle.

Ici, nous avons une forme complexe, équivalente donc à deux formes réelles : on pourra faire disparaître le terme rectangle $du\,dv$ et on aura simplement

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2.$$

Il suffit pour cela de prendre pour variables les intégrales du covariant

$$\begin{vmatrix} E\,du + F\,dv & F\,du + G\,dv \\ D\,du + D'\,dv & D'\,du + D''\,dv \end{vmatrix} = 0.$$

Cette réduction est possible, et d'une seule manière, à moins que l'on n'ait :

$$\frac{E}{D} = \frac{F}{D'} = \frac{G}{D''}.$$

Lorsque cette circonstance se présente pour une congruence, on dit que c'est une congruence isotrope.

Nous dirons pareillement pour les M_2 que nous avons un M_2 isotrope. Nous en reparlerons.

Mais ce cas écarté, la réduction est toujours *réelle* si le M_2 est *réel* et fournit deux M_1 coordonnés spéciaux que nous appellerons M_1 centraux du M_2.

Il résulte des formules du n° 17, que les axes de ces deux M_1 se rencontrent à angle droit.

Nous allons rappeler que les axes des M_1 élémentaires, autour d'une position donnée d'un M_2, forment un cylindroïde.

Les M_1 centraux ont justement pour axe les deux axes moyens de ce cylindroïde, puisqu'un cylindroïde n'a que ces deux axes qui se rencontrent à angle droit.

Le plan de ces deux axes sera dit le plan central.

19. — **Étude de la flèche des M_1 hélicoïdaux élémentaires.** — Prenons pour M_1 coordonnés les M_1 centraux dont nous venons de parler.

On aura donc

$$F = D' = 0$$

et la flèche des M_1 élémentaires deviendra

$$p = -\frac{D\,du^2 + D''\,dv^2}{E\,du^2 + G\,dv^2}.$$

En particulier, pour les M_1 coordonnés

$$p' = -\frac{D''}{G} \quad (u = c^t),$$

$$p'' = -\frac{D}{E} \quad (v = c^t).$$

En appelant θ l'angle de l'axe d'un M_1 avec celui du M_1 coordonné ($v = c^t$), on vérifie, grâce aux valeurs de $\sin\theta$ et $\cos\theta$ (n° 17), que l'on a

$$(8) \qquad p = p' \sin^2\theta + p'' \cos^2\theta$$

formule analogue à celle d'Euler pour la courbure des surfaces et à celle d'Hamilton pour les paramètres de distribution dans les congruences.

On voit que les flèches p' et p'' des M_1 centraux sont les flèches maxima et minima.

Un système de deux formes réelles admet les invariants

$$(9) \qquad \text{I)} \quad K = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2}.$$

$$(10) \qquad \text{II)} \quad H = \frac{2FD' - ED'' - GD}{EG - F^2}.$$

On vérifie en prenant pour M_1 coordonnés les M_1 centraux que le premier, K, est égal à $p'p''$ et le second, H, à $p' + p''$.

Nous les appellerons respectivement flèche totale (K) et flèche moyenne (H).

Deux M_1 dont les axes sont orthogonaux ont des axes de paramètres

$$P = p' \sin^2\theta + p'' \cos^2\theta,$$

$$P' = p' \sin^2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + p'' \cos^2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right),$$

d'où

$$P + P' = p' + p'' = H.$$

On pourrait construire dans un plan perpendiculaire à l'axe du cylindroïde des axes des M_1 élémentaires une indicatrice des flèches analogue à l'indicatrice pour la courbure.

On obtient une conique dont le genre dépend du signe de K.

Inutile de reproduire ici des calculs tout à fait semblables à ceux de la théorie des surfaces.

20. — Interprétation cinématique de la première forme. — Il est aisé d'interpréter la première forme en fonction des rotations complexes.

Soient $p_1 du + p_2 dv$, $q_1 du + q_2 dv$, $r_1 du + r_2 dv$ les projections sur les axes mobiles de ces rotations complexes.

On sait que

$$p_1 = 2\left(\lambda \frac{\partial \rho}{\partial u} - \rho \frac{\partial \lambda}{\partial u} + \nu \frac{\partial \mu}{\partial u} - \mu \frac{\partial \nu}{\partial u}\right)$$

semblablement

$$p_2 = 2\left(\lambda \frac{\partial \rho}{\partial v} - \rho \frac{\partial \lambda}{\partial v} + \nu \frac{\partial \mu}{\partial v} - \mu \frac{\partial \nu}{\partial v}\right)$$

et par suite

$$p_1 du + p_2 dv = 2(\lambda d\rho - \rho d\lambda + \nu d\mu - \mu d\nu)$$

et deux équations semblables pour $q_1 du + q_2 dv$, $r_1 du + r_2 dv$.

On en tire

$$\Sigma(p_1 du + p_2 dv)^2 = 4(d\rho^2 + d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2). \tag{11}$$

La première forme fondamentale est donc égale au carré de la demi-rotation.

On en déduit, en fonction des rotations ou des translations $(\xi_i \eta_i \zeta_i)$ élémentaires, les valeurs des différents coefficients de la forme

$$\left\{\begin{aligned} 4\,\mathrm{E} &= p_1^2 + q_1^2 + r_1^2 = \overrightarrow{\Omega}_1^2, \\ 4\,\mathrm{F} &= p_1 p_2 + q_1 q_2 + r_1 r_2 = \overrightarrow{\Omega}_1 \overrightarrow{\Omega}_2 = \Omega_1 \Omega_2 \cos\omega, \\ 4\,\mathrm{G} &= p_2^2 + q_2^2 + r_2^2 = \overrightarrow{\Omega}_2^2 \end{aligned}\right. \tag{12}$$

en appelant $\overrightarrow{\Omega}_1$, $\overrightarrow{\Omega}_2$, les deux rotations, et ω leur angle.

Semblablement

$$\left\{\begin{aligned} -4\,\mathrm{D} &= p_1 \xi_1 + q_1 \eta_1 + r_1 \zeta_1, \\ -8\,\mathrm{D}' &= \Sigma(p_1 \xi_2 + p_2 \xi_1), \\ -4\,\mathrm{D}'' &= p_2 \xi_2 + q_2 \eta_2 + r_2 \zeta_2. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

La première forme est évidemment toujours définie positive en raison de sa signification même.

Nous poserons

$$\Delta = \sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}.$$

On a immédiatement

$$4\Delta = \Omega_1 \Omega_2 \sin\omega. \tag{14}$$

4Δ représente donc l'aire du parallélogramme construit sur les deux rotations élémentaires.

Il s'agit comme toujours de l'aire complexe.

Si l'on voulait interpréter la partie complexe (appelons $\overline{\Delta}$ cette partie complexe de Δ), il suffirait de se souvenir que E, F, G, ont pour partie complexe $-2D$, $-2D'$, $-2D''$.

Par conséquent

$$\Delta^2 = EG - F^2$$

donne immédiatement

$$2\Delta\overline{\Delta} = -2(ED'' + DG - 2FD') = 2\Delta^2 . H$$

d'où

$$\overline{\Delta} = \Delta H$$

ce qui fournit l'interprétation de l'invariant H.

On comparera l'interprétation analogue, donnée par M. Pérès(¹) pour l'aire complexe dans les congruences.

Quant à K, nous montrerons plus loin que la distance 2δ des deux rotations pures que contient à chaque instant le M_2 est donnée par la formule

$$\delta = \sqrt{-K} .$$

21. — M_1 remarquables contenus dans un M_2.

A) Rotations pures. — Elles correspondent aux développables contenues dans une congruence. Leur équation est

$$p = 0$$

c'est-à-dire

$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2 = 0 .$$

Il y en a donc deux en général; leurs axes se projettent suivant les asymptotes de l'indicatrice dont nous avons parlé.

Ces rotations pures ne sont *réelles* que si l'on a

$$D'^2 - DD'' > 0$$

ou, comme la première forme est toujours définie positive, si

$$K = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2} = p'p'' < 0 .$$

(¹) *C. R.*, mars 1926.

Nous aurons à nous occuper du cas où les rotations sont confondues. La condition est

$$K = 0.$$

Elles coïncident dans ce cas avec l'un des M_1 centraux.

Si l'on prend les rotations pures pour M_1 coordonnés, la partie complexe de la première forme se simplifie

$$D = D'' = 0.$$

Avec ce système de coordonnées, il est aisé de calculer l'angle et la distance des axes des rotations pures.

Et si l'on exprime les résultats trouvés en fonction des invariants, on a des formules valables dans tous les systèmes de coordonnées.

On trouve, pour la distance :

$$2\sqrt{-K}$$

et pour l'angle α

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\sqrt{-K}}{H}.$$

Mais nous retrouverons autrement ce résultat.

B) M_1 conjugués. — On appellera ainsi deux M_1 dont les axes des M_1 hélicoïdaux tangents se projettent suivant deux diamètres conjugués de l'indicatrice : c'est-à-dire qu'ils forment en projection un faisceau harmonique avec les deux axes des rotations pures.

Et puisque les rotations pures sont données par l'équation

$$D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2 = 0$$

il s'ensuit que les M_1 conjugués sont définis par des accroissements (du, dv et δu, δv) liés par l'équation

$$D du \delta u + D'(du \delta v + dv \delta u) + D'' dv \delta v = 0.$$

Si on prenait pour M_1 coordonnés deux M_1 conjugués, on aurait

$$D' = 0$$

et réciproquement cette condition est suffisante.

Par suite les M_1 centraux déjà définis ($F = D' = 0$) sont à la fois orthogonaux et conjugués. Ce sont les seuls jouissant de cette propriété. Il en résulte aussitôt qu'ils se projettent suivant les axes de symétrie de l'indicatrice.

Soient p et p_1 les pas réduits de deux M_1 conjugués et φ l'angle de leurs axes.

On a les relations (dites d'Appollonius) entre les diamètres conjugués d'une conique.

$$p + p_1 = H \sin \varphi,$$
$$pp_1 = K \sin \varphi.$$

22. — Digression sur le rapport anharmonique complexe. — Nous n'avons parlé que de la projection des axes des M_1. Il est bien clair que si deux M_1 sont conjugués, il y a une relation non seulement entre les angles, mais encore entre la plus courte distance de leurs axes et des axes des rotations pures.

On peut chercher cette relation en généralisant aux quantités complexes la notion de rapport anharmonique, puisque le passage aux quantités complexes remplace un faisceau plan par l'ensemble des droites qui rencontrent orthogonalement une droite donnée (recticongruence de Cailler).

Soient donnés deux torseurs XYZ et X'Y'Z' et soit J leur perpendiculaire commune.

Nous considérons le système infini de torseurs

$$L_i = a_i Y + b_i Y,$$
$$M_i = a_i X + b_i X',$$
$$N_i = a_i Z + b_i Z'$$

où a_i et b_i prennent toutes les valeurs (complexes). Tous ces torseurs ont leurs axes qui rencontrent J à angle droit; ils constituent donc une recticongruence (cotée).

Soient donnés quatre de ces torseurs par les indices $i = 1, 2, 3, 4$ des quantités a_i et b_i, nous prendrons, comme dans le domaine réel, pour définition de leur rapport anharmonique, l'expression

$$R = \frac{\dfrac{a_1}{b_1} - \dfrac{a_3}{b_3}}{\dfrac{a_1}{b_1} - \dfrac{a_4}{b_4}} : \frac{\dfrac{a_2}{b_2} - \dfrac{a_3}{b_3}}{\dfrac{a_2}{b_2} - \dfrac{a_4}{b_4}}.$$

Ce rapport ne dépend que des axes des torseurs et pas de leur cote comme on le voit en multipliant les coordonnées de l'un d'eux ($L_i\, M_i\, N_i$ par exemple) par un nombre complexe quelconque (ce qui revient à multiplier a_i et b_i et ne change pas R).

La partie réelle de ce rapport est évidemment le rapport anharmonique des projections des quatre axes sur un plan perpendiculaire à J.

Appelons ω_{ij} l'angle des axes des torseurs L_i et L_j. On aura

$$(15) \qquad R = \frac{\sin\omega_{13} \,.\, \sin\omega_{24}}{\sin\omega_{14} \,.\, \sin\omega_{23}}.$$

Il suffit d'expliciter les parties complexes en posant $\omega_{ij} + \varepsilon\delta_{ij}$ (où δ_{ij} représente la distance des axes de L_i et de L_j) pour avoir la partie complexe de R. Inutile de l'écrire ici car nous ne nous en servirons pas.

Supposons à présent les paramètres a_i et b_i réels.

Les axes des torseurs ne décriront plus toute la recticongruence, mais seulement une portion de cette recticongruence, un conoïde droit (en l'espèce, un cylindroïde de Plucker). Le rapport R sera alors purement réel.

(15) s'écrit

$$R \sin\omega_{14} \sin\omega_{23} = \sin\omega_{13} \,.\, \sin\omega_{24}$$

et en explicitant la partie complexe

$$(16) \qquad \begin{aligned} &R(\delta_{14} \sin\omega_{23} \cos\omega_{14} + \delta_{23} \sin\omega_{14} \cos\omega_{23}) \\ &\quad = (\delta_{13} \sin\omega_{24} \cos\omega_{13} + \delta_{24} \sin\omega_{13} \cos\omega_{24}). \end{aligned}$$

En remplaçant R par sa valeur (15), on aurait une relation entre une génératrice quelconque du cylindroïde (L_4) et trois autres (L_1, L_2, L_3) données arbitrairement.

C'est, avec un système de coordonnées un peu spécial, l'équation du cylindroïde [1].

Les quantités ω_{ij} et δ_{ij} ne sont évidemment pas arbitraires et vérifient les relations de Chasles

$$\delta_{ij} = \delta_{kj} - \delta_{ki}$$

et

$$\omega_{ij} = \omega_{kj} - \omega_{ki}.$$

Dans le cas des M_2, les torseurs de base XYZ $X'Y'Z'$ sont les rotations complexes $(p_1 q_1 r_1)$ et $(p_2 q_2 r_2)$.

Les torseurs L_i sont de la forme $(p_1 du + p_2 dv,\ q_1 du + q_2 dv,\ r_1 du + r_2 dv)$ et comme les rapports $\dfrac{du}{dv}$ sont ici réels, les axes des M_1 hélicoïdaux décrivent un cylindroïde.

---

[1] On la simplifierait en choisissant bien $L_1 L_2 L_3$.

On retrouve l'équation habituelle en prenant pour L_1 et L_2 les axes centraux : $\delta_{12} = 0$, $\omega_{12} = \dfrac{\pi}{2}$.

Les M_1 conjugués vérifient donc les relations (15) et (16) où l'on poserait $R = -1$, et où l'on prendrait pour torseurs L_1 et L_2 les deux rotations pures; et pour torseurs L_3 et L_4 les axes des M_1 conjugués.

C) M_1 PRINCIPAUX. — Par analogie avec les surfaces principales de la théorie des congruences, nous appellerons M_1 principaux les M_1 qui ont pour axes les deux axes extrêmes du cylindroïde.

En projection sur l'indicatrice, leurs axes sont les bissectrices des axes des M_1 centraux.

Ils sont orthogonaux, et ont le même pas réduit $\frac{H}{2}$.

Si on les prend pour M_1 coordonnés, on aura

$$F = 0$$

et

$$\frac{D}{E} = \frac{D''}{G}.$$

23. — **M_2 spéciaux**. — On peut au moyen des invariants H et K définir un certain nombre de M_2 spéciaux.

A) M_2 ISOTROPES. — Ce sont les M_2 dans lesquels à un instant quelconque la flèche des mouvements hélicoïdaux élémentaires est constante. — C'est-à-dire que p est indépendant de $\frac{du}{dv}$.

L'indicatrice est alors un cercle.

Ceci donne les conditions

$$-p = \frac{D}{E} = \frac{D'}{F} = \frac{D''}{G}.$$

Nous avons déjà vu que dans ce cas on peut, d'une infinité de manières, ramener les formes fondamentales à être orthogonales ($D' = F = 0$).

Les invariants H et K prennent les valeurs

$$K = p^2, \qquad H = 2p.$$

Dans la théorie des surfaces, on rencontre des points isolés (ombilics) où l'indicatrice est un cercle.

Si tous les points sont des ombilics, la courbure est une constante absolue — et la surface est une sphère.

Dans la théorie des congruences, on dispose d'une variable de plus. L'indicatrice peut être partout un cercle, c'est-à-dire le paramètre de distribution peut être constant dans toutes les directions autour d'une génératrice donnée, sans être pour cela une constante absolue. On a une congruence isotrope.

Mais le ds^2 réel étant donné, le paramètre p fonction de u et de v doit vérifier une équation, comme il est bien connu.

Ici, en géométrie de position, nous pourrons nous donner arbitrairement et la première forme réelle, et le pas réduit $p(u, v)$.

Un cas particulier bien connu est celui où p égalerait identiquement o.

Tous les M_1 hélicoïdaux seraient alors des rotations pures. C'est le cas des mouvements de Ribaucour.

B) M_2 PARABOLIQUES. — Bricard[1] a posé la question de déterminer tous les M_2 dans lesquels à chaque instant les deux rotations pures sont confondues.

Il faut et suffit pour cela que la deuxième forme soit un carré parfait.

Il faut donc

$$K = 0.$$

Les rotations pures coïncident alors avec l'un des M_1 centraux, comme on le vérifie en prenant ces derniers pour M_1 coordonnés $(F = D' = 0)$.

La relation $K = 0$ devient

$$DD'' = 0.$$

Et la deuxième forme se ramène à $D\,du^2$ ou $D''\,dv^2$.

C) M_2 NORMAUX. — Par analogie avec les congruences normales, nous dirons qu'un M_2 est normal lorsque les axes des rotations pures seront orthogonaux.

Ceci se traduit par la condition

$$H = 0.$$

Les rotations pures coïncident alors avec les M_1 principaux.

Les axes de deux M_1 conjugués quelconques admettent alors les rotations pures pour bissectrices et sont équidistants du plan central. Leurs paramètres sont égaux et de signe contraire.

D) Enfin, on pourrait étudier plus généralement les M_2 dans lesquels H et K sont constants.

Les congruences analogues ont été étudiées par Bianchi sous le nom de congruences pseudo-sphériques.

---

[1] *Leçons de Cinématique*, I, p. 248.

24. — Exemple de ces M_2 spéciaux. — La détermination de tous ces M_2 spéciaux est plus ou moins difficile, et nous y reviendrons.

Mais il est facile de donner un exemple particulier de chacun, généralisant l'exemple donné par Bricard pour les M_2 paraboliques.

Soit la position $\lambda\mu\nu\rho$, $lmnr$.

Ces coordonnées, on s'en souvient, signifient qu'on est passé du trièdre origine à la position actuelle par une rotation

$$\cos\frac{\theta}{2} = \rho$$

et une translation

$$T = \frac{-2r}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

autour de l'axe du torseur $\lambda\mu\nu$, lmn.

Supposons à présent

$$\rho = 0.$$

On aura passé du trièdre origine à la position actuelle par une symétrie, suivie d'une translation quelconque, autour de la droite ayant pour coordonnées de Plucker

$$\lambda\mu\nu, \qquad lmn.$$

Si l'on a un M_2 dans lequel $\rho \equiv 0$, la droite $\lambda\mu\nu$, lmn décrit une congruence qui a pour formes fondamentales

$$ds^2 = d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2,$$
$$dh\,.\,ds = d\lambda\, dl + d\mu\, dm + d\nu\, dn,$$

c'est-à-dire les formes mêmes du M_2.

Et donc pour avoir un M_2 spécial (isotrope, parabolique, normal, pseudo-sphérique..., et toute autre propriété ne faisant intervenir que la première forme fondamentale), il suffit de considérer une congruence ayant la même spécialité (isotrope, parabolique..., etc...) et de prendre par rapport aux droites de cette congruence les symétriques d'un solide fixe.

(On peut du reste adjoindre à la symétrie une translation quelconque).

25. — Cylindroïde coté. — Il est facile de justifier géométriquement cet exemple, et aussi de voir la raison profonde de l'identité constatée entre les propriétés infinitésimales des congruences et des M_2.

Cela vient de ce que, si l'on se borne aux propriétés du premier ordre, les congruences comme les M_2 dépendent à chaque instant d'un cylindroïde coté (c'est-à-dire d'un cylindroïde à chaque génératrice duquel est attaché un nombre). Il est nécessaire d'en rappeler les formules.

On sait qu'un cylindroïde contient deux torseurs dont les axes se coupent à angle droit. En les prenant pour torseurs de base, et leurs axes pour axes des ox et oy, les formules du n° 22 se simplifient.

On a l'infinité de torseurs

$$L = aX,$$
$$M = bY',$$
$$N = 0.$$

Leurs axes décrivent le cylindroïde.

Chacun a de plus un paramètre complexe : $R + \varepsilon C$ défini par l'égalité complexe

$$(R + \varepsilon C)^2 = L^2 + M^2.$$

R est le vecteur et C le couple du torseur.

On n'a guère besoin en général de considérer que le rapport $\frac{C}{R}$ qui est la flèche du torseur (ou sa cote).

Si f et g sont les flèches des deux torseurs de base, on a facilement l'équation du cylindroïde

$$z = (g - f)\frac{xy}{x^2 + y^2}. \tag{17}$$

On a aussi pour la flèche de la génératrice qui fait avec ox l'angle θ

$$h = f\cos^2\theta + g\sin^2\theta. \tag{18}$$

La manière la plus courte d'obtenir cette équation consiste à écrire

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{L}{M} = \frac{a}{b}\frac{X}{Y'}$$

et à expliciter la partie complexe en écrivant

$$\theta + \varepsilon r, \qquad X(1 + \varepsilon f), \qquad Y'(1 + \varepsilon g) \qquad \text{au lieu de} \qquad \theta,\ X,\ Y'.$$

Le cylindroïde dépend d'une seule constante $(g - f)$ qui fixe sa hauteur totale : c'est-à-dire la distance des génératrices limites.

Tous les cylindroïdes sont donc semblables entre eux, sauf dans le cas de dégénérescence $g = f$, où ils se réduisent à un faisceau plan.

La cotation du cylindroïde dépend d'une seconde constante ($g + f$ par exemple) Si l'on augmente g et f d'une même quantité r, le cylindroïde ne change pas, mais toutes les cotes sont augmentées de r.

Dans le cas de dégénérescence, $g = f$, toutes les génératrices ont même cote.

Si $g \neq f$, il y a en général deux génératrices qui ont une cote donnée h (cf. équation 18).

Elles sont *réelles* seulement si $f < h < g$.

Elles correspondent à des angles θ égaux et de signe contraire, et par suite à des ordonnées

$$z = (g - f)\frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{g - f}{2}\sin 2\theta$$

égales aussi et de signe contraire.

En particulier, il y a deux génératrices de cote nulle.

On trouve

$$\operatorname{tg}\theta = \pm\sqrt{\frac{-f}{g}},$$

$$z = \pm\sqrt{-fg}.$$

Leur distance est donc

$$2\sqrt{-fg}$$

et leur angle 2θ donné par

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\sqrt{-fg}}{f+g}$$

26. — Application aux congruences. — Dans une congruence, une génératrice J, et la génératrice voisine J′ admettent une perpendiculaire commune D.

Le lieu de D, si l'on prend toutes les droites J′ voisines de J est un cylindroïde d'axe J.

La cote des génératrices de ce cylindroïde est le paramètre de distribution de l'élément de surface réglée défini par J et J′ (surfaces réglées élémentaires de la congruence).

Les génératrices extrêmes du cylindroïde correspondent aux points limites de la congruence.

Les génératrices D_1 et D_2 de paramètre nul correspondent aux développables de la congruence. Elles coupent donc J en ses foyers; et les plans focaux sont les plans (J, D_1) et (J, D_2).

Il est facile alors de calculer les éléments du cylindroïde en fonction des invariants de la congruence.

Si p' et p'' sont les paramètres des droites D' et D'' rectangulaires (axes centraux du cylindroïde; surfaces distributrices de la congruence), on aura d'après le n° précédent :

A) Hauteur du cylindroïde

$$p' - p'' = [(p' + p'')^2 - 4p'p'']^{\frac{1}{2}} = \sqrt{H^2 - 4K}.$$

B) Distance des points focaux

$$2\sqrt{-p'p''} = 2\sqrt{-K}.$$

C) Angle 2θ des plans focaux

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\sqrt{-K}}{H}$$

car

$$p' + p'' = H \quad \text{et} \quad p'p'' = -K.$$

27. — Application aux M_2. — Absolument de même, soit le torseur

$$p_1 du + p_2 dv, \qquad q_1 du + q_2 dv, \qquad r_1 du + r_2 dv.$$

Son axe décrit, quand $\dfrac{du}{dv}$ varie, un cylindroïde.

Cet axe a pour cote le pas du M_1 hélicoïdal défini par $\dfrac{du}{dv}$, et les rotations pures en particulier correspondent aux axes de cote nulle.

Les mêmes calculs que pour les congruences donneront les mêmes résultats :

A) Hauteur du cylindroïde

$$\sqrt{H^2 - 4K}.$$

B) Distance des rotations pures

$$2\sqrt{-K}.$$

C) Angle de ces axes

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\sqrt{-K}}{H}.$$

Revenons alors aux M_2 spéciaux pour caractériser les cylindroïdes qui leur correspondent.

1) M_2 ISOTROPES. — Nous les avons définis par la condition $p = c^{te}$. On a alors $H^2 = 4K$ et le cylindroïde devient un faisceau plan.

Mais la réciproque n'est pas exacte.

Si la hauteur du cylindroïde est nulle, on n'en déduit pas en général que le M_2 est isotrope, ce qui exigerait deux conditions

$$\frac{E}{D} = \frac{F}{D'} = \frac{G}{D''}.$$

La réciproque est cependant exacte si l'on se borne aux M_2 *réels* comme on le voit immédiatement par un changement de coordonnées. On prend pour M_1 coordonnés les M_1 centraux. Alors $F = D' = 0$.

La condition $H^2 - 4K = 0$ s'écrit

$$(ED'' + GD)^2 - 4EGDD'' = 0$$

ou

$$ED'' - GD = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

2) M_2 PARABOLIQUES. — Si $p \neq p'$, avons-nous dit, il y a en général deux axes de paramètre donné p.

Représentons sur le plan central du cylindroïde la projection des axes spéciaux.

Si l'on prend, par rapport à un des axes centraux OX ou OY, le symétrique OJ d'un axe quelconque OI, les axes OI et OJ correspondent à des ordonnées égales et de signe contraire, et ils ont la même cote.

On voit que l'on aurait un seul axe de cote donnée, si l'on donnait la cote de OX ou celle de OY.

Poser le problème : Trouver tous les M_2 dans lesquels il n'y a, à chaque instant, qu'un seul M_1 élémentaire ayant la cote donnée C (constante ou variable), c'est trouver tous les M_2 dans lesquels un des M_1 centraux a pour cote C.

C'est-à-dire que C doit être racine de l'équation qui donne ces paramètres centraux,

$$p^2 - pH + K = 0.$$

Les invariants H et K doivent donc être liés par la relation

$$C^2 - CH + K = 0.$$

Ceci ne suppose rien de particulier sur le cylindroïde, mais sur sa cotation seulement.

Le cas des M_2 spéciaux correspond à $C = 0$, c'est-à-dire à la condition

$$K = 0.$$

3) M_2 NORMAUX

$$H = 0.$$

L'angle des rotations pures est de 90°. Elles sont alors portées par les bissectrices des axes et coïncident avec les axes limites (M_1 principaux). Ici encore, cela ne suppose rien de spécial sur le cylindroïde.

4) M_2 PSEUDO-SPHÉRIQUES. — H et K restent constants pendant toute la durée du mouvement.

Le cylindroïde reste donc identique à lui-même et sa cotation aussi reste la même.

Réciproquement, du reste, pour qu'un cylindroïde reste identique à lui-même pendant toute la durée du mouvement, il suffit que $K^2 - 4K$ reste constant.

Pour que de plus la cotation reste la même, il faut et il suffit que H et K restent séparément constants.

28. — **M_2 contenus dans un couronoïde.** — Ce sont les M_2 obtenus, à partir d'une position fixe, par symétrie autour de toutes les droites d'une congruence.

Si l'on prend la position fixe pour position origine, l'équation du couronoïde est $\rho = 0$.

Nous avons vu que dans ce cas la congruence des droites de l'espace qui déterminent le M_2 a la même forme complexe fondamentale que le M_2 lui-même.

Il est aisé de le voir géométriquement en vérifiant qu'il correspond à la congruence et au M_2 le même cylindroïde avec la même cotation.

Si deux positions S et S′ sont obtenues en faisant subir à un solide fixe des symétries par rapport aux axes J et J′, on passerait de S à S′ par un mouvement hélicoïdal autour de la perpendiculaire commune II′ à J et J′. Ce mouvement a pour translation $2\overline{II'}$, et pour angle $2(\widehat{J, J'})$.

Il aura pour pas réduit $\dfrac{\overline{II'}}{(\widehat{J, J'})}$.

En particulier, si les droites J et J′ sont deux rayons voisins d'une congruence, le lieu de II′ est un cylindroïde, comme il vient d'être dit, et le pas réduit le long de cet axe, c'est la limite de $\dfrac{\overline{\mathrm{II'}}}{(\widehat{\mathrm{J},\mathrm{J'}})}$, c'est-à-dire le paramètre de distribution de la surface réglée de la congruence définie par J et J' (dont le plan central est la limite du plan J, $\overline{\mathrm{II'}}$).

29. — Généralisation. Congruence des axes J. — Pour rendre raison davantage du parallélisme constaté, remarquons que dans le cas général on peut rattacher à la directrice J du cylindroïde plusieurs congruences ou éléments de congruences :

a) La congruence décrite par J dans le corps mobile;

b) La congruence décrite par J dans l'espace fixe;

c) L'élément de congruence décrit, dans l'espace fixe, par la droite J_1 du corps mobile qui est en cet instant axe J du cylindroïde (et ne le sera généralement plus à l'instant suivant);

d) L'élément de congruence décrit, par rapport au trièdre mobile, par la droite J_2 de l'espace fixe qui est en cet instant axe J.

Ces quatre congruences ont en commun, en cet instant, la droite J. Mais elles sont très différentes les unes des autres.

Occupons-nous d'abord de la congruence décrite par J_1.

Soient $\alpha\beta\gamma$ les cosinus complexes de J_1 mesurés dans le trièdre mobile et

$$\begin{aligned} P &= p_1 du + p_2 dv, \\ Q &= q_1 du + q_2 dv, \\ R &= r_1 du + r_2 dv \end{aligned}$$

la rotation complexe.

Nous avons déjà montré que l'on avait

$$P^2 + Q^2 + R^2 = 4\Sigma d\rho^2.$$

Comme J_1 rencontre en cet instant orthogonalement la rotation, on a, quels que soient du et dv

$$\alpha P + \beta Q + \gamma R = 0.$$

Lorsque J se déplace, ses cosinus subissent des accroissements

$$\begin{aligned} d\alpha &= Q\gamma - R\beta, \\ d\beta &= R\alpha - P\gamma, \\ d\gamma &= P\beta - Q\alpha \end{aligned}$$

d'où, pour la forme fondamentale de la congruence considérée[1] :

$$d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(P^2 + Q^2 + Q^2) - (\alpha P + \beta Q + \gamma R)^2 = 4\Sigma d\rho^2.$$

Et donc la droite J_1 décrit une congruence, et, à l'instant où elle joue le rôle d'axe J, sa forme a mêmes coefficients complexes que la forme du M_2 (au facteur 4 près).

Les invariants H et K ont aussi même valeur.

La condition que la partie complexe soit nulle signifie que J_1 décrit un élément de surface développable.

Les développables de la congruence correspondent donc aux rotations pures et les M_2 spéciaux correspondent en général à des éléments de congruences ayant mêmes spécialités.

Les accroissements $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ considérés ici donnent en somme le déplacement d'entraînement de la droite J.

Pour avoir la congruence décrite par J dans les axes mobiles, il faudrait considérer le déplacement relatif

$$d_1\alpha = \frac{\partial\alpha}{\partial u}du + \frac{\partial\alpha}{\partial v}dv$$

et deux équations analogues.

Nous calculerons dans la deuxième partie[2] sa forme fondamentale

$$(d_1\alpha)^2 + (d_1\beta)^2 + (d_1\gamma)^2.$$

Enfin, pour la congruence que décrit J dans l'espace fixe, on aurait le déplacement absolu

$$d_2\alpha = d\alpha + d_1\alpha$$

et deux équations semblables.

Nous voulons simplement remarquer ici que le déplacement d'entraînement étant toujours perpendiculaire à J, si le déplacement relatif est aussi perpendiculaire, le déplacement absolu le sera; et réciproquement; d'où l théorème signalé par M. Pérès[3]. Les congruences fixes et mobiles décrites par J sont normales ensemble.

---

[1] J_2 donnerait le même résultat. Les éléments de congruence pour J_1 et J_2 sont identiques.

[2] N° 43.

[3] *C. R.*, 8 mars 1926.

On peut donner la condition pour qu'il en soit ainsi.

Par un calcul facile, mais un peu long, on obtient la projection sur J de la vitesse du point central : c'est $a\,du + b\,dv$, le covariant trilinéaire des deux formes simultanées

$$\begin{cases} \mathrm{E}\,du^2 + 2\,\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2, \\ \mathrm{D}\,du^2 + 2\,\mathrm{D}'\,du\,dv + \mathrm{D}''\,dv^2, \end{cases}$$

c'est-à-dire que l'on a :

$$-a\Delta = \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial v} - \frac{\partial \mathrm{D}'}{\partial u} - \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\} \mathrm{D} + \left(\left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\} \right) \mathrm{D}' + \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{matrix} \right\} \mathrm{D}'',$$

$$b\Delta = \frac{\partial \mathrm{D}''}{\partial u} - \frac{\partial \mathrm{D}'}{\partial v} + \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\} \mathrm{D} + \left(\left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\} \right) \mathrm{D}' - \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\} \mathrm{D}''.$$

La congruence sera normale si ce covariant est une différentielle totale :

$$\frac{\partial a}{\partial v} = \frac{\partial b}{\partial u}.$$

DEUXIÈME PARTIE

La seconde forme complexe.

Détermination d'une congruence, d'un M_2. — La deuxième forme et son interprétation cinématique : M_2 polaire. — Formules fondamentales. — Symboles de Christoffel. — Représentation sphérique de Clifford. — M_2 sphériques. — M_2 décomposables. — M_2 qui admettent des M_1 isotropes, des M_1 de courbure ou des M_1 asymptotiques.

La forme complexe d'une congruence ne peut pas être choisie arbitrairement. Et, par ailleurs, elle suffit à individuer la congruence (à un changement d'axes près).

La forme d'un M_2 au contraire peut être choisie arbitrairement, et elle ne suffit pas à le caractériser. On peut se rendre compte aisément de ce fait, et voir, — ce sera notre but dans cette seconde partie, — comment on peut définir une nouvelle forme quadratique invariante, qui, avec la première, individue le M_2 à un changement d'axes près.

Comme nous l'avons déjà dit dans l'introduction, nous laisserons ici de côté l'analogie avec l'espace réglé, et nous considérerons (λ, μ, ν) pour une congruence, ou $(\rho, \lambda, \mu, \nu)$ pour un M_2 comme les coordonnées d'un point (complexe). Toutes les quantités qui figurent dans cette seconde partie sont complexes, et si par exemple nous parlons de rotation, il s'agira de rotation complexe, c'est-à-dire de déplacement hélicoïdal.

30. — Détermination d'une congruence. — Pour une congruence (λ, μ, ν) est un point de l'espace euclidien à 3 dimensions.

Nous avons supposé les coordonnées normalisées

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1.$$

Le point est donc assujetti à se trouver sur une sphère de rayon 1.

La forme fondamentale de la congruence

$$ds^2 = d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2$$

représente l'élément linéaire de cette sphère.

Elle n'est donc pas arbitraire. Il faudra que sa courbure soit égale à $+1$. Mais il s'agit ici de courbure complexe. En séparant la partie réelle et la partie complexe, on aura deux conditions que doivent vérifier les coefficients de cette forme.

Ces deux conditions ont été trouvées par Sannia (¹); mais son calcul, qui n'utilise pas les coordonnées complexes, est assez long.

Réciproquement si l'on donne une forme de courbure égale à $+1$, elle déterminera sur la sphère de rayon unité un réseau complexe qui sera la représentation sphérique de la congruence.

Le calcul effectif des points de cette sphère réclame, on le sait, l'intégration d'une équation de Riccati.

En opérant en coordonnées complexes, il faudra, outre cette première équation de Riccati, des quadratures dont on trouvera le détail dans Bianchi (²).

31. — Détermination d'un M_2. — La même analogie avec la théorie des surfaces résout pour les M_2 le problème que nous nous sommes posé.

Si nous considérons $\rho\lambda\mu\nu$ comme les coordonnées d'un point, ce sera un point de l'espace euclidien à 4 dimensions, qui est assujetti à se trouver sur l'hypersphère

$$\rho^2 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1\,.$$

Il sera plus commode alors de le considérer comme un point de l'espace à 3 dimensions de courbure $+1$. $(\rho\lambda\mu\nu)$ sont les coordonnées de Weierstrass dans cet espace.

Dans un M_2, $(\rho\lambda\mu\nu)$ sont des fonctions de deux variables u et v, et décrivent par conséquent une surface de l'espace riemanien considéré.

La forme fondamentale

$$ds^2 = d\rho^2 + d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2$$

représente l'élément linéaire de cette surface.

Elle est donc complètement arbitraire, et sa donnée ne caractérise pas la surface (c'est-à-dire le M_2), mais toutes les surfaces isométriques avec elle.

On aura donc des M_2 ayant même première forme fondamentale, et on pourrait les appeler des M_2 isométriques.

On voit en même temps comment on pourra se donner une nouvelle forme quadratique, liée à la première par les relations de Gauss-Codazzi, et comment à elles deux, elles définiront intrinsèquement le M_2.

(¹) *Annali di Matematica*, 1908 (XV) et 1910 (XVII).
Voir aussi *Rendiconti del Circolo mat. di Palermo*, 1911 et 1912.
(²) *Lezioni di Geometria differenziale*, 1 vol., § 187.

On peut remarquer que la première forme complexe déterminant complètement le cylindroïde des axes des M_1 hélicoïdaux tangents au M_2, deux M_2 isométriques auront à chaque instant les mêmes invariants et seront par suite singuliers (isotropes, paraboliques, etc.) en même temps.

32. — Deuxième forme complexe. — Appelons (RLMN) les coefficients de $rlmn$ dans le tableau

$$\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} r & l & m & n \\ \rho & \lambda & \mu & \nu \\ \frac{\partial\rho}{\partial u} & \frac{\partial\lambda}{\partial u} & \frac{\partial\mu}{\partial u} & \frac{\partial\nu}{\partial u} \\ \frac{\partial\rho}{\partial v} & \frac{\partial\lambda}{\partial v} & \frac{\partial\mu}{\partial v} & \frac{\partial\nu}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Nous avons posé au chapitre précédent

$$\Delta = \sqrt{EG - F^2}.$$

On vérifie immédiatement les identités

$$R\,\rho + L\,\lambda + M\,\mu + N\,\nu = 0. \tag{1}$$

$$R\frac{\partial\rho}{\partial u} + L\frac{\partial\lambda}{\partial u} + M\frac{\partial\mu}{\partial u} + N\frac{\partial\nu}{\partial u} = 0. \tag{2}$$

$$R\frac{\partial\rho}{\partial v} + L\frac{\partial\lambda}{\partial v} + M\frac{\partial\mu}{\partial v} + N\frac{\partial\nu}{\partial v} = 0. \tag{3}$$

Il suffit de remplacer dans le déterminant ci-dessus la première ligne successivement par $(\rho\lambda\mu\nu)$ ou par $\left(\frac{\partial\rho}{\partial u}, \frac{\partial\lambda}{\partial u}, \frac{\partial\mu}{\partial u}, \frac{\partial\nu}{\partial u}\right)$ ou par $\left(\frac{\partial\rho}{\partial v}, \frac{\partial\lambda}{\partial v}, \frac{\partial\mu}{\partial v}, \frac{\partial\nu}{\partial v}\right)$.

On a aussi

$$R^2 + L^2 + M^2 + N^2 = 1. \tag{4}$$

On sait en effet que pour avoir ΣR^2, il suffit de faire le carré du tableau

$$\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \rho & \lambda & \mu & \nu \\ \frac{\partial\rho}{\partial u} & \frac{\partial\lambda}{\partial u} & \frac{\partial\mu}{\partial u} & \frac{\partial\nu}{\partial u} \\ \frac{\partial\rho}{\partial v} & \frac{\partial\lambda}{\partial v} & \frac{\partial\mu}{\partial v} & \frac{\partial\nu}{\partial v} \end{vmatrix}$$

comme on fait le carré d'un déterminant.

On trouve

$$\frac{1}{\Delta^2}\begin{vmatrix} \sum \rho^2 & \sum \rho \frac{\partial \rho}{\partial u} & \sum \rho \frac{\partial \rho}{\partial v} \\ \sum \rho \frac{\partial \rho}{\partial u} & \sum \left(\frac{\partial \rho}{\partial u}\right)^2 & \sum \frac{\partial \rho}{\partial u} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial v} \\ \sum \rho \frac{\partial \rho}{\partial v} & \sum \frac{\partial \rho}{\partial u} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial v} & \sum \left(\frac{\partial \rho}{\partial v}\right)^2 \end{vmatrix}.$$

Or on a

$$\sum \rho^2 = 1$$

et en dérivant

$$\sum \rho \frac{\partial \rho}{\partial u} = 0,$$

$$\sum \rho \frac{\partial \rho}{\partial v} = 0.$$

On a aussi

$$\sum \left(\frac{\partial \rho}{\partial u}\right)^2 = E, \qquad \sum \frac{\partial \rho}{\partial u} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial v} = F, \qquad \sum \left(\frac{\partial \rho}{\partial v}\right)^2 = G.$$

On en déduit aussitôt

$$R^2 + L^2 + M^2 + N^2 = 1.$$

On aurait deux autres identités utiles en dérivant (1) par rapport à u ou v et soustrayant (2) ou (3).

Il vient

$$\rho \frac{\partial R}{\partial u} + \lambda \frac{\partial L}{\partial u} + \mu \frac{\partial M}{\partial u} + \nu \frac{\partial N}{\partial u} = 0. \tag{5}$$

$$\rho \frac{\partial R}{\partial v} + \lambda \frac{\partial L}{\partial v} + \mu \frac{\partial M}{\partial v} + \nu \frac{\partial N}{\partial v} = 0. \tag{6}$$

Nous poserons alors, et ce sera la seconde forme fondamentale,

$$\Phi = A\,du^2 + 2B\,du\,dv + C\,dv^2 = \sum d\rho\, dR.$$

Σ indique une permutation circulaire de $\rho\lambda\mu\nu$, et, en même temps, de R, L, M, N.

On a par conséquent

$$A = \sum \frac{\partial \rho}{\partial u}\frac{\partial R}{\partial u}, \qquad 2B = \sum\left(\frac{\partial \rho}{\partial v}\frac{\partial R}{\partial u} + \frac{\partial \rho}{\partial u}\frac{\partial R}{\partial v}\right), \qquad C = \sum \frac{\partial \rho}{\partial v}\frac{\partial R}{\partial v}.$$

On peut écrire de différentes façons cette seconde forme.

L'identité

$$\sum R\frac{\partial \rho}{\partial u} = 0$$

dérivée par rapport à u donnerait

$$\sum \frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial \rho}{\partial u} = -\sum R\frac{\partial^2 \rho}{\partial u^2}.$$

Des calculs semblables permettent d'écrire

$$A = \sum \frac{\partial \rho}{\partial u}\frac{\partial R}{\partial u} = -\sum R\frac{\partial^2 \rho}{\partial u^2} = -\sum \rho\frac{\partial^2 R}{\partial u^2},$$

$$B = \sum \frac{\partial \rho}{\partial u}\frac{\partial R}{\partial v} = \sum \frac{\partial \rho}{\partial v}\frac{\partial R}{\partial u} = -\sum R\frac{\partial^2 \rho}{\partial u . \partial v} = -\sum \rho\frac{\partial^2 R}{\partial u . \partial v},$$

$$C = \sum \frac{\partial \rho}{\partial v}\frac{\partial R}{\partial v} = -\sum R\frac{\partial^2 \rho}{\partial v^2} = -\sum \rho\frac{\partial^2 R}{\partial v^2}$$

de sorte que la deuxième forme s'écrit

$$\Phi = \sum d\rho\, dR = -\sum R\, d^2\rho = -\sum \rho\, d^2 R$$

ou, compte tenu de la valeur de (RLMN), sous forme d'un déterminant dont je n'écris que la première ligne, les autres s'en déduisant par permutation

$$\Phi = -\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} d^2\rho & \rho & \dfrac{\partial \rho}{\partial u} & \dfrac{\partial \rho}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Le caractère invariant de Φ est évident sur le déterminant ci-dessus.

Une substitution linéaire orthogonale à coefficients constants, effectuée sur les variables $(\rho\lambda\mu\nu)$ (et donc aussi sur leurs dérivées), multiplie le déterminant par le module de la substitution qui est $+1$.

33. — Interprétation cinématique. — Pour interpréter la deuxième forme, nous remarquerons que (R, L, M, N) peuvent être considérés comme les coordonnées d'un solide puisque $\Sigma R^2 = 1$.

La relation

$$R\rho + L\lambda + M\mu + N\nu = 0$$

signifie que l'on passe de (RLMN) à ($\rho\lambda\mu\nu$) par une rotation pure de 180° autour d'un certain axe.

Les relations $\sum R \frac{\partial \rho}{\partial u} = 0$ et $\sum R \frac{\partial \rho}{\partial v} = 0$ se condensent en $\sum R d\rho = 0$ ou encore $\sum R(\rho + d\rho) = 0$.

Elles indiquent donc que le solide (RLMN) reste symétrique de ($\rho\lambda\mu\nu$) pendant tout déplacement infiniment petit de ce dernier autour de la position (ρ).

Réciproquement

$$\sum \rho \frac{\partial R}{\partial u} = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum \rho \frac{\partial R}{\partial v} = 0$$

indiquent que ($\rho\lambda\mu\nu$) reste symétrique de (RLMN) pendant tout déplacement infiniment petit de ce dernier.

On peut donc associer à toute position (ρ) d'un M_2, une position (R) d'un autre M_2 que nous dirons M_2 polaire du premier. (ρ) et (R) sont symétriques par rapport à un certain axe; toutes les positions voisines de (ρ) sont symétriques de (R), par rapport à d'autres axes; et réciproquement toutes les positions voisines de (R) sont symétriques de (ρ).

Nous allons redémontrer géométriquement l'existence de ce M_2 polaire et nous déterminerons l'axe de symétrie.

On connaît le théorème de Stephanos : trois positions quelconques $S_1 S_2 S_3$ d'un même solide, proviennent par des renversements convenables d'une même position S.

On peut appliquer ce théorème à trois positions voisines d'un M_2. La position S trouvée est symétrique de toutes les autres positions voisines du M_2.

Plus précisément, dans un M_2, toutes les positions S_i d'un solide voisines d'une position S_0 donnée, sont symétriques par rapport à une congruence de droites, d'un même solide S.

En effet, on passe de S_0 à une position S_i voisine par un mouvement hélicoïdal autour d'un certain axe T_i. Tous les axes T_i forment le cylindroïde dont nous avons parlé dans la première partie et rencontrent à angle droit une même droite J, l'axe de ce cylindroïde.

Le mouvement hélicoïdal autour de T_i peut donc se remplacer par deux renversements :

1) l'un autour de J,
2) l'autre autour d'une certaine perpendiculaire J_i à T_i.

Si donc j'appelle S le symétrique de S_0 par rapport à J, toutes les positions S_i seront symétriques de S par rapport aux droites J_i, ce qui démontre le théorème.

Si l'on calcule jusqu'au second ordre le cosinus de l'angle de la position S(RLMN) et des positions voisines $S_i\left(\rho + d\rho + \frac{1}{2} d^2\rho\right)$ on trouve

$$\Sigma R\left(\rho + d\rho + \frac{1}{2} d^2\rho\right) = \frac{1}{2}\Sigma R d^2\rho = -\frac{1}{2}\Phi .$$

C'est au facteur $-1/2$ près, la seconde forme fondamentale.

34. — Coordonnées de l'axe J. — Cet axe J est perpendiculaire à toutes les rotations élémentaires d'après ce que nous avons dit,

On aurait donc ses cosinus directeurs $(\alpha\beta\gamma)$ en cherchant la perpendiculaire commune aux deux rotations coordonnées $\overrightarrow{\Omega}_1(p_1 q_1 r_1)$ et $\overrightarrow{\Omega}_2(p_2 q_2 r_2)$.

On a immédiatement

$$\alpha = \frac{q_1 r_2 - q_2 r_1}{4\Delta}$$

et β et γ par permutation.

Ou, pour abréger, en appelant $\overrightarrow{J}$ le vecteur unitaire porté par J

$$4\Delta\overrightarrow{J} = [\overrightarrow{\Omega}_1 \wedge \overrightarrow{\Omega}_2].$$

On peut calculer facilement ces cosinus en fonction de $(\rho\lambda\mu\nu)$.

Il suffit de chercher les coordonnées du déplacement qui permet de passer de la position (ρ) à la position (R).

Il faut composer les déplacements $(+\rho, -\lambda, -\mu, -\nu)$ et (RLMN).

Les formules de l'Introduction (n° 9) donnent immédiatement

$$\rho_1 = \Sigma\rho R = 0$$

c'est-à-dire que le déplacement est un renversement et

$$\alpha = -\rho L + R\lambda - \nu M + \mu N,$$
$$\beta = -\rho M + R\mu - \lambda N + \nu L.$$
$$\gamma = -\rho N + R\nu - \mu L + \lambda M.$$

Ces formules nous seront utiles plus tard pour étudier la congruence formée par ces axes J.

Sur les axes fixes $\alpha' = +\rho L - R\lambda + \mu N - \nu M$ (Introduction n° 9).

35. — Détermination du mouvement d'après les deux formes. — Nous allons montrer :

1) que les deux formes ne sont pas indépendantes, mais vérifient des relations analogues aux relations de Gauss-Codazzi pour les surfaces ;
2) que deux formes qui vérifient ces relations étant données, le mouvement en résulte à une substitution orthogonale près.

Nous passerons rapidement sur tout cela.

On sait en effet que les calculs de la théorie des surfaces pour l'espace euclidien, s'appliquent à peu près sans changement à l'espace elliptique. Et il suffira, en vertu de l'analogie signalée plus haut, de transporter les résultats aux M_2. J'indique simplement la marche ; on trouve le détail dans les leçons de Bianchi (1) pour des coordonnées réelles. Le fait qu'ici toutes les quantités sont complexes n'introduit aucune modification dans les calculs. Chaque équation est simplement censée dédoublée.

Lemme. — Étant données quatre fonctions quelconques XYZT de u et de v, on peut toujours déterminer quatre nouvelles fonctions $\alpha\beta\gamma\delta$, telles que l'on ait :

$$X = \alpha R + \beta \rho + \gamma \frac{\partial \rho}{\partial u} + \delta . \frac{\partial \rho}{\partial v},$$

$$Y = \alpha L + \beta \lambda + \gamma \frac{\partial \lambda}{\partial u} + \delta . \frac{\partial \lambda}{\partial v},$$

$$Z = \alpha M + \beta \mu + \gamma \frac{\partial \mu}{\partial u} + \delta . \frac{\partial \mu}{\partial v},$$

$$T = \alpha N + \beta \nu + \gamma \frac{\partial \nu}{\partial u} + \delta . \frac{\partial \nu}{\partial v}.$$

Ceci revient à remarquer que le déterminant

$$\begin{vmatrix} R & \rho & \dfrac{\partial \rho}{\partial u} & \dfrac{\partial \rho}{\partial v} \end{vmatrix}$$

dont je n'écris que la première ligne, — les autres s'en déduisent par permutation, — n'est pas nul.

Il suffit en effet de développer ce déterminant par rapport aux éléments de la première colonne, pour trouver sa valeur, Δ, que nous avons supposée non nulle(2).

(1) *Lezioni...*, 1 vol., chap. IV.

(2) Plus précisément nous supposerons que la partie réelle de Δ n'est pas nulle. Quand un nombre a est purement complexe, on ne peut définir ni son inverse $\frac{1}{a}$, ni sa racine carrée $\sqrt{a}$.

Notre analyse laisse donc de côté les M_2 dont les rotations (réelles) ne dépendraient que d'une seule variable, tout comme la méthode de Sannia laisse échapper les congruences dont la représentation sphérique est une courbe.

On peut appliquer ce lemme au calcul des dérivées secondes des $\rho\lambda\mu\nu$, ou des dérivées de RLMN.

On aura par exemple :

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial u^2} = \alpha R + \beta\rho + \gamma\frac{\partial\rho}{\partial u} + \delta\frac{\partial\rho}{\partial v}$$

et des équations analogues pour $\frac{\partial^2\lambda}{\partial u^2}, \frac{\partial^2\mu}{\partial u^2}, \frac{\partial^2\nu}{\partial u^2}$, par simple permutation et il faut calculer $\alpha\beta\gamma\delta$.

Multipliant ces équations par RLMN respectivement et faisant la somme, il vient

$$\alpha = -A$$

de même en multipliant par ρ, λ, μ, ν

$$\beta = -E.$$

Enfin multipliant par $\frac{\partial\rho}{\partial u}, \frac{\partial\lambda}{\partial u}, \frac{\partial\mu}{\partial u}, \frac{\partial\nu}{\partial u}$, puis par $\frac{\partial\rho}{\partial v}, \frac{\partial\lambda}{\partial v}, \frac{\partial\mu}{\partial v}, \frac{\partial\nu}{\partial v}$ et sommant chaque fois, on trouve

$$\gamma = \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{Bmatrix}, \qquad \delta = \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{Bmatrix}.$$

Nous représentons par les signes habituels les symboles de Christoffel de la première forme.

Par des calculs analogues, on trouve les groupes suivants de formules, dont je n'écris que la première dans chaque groupe.

$$\text{(I)} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2\rho}{\partial u^2} &= -AR - E\rho + \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{Bmatrix}\frac{\partial\rho}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{Bmatrix}\frac{\partial\rho}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2\rho}{\partial u\partial v} &= -BR - F\rho + \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix}\frac{\partial\rho}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix}\frac{\partial\rho}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2\rho}{\partial v^2} &= -CR - G\rho + \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix}\frac{\partial\rho}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix}\frac{\partial\rho}{\partial v}, \end{aligned} \right.$$

$$\text{(II)} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial u} &= \frac{AG - FB}{\Delta^2}\frac{\partial\rho}{\partial u} + \frac{BE - AF}{\Delta^2}\frac{\partial\rho}{\partial v}, \\ \frac{\partial R}{\partial v} &= \frac{BG - FC}{\Delta^2}\frac{\partial\rho}{\partial u} + \frac{CE - BF}{\Delta^2}\frac{\partial\rho}{\partial v}. \end{aligned} \right.$$

36. — Conditions d'intégrabilité. — Il faut écrire à présent les conditions d'intégrabilité.

D'abord
$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial u^2}\right) = 0$$

et celles que l'on en déduit par permutation de $(\rho \lambda \mu \nu)$.

On peut supposer ces différences mises sous la forme

$$\alpha R + \beta \rho + \gamma \frac{\partial \rho}{\partial u} + \delta \frac{\partial \rho}{\partial v} = 0.$$

Cette relation devant rester vérifiée en y remplaçant ρ par λ, μ, ν, et R par L, M, N, cela exige

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = 0, \qquad \delta = 0.$$

Les conditions $\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial v^2}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v}\right) = 0$ donneraient de la même façon quatre autres conditions.

Les huit relations trouvées se réduisent aux trois suivantes :

$$\frac{\partial A}{\partial v} - \frac{\partial B}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix} A + \left(\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix}\right) B + \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{Bmatrix} C = 0,$$
$$\frac{\partial C}{\partial u} - \frac{\partial B}{\partial v} + \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix} A + \left(\begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix}\right) B - \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix} C = 0,$$
$$k = 1 + \frac{AC - B^2}{\Delta^2}.$$

J'ai appelé k la courbure de la première forme.

Les deux premières de ces relations sont identiques à celles de Codazzi pour les surfaces euclidiennes.

La troisième relation est un peu différente de la relation de Gauss. Elle pourrait s'obtenir directement, tout comme dans le cas des surfaces euclidiennes.

Nous avons vu que la deuxième forme fondamentale pouvait s'écrire sous forme de déterminant

$$-\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} d^2\rho & \rho & \frac{\partial \rho}{\partial u} & \frac{\partial \rho}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

On a donc

$$A = -\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 \rho}{\partial u^2} & \rho & \dfrac{\partial \rho}{\partial u} & \dfrac{\partial \rho}{\partial v} \end{vmatrix},$$

$$B = -\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} & \rho & \dfrac{\partial \rho}{\partial u} & \dfrac{\partial \rho}{\partial v} \end{vmatrix},$$

$$C = -\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 \rho}{\partial v^2} & \rho & \dfrac{\partial \rho}{\partial u} & \dfrac{\partial \rho}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Un simple produit de déterminants dont on trouve l'analogue dans Darboux (1) donnerait la relation cherchée.

Mais il serait plus commode de déduire directement cette relation du théorème de Gauss appliqué aux espaces de courbure $+1$.

La courbure totale de la surface est le second invariant du système des deux formes, c'est-à-dire

$$\frac{AC - B^2}{\Delta^2}.$$

Si on lui ajoute la courbure de l'espace ambiant $(+1)$, on obtient la courbure intrinsèque (absolue) de la première forme (2) : k.

37. — Unicité de la solution. — Il reste à montrer qu'à deux formes dont les coefficients vérifient les trois relations données, correspond un M_2 défini à un mouvement près dans l'espace.

La démonstration est évidemment indépendante du choix des coordonnées. Nous avons vu dans le chapitre I qu'on pouvait prendre comme M_1 coordonnés, les M_1 centraux. Le coefficient F est alors nul.

Le choix étant ainsi fait, le tableau suivant est orthogonal :

$$\begin{vmatrix} \rho & \lambda & \mu & \nu \\ R & L & M & N \\ \dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial \rho}{\partial u} & \dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial \lambda}{\partial u} & \dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial \mu}{\partial u} & \dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial \nu}{\partial u}, \\ \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial \rho}{\partial v} & \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial \lambda}{\partial v} & \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial \mu}{\partial v} & \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial \nu}{\partial v}. \end{vmatrix}$$

Supposons connu ce tableau pour une valeur de u et de v $(u_0 v_0)$ et supposons aussi connus en fonction de u et v les coefficients des deux formes.

(1) *Leçons sur la théorie des surfaces*, III, p. 245.
(2) CARTAN. *Géométrie des espaces de Riemann*, p. 196.

Dans ces conditions, les formules I et II (de la page 12) permettront par des dérivations successives, de connaître pour u_0 et v_0, les valeurs des dérivées d'ordre quelconque de $\rho\lambda\mu\nu$ (et de RLMN).

Les développements en série de Taylor de ces quantités ne peuvent donc contenir (et contiennent du reste effectivement) que les paramètres arbitraires qui correspondent aux valeurs initiales du tableau orthogonal ci-dessus.

Ces paramètres d'une transformation orthogonale correspondent au changement de coordonnées le plus général du M_2.

38. — Troisième forme fondamentale. — Il y a réciprocité entre les positions ($\rho\lambda\mu\nu$) et (RLMN). Nous sommes ainsi conduits à introduire une nouvelle forme quadratique

$$ds'^2 = dR^2 + dL^2 + dM^2 + dN^2 = E'du^2 + 2F'du\,dv + G'dv^2.$$

Étant donnée une fonction quelconque φ de $\rho\lambda\mu\nu$, nous représenterons par φ' ce qu'elle devient lorsqu'on y substitue RLMN à $\rho\lambda\mu\nu$. Nous appellerons ainsi $p'_1 p'_2\, q'_1 q'_2\, r'_1 r'_2$ les rotations du M_2 polaire.

On a

$$\begin{aligned}
4\,E' &= p_1'^2 + q_1'^2 + r_1'^2 = \overrightarrow{\Omega}_1'^2\\
4\,F' &= p_1'p_2' + q_1'q_2' + r_1'r_2' = \Omega_1'\Omega_2' \cos \omega' = \overrightarrow{\Omega_1'}\,\overrightarrow{\Omega_2'}\\
4\,G' &= p_2'^2 + q_2'^2 + r_2'^2 = \overrightarrow{\Omega}_2'^2
\end{aligned}$$

comme dans le M_2 primitif.

On a aussi

$$4\Delta' = \pm\, \Omega_1'\Omega_2' \sin \omega'.$$

On aurait ensuite des formules analogues à celles du n° 35 pour $\frac{\partial^2 R}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 R}{\partial u \partial v}$, $\frac{\partial^2 R}{\partial v^2}$, $\frac{\partial \rho}{\partial u}$, $\frac{\partial \rho}{\partial v}$ ... en fonction de ρ, R, $\frac{\partial R}{\partial u}$, $\frac{\partial R}{\partial v}$, et des coefficients de la 3ᵉ forme.

On en tirerait trois équations de Gauss-Codazzi dont les deux premières s'obtiendraient en remplaçant les symboles de Christoffel de la 1ʳᵉ forme par ceux de la 3ᵐᵉ, et la dernière est

$$k' = 1 + \frac{AC - B^2}{\Delta'^2}.$$

Comme on a

$$\Delta = \begin{vmatrix} R & \rho & \frac{\partial \rho}{\partial u} & \frac{\partial \rho}{\partial v} \end{vmatrix}$$

on a aussi

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \rho & R & \frac{\partial R}{\partial u} & \frac{\partial R}{\partial v} \end{vmatrix}$$

et en faisant le produit de ces deux déterminants par colonnes

$$\Delta\Delta' = -(AC - B^2).$$

Ceci permet d'écrire la courbure totale des M_2

$$k - 1 = \frac{AC - B^2}{\Delta^2} = -\frac{\Delta}{\Delta'},$$

$$k' - 1 = -\frac{\Delta}{\Delta'},$$

ce qui fournit une interprétation cinématique de la courbure totale d'un M_2 : Elle est le rapport des aires des parallélogrammes construits sur les rotations coordonnées dans le M_2 et dans le M_2 polaire.

Il y a une relation linéaire entre les trois formes.

Nous avons trouvé les formules

$$\frac{\partial R}{\partial u} = \frac{AG - FB}{\Delta^2}\frac{\partial \rho}{\partial u} + \frac{BE - AF}{\Delta^2}\frac{\partial \rho}{\partial v}$$

et trois équations analogues en $\frac{\partial L}{\partial u}, \frac{\partial M}{\partial u}, \frac{\partial N}{\partial u}$.

Multiplions respectivement ces équations par $\frac{\partial R}{\partial u}, \frac{\partial L}{\partial u}, \frac{\partial M}{\partial u}, \frac{\partial N}{\partial u}$ et ajoutons-les. Il vient

$$E' = \sum \left(\frac{\partial R}{\partial u}\right)^2 = \frac{AG - FB}{\Delta^2} A + \frac{BE - AF}{\Delta^2} B$$

ou

$$E' = -E\,\frac{AC - B^2}{\Delta^2} - A\,\frac{2FB - AG - EC}{\Delta^2}.$$

Soient alors
$$k - 1 = \frac{AC - B^2}{\Delta^2}$$

et
$$h = \frac{2FB - AG - EC}{\Delta^2}$$

les invariants simultanés du système des deux premières formes.

On aura
$$E' = -E(k-1) - Ah$$

et semblablement

$$F' = -F(k-1) - Bh,$$
$$G' = -G(k-1) - Ch.$$

On aurait de même $k' - 1$ et h' comme invariants simultanés de la 2^{me} et 3^{me} forme.

On vérifie les identités

$$[k-1][k'-1] = 1$$
$$\Delta h + \Delta' h' = 0$$
$$A\Delta h = E\Delta' - E'\Delta$$

et deux formules analogues pour B et C.

39. — Rotations dans le M_2 polaire. — On a déjà vu les formules

$$p_1 = 2\left[\rho\frac{\partial\lambda}{\partial u} - \lambda\frac{\partial\rho}{\partial u} + \nu\frac{\partial\mu}{\partial u} - \mu\frac{\partial\nu}{\partial u}\right]$$

et analogues pour q_1 et r_1.

Elles donnent les projections $(p_1 q_1 r_1)$ de la rotation du trièdre $(\rho\lambda\mu\nu)$ sur les axes mobiles de ce trièdre.

On aura de façon analogue

$$P_1 = 2\left[R\frac{\partial L}{\partial u} - L\frac{\partial R}{\partial u} + N\frac{\partial M}{\partial u} - M\frac{\partial N}{\partial u}\right]$$

et deux formules semblables pour les projections $(P_1 Q_1 R_1)$ de la rotation du trièdre $(RLMN)$ sur les axes de ce trièdre.

Pour calculer cette rotation en fonction de $(\rho\lambda\mu\nu)$ et de leurs dérivées, il suffit d'éliminer $\frac{\partial R}{\partial u}, \frac{\partial L}{\partial u}, \frac{\partial M}{\partial u}, \frac{\partial N}{\partial u}$ en se servant des relations

$$\sum R\frac{\partial R}{\partial u} = \sum \rho\frac{\partial R}{\partial u} = 0,$$

$$\sum \frac{\partial \rho}{\partial u}\frac{\partial R}{\partial u} = A,$$

$$\sum \frac{\partial \rho}{\partial v}\frac{\partial R}{\partial u} = B.$$

Le calcul est un peu long, mais facile.

On trouve

$$P_1 = -\frac{Bp_1 - Ap_2}{\Delta}$$

et semblablement

$$P_2 = -\frac{Cp_1 - Bp_2}{\Delta}.$$

Ce sont les projections sur les axes mobiles du trièdre RLMN.

Si l'on remarque qu'on passe de ce trièdre au trièdre $(\rho\lambda\mu\nu)$ par une rotation de 180° autour d'un axe qui est justement perpendiculaire à $(P_1Q_1R_1)$ ou $(P_2Q_2R_2)$, on en déduira pour les projections sur les axes de $\rho\lambda\mu\nu$

$$p'_1 = -P_1 = \frac{Bp_1 - Ap_2}{\Delta},$$

$$p'_2 = -P_2 = \frac{Cp_1 - Bp_2}{\Delta}.$$

On sait (et l'on constate sur les formules ci-dessus) que les quatre vecteurs complexes

$$\overrightarrow{\Omega}_1(p_1 q_1 r_1),$$

$$\overrightarrow{\Omega}_2(p_2 q_2 r_2),$$

$$\overrightarrow{\Omega'_1}(p'_1 q'_1 r'_1),$$

$$\overrightarrow{\Omega'_2}(p'_2 q'_2 r'_2),$$

sont dans un même plan complexe, c'est-à-dire en revenant à l'espace ordinaire rencontrent à angle droit une même perpendiculaire commune (l'axe J du cylindroïde).

Calculons les produits scalaires complexes de ces vecteurs

$$\vec{\Omega}_1\vec{\Omega}'_1 = p_1p'_1 + q_1q'_1 + r_1r'_1 = -\frac{A\Sigma p_1p_2 - B\Sigma p_1^2}{\Delta} = -4\frac{AF - BE}{\Delta}.$$

Semblablement
$$\vec{\Omega}_1\vec{\Omega}'_2 = -4\frac{BF - CE}{\Delta},$$
$$\vec{\Omega}_2\vec{\Omega}'_2 = -4\frac{AG - BF}{\Delta},$$
$$\vec{\Omega}_2\vec{\Omega}'_1 = -4\frac{BG - CF}{\Delta}$$

et par suite

$$\left[\vec{\Omega}_1 du + \vec{\Omega}_2 dv\right]\left[\vec{\Omega}'_1 du + \vec{\Omega}'_2 dv\right]$$
$$= \frac{-4}{\Delta}\left[(AF - BE)du^2 + (AG - CE)du\,dv + (BG - CF)dv^2\right].$$

Le crochet du second membre représente le Jacobien des deux formes fondamentales, dont on a ici l'interprétation : c'est le produit scalaire complexe des rotations du trièdre et du trièdre polaire. S'il est identiquement nul, les deux rotations se rencontrent à angle droit; on a des M_2 spéciaux dont nous reparlerons.

On peut interpréter aussi le second invariant h des deux formes.

$$-\vec{\Omega}_1\vec{\Omega}'_2 + \vec{\Omega}_2\vec{\Omega}'_1 = \frac{4}{\Delta}(2BF - EC - GA) = 4\Delta h.$$

L'identité
$$\Delta h + \Delta' h' = 0$$
rencontrée plus haut devient ici évidente.

On peut calculer aussi les produits vectoriels des rotations. Ils sont tous dirigés le long de l'axe J, et ont pour longueur l'aire complexe du parallélogramme construit sur les rotations en question.

On a successivement

$$p_1q'_1 - p'_1q_1 = 4A \cdot \frac{p_2q_1 - p_1q_2}{4\Delta}$$

et deux équations analogues, c'est-à-dire que le produit vectoriel $\vec{\Omega}_1 \wedge \vec{\Omega}'_1 = -4A\vec{J}$ a pour module $4A$.

Des calculs analogues donneraient les résultats suivants pour les aires des parallélogrammes construits

$$\text{sur } \vec{\Omega}_1 \text{ et } \vec{\Omega}'_1 : 4\text{A},$$

$$\text{sur } \vec{\Omega}_2 \text{ et } \vec{\Omega}'_1 : 4\text{B},$$

$$\text{sur } \vec{\Omega}_1 \text{ et } \vec{\Omega}'_2 : 4\text{B},$$

$$\text{sur } \vec{\Omega}_2 \text{ et } \vec{\Omega}'_2 : 4\text{C}.$$

On a déjà vu que les parallélogrammes $\vec{\Omega}_1$, $\vec{\Omega}_2$ et $\vec{\Omega}'_1$, $\vec{\Omega}'_2$ ont respectivement 4Δ et $4\Delta'$ pour aires complexes.

Enfin, l'aire complexe du parallélogramme construit sur la rotation $\left[\vec{\Omega}_1 du + \vec{\Omega}_2 dv\right]$ du M_2 et celle $\left[\vec{\Omega}'_1 du + \vec{\Omega}'_2 dv\right]$ du M_2 polaire, est en vertu des résultats ci-dessus :

$$4\left[\text{A}du^2 + 2\text{B}du\,dv + \text{C}dv^2\right]$$

ce qui fournit une autre interprétation de la 2[me] forme fondamentale.

40. — Symboles de Christoffel. — Calculons la dérivée vectorielle des rotations $\vec{\Omega}_1$ et $\vec{\Omega}_2$. $\vec{\Omega}_1$ a ses composantes $(p_1 q_1 r_1)$ données par les formules

$$p_1 = 2\left[\rho\frac{\partial\lambda}{\partial u} - \lambda\frac{\partial\rho}{\partial u} + \nu\frac{\partial\mu}{\partial u} - \mu\frac{\partial\nu}{\partial u}\right]$$

et analogues, d'où pour le vecteur $\dfrac{\partial\vec{\Omega}_1}{\partial u}$, les composantes

$$\frac{\partial p_1}{\partial u} = 2\left[\rho\frac{\partial^2\lambda}{\partial u^2} - \lambda\frac{\partial^2\rho}{\partial u^2} + \nu\frac{\partial^2\mu}{\partial u^2} - \mu\frac{\partial^2\nu}{\partial u^2}\right]$$

et en se servant des formules (n° 35) qui donnent les dérivées secondes de $\rho\lambda\mu\nu$

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_1}{\partial u} = &- 2\text{A}\left[\rho\text{L} - \text{R}\lambda + \nu\text{M} - \mu\text{N}\right]\\ &+ 2\left\{\begin{matrix}1\ 1\\ 1\end{matrix}\right\}\left[\rho\frac{\partial\lambda}{\partial u} - \lambda\frac{\partial\rho}{\partial u} + \nu\frac{\partial\mu}{\partial u} - \mu\frac{\partial\nu}{\partial u}\right]\\ &+ 2\left\{\begin{matrix}1\ 1\\ 2\end{matrix}\right\}\left[\rho\frac{\partial\lambda}{\partial v} - \lambda\frac{\partial\rho}{\partial v} + \nu\frac{\partial\mu}{\partial v} - \mu\frac{\partial\nu}{\partial v}\right]\end{aligned}$$

ou encore

$$\frac{\partial p_1}{\partial u} = 2A\left(\frac{q_1 r_2 - q_2 r_1}{4\Delta}\right) + \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{matrix} \right\} p_1 + \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{matrix} \right\} p_2$$

et deux formules analogues pour $\frac{\partial q_1}{\partial u}$ et $\frac{\partial r_1}{\partial u}$ ce qui nous fournit la décomposition du vecteur $\frac{\partial \overrightarrow{\Omega_1}}{\partial u}$ selon les axes du trièdre $\overrightarrow{\Omega_1}\,\overrightarrow{\Omega_2}$ et $\overrightarrow{J}$.

$$\frac{\partial \overrightarrow{\Omega_1}}{\partial u} = 2A\,\overrightarrow{J} + \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{matrix} \right\} \overrightarrow{\Omega_1} + \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{matrix} \right\} \overrightarrow{\Omega_2}.$$

On aurait par des calculs absolument semblables

$$\frac{\partial \overrightarrow{\Omega_1}}{\partial v} = 2(B + \Delta)\,\overrightarrow{J} + \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\} \overrightarrow{\Omega_1} + \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\} \overrightarrow{\Omega_2},$$

$$\frac{\partial \overrightarrow{\Omega_2}}{\partial u} = 2(B - \Delta)\,\overrightarrow{J} + \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\} \overrightarrow{\Omega_1} + \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\} \overrightarrow{\Omega_2},$$

$$\frac{\partial \overrightarrow{\Omega_2}}{\partial v} = 2C\,\overrightarrow{J} + \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\} \overrightarrow{\Omega_1} + \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\} \overrightarrow{\Omega_2}.$$

On déduit de ces formules

$$\frac{\partial \overrightarrow{\Omega_1}}{\partial v} - \frac{\partial \overrightarrow{\Omega_2}}{\partial u} = 4\Delta\,\overrightarrow{J}$$

ce qui est, sous forme vectorielle, la relation connue entre les rotations (n° 1).

Il faut bien noter que les accroissements $\frac{\partial \overrightarrow{\Omega_1}}{\partial u}du$, $\frac{\partial \overrightarrow{\Omega_1}}{\partial v}dv$, sont mesurés sur les axes mobiles.

Si on les voulait sur les axes fixes, il faudrait leur ajouter l'accroissement dû au déplacement des axes dans les rotations $\overrightarrow{\Omega_1}du$ ou $\overrightarrow{\Omega_2}dv$, c'est-à-dire les produits

$$\left(\overrightarrow{\Omega_1} \wedge \overrightarrow{\Omega_1}\right) du = 0 \qquad \text{ou} \qquad \left(\overrightarrow{\Omega_2} \wedge \overrightarrow{\Omega_1}\right) dv = -4\Delta\,\overrightarrow{J}\,dv.$$

On trouve ainsi que les formules donnant $\frac{\partial \overrightarrow{\Omega_1}}{\partial u}$ et $\frac{\partial \overrightarrow{\Omega_2}}{\partial v}$ continuent de valoir pour les axes fixes, tandis que pour $\frac{\partial \vec{\Omega}_1}{\partial v}$ ou $\frac{\partial \vec{\Omega}_2}{\partial u}$ il faut changer les signes de Δ dans le coefficient de $\vec{J}$. Mais nous n'emploierons les formules que sur les axes mobiles.

On déduit de ces valeurs la signification des symboles de Christoffel et de la seconde forme complexe.

Je me borne à écrire les résultats.

Symboles de première espèce :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\vec{\Omega}_1 \frac{\partial \vec{\Omega}_1}{\partial v} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\vec{\Omega}_2 \frac{\partial \vec{\Omega}_1}{\partial u},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\vec{\Omega}_1 \frac{\partial \vec{\Omega}_1}{\partial v} = \frac{1}{4}\vec{\Omega}_1 \frac{\partial \vec{\Omega}_2}{\partial u} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\vec{\Omega}_2 \frac{\partial \vec{\Omega}_2}{\partial u} = \frac{1}{4}\vec{\Omega}_2 \frac{\partial \vec{\Omega}_1}{\partial v},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\vec{\Omega}_1 \frac{\partial \vec{\Omega}_2}{\partial v} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\vec{\Omega}_2 \frac{\partial \vec{\Omega}_2}{\partial v}.$$

Symboles de deuxième espèce :

Les identités de définition

$$\Delta^2 \begin{Bmatrix} r & i \\ & 1 \end{Bmatrix} = G \begin{bmatrix} r & i \\ & 1 \end{bmatrix} - F \begin{bmatrix} r & i \\ & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{et} \quad \Delta^2 \begin{Bmatrix} r & i \\ & 2 \end{Bmatrix} = E \begin{bmatrix} r & i \\ & 2 \end{bmatrix} - F \begin{bmatrix} r & i \\ & 1 \end{bmatrix}$$

fourniraient les valeurs des symboles de deuxième espèce

$$4\Delta^2 \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{Bmatrix} = \left[G\vec{\Omega}_1 - F\vec{\Omega}_2 \right] \frac{\partial \vec{\Omega}_1}{\partial u},$$

$$4\Delta^2 \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix} = \left[G\vec{\Omega}_1 - F\vec{\Omega}_2 \right] \frac{\partial \vec{\Omega}_1}{\partial v} = \left[G\vec{\Omega}_1 - F\vec{\Omega}_2 \right] \frac{\partial \vec{\Omega}_2}{\partial u}$$

et autres égalités analogues qu'il est inutile de transcrire.

Deuxième forme

$$2\Lambda = \vec{J} \cdot \frac{\partial \vec{\Omega}_1}{\partial u} = \frac{1}{4\Delta} \left[(\vec{\Omega}_1 \wedge \vec{\Omega}_2) \cdot \frac{\partial \vec{\Omega}_1}{\partial u} \right]$$

c'est la projection de $\frac{\partial \vec{\Omega}_1}{\partial u}$ sur l'axe $\vec{J}$.

On a pour sa valeur en coordonnées cartésiennes

$$2A = \sum \frac{q_1 r_2 - q_2 r_1}{4\Delta} \frac{\partial p_1}{\partial u}$$

en permutant $p_i q_i r_i$ sous le signe Σ

$$\text{ou} \qquad 8\Delta A = \begin{vmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial u} & \frac{\partial q_1}{\partial u} & \frac{\partial r_1}{\partial u} \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}.$$

Semblablement $+ 2B$ est la projection sur $\vec{J}$ de

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \vec{\Omega}_1}{\partial v} + \frac{\partial \vec{\Omega}_2}{\partial u}\right)$$

et $+ 2C$ la projection de $\dfrac{\partial \vec{\Omega}_2}{\partial v}$.

On en tire

$$\vec{J}\, d\vec{\Omega}_1 = 2[A\,du + (B - \Delta)\,dv]$$

$$\vec{J}\, d\vec{\Omega}_2 = 2[(B + \Delta)\,du + C\,dv]$$

d'où pour la deuxième forme fondamentale

$$2\Phi = 2(A\,du^2 + 2B\,du\,dv + C\,dv^2) = \vec{J}\,[d\vec{\Omega}_1 du + d\vec{\Omega}_2 dv]$$

et, en cartésiennes

$$8\Delta\Phi = |\,(dp_1 du + dp_2 dv) \qquad p_1 \qquad p_2|$$

déterminant dont la deuxième et troisième lignes s'obtiendraient en remplaçant p_i par q_i puis par r_i.

41. — **Application**. — L'analogie que nous venons d'examiner fournit facilement des propriétés pour les mouvements. Si à un point correspond une position, les propriétés des courbes se traduiront par des propriétés des M_1, et les propriétés des surfaces par des propriétés des M_2 (1).

(1) M. Cotton a commencé cette étude (*Ann. Éc. Normale*, 1903, t. 20, pp. 155-179). Il y étudie principalement le parallélisme entre les courbes et les M_1 et signale quelques applications aux M_2 à point fixe. Voir aussi les travaux de Mühlendyck cités pag. 198, note 1.

En particulier, les droites et les plans nous redonneront les couronnes et les couronoïdes de Saussure.

Une droite, définie par deux points, est l'analogue de la couronne définie par deux positions (ρ) et (ρ').

La couronne est l'ensemble des positions

$$\rho_1 = a\rho + b\rho', \qquad \lambda_1 = a\lambda + b\lambda', \qquad \mu_1 = a\mu + b\mu', \qquad \nu_1 = a\nu + b\nu',$$

où les constantes complexes a et b sont liées par la relation

$$\rho_1^2 + \lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2 = 1.$$

Géométriquement, la couronne est l'ensemble des positions que l'on peut déduire d'une position donnée par un vissage arbitraire autour d'une droite fixe.

En chaque position d'un M_1 (ρ, λ, μ, ν fonction de u), il y a une couronne tangente dont les coordonnées sont

$$\rho_1 = a\rho + b\frac{\partial\rho}{\partial u},$$

$$\lambda_1 = a\lambda + b\frac{\partial\lambda}{\partial u},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

En chaque position d'un M_2 ($\rho(u, v)$ $\lambda(u, v)$ ...), il y a une infinité de couronnes tangentes. Elles sont toutes contenues dans un couronoïde tangent.

Le couronoïde est l'analogue d'un plan. Il est défini par trois positions ρ, ρ' et ρ''. C'est l'ensemble des positions $(\rho_1 = a\rho + b\rho' + c\rho'')$, où les constantes complexes abc sont liées par la relation $\Sigma\rho_1^2 = 1$.

Géométriquement, c'est l'ensemble des positions symétriques d'une position fixe, par rapport à toutes les droites de l'espace. Il existe toujours en effet, d'après le théorème de Stephanos que nous avons rappelé, une position (R) symétrique à trois positions quelconques données, en particulier à ρ, ρ' et ρ''. C'est-à-dire que l'on aura

$$\Sigma R\rho = 0, \qquad \Sigma R\rho' = 0, \qquad \Sigma R\rho'' = 0.$$

On aura alors $\Sigma R(a\rho + b\rho' + c\rho'') = 0$ quels que soient a, b, c, et la position (R) sera symétrique à toutes les positions du couronoïde. (RLMN) peuvent être appelées les coordonnées tangentielles du couronoïde.

Dans un M_2, le couronoïde tangent à la position $(\rho\lambda\mu\nu)$ est donné par

$$\rho_1 = a\rho + b\frac{\partial\rho}{\partial u} + c\frac{\partial\rho}{\partial v}.$$

Il a justement pour coordonnées tangentielles les coordonnées (RLMN) de la position du solide polaire, de sorte que le M_2 donné peut être défini comme l'enveloppe du couronoïde (R) et RLMN sont les coordonnées tangentielles du M_2.

Un M_2 et son M_2 polaire correspondent donc en géométrie à une surface et à sa polaire réciproque.

Mais pour généraliser aux M_2 les résultats de la théorie des surfaces, il faut faire une remarque essentielle.

I) S'il s'agit de coordonnées réelles (c'est-à-dire s'il s'agit de M_2 avec un point fixe), aucune difficulté. On généralise à un tel M_2 par exemple.

a) La théorie des tangentes conjuguées :

Deux positions consécutives (ρ) et $(\rho + d\rho)$, définissent une couronne tangente. Les couronoïdes tangents en (ρ) et $(\rho + d\rho)$, ont pour intersection une couronne, tangente aussi, dite conjuguée de la première. C'est l'ensemble des positions symétriques à R et $R + dR$. Soit $(\rho + \delta\rho)$ une position de cette couronne conjuguée. On devra avoir

$$\Sigma(R + dR)(\rho + \delta\rho) = 0$$

ou $$\Sigma dR\,\delta\rho = 0.$$

C'est la forme polaire $A\,du\,\delta u + B(du\,\delta v + dv\,\delta u) + C\,dv\,\delta v$ de la deuxième forme fondamentale.

b) La théorie des tangentes asymptotiques :

Ce sont les directions auto-conjuguées

$$\Sigma dR\,d\rho = 0.$$

Elles annulent la deuxième forme.

Ce sont encore les directions de M_1 contenues dans le M_2 telles que trois positions consécutives (ρ), $(\rho + d\rho)$ et $(\rho + d\rho + \frac{1}{2}d^2\rho)$ soient symétriques de R; ce qui donne

$$\Sigma R\,d^2\rho = 0 = -\Sigma dR\,d\rho.$$

On voit sans difficulté que tout M_1 admet en chaque point un couronoïde osculateur. Les M_1 asymptotiques d'un M_2 sont ceux dont le couronoïde osculateur coïncide avec le couronoïde tangent au M_2.

Les M_1 asymptotiques se correspondent sur un M_2 et sur son polaire.

c) On généraliserait de la même façon la théorie des lignes de courbure, etc., etc.

II) Le cas est tout autre s'il s'agit de coordonnées complexes. Une équation complexe, dont l'inconnue est complexe aussi, admet en général une solution dans les mêmes cas que l'équation réelle.

Mais si l'inconnue est réelle, il n'y a ordinairement pas de solution.

Dans un M_2, ρ, λ, μ, ν peuvent être complexes. Mais les variables u et v sont réelles.

Il n'existe donc pas, par exemple, en général, de M_1 asymptotique dans un M_2 donné.

Car l'équation complexe $A\,du^2 + 2B\,du\,dv + C\,dv^2 = 0$ n'admet pas de solution réelle : $\dfrac{du}{dv} = \varphi(u, v)$.

De même, il n'existe pas de M_1 analogue aux lignes de courbure. Un changement de variable portant sur u et v permet d'annuler, dans deux formes quadratiques à la fois, le terme rectangle. En coordonnées complexes, on pourra donc rendre orthogonale l'une quelconque des formes (ce qui fait deux conditions). Mais on ne peut pas pour deux à la fois.

Nous reviendrons sur le problème de rechercher les M_2 admettant, comme les M_2 à points fixes, de telles lignes.

En tous cas l'analogie avec l'espace elliptique n'en est pas moins intéressante.

a) D'abord parce qu'elle s'applique sans modification aux M_2 à point fixe, et fournit de la géométrie elliptique, une interprétation concrète.

b) Parce qu'elle s'applique souvent aux M_2 généraux comme nous allons le montrer sur des exemples.

Remarquons d'ailleurs que pour abréger les calculs, on pourrait employer des coordonnées spéciales, et par exemple rapporter le M_2 à ses M_1 asymptotiques. Même si ces M_1 n'existent pas, le calcul restera valable pourvu que le résultat soit exprimé avec les invariants des formes.

42. — Représentation sphérique. — Nous allons, par exemple, interpréter les théorèmes sur la représentation sphérique des surfaces.

Il faut noter d'abord que la troisième forme fondamentale ne définit pas une représentation sphérique, comme en géométrie euclidienne. Du reste en géométrie de Riemann, le parallélisme n'existe pas.

Clifford a pu cependant introduire une autre notion de parallèle. On sait qu'elle consiste à définir comme droites parallèles des droites équidistantes, sans exiger, comme Euclide, qu'elles soient dans un même plan.

Rappelons d'abord comment, en géométrie elliptique, on peut définir deux sous-groupes du groupe des déplacements, assez analogues au sous-groupe des translations de la géométrie d'Euclide.

Le groupe des déplacements, ou groupe des substitutions qui conservent la forme $\rho^2 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$ est le groupe des substitutions orthogonales.

Si l'on cherche parmi ces substitutions quelles sont celles qui déplacent tous les points de l'espace d'une longueur constante, on trouve les deux sous-groupes :

$$
(\mathrm{I}) \quad \left\{
\begin{aligned}
\rho_1 &= \alpha\rho - \beta\lambda - \gamma\mu - \delta\nu, \\
\lambda_1 &= \beta\rho + \alpha\lambda - \delta\mu + \gamma\nu, \\
\mu_1 &= \gamma\rho + \delta\lambda + \alpha\mu - \beta\nu, \\
\nu_1 &= \delta\rho - \gamma\lambda + \beta\mu + \alpha\nu.
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(\mathrm{II}) \quad \left\{
\begin{aligned}
\rho_2 &= \alpha\rho - \beta\lambda - \gamma\mu - \delta\nu, \\
\lambda_2 &= \beta\rho + \alpha\lambda + \delta\mu - \gamma\nu, \\
\mu_2 &= \gamma\rho - \delta\lambda + \alpha\mu + \beta\nu, \\
\nu_2 &= \delta\rho + \gamma\lambda - \beta\mu + \alpha\nu.
\end{aligned}
\right.
$$

Ils sont tels en effet que la quantité $\Sigma\rho\rho_1$ pour le premier et $\Sigma\rho\rho_2$ pour le deuxième, c'est-à-dire la distance entre la position primitive et la position transformée (ρ_1 ou ρ_2), reste constante.

Les constantes $\alpha\beta\gamma\delta$ sont liées par la relation

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1.$$

Nous avons déjà rencontré ces substitutions et trouvé leur signification mécanique. Le premier indique un déplacement du trièdre mobile, l'autre du trièdre fixe.

Au fond, ils reviennent chacun à un déplacement hélicoïdal à droite, ou à gauche, de paramètres $\alpha\beta\gamma\delta$.

Darboux(1) appelle ces déplacements, déplacements Cayleyens. Les Italiens disent *scorimento destrorso* ou *sinistrorso*. Nous dirons un glissement.

On voit aisément que la droite (couronne) joignant les positions ρ et ρ_1 (ou ρ et ρ_2) glisse sur elle-même pendant le déplacement et que tout plan passant par la droite $\rho\rho_1$ tourne autour de $\rho\rho_1$ d'un angle fixe. (*Id.* pour $\rho\rho_2$.)

Soient alors deux positions quelconques ρ et ρ', un glissement $\alpha\beta\gamma\delta$ (de première espèce) les transforme en ρ_1 et ρ'_1.

Les deux droites $\rho\rho_1$ et $\rho'\rho'_1$ sont dites parallèles de première espèce.

Un glissement de deuxième espèce les transformerait en ρ_2 et ρ'_2 et définirait deux droites (couronnes) $\rho\rho_2$ et $\rho'\rho'_2$ parallèles de deuxième espèce.

Par un point donné, il passe deux parallèles à une droite donnée.

Soit une droite définie par deux points (ρ et ρ'). Nous pourrons toujours prendre pour second point celui qui est à une distance $\frac{\pi}{2}$ du premier point, c'est-à-dire

(1) *Principes de Géométrie analytique*, IV, chap. II, p. 318.

que nous supposons $\Sigma\rho\rho' = 0$. (Ceci revient à définir une couronne par deux positions symétriques.)

La droite individuera alors deux glissements, dont les paramètres seront :

glissement de 1re espèce. $\begin{cases} \alpha = 0, \\ \beta = \rho\lambda' - \rho'\lambda + \nu'\mu - \mu'\nu, \\ \gamma = \rho\mu' - \rho'\mu + \lambda'\nu - \nu'\lambda, \\ \delta = \rho\nu' - \rho'\nu + \mu'\lambda - \lambda'\mu; \end{cases}$ et glissement de 2me espèce. $\begin{cases} \alpha' = 0, \\ \beta' = \rho\lambda' - \rho'\lambda - \mu\nu' + \mu'\nu, \\ \gamma' = \rho\mu' - \rho'\mu - \nu\lambda' + \nu'\lambda, \\ \delta' = \rho\nu' - \rho'\nu - \lambda\mu' + \lambda'\mu. \end{cases}$

Les nombres $\beta\gamma\delta$, liés par la relation $\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1$ sont les coordonnées de Plucker dans l'espace fixe de l'axe de symétrie des positions ρ et ρ'. De même, $\beta'\gamma'\delta'$ sont les coordonnées du même axe dans l'espace mobile.

Revenons à une position $(\rho\lambda\mu\nu)$ qui décrit un M_2.

L'analogue de la normale à une surface, est la couronne joignant la position ρ à la position polaire R.

Elle définit une droite, et donc deux glissements, dont les coordonnées $\alpha\beta\gamma\delta$ et $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ s'obtiendraient en écrivant dans les formules précédentes RLMN à la place de $\rho'\lambda'\mu'\nu'$.

En particulier si l'on mène de l'origine, les deux parallèles à la normale, on obtient les positions de coordonnées $(o\beta\gamma\delta)$ et $(o\beta'\gamma'\delta')$.

Ceci définit les deux représentations sphériques de Clifford.

Cinématiquement, nous avons ainsi les coordonnées (de Plucker) fixes et mobiles de l'axe de symétrie de ρ et R, c'est-à-dire de l'axe J du cylindroïde.

Les représentations sphériques de Clifford ont pour élément linéaire :

$$ds^2 = d\beta^2 + d\gamma^2 + d\delta^2 \quad \text{et} \quad ds'^2 = d\beta'^2 + d\gamma'^2 + d\delta'^2.$$

Elles ont lieu avec égalité d'aire comme l'a démontré Fubini (1). Et réciproquement, deux représentations sphériques avec égalité d'aire définissent une surface de l'espace elliptique.

On peut ajouter (nous le retrouverons), que les lignes isopérimètres de la représentation correspondent aux lignes de courbure de la surface.

Et de même, en cinématique, ds^2 et ds'^2 seront les représentations sphériques, fixes et mobiles, de la congruence des axes J. Elles sont avec égalité d'aire (Bricard) (2). Et réciproquement deux représentations sphériques avec égalité d'aire définissent un M_2 (Cartan) (3). Ceci reste vrai en coordonnées complexes (Pérès) (4).

(1) Fubini. *Annali della R. Scuola normale di Pisa*, 1900, et Bianchi, *Lezioni di geom. dif.*, § 494.

(2) Bricard. *Leçons de Cinématique*, I, note 2, p. 325.

(3) Cartan. *Nouvelles An. de Math.*, 1925-6, p. 33.

(4) Pérès. *C. R.*, mars 1926.

J'ajoute que les lignes isopérimètres correspondent aux M_1 de courbure, c'est-à-dire aux M_1 rendant orthogonales les formes fondamentales. Mais ceci ne s'étend pas aux arcs complexes; en effet, il n'y a pas, dans deux ds^2 de surfaces complexes, de lignes isopérimètres.

Nous allons chercher les surfaces (les M_2) dans lesquels les deux représentations sphériques seraient identiques. (Les congruences fixes et mobiles décrites par l'axe J au lieu de se correspondre simplement par équivalence d'aires, seraient égales.)

43. — M_2 où les congruences fixes et mobiles décrites par l'axe du cylindroïde, sont identiques. — Il faut et il suffit pour cela, que l'élément linéaire complexe ds^2 et ds'^2 de ces congruences soit identique.

Calculons cet élément. On a :

$$\alpha = R\lambda - \rho L + \mu N - \nu M$$

et deux équations semblables pour β et γ (N° 34), d'où :

$$d\alpha = [\lambda dR - \rho dL + \mu dN - \nu dM] + [R d\lambda - L d\rho + N d\mu - M d\nu]$$

et :

$$ds^2 = \Sigma d\alpha^2 = dR^2 + dL^2 + dM^2 + dN^2 + d\rho^2 + d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2 - 2S\,.$$

S qui provient de la somme de trois termes analogues au produit des deux crochets ci-dessus, s'exprime sous forme de déterminant (je n'écris que la première ligne) :

$$S = |\, dR \quad \rho \quad R \quad d\rho\,|\,.$$

Pour avoir la valeur de ce déterminant, il suffit de le multiplier par

$$\Delta = \left|\, R \quad \rho \quad \frac{\partial\rho}{\partial u} \quad \frac{\partial\rho}{\partial v} \,\right|.$$

En faisant la multiplication lignes par lignes

$$S\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \sum dR\frac{\partial\rho}{\partial u} & \sum dR\frac{\partial\rho}{\partial v} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum d\rho\frac{\partial\rho}{\partial u} & \sum d\rho\frac{\partial\rho}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Or on a :

$$\sum dR \frac{\partial\rho}{\partial u} = \sum \frac{\partial\rho}{\partial u}\left(\frac{\partial R}{\partial u} du + \frac{\partial R}{\partial v} dv\right) = A du + B dv.$$

De même :

$$\sum dR \frac{\partial\rho}{\partial v} = B du + C dv,$$

$$\sum d\rho \frac{\partial\rho}{\partial u} = E du + F dv,$$

$$\sum d\rho \frac{\partial\rho}{\partial v} = F du + G dv.$$

Il reste finalement :

$$\Delta S = \begin{vmatrix} E du + F dv & F du + G dv \\ A du + B dv & B du + C dv \end{vmatrix}.$$

C'est le Jacobien des deux formes fondamentales.

En résumé $ds^2 = \Sigma d\rho^2 + \Sigma dR^2 - 2S$ donne dans l'espace mobile, l'élément linéaire de la congruence décrite par J.

On aurait de même dans l'espace fixe :

$$\sum d\alpha'^2 = ds'^2 = \sum d\rho^2 + \sum dR^2 + 2S.$$

Les congruences seront identiques si, et si seulement, $S = 0$.

a) En général, il existe en un point d'une surface deux lignes le long desquelles ce Jacobien est nul. Ce sont les lignes de courbure.

Dans un M_2 à point fixe, il existera deux M_1 de courbure qui rendront S nul. Alors les ds^2 de ces M_1 seront égaux (lignes isopérimètres) sur la représentation sphérique.

b) Si ce Jacobien est identiquement nul, les deux ds^2 (complexes) sont identiques, les congruences fixes et mobiles des axes J aussi.

Il faut et suffit pour que le Jacobien soit nul, que les deux formes fondamentales soient à coefficients proportionnels.

Pour les surfaces, on a les surfaces à lignes de courbure indéterminées : ce sont les plans et les sphères.

Nous déterminerons tous les M_2 pour lesquels on a $S = 0$.

Vérifions auparavant avec les formules données ci-dessus le théorème de Bricard-Pérès.

On peut donner au ds^2 de la représentation sphérique une forme plus géométrique. On a en effet

$$4ds'^2 = [(\overrightarrow{\Omega}_1 du + \overrightarrow{\Omega}_2 dv) + (\overrightarrow{\Omega'_1} du + \overrightarrow{\Omega'_2} dv)]^2.$$

Cela résulte immédiatement des formules donnant les produits scalaires des vecteurs $\overrightarrow{\Omega}_1$ et $\overrightarrow{\Omega'_1}$ et pourrait du reste se démontrer directement par la géométrie.

On a aussi

$$4ds'^2 = [(\overrightarrow{\Omega}_1 du + \overrightarrow{\Omega}_2 dv) - (\Omega'_1 du + \Omega'_2 dv)]^2.$$

Le discriminant du ds^2, c'est-à-dire l'aire de la représentation sphérique, est égal au module du produit

$$\frac{1}{2}[\overrightarrow{\Omega}_1 + \overrightarrow{\Omega'_1}] \wedge \frac{1}{2}[\overrightarrow{\Omega}_2 + \overrightarrow{\Omega'_2}]$$

$$\text{ou} \qquad \frac{1}{4}[\overrightarrow{\Omega}_1 \wedge \overrightarrow{\Omega}_2 + \overrightarrow{\Omega'_1} \wedge \overrightarrow{\Omega'_2}] = (\Delta - \Delta')\overrightarrow{J}.$$

Les deux produits partiels ayant même direction $(\overrightarrow{J})$.

On a le module total en ajoutant les modules de produits partiels.

On trouve $(\Delta - \Delta')$, c'est-à-dire la différence des aires des parallélogrammes construits sur les rotations du trièdre et de son polaire réciproque.

Le ds'^2 donne le même résultat.

On peut encore écrire cette aire de la représentation sphérique

$$\Delta\left(1 - \frac{\Delta'}{\Delta}\right) = \Delta k$$

où k est la courbure de la première forme. Et ceci donne pour la courbure d'un M_2 une signification géométrique parfaitement analogue à celle que fournit le théorème de Gauss dans la théorie des surfaces.

44. — **M_2 sphériques.** — Cherchons les M_2, dont les formes fondamentales ont les coefficients proportionnels (c'est-à-dire où $S \equiv 0$).

Il suffit de poser

$$A = aE, \qquad B = aF, \qquad C = aG,$$

dans les équations de Codazzi. Il vient aussitôt

$$a = c^{te}.$$

Portant les valeurs de ABC dans les formules (n° 35), on en déduit

$$\begin{aligned} R &= a\rho + a_1, \\ L &= a\lambda + a_2, \\ M &= a\mu + a_3, \\ N &= a\nu + a_4, \end{aligned}$$

où $(a_1\, a_2\, a_3\, a_4)$ sont des constantes.

Enfin la relation $\Sigma R\rho = o$ donne

$$a_1\rho + a_2\lambda + a_3\mu + a_4\nu = -a.$$

Le M_2 est contenu dans une tétrasérie qu'un changement de coordonnées permet de ramener à la forme

$$\rho = c^{te}.$$

Réciproquement du reste si dans un M_2 ρ reste constant, le Jacobien S s'annule identiquement.

Le M_2 est alors facile à définir.

C'est l'ensemble des positions que l'on peut déduire par un vissage constant à partir d'un solide fixe, ou encore l'ensemble des positions qui sont à une distance constante d'une position fixe.

On voit ainsi l'analogie avec les sphères. Nous appellerons ces M_2, M_2 sphériques, On pourrait du reste écrire la tétrasérie

$$a_1\rho + a_2\lambda + a_3\mu + a_4\nu = c^{te}$$

sous la forme

$$(\rho - a_1)^2 + (\lambda - a_2)^2 + (\mu - a_3)^2 + (\nu - a_4)^2 = c^{te}$$

qui montre mieux l'analogie avec les sphères.

Ces M_2 ont les propriétés suivantes :

1) Le M_2 polaire d'un M_2 sphérique est aussi un M_2 sphérique.

Il suffit de prendre l'équation de la tétrasérie sous sa forme réduite $\rho = c^{te}$.

Les formules qui donnent les dérivées de R, montrent alors que R est constant aussi.

2) On passe du solide origine à la position (ρ) par un vissage θ constant $\left(\rho = \cos\dfrac{\theta}{2}\right)$ autour de la droite de paramètres $(\lambda\mu\nu)$, et à la position (R) par un vissage θ' constant $\left(R = \cos\dfrac{\theta'}{2}\right)$ autour de la droite (LMN).

On a :

$$\left\{\begin{aligned} &\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial u}+\mu\frac{\partial\mu}{\partial u}+\nu\frac{\partial\nu}{\partial u}=0,\\ &\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial v}+\mu\frac{\partial\mu}{\partial v}+\nu\frac{\partial\nu}{\partial v}=0;\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &L\frac{\partial\lambda}{\partial u}+M\frac{\partial\mu}{\partial u}+N\frac{\partial\nu}{\partial u}=0,\\ &L\frac{\partial\lambda}{\partial v}+M\frac{\partial\mu}{\partial v}+N\frac{\partial\nu}{\partial v}=0.\end{aligned}\right.$$

On en tire donc

$$(1)\qquad \frac{L}{\lambda}=\frac{M}{\mu}=\frac{N}{\nu}$$

et les deux axes $(\lambda\mu\nu)$ et (LMN) coïncident.

En ajoutant ces fractions terme à terme après les avoir multipliées par $\lambda\mu\nu$, on a :

$$\frac{L}{\lambda}=\frac{-R\rho}{1-\rho^2}.$$

En les multipliant par LMN, il vient

$$\frac{L}{\lambda}=\frac{1-R^2}{-R\rho}$$

d'où

$$\frac{R\rho}{1-\rho^2}=\frac{1-R^2}{R\rho}$$

ou

$$R^2+\rho^2=1$$

ou

$$\frac{\theta}{2}+\frac{\theta'}{2}=\frac{\pi}{2}$$

ce qu'on aurait pu prévoir géométriquement.

Les positions (ρ) et (R) sont symétriques par rotation autour d'un axe commun. Les angles des rotations sont donc supplémentaires, les translations égales.

L'axe commun coïncide avec l'axe J du cylindroïde.

3) Nous avons donné la signification géométrique du Jacobien. S'il s'annule, on a

$$[\overrightarrow{\Omega}_1 du + \overrightarrow{\Omega}_2 dv]\,[\overrightarrow{\Omega}'_1 du + \overrightarrow{\Omega}_2 dv]$$

c'est-à-dire que la rotation du trièdre rencontre à angle droit celle du réciproque.

Les cylindroïdes des axes hélicoïdaux des deux M_2 coïncideraient donc par une rotation de $\frac{\pi}{2}$ autour de l'axe J.

4) Enfin le ds^2 n'est évidemment pas arbitraire. Il suffit de porter les valeurs $A = aE$, $B = aF$, $C = aG$, dans la troisième équation de Gauss-Codazzi pour trouver $k = C^{te}$.

Les propriétés énoncées en 1, 2, 3 sont caractéristiques. Les réciproques sont exactes.

Pour 4) évidemment non. Il n'y a pas que les sphères qui aient leur courbure constante. Mais étant donné une forme

$$ds^2 = E du^2 + 2 F du dv + G dv^2$$

à courbure constante : $1 + a^2$, on peut toujours déterminer des M_2 sphériques qui l'admettent comme forme fondamentale. Il suffit de prendre pour deuxième forme

$$\Phi = a(E du^2 + 2 F du dv + G dv^2).$$

Un M_2 sphérique est donc défini par sa première forme.

45. — **M_2 dont le réciproque est un M_1.** — Nous avons supposé dans tous les calculs précédents $\Delta \neq 0$. Si l'on avait $\Delta = 0$, c'est-à-dire $EG - F^2 = 0$, la première forme serait un carré parfait et se ramènerait à $E du^2$ par un changement de variable (du moins pour sa partie réelle).

Pour que $G = 0$, il faudrait

$$\sum \left(\frac{\partial \rho}{\partial v}\right)^2 = 0.$$

Si l'on suppose le M_2 *réel*, ceci exige que $\rho \lambda \mu \nu$ ne dépendent pas de v.

Les rotations elles aussi ne sont alors fonction que d'une seule variable.

On aurait cependant toujours un M_2 si les translations continuaient de dépendre de deux paramètres.

On a ainsi des M_2 très particuliers : ceux dont les rotations ne dépendent que d'une variable.

Les calculs faits sont inapplicables. Mais si ces M_2 échappent à la méthode indiquée ici, leur étude directe est facile.

Nous avons là l'analogue des congruences dont la représentation sphérique se réduit à une courbe (congruences cylindriques).

Le problème inverse est plus intéressant.

Étant donné un M_2, à quelle condition son M_2 polaire sera-t-il un M_1 (ou, plus particulièrement encore) une position fixe.

La réponse est facile. On doit avoir $\Delta' = 0$.

Et comme nous avons trouvé

$$k = 1 - \frac{\Delta'}{\Delta}$$

il reste $k = 1$.

Il faut et suffit que la courbure de la première forme soit $+1$.

On considère de même dans la théorie des surfaces, celles dont la courbure est égale à la courbure de l'espace ambiant, c'est-à-dire dont la courbure relative est nulle : ce sont les analogues des surfaces développables en géométrie euclidienne. Nous allons donner quelques exemples.

Premier cas. — Le mouvement polaire est une position fixe. Alors le M_2 lui-même est l'ensemble des positions symétriques d'une position fixe par rapport aux droites d'une congruence.

Le M_2 est contenu dans un couronoïde.

Un changement de coordonnées, qui laisse invariantes les deux formes, permet de prendre pour trièdre de référence fixe, le trièdre fixe donné.

On a alors

$$R = 1, \qquad L = M = N = 0.$$

C'est-à-dire que la deuxième et la troisième formes fondamentales seront identiquement nulles.

On en tire $\rho = 0$, tandis que $\lambda \mu \nu$ assujettis à la condition

$$\lambda^3 + \mu^2 + \nu^2 = 1$$

sont les coordonnées de Plucker des axes de la congruence.

Donc : La condition nécessaire et suffisante pour qu'un M_2 soit contenu dans un couronoïde, est que la deuxième forme soit identiquement nulle.

La première forme est alors la forme de la congruence des droites permettant le passage d'une position initiale fixe quelconque à toutes les positions du M_2.

Cette forme suffit à déterminer la congruence et donc le M_2.

Nous avons vu en particulier dans la première partie de ce travail, que pour avoir un M_2 jouissant d'une propriété exprimée par les invariants, il suffit de prendre une congruence ayant la même propriété.

Le problème de déterminer tous les M_2 spéciaux (isotropes, paraboliques, etc.) contenus dans un couronoïde est donc résolu.

On vérifie aussi immédiatement par la géométrie que les droites de la congruence sont les axes J du cylindroïde des vitesses.

Deuxième cas. — Supposons à présent que la deuxième forme ne soit pas identiquement nulle. Le mouvement réciproque sera véritablement un M_1. (Ses rotations, du moins, ne dépendent que d'une variable.)

L'analogie avec la géométrie euclidienne nous permet facilement de déterminer de tels M_2.

Comme, pour avoir une surface développable, il suffit de prendre les tangentes à une courbe donnée, de même, prenons ici un M_1 quelconque.

En chacune de ses positions, il existe une couronne tangente. L'ensemble de ces couronnes forme un M_2 qui est justement de l'espèce demandée.

En effet, deux tangentes consécutives à une courbe, déterminent un plan, le plan osculateur.

Ici de même, deux couronnes consécutives tangentes à un M_1 déterminent un couronoïde osculateur.

Ce couronoïde contient les deux couronnes. Il a pour coordonnées tangentielles les coordonnées de la position qui est symétrique à toutes les positions des deux couronnes, c'est-à-dire les coordonnées du solide dans le M_2 polaire. Or les coordonnées du couronoïde osculateur ne dépendent bien que d'une variable, et le M_2 polaire par conséquent aussi.

Analytiquement, le calcul est aisé.

Soient $\rho_1 \lambda_1 \mu_1 \nu_1$ les coordonnées d'un M_1. Elles sont fonction d'une variable u.

On a

$$\sum \rho_1^2 = 1, \qquad \sum \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial u} = 0.$$

Trois positions consécutives

$$\rho_1, \qquad \rho_1 + \frac{\partial \rho_1}{\partial u} du, \qquad \rho_1 + \frac{\partial \rho_1}{\partial u} du + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial u^2} du^2$$

sont dans un couronoïde (osculateur) de coordonnées tangentielles RLMN telles que l'on ait :

$$\sum R \quad \rho_1 = 0,$$

$$\sum R \frac{\partial \rho_1}{\partial u} = 0,$$

$$\sum R \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial u^2} = 0.$$

La couronne tangente au M_1 aura ses coordonnées de la forme

$$\rho = a\rho_1 + b\left(\rho_1 + \frac{\partial \rho_1}{\partial u} du\right)$$

a et b ne sont pas arbitraires, puisque les coordonnées sont liées par la relation $\Sigma\rho^2 = 1$.

Pour simplifier les calculs, choisissons la variable u de telle façon que

$$\sum \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial u}\right)^2 = 1.$$

Alors la condition $\Sigma\rho^2 = 1$ devient $(b + a)^2 + b^2 = 1$.

On prendra $b + a = \cos v$, $\quad b = \sin v$.

Et nous aurons le M_2

$$\rho = \rho_1 \cos v + \frac{\partial \rho_1}{\partial u} \sin v.$$

On vérifie alors immédiatement que

$$\sum R\rho = 0, \qquad \sum R \frac{\partial \rho}{\partial u} = 0, \qquad \sum R \frac{\partial \rho}{\partial v} = 0,$$

et par suite (R) est le polaire de (ρ).

Le M_2 polaire est donc bien un M_1 puisque RLMN ne dépendent que de u.

La deuxième et la troisième forme se réduisent à leur premier terme

$$A du^2 \quad \text{et} \quad E' du^2.$$

46. — **M_2 décomposables.** — Kœnigs[1] a attiré l'attention des géomètres sur les M_2 décomposables. Un solide S_2 est animé d'un mouvement à un paramètre par

[1] *Bull. Soc. math. de France*, C. R. des séances, 1913 et C. R. de l'Académie, t. 157.

rapport à un solide intermédiaire S_1, tandis que celui-ci est animé aussi d'un M_1, indépendant du premier, par rapport à un autre solide fixe S_0 : le mouvement de S_2 par rapport à S_0 est un M_2 décomposable.

Soient $(\rho_2\lambda_2\mu_2\nu_2)$, fonctions d'une variable v, les coordonnées de S_2 par rapport à S_1, et $\rho_1(u)$, $\lambda_1(u)\mu_1(u)\nu_1(u)$ les coordonnées de S_1 par rapport à S_0.

Le M_2 résultant est donné par les formules

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} \rho = \rho_1\rho_2 - \lambda_1\lambda_2 - \mu_1\mu_2 - \nu_1\nu_2, \\ \lambda = \rho_1\lambda_2 + \rho_2\lambda_1 - \nu_1\mu_2 + \nu_2\mu_1, \\ \mu = \rho_1\mu_2 + \rho_2\mu_1 - \lambda_1\nu_2 + \lambda_2\nu_1, \\ \nu = \rho_1\nu_2 + \rho_2\nu_1 - \mu_1\lambda_2 + \mu_2\lambda_1. \end{cases}$$

Dans l'espace elliptique $\rho_2\lambda_2\mu_2\nu_2$ représentent une courbe tandis que $\rho\lambda\mu\nu$ représentent le lieu de cette courbe lorsqu'on lui fait subir le glissement continu droit : $\rho_1\lambda_1\mu_1\nu_1$.

On a ici l'analogue des surfaces de translation de l'espace euclidien. Et de même que ces dernières peuvent être engendrées de deux façons différentes par la translation d'une courbe fixe, de même ici on pourrait encore interpréter (1) en disant que l'on a la courbe $\rho_1\lambda_1\mu_1\nu_1$ à laquelle on fait subir le glissement continu gauche $(\rho_2\lambda_2\mu_2\nu_2)$.

Et par exemple on sait que les surfaces à courbure nulle sont dans l'espace elliptique des surfaces de glissement(1). Elles fourniraient des M_2 décomposables, mais des M_2 bien particuliers. Les courbes dont la translation donne les surfaces considérées sont en effet des courbes à torsion constante (et opposée).

Cherchons à déterminer par leurs formes les M_2 décomposables. Il est facile de voir d'abord que la rotation $\overrightarrow{\Omega_1}$ ne doit pas dépendre de v.

On trouve, en effet, cette rotation en donnant à u un accroissement du tandis que v reste constant. Or, si v reste constant, S_2 garde une position invariable par rapport à S_1 et la rotation de S_2 est la même que celle de S_1, c'est-à-dire ne dépend que de u.

(les projections $p_1q_1r_1$ sur les axes mobiles dépendent de v puisque l'orientation du trièdre S_2 sur lequel on projette en dépend. On vérifierait de même que sur les axes mobiles ce sont les projections $p_2q_2r_2$ qui ne dépendent que de v).

Or nous avons trouvé sur les axes fixes

$$\frac{\partial\overrightarrow{\Omega_1}}{\partial v} = 2(B-\Delta)\overrightarrow{J} + \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix}\overrightarrow{\Omega_1} + \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix}\overrightarrow{\Omega_2}$$

(1) Bianchi. *Lezioni di Geom.*, vol. IV, p. 594-595.

et ceci exige

$$\left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\} = 0 \qquad \text{et} \qquad B = \Delta .$$

La réciproque est d'ailleurs exacte, et si ces trois conditions sont vérifiées, $\overrightarrow{\Omega}_1$ ne dépend que de u dans les axes fixes, $\overrightarrow{\Omega}_2$ ne dépend que de v dans les axes mobiles, et le M_2 est bien décomposable.

La condition $B = -\Delta$ au lieu de Δ donnerait aussi un M_2 décomposable, mais v au lieu de u définirait le mouvement d'entraînement.

Les conditions $\left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\} = 0$ signifient dans la théorie des surfaces que le réseau coordonné est un réseau de Tchebychef, c'est-à-dire que dans la première forme, E n'est fonction que de u et G que de v.

Pour les M_2 ceci résulte de leur signification même.

$$\overrightarrow{\Omega}_1^2 = 4E, \qquad \overrightarrow{\Omega}_2^2 = 4G.$$

J'ajoute enfin que F n'est pas arbitraire, mais vérifie une équation aux dérivées partielles qu'il serait aisé d'écrire.

On peut remarquer ceci qui présente plus d'intérêt :

Soient les deux formes

$$\left\{ \begin{array}{l} E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \\ A\,du^2 + 2\Delta\,du\,dv + C\,dv^2 \end{array} \right.$$

où E n'est fonction que de u et G que de v.

Si les relations de Codazzi sont satisfaites, ces deux formes définissent le M_2 décomposable le plus général.

Or, les relations de Codazzi pour ces deux formes, sont les mêmes que celles qui existent en géométrie euclidienne pour les deux formes d'une surface

$$\left\{ \begin{array}{l} E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \\ \qquad A\,du^2 + C\,dv^2 \end{array} \right.$$

et ces deux dernières représentent une surface de translation d'ailleurs quelconque.

Par suite, étant donnée une surface euclidienne de translation (rapportée à ses courbes égales) il suffit d'ajouter $\pm 2\Delta\,du\,dv$ à sa deuxième forme pour avoir un M_2 décomposable.

Kœnigs a posé la question de déterminer tous les M_2 doublement décomposables, et Bricard a donné quelques exemples (¹). Cela revient à chercher les surfaces doublement de translation dans l'espace elliptique.

Posé et résolu par Lie pour l'espace euclidien, le problème reste à résoudre pour l'espace elliptique (²).

Aux M_2 doublement décomposables correspondent des surfaces de translation euclidiennes dont la première forme est la même, c'est-à-dire deux surfaces de translation applicables (³).

Et par exemple les cylindres euclidiens, qui sont d'une infinité de façons des surfaces de translation, donnent des M_2 décomposables d'une infinité de façons.

47. — M_2 admettant des M_1 asymptotiques ou des M_1 de courbure. — Nous avons vu déjà qu'un M_2 n'admet en général ni M_1 asymptotique, ni M_1 de courbure, ni M_1 d'arc nul. On peut déterminer les M_2 qui admettraient de tels M_1.

Il s'agit de trouver les formes

$$\Phi = \alpha du^2 + 2\beta du dv + \gamma dv^2$$

(où α, β, γ sont complexes) telles que l'équation

$$\Phi = 0$$

admette des solutions réelles en $\dfrac{du}{dv}$.

Explicitant les parties complexes, en écrivant $\alpha + \varepsilon\alpha'$, $\beta + \varepsilon\beta'$, $\gamma + \varepsilon\gamma'$ au lieu de α, β, γ, on est ramené à résoudre le système

$$\alpha\, du^2 + 2\,\beta\, du dv + \gamma\, dv^2 = 0,$$
$$\alpha' du^2 + 2\beta' du dv + \gamma' dv^2 = 0.$$

Ces équations n'admettent pas, en général, de solutions communes; elles en admettraient deux si leurs coefficients étaient proportionnels

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\beta'}{\beta} = \frac{\gamma'}{\gamma} = t$$

et la forme Φ serait alors réelle au facteur $(1 + \varepsilon t)$ près.

(¹) *Bull. Soc. Math. de France*, C. R. des séances, 1913; C. R. de l'Académie. t. 157 et 158. *Nouv. Annales*, 1927, page 105.

(²) On consultera Bortolotti, *Geometria differenziale metrica nello spazio rigato*, Congrès de Bologne, t. IV.

(³) M. Gambier a déterminé les surfaces applicables avec correspondance des réseaux de translation. Mais il faudrait ici applicabilité sans cette correspondance. (*Nouv. Ann. de Math.*, 1920.)

Cette propriété pour une forme d'être réelle à un facteur près, se conserve, évidemment, par un changement de variables; en particulier on peut ramener Φ à la forme :

$$\Phi = 2\beta du dv .$$

Les mêmes équations admettraient une seule solution commune si leur Jacobien était un carré parfait.

On pourrait les ramener, par un changement de variables à avoir $du = 0$ pour solution commune, c'est-à-dire

$$\Phi = \alpha du^2 + 2\beta du dv .$$

Ceci posé, il est facile de trouver les M_2 indiqués.

a) Coordonnées symétriques. — On dit qu'une surface est rapportée à des coordonnées symétriques (ou isotropes, ou à ses lignes de longueur nulle) lorsque son ds^2 s'écrit

$$ds^2 = 2 F du dv .$$

Semblablement, pour un M_2, on peut rechercher si le ds^2 peut prendre cette forme-là. On dira que le M_2 admet des M_1 isotropes (ou d'arc nul).

Il faut et il suffit pour cela que le ds^2 s'annule pour deux valeurs réelles de $\frac{du}{dv}$ ce qui donne

$$\frac{E}{D} = \frac{F}{D'} = \frac{G}{D''}$$

c'est-à-dire qu'on a un M_2 isotrope; et réciproquement, les M_2 isotropes sont les seuls qui admettent deux familles de coordonnées isotropes.

S'il n'y a qu'un seul système de M_1 isotropes, un changement de variables permet d'écrire le ds^2

$$ds^2 = E du^2 + 2 F du dv .$$

Explicitant les parties complexes, et calculant les invariants

$$H = -\frac{2D'}{F}, \qquad K = \frac{D'^2}{F^2}.$$

La hauteur du cylindroïde $H^2 - 4K$ est nulle.

On est donc dans le cas où ce cylindroïde dégénère en un plan. Le M_2 n'est pourtant pas un M_2 isotrope. Mais je n'insiste pas, ces M_2 ne sont pas ***réels***.

b) Coordonnées asymptotiques. — Si un M_2 a des M_1 asymptotiques et si nous le rapportons à ces coordonnées-là, la deuxième forme s'écrit :

$$2B\,du\,dv\,.$$

Elle est donc réelle à un facteur près, et réciproquement si la seconde forme est réelle à un facteur près, le M_2 admet des M_1 asymptotiques.

Voici une propriété caractéristique de ces M_2 :

Les rotations du trièdre polaire s'écrivent avec ces coordonnées

$$p'_1 = -\frac{B}{\Delta}p_1 \qquad p'_2 = \frac{B}{\Delta}p_2$$

et l'on voit que le cylindroïde de base p_1p_2 coïncide avec le cylindroïde de base $p'_1p'_2$ (la cotation étant seule différente).

Réciproquement, si les cylindroïdes dans un M_2 (base p_1, p_2), coïncident avec les cylindroïdes dans le M_2 polaire $\left(\text{base } \dfrac{Ap_2 - Bp_1}{\Delta}, \dfrac{Bp_2 - Cp_1}{\Delta}\right)$ c'est qu'il est possible de choisir du et dv réels tels que par exemple

$$p_1du + p_2dv = \sigma\left(\frac{Ap_2 - Bp_1}{\Delta}\right)$$

$$p_1\delta u + p_2\delta v = \sigma\left(\frac{Bp_2 - Cp_1}{\Delta}\right)$$

où σ est une quantité quelconque. Il s'ensuit que les rapports $\dfrac{A}{B}$ et $\dfrac{C}{B}$ sont réels, et le M_2 a des asymptotiques.

La deuxième forme représentant le produit vectoriel $\left[\vec{\Omega}_1 du + \vec{\Omega}_2 dv\right] \wedge \left[\vec{\Omega}'_1 du + \vec{\Omega}'_2 dv\right]$ les M_1 asymptotiques auront même direction pour leur axe instantané dans le M_2 et dans le M_2 polaire.

Quand on rapporte le M_2 à ses asymptotiques, on voit, en revenant aux formules donnant $\dfrac{\partial\vec{\Omega}_1}{\partial u}, \dfrac{\partial\vec{\Omega}_2}{\partial v}$ que l'on a des égalités de la forme

$$\frac{\partial\vec{\Omega}_1}{\partial u} = \alpha\vec{\Omega}_1 + \beta\vec{\Omega}_2 \qquad \frac{\partial\vec{\Omega}_2}{\partial v} = \gamma\vec{\Omega}_1 + \delta\vec{\Omega}_2$$

c'est-à-dire que les vecteurs $\dfrac{\partial\vec{\Omega}_1}{\partial u}, \dfrac{\partial\vec{\Omega}_2}{\partial v}$ sont parallèles au plan des vecteurs $\vec{\Omega}_1, \vec{\Omega}_2$ et donc perpendiculaires à $\vec{J}$.

Et réciproquement, l'orthogonalité de ces vecteurs exige $A = 0 = C$.

Si un M_2 admet des M_1 asymptotiques on peut lui étendre le théorème de Beltrami-Enneper. La torsion des M_1 asymptotiques est $\sqrt{1-k}$.

c) M_1 DE COURBURE. — Voyons à présent les M_2 qui admettraient des M_1 de courbure. En les rapportant à ces M_1 pris pour M_1 coordonnés, on a :

$$F = B = 0$$

et par suite dans le M_2 polaire

$$F' = 0.$$

Le jacobien est de la forme : $2\beta\, du dv$

c'est-à-dire, en revenant aux coordonnées générales, qu'il est réel à un facteur constant près.

Cette propriété est évidemment caractéristique.

Si l'on calcule le ds^2 de la congruence des axes J, on trouve un résultat de la forme

$$\alpha du^2 + 2\beta du dv + \gamma dv^2$$

ou bien

$$\alpha du^2 - 2\beta du dv + \gamma dv^2$$

selon qu'il s'agit de la congruence décrite dans l'espace mobile ou dans l'espace fixe.

On en déduit pour les invariants de ces congruences

$$\overline{\Delta}^2 = \alpha\gamma - \beta^2,$$
$$\overline{H} = \frac{2\beta\beta' - \alpha\gamma' - \gamma\alpha'}{\alpha\gamma - \beta^2},$$
$$\overline{K} = \frac{\alpha'\gamma' - \beta'^2}{\alpha\gamma - \beta^2}$$

où $\alpha'\beta'\gamma'$ sont les parties complexes de $\alpha\beta\gamma$.

Ces invariants sont les mêmes pour la congruence de l'espace mobile et pour celle de l'espace fixe, et par suite à chaque instant, la distance des points focaux, l'angle des plans focaux, la distance des points limites sont les mêmes. Si l'une est congruence asymptotique, l'autre aussi.

Elles ne sont pourtant pas identiques, ce qui exigerait, nous l'avons vu, que le M_2 soit sphérique (nº 44). Les M_1 de courbure seraient alors indéterminés.

Nous avons vu que le Jacobien des deux formes fondamentales représentait le produit scalaire des rotations du M_2 et du M_2 polaire.

Les M_1 de courbure pour lesquels ce Jacobien est nul sont donc les M_1 pour lesquels les axes instantanés dans le M_2 et dans le M_2 polaires sont rectangulaires.

Enfin une dernière propriété des M_2 qui admettent des M_1 de courbure : le plan central dans le M_2 et dans le M_2 polaire coïncident.

Les cylindroïdes du M_2 et de son M_2 polaire sont en général distincts : nous avons vu qu'ils coïncident lorsqu'il y a des M_1 asymptotiques. Cherchons tous les cas où leur plan central coïncide.

Soit un cylindroïde défini par les torseurs (XYZLMN) et (X'Y'Z'L'M'N').

Un calcul facile de géométrie analytique donne pour la distance de l'origine au plan central du cylindroïde

$$t = \frac{\Sigma L'X - \Sigma LX'}{\sqrt{\Sigma X^2 . \Sigma X'^2 - (\Sigma XX')^2}}$$

mesurée avec son signe sur un axe qui formerait avec X et X' un trièdre direct.

Pour un M_2, cela donne la distance

$$t = \frac{\Sigma(p_2\xi_1 - p_1\xi_2)}{8\Delta}$$

$$\text{portée par } \overrightarrow{J} \left(\frac{q_1 r_2 - q_2 r_1}{4\Delta}, \ldots \text{etc.}\right).$$

Pour le M_2 polaire on aura

$$t' = \frac{\Sigma(p'_2\xi'_1 - p'_1\xi'_2)}{8\Delta'}$$

$$\text{portée par } \overrightarrow{J'} \left(\frac{q'_1 r'_2 - q'_2 r'_1}{4\Delta'}, \ldots \text{etc.}\right).$$

Il suffit de remplacer $p'_1 p'_2 \xi'_1 \xi'_2$ par leurs valeurs (N° 39)

$$p'_1 = \frac{Bp_1 - Ap_2}{\Delta},$$

$$p'_2 = \frac{Cp_1 - Bp_2}{\Delta}.$$

On vérifie d'abord que $\overrightarrow{J'} = -\overrightarrow{J}$.

Puis, explicitant les parties complexes, et appelant $\alpha\beta\gamma$ les parties complexes de $\frac{A}{\Delta}\frac{B}{\Delta}\frac{C}{\Delta}$

$$\xi'_1 = \frac{B\xi_1 - A\xi_2}{\Delta} + (\beta p_1 - \alpha p_2),$$

$$\xi'_2 = \frac{C\xi_1 - B\xi_2}{\Delta} + (\gamma p_1 - \beta p_2).$$

Substituant dans l'expression de t'

$$t' = \frac{(AC - B^2)}{\Delta^2} \cdot \frac{\Sigma(p_1\xi_1 - p_1\xi_2)}{8\Delta'} + \frac{\beta(EC - BF) - \alpha(CF - BG) + \gamma(AF - BE) - \beta(AG - BF)}{2\Delta\Delta'}$$

ou

$$t' = -t + \frac{1}{2\Delta\Delta'}\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ A & B & C \\ E & F & G \end{vmatrix}.$$

Pour que les plans centraux coïncident il faut que ce déterminant soit nul, ce qui arrive, entr'autres cas, si les deux premières lignes, ou si les deux dernières, sont proportionnelles, c'est-à-dire si le M_2 a des asymptotiques ou des M_1 de courbure.

d) Ces propriétés combinées permettent de définir des M_2 plus particuliers. Par exemple, étudions les M_2 isotropes qui admettraient des asymptotiques. Rapportons-les à leurs asymptotiques. La première forme s'écrit

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

soit $2\Delta\beta\,du\,dv$ la deuxième forme.

On a pour les invariants

$$k - 1 = \frac{AC - B^2}{\Delta^2} = -\beta^2,$$

$$h = \frac{2F\beta}{\Delta}.$$

On trouve alors pour le ds^2 du M_2 polaire

$$ds'^2 = \beta^2(E\,du^2 - 2F\,du\,dv + G\,dv^2).$$

Et par suite le M_2 polaire est isotrope aussi.

Ces M_2 admettent de plus des M_1 de courbure. En effet, leur Jacobien s'écrit

$$\begin{vmatrix} E\,du + F\,dv & F\,du + G\,dv \\ \Delta\beta\,dv & \Delta\beta\,du \end{vmatrix} = \Delta\beta(E\,du^2 - G\,dv^2)$$

et il est réel à un facteur près, puisque $\frac{E}{G}$ est réel.

Réciproquement, si le M_2 est isotrope ainsi que son M_2 polaire, ils admettent des M_1 asymptotiques et des M_1 de courbure.

CHAPITRE III

Détermination des M_2 spéciaux.

Surface au ds^2 voisin d'un ds^2 donné et M_2 de Ribaucour. — Coordonnées réduites. — Recherche des M_2 spéciaux. — M_2 paraboliques : détermination. — Lien avec les congruences asymptotiques, avec les surfaces limites d'une congruence. — Cas d'une rotation ou d'une translation constante. — Homographie. — M_2 isotropes : détermination, exemples. — M_2 dont l'enveloppée moyenne est un point. — M_2 où l'axe du cylindroïde décrit une gerbe.

§ 1. — Les coordonnées réduites.

Nous avons vu jusqu'ici qu'un M_2 est bien déterminé par la donnée de ses deux formes complexes.

Soit $$E du^2 + 2 F du dv + G dv^2 + 2\varepsilon(D du^2 + 2 D' du dv + D'' dv^2),$$

la première forme (avec $\varepsilon^2 = 0$).

Il faut pour déterminer le M_2, calculer une deuxième forme

$$A du^2 + 2 B du dv + C dv^2 + 2\varepsilon(a du^2 + 2 b du dv + c dv^2)$$

dont les coefficients sont liés à ceux de la première par les relations (complexes) de Gauss-Codazzi.

Notre but dans ce troisième chapitre est la recherche des M_2 spéciaux (normaux ; isotropes ; paraboliques, etc...). Cette recherche ne demande pas que l'on ait résolu dans toute sa généralité le problème de la détermination d'un M_2 par ses formes. Mais ce problème est assez intéressant par lui-même pour que nous nous y arrêtions un peu.

Nous n'aurons plus guère occasion d'utiliser la seconde forme complexe. Nous supposerons donc désormais (sauf avis contraire) les quantités réelles, et nous réserverons le nom de première et deuxième forme à la partie réelle et à la partie complexe du ds^2.

48. — Surface au ds^2 voisin d'un ds^2 donné. — Si l'on ne prend que la partie réelle du ds^2, c'est-à-dire

$$E du^2 + 2 F du dv + G dv^2,$$

on cherchera d'abord à déterminer $\rho\lambda\mu\nu$. Pour cela, il faut commencer par calculer A, B, C. C'est le problème bien connu de l'applicabilité. Il se pose dans l'espace elliptique comme dans l'espace euclidien, et dépend d'une équation aux dérivées partielles à peu près identique [1].

Ayant déterminé ($\rho\lambda\mu\nu$) l'orientation du trièdre mobile sera déterminée (aussi, pour abréger, appellerons-nous $\rho\lambda\mu\nu$ les rotations du mouvement).

Il reste alors à chercher l'origine du trièdre mobile, c'est-à-dire ($rlmn$) (nous dirons : les translations).

Nous n'avons rien de particulier à dire sur le calcul de $\rho\lambda\mu\nu$ qui est classique. Mais supposant connues ces quantités, nous dirons un mot du calcul des translations.

Il faut pour cela écrire $\rho + \varepsilon r \quad \lambda + \varepsilon l \quad \mu + \varepsilon m \quad \nu + \varepsilon n$ au lieu de $\rho\lambda\mu\nu$ dans le ds^2.

En vertu de la définition même de $\varepsilon(\varepsilon^2 = 0)$, cela revient à chercher les surfaces voisines d'une surface donnée, et admettant un ds^2 voisin.

Voici donc comment se pose le problème :

On donne un
$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

et les surfaces applicables ($\rho\lambda\mu\nu$).

On fait varier le ds^2 de la quantité
$$2\varepsilon(D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2).$$

On demande les variations $\varepsilon r \quad \varepsilon l \quad \varepsilon m \quad \varepsilon n$ de $\rho\lambda\mu\nu$ [2].

Il est évident qu'il suffira de connaître une solution particulière, c'est-à-dire une surface applicable sur le ds^2 varié, et puis de résoudre pour cette surface le problème de la déformation infiniment petite.

Il faut en effet résoudre le système

$$\text{(I)} \qquad \left\{\begin{aligned} &\sum \rho r = 0, \\ &\sum \frac{\partial\rho}{\partial u}\frac{\partial r}{\partial u} = D, \\ &\sum \left(\frac{\partial\rho}{\partial u}\frac{\partial r}{\partial v} + \frac{\partial\rho}{\partial v}\frac{\partial r}{\partial u}\right) = 2D', \\ &\sum \frac{\partial\rho}{\partial v}\frac{\partial r}{\partial v} = D''. \end{aligned}\right.$$

---

(1) Voir par exemple l'extension à l'espace elliptique de la méthode de Weingarten. BIANCHI. *Ann. di Mat.*, 1899, p. 95.

(2) Pour l'espace Euclidien voir WEYL *Vierteljahrschrift der Naturforschenden Gessellschaft in Zurich*, t. 61, 1916.

Ces équations, aux inconnues r, l, m, n, sont linéaires. Il faut donc en connaître une solution particulière; puis, il restera à résoudre le même système rendu homogène

$$\text{(II)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum \rho r = 0, \\ &\sum \frac{\partial \rho}{\partial u}\frac{\partial r}{\partial u} = 0, \\ &\sum \left(\frac{\partial \rho}{\partial u}\frac{\partial r}{\partial v} + \frac{\partial \rho}{\partial v}\frac{\partial r}{\partial u} \right) = 0, \qquad \sum \frac{\partial \rho}{\partial v}\frac{\partial r}{\partial v} = 0. \end{aligned} \right.$$

Ce système (II) qu'on peut écrire en abrégé

$$\sum \rho r = 0, \qquad \sum d\rho\, dr = 0$$

représente un M_2 dont la seconde forme serait identiquement nulle.

Or la seconde forme s'annule lorsque le M_1 élémentaire défini par $\frac{du}{dv}$ est une rotation pure.

Si elle est identiquement nulle, tous les M_1 se réduisent à des rotations : on est dans le cas des M_2 de Ribaucour.

D'où l'interprétation :

Soit un M_2 $(\rho\lambda\mu\nu r l m n)$ qui admettrait les deux formes données.

On cherchera le M_2 de Ribaucour le plus général avec les rotations $\rho\lambda\mu\nu$ données : soit $\rho\lambda\mu\nu r' l' m' n'$.

Le M_2 $(\rho\lambda\mu\nu;\, r+r',\, l+l',\, m+m',\, n+n')$ sera le plus général qui admette les deux formes données.

Et en particulier, si l'on connaît un M_2 spécial (isotrope, normal, parabolique, et toute autre particularité ne faisant intervenir que les invariants des deux formes), soit $(\rho, \lambda, \mu, \nu, r, l, m, n)$ et si l'on connaît aussi un M_2 de Ribaucour avec les mêmes rotations $(\rho\lambda\mu\nu r' l' m' n')$,

on aura d'autres M_2 spéciaux définis par

$$[\rho\lambda\mu\nu, \qquad r+r', \qquad l+l', \qquad m+m', \qquad n+n'].$$

(Mais on ne les aura pas tous ainsi, car une spécialité ne détermine pas la seconde forme fondamentale.)

La recherche des M_2 de Ribaucour est identique au problème de la déformation infiniment petite, ou au problème des éléments orthogonaux (dans l'espace euclidien).

Faisons la substitution

$$\lambda = \rho x, \qquad \mu = \rho y, \qquad \nu = \rho z,$$
$$l = \rho X, \qquad m = \rho Y, \qquad n = \rho Z,$$

dans le système (II).

Il vient :

$$r + \rho(xX + yY + zZ) = 0,$$
$$\rho^2(dx\,dX + dy\,dY + az\,dZ) = 0.$$

La première équation donnera r quand XYZ seront connus (x, y, z, le sont déjà).

La dernière équation détermine XYZ. C'est l'équation aux ds^2 orthogonaux. Elle est ramenée par Darboux et par Weingarten[1], à une équation linéaire aux dérivées partielles.

On peut se représenter ainsi cette composition d'un M_2 avec un M_2 de Ribaucour.

Soit un trièdre fixe (S_0) et O_0 son origine.

Soit un trièdre mobile (S) et O son origine, $(\rho\lambda\mu\nu rlmn)$ ses coordonnées.

Soit un autre trièdre mobile (S′), d'origine O′, ayant ses arêtes parallèles aux arêtes de S à chaque instant, et animé d'un M_2 de Ribaucour; et soient $\rho\lambda\mu\nu r'l'm'n'$ ses coordonnées.

Les coordonnées des sommets O ou O′ sont linéaires en r et r'.

On a des formules analogues à

$$X = 2[\rho l - r\lambda + \mu n - \nu m],$$
$$X' = 2[\rho l' - r'\lambda + \mu n' - \nu m'].$$

Par suite, le M_2 résultant $(\rho\lambda\mu\nu r + r', l + l', \ldots)$ sera celui d'un trièdre d'axes parallèles à ceux de S et S′ et ayant un sommet O″ de coordonnées.

$$X'' = 2[\rho l'' - r''\lambda + \mu n'' - \nu m'']$$

c'est-à-dire :

$$\overrightarrow{O_0O''} = \overrightarrow{O_0O} + \overrightarrow{O_0O'}.$$

Nous avons remarqué qu'à tout M_2 de Ribaucour, correspondent deux surfaces avec orthogonalité des éléments linéaires, et donc deux surfaces applicables.

Réciproquement, à tout couple de surfaces applicables, correspond un M_2 de Ribaucour (sans rapport avec le M_2 de Ribaucour que l'on obtiendrait en faisant rouler l'une sur l'autre les deux surfaces).

---

(1) Darboux. *Théorie des Surfaces,* IV, chap. II.
Weingarten. *Journal de Crelle*, t. 100, p. 296.
Les deux méthodes sont résumées dans B. Gambier. *Applicabilité des surfaces étudiées au point de vue fini*, p. 37 (Fascicule XXXI du Mémorial des Sc. math.).

La relation des M_2 de Ribaucour

$$\sum d\rho\, dr = 0$$

peut s'écrire en effet

$$d\left(\frac{\lambda}{\rho}\right) d\left(\frac{l}{\rho}\right) + d\left(\frac{\mu}{\rho}\right) d\left(\frac{m}{\rho}\right) + d\left(\frac{\nu}{\rho}\right) d\left(\frac{m}{\rho}\right) = 0.$$

Et réciproquement, si $xyzXYZ$ vérifient la relation

$$dx\,dX + dy\,dY + dz\,dZ = 0$$

on y fera correspondre le M_2

$$\begin{array}{llll} \rho, & \lambda = \rho x, & \mu = \rho y, & \nu = \rho z, \\ r = -\rho(xX + yY + zZ), & l = \rho X, & m = \rho Y, & n = \rho Z, \end{array}$$

où ρ est déterminé par la condition $\rho^2 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$.

On peut alors faire une curieuse remarque. Dans un M_2 les quantités $\rho\lambda\mu\nu rlmn$ jouent un rôle symétrique.

Nous avons divisé par ρ et écrit $x = \frac{\lambda}{\rho}$ $y = \frac{\mu}{\rho}$ ..., etc.

Nous aurions pu diviser par une autre quelconque des quantités $\rho\lambda\mu\nu rlmn$, et nous aurions déduit du M_2 (et donc d'un premier couple de surfaces connues) d'autres couples de surfaces applicables.

Par exemple, posons

$$x' = \frac{\rho}{\lambda}, \qquad y' = \frac{\mu}{\lambda}, \qquad z' = \frac{\nu}{\lambda},$$

$$X' = \frac{r}{\lambda}, \qquad Y' = \frac{m}{\lambda}, \qquad Z' = \frac{n}{\lambda}$$

au couple de surfaces à éléments linéaires orthogonaux (xyz) (XYZ) nous ferons correspondre le nouveau couple $\left(\frac{1}{x}\ \frac{1}{y}\ \frac{1}{z}\right)$ $\left(-\frac{xX + yY + zZ}{x}\ \frac{Y}{x}\ \frac{Z}{x}\right)$ considéré déjà par Darboux [1].

De même en divisant par r $\left(x' = \frac{\lambda}{r}\ \ y' = \frac{\mu}{r} \text{ ..., etc.}\right)$, on aurait le nouveau couple

$$\left(\frac{x}{D}\ \frac{y}{D}\ \frac{z}{D}\right) \quad \left(\frac{X}{D}\ \frac{Y}{D}\ \frac{Z}{D}\right)$$

j'ai posé $D = xX + yY + zZ$.

On retrouve l'inversion composée considérée aussi par Darboux.

---

[1] *Théorie des Surfaces*, t. IV, n^{os} 902 et 903.

49. — Coordonnées réduites. — Mais il est un procédé plus avantageux pour la détermination des M_2 spéciaux.

Il faut substituer à r, l, m, n un système de coordonnées assez analogues aux coordonnées tangentielles introduites par Weingarten dans l'étude des surfaces, et imitées par Sannia dans l'étude des congruences(¹).

Voici un moyen assez simple pour y parvenir analytiquement.

Nous avons démontré que tout groupe de quatre fonctions peut s'exprimer linéairement au moyen de $\left(\rho\lambda\mu\nu,\ \mathrm{RLMN},\ \frac{\partial\rho}{\partial u}\frac{\partial\lambda}{\partial u}\frac{\partial\mu}{\partial u}\frac{\partial\nu}{\partial u},\ \frac{\partial\rho}{\partial v}\frac{\partial\lambda}{\partial v}\frac{\partial\mu}{\partial v}\frac{\partial\nu}{\partial v}\right)$.

Soient donc

$$r = \alpha\mathrm{R} + \beta\frac{\partial\rho}{\partial u} + \gamma\frac{\partial\rho}{\partial v} + \delta\,.\,\rho,$$

$$l = \alpha\mathrm{L} + \beta\frac{\partial\lambda}{\partial u} + \gamma\frac{\partial\lambda}{\partial v} + \delta\,.\,\lambda,$$

$$m = \alpha\mathrm{M} + \beta\frac{\partial\mu}{\partial u} + \gamma\frac{\partial\mu}{\partial v} + \delta\,.\,\mu,$$

$$n = \alpha\mathrm{N} + \beta\frac{\partial\nu}{\partial u} + \gamma\frac{\partial\nu}{\partial v} + \delta\,.\,\nu.$$

Donner $\alpha\beta\gamma\delta$ revient à donner $rlmn$, et réciproquement.

Multiplions ces équations respectivement par $\rho\lambda\mu\nu$ et sommons

Comme
$$\sum\rho^2 = 1,$$
$$\sum\rho\frac{\partial\rho}{\partial u} = \sum\rho\frac{\partial\rho}{\partial v} = 0,$$
$$\sum\rho\mathrm{R} = \sum\rho r = 0,$$
il viendra
$$\delta = 0.$$

Multiplions par RLMN et sommons

comme
$$\sum\mathrm{R}\frac{\partial\rho}{\partial u} = \sum\mathrm{R}\frac{\partial\rho}{\partial v} = 0,$$
il reste
$$\sum\mathrm{R}r = \alpha.$$

(¹) SANNIA. *Rendiconti del circ. mat. di Palermo*, 1912, tome 33 (deux Mémoires) et références citées là à ses travaux antérieurs.

Multiplions par $\frac{\partial\rho}{\partial u}, \frac{\partial\lambda}{\partial u}, \frac{\partial\mu}{\partial u}, \frac{\partial\nu}{\partial u}$, puis par $\frac{\partial\rho}{\partial v}\ \frac{\partial\lambda}{\partial v}\ \frac{\partial\mu}{\partial v}\ \frac{\partial\nu}{\partial v}$ et sommons chaque fois,

il vient

$$\beta E + \gamma F = S,$$
$$\beta F + \gamma G = T;$$

j'ai posé
$$S = \sum r\frac{\partial\rho}{\partial u}, \qquad T = \sum r\frac{\partial\rho}{\partial v}.$$

On tire de là

$$\beta = \frac{SG - TF}{\Delta^2}, \qquad \gamma = \frac{ET - SF}{\Delta^2}.$$

En résumé, nous prendrons pour nouvelles inconnues

$$\alpha, \quad S \text{ et } T.$$

On aura alors $rlmn$ par quatre équations dont je n'écris que la première

$$r = \alpha R + \left(\frac{SG - TF}{\Delta^2}\right)\frac{\partial\rho}{\partial u} + \left(\frac{ET - SF}{\Delta^2}\right)\frac{\partial\rho}{\partial v}.$$

Il est facile de calculer, en fonction de S, T, α, la deuxième forme.

On a :
$$-D = \sum \frac{\partial\rho}{\partial u}\frac{\partial r}{\partial u} = \frac{\partial S}{\partial u} - \sum r\frac{\partial^2\rho}{\partial u^2}.$$

Or, on a trouvé dans le 2^{me} chapitre (n° 35)

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial u^2} = -AR - E\rho + \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{Bmatrix}\frac{\partial\rho}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{Bmatrix}\frac{\partial\rho}{\partial v}.$$

Substituant cette valeur

$$\sum r\frac{\partial^2\rho}{\partial u^2} = -A\alpha + \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{Bmatrix} S + \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{Bmatrix} T.$$

On connaît ainsi D.

Des calculs semblables donneraient D′ et D″.

On a finalement les trois équations

$$
\begin{aligned}
-\ \mathrm{D} &= \mathrm{A}\alpha + \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial u} - \left\{ {1\,1 \atop 1} \right\} \mathrm{S} - \left\{ {1\,1 \atop 2} \right\} \mathrm{T}, \\
-2\mathrm{D}' &= 2\mathrm{B}\alpha + \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial v} + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u} - 2\left\{ {1\,2 \atop 1} \right\} \mathrm{S} - 2\left\{ {1\,2 \atop 2} \right\} \mathrm{T}, \\
-\ \mathrm{D}'' &= \mathrm{C}\alpha + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial v} - \left\{ {2\,2 \atop 1} \right\} \mathrm{S} - \left\{ {2\,2 \atop 2} \right\} \mathrm{T}.
\end{aligned}
$$

Ricci appelle dérivées covariantes d'un forme $\mathrm{S}du + \mathrm{T}dv$, ou d'un vecteur (S, T) [par rapport à un ds^2 donné] les expressions

$$
\begin{aligned}
\mathrm{S}_1 &= \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial u} - \left\{ {1\,1 \atop 1} \right\} \mathrm{S} - \left\{ {1\,1 \atop 2} \right\} \mathrm{T}, \\
\mathrm{S}_2 &= \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial v} - \left\{ {1\,2 \atop 1} \right\} \mathrm{S} - \left\{ {1\,2 \atop 2} \right\} \mathrm{T}, \qquad \ldots \text{etc}.
\end{aligned}
$$

Les expressions $\mathrm{D}\mathrm{D}'\mathrm{D}''$ en fonction de $\alpha\mathrm{S}\mathrm{T}$ se simplifient alors

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{D} &= \alpha\mathrm{A} + \mathrm{S}_1, \\
-2\mathrm{D}' &= 2\alpha\mathrm{B} + \mathrm{S}_2 + \mathrm{T}_1, \\
-\mathrm{D}'' &= \alpha\mathrm{C} + \mathrm{T}_1.
\end{aligned}
$$

Si l'on donne la 2^{me} forme, les inconnues sont α, S et T. Ces équations sont plus simples que les équations considérées au n° 47.

Il n'y a que trois inconnues au lieu de quatre, et, de plus, l'une d'elles, α, y entre algébriquement au premier degré.

C'est cette circonstance qui nous permettra de déterminer les M_2 spéciaux. Calculons pour cela les invariants.

50. — Calcul des invariants. — Nous avons défini les invariants

$$
\mathrm{H} = \frac{2\mathrm{F}\mathrm{D}' - \mathrm{G}\mathrm{D} - \mathrm{E}\mathrm{D}''}{\mathrm{E}\mathrm{G} - \mathrm{F}^2} \quad \text{et} \quad \mathrm{K} = \frac{\mathrm{D}\mathrm{D}'' - \mathrm{D}'^2}{\mathrm{E}\mathrm{G} - \mathrm{F}^2}
$$

je rappelle aussi que nous avons posé

$$
h = \frac{2\mathrm{F}\mathrm{B} - \mathrm{A}\mathrm{G} - \mathrm{E}\mathrm{C}}{\Delta^2}, \qquad k = 1 + \frac{\mathrm{A}\mathrm{C} - \mathrm{B}^2}{\Delta^2},
$$

$$
\Delta^2 = \mathrm{E}\mathrm{G} - \mathrm{F}^2.
$$

Calculons alors H et K en remplaçant $DD'D''$ par leurs valeurs en fonction d'α, S, T.

On trouve

$$-\Delta^2 H = \alpha(2FB - AG - EC) + F(S_2 + T_1) - GS_1 - ET_2$$

et en remplaçant les symboles de Christoffel par leurs valeurs

$$H = -\alpha h + \frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{SG - FT}{\Delta}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{ET - SF}{\Delta}\right)\right].$$

L'expression de K est plus compliquée

$$K\Delta^2 = (\alpha A + S_1)(\alpha C + T_2) - \left(\alpha B + \frac{S_2 + T_1}{2}\right)^2.$$

On trouve pour le coefficient de α^2

$$AC - B^2 = \Delta^2(k - 1).$$

Pour le coefficient de α

$$AT_2 + CS_1 - B(S_2 + T_1)$$

ce qui, en vertu des relations de Codazzi, se simplifie et donne

$$\Delta\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{CS - BT}{\Delta}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{AT - BS}{\Delta}\right)\right].$$

Enfin, pour le terme indépendant de α

$$S_1 T_2 - \left(\frac{S_2 + T_1}{2}\right)^2.$$

51. — Interprétation géométrique des coordonnées S, T, α. — Nous avons posé

$$S = \sum r \frac{\partial \rho}{\partial u},$$

$$T = \sum r \frac{\partial \rho}{\partial v}$$

ou plus simplement

$$S\,du + T\,dv = \sum r\,d\rho.$$

Nous allons chercher l'interprétation cinématique de cette expression.

Soit OXYZ le trièdre fixe;

O'X'Y'Z' le trièdre mobile.

L'origine O' a pour coordonnées sur les axes fixes :

$$x_0 = 2(l\rho - \lambda r + \mu n - \nu m)$$

et deux formules analogues en permutant xyz, $\lambda\mu\nu$, lmn.

La rotation $\overrightarrow{\Omega}$ du solide a de même pour coordonnées sur les axes fixes $P' = 2[-\lambda d\rho + \rho d\lambda - \nu d\mu + \mu d\nu]$ et deux coordonnées analogues Q' et R'.

Effectuons le produit scalaire

$$\overrightarrow{OO'} . \overrightarrow{\Omega} = P'x_0 + Q'y_0 + R'z_0 .$$

On trouve sans difficulté

$$\overrightarrow{OO'} . \overrightarrow{\Omega} = +4(S du + T dv)$$

ce qui donne la signification de S et de T.

Quant à α nous avons posé

$$\alpha = \sum R r$$

et, en revenant à la définition de RLMN

$$\alpha = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} r & l & m & n \\ \rho & \lambda & \mu & \nu \\ \frac{\partial\rho}{\partial u} & \frac{\partial\lambda}{\partial u} & \frac{\partial\mu}{\partial u} & \frac{\partial\nu}{\partial u} \\ \frac{\partial\rho}{\partial v} & \frac{\partial\lambda}{\partial v} & \frac{\partial\mu}{\partial v} & \frac{\partial\nu}{\partial v} \end{vmatrix} .$$

Pour simplifier cette expression, on vérifie par un calcul direct que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \rho & \lambda & \mu & \nu \\ -\lambda & \rho & -\nu & \mu \\ -\mu & \nu & \rho & -\lambda \\ -\nu & -\mu & \lambda & \rho \end{vmatrix}$$

est égal à $+1$.

Multiplions alors α par ce déterminant.

En effectuant la multiplication ligne par ligne et en utilisant les valeurs déjà données des coordonnées de O'

$$x_0 = 2[\rho l - r\lambda + \mu n - \nu m]$$

et des composantes de la rotation sur les axes fixes

$$P_1 = 2\left[-\lambda\frac{\partial\rho}{\partial u} + \rho\frac{\partial\lambda}{\partial u} - \nu\frac{\partial\mu}{\partial u} + \mu\frac{\partial\nu}{\partial u}\right],$$

$$P_2 = 2\left[-\lambda\frac{\partial\rho}{\partial v} + \rho\frac{\partial\lambda}{\partial v} - \nu\frac{\partial\mu}{\partial v} + \mu\frac{\partial\nu}{\partial v}\right],$$

il vient facilement

$$\alpha = \frac{1}{8\Delta}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_0 & 0 & P_1 & P_2 \\ y_0 & 0 & Q_1 & Q_2 \\ z_0 & 0 & R_1 & R_2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{8\Delta}\begin{vmatrix} x_0 & P_1 & P_2 \\ y_0 & Q_1 & Q_2 \\ z_0 & R_1 & R_2 \end{vmatrix}$$

ou

$$-2\alpha = \sum x_0\left(\frac{q_1 r_2 - q_2 r_1}{4\Delta}\right).$$

$$-2\alpha = \vec{J} \times \overrightarrow{OO'}.$$

C'est la projection de $\overrightarrow{OO'}$ sur l'axe J du cylindroïde.

52. — **Recherche des M_2 spéciaux.** — Si l'on remarque que les invariants H et K sont algébriques et respectivement du premier et du deuxième degré en α, on voit qu'il sera facile de trouver les M_2 spéciaux.

Soit par exemple à trouver des M_2 normaux ; c'est-à-dire ceux dans lesquels on a

$$H = 0.$$

On prendra abitrairement : 1) $\rho\lambda\mu\nu$ alors on pourra calculer E, F, G, A, B, C...

2) On prendra arbitrairement encore S et T.

Il suffira alors de prendre pour α la racine de l'équation $H = 0$.

Le M_2 sera déterminé.

De même, on pourra trouver tous les M_2 avec une propriété intrinsèque donnée d'avance et qui s'exprimerait par une relation algébrique quelconque entre les invariants H et K.

Nous traiterons séparément le cas des M_2 paraboliques ($K = 0$) et le cas des M_2 ($H^2 = 4K$), dont le cylindroïde se réduit à un plan.

On ne pourrait pas trouver par cette méthode les M_2 isotropes ou les M_2 pseudosphériques (H et K constants). Ces M_2 sont soumis à deux conditions. On ne pourrait plus prendre arbitrairement S et T. Il resterait une équation aux dérivées partielles.

Mais auparavant disons un mot d'un cas d'exception qui pourrait se rencontrer. Il y a des cas où le calcul précédent devient impossible.

Ce sont les cas où la condition $\varphi(H, K) = 0$ étant donnée d'avance, en y remplaçant H et K par leurs valeurs, α disparaîtrait de l'équation trouvée. Je ne parle pas du cas où l'équation n'aurait pas de racine, ne voulant pas ici faire la distinction des M_2 *réels* et des M_2 imaginaires. Mais si α disparaît, S et T seront liés par une relation différentielle.

Ce cas suppose évidemment entre les invariants une relation bien particulière. Il peut arriver qu'il en soit ainsi quelle que soit la relation donnée; c'est le cas où α disparaîtrait précisément des expressions de H et de K. Cela peut-il arriver?

Un cas évident est celui où l'on aurait identiquement

$$A = B = C = 0,$$

alors α disparaîtrait des expressions D, D', D'', et par suite des invariants H et K.

Mais si la forme $A\,du^2 + 2B\,du\,dv + C\,dv^2$ est identiquement nulle, le solide mobile est déduit par symétrie (et translation) d'un solide fixe, par rapport aux droites d'une congruence.

Et la recherche des M_2 spéciaux se ramène, comme nous l'avons vu dans la première partie, à un problème analogue pour les congruences.

Ce cas mis à part, il peut arriver encore que α disparaisse, mais pour des M_2 bien particuliers.

Par exemple, nous avons trouvé pour l'équation des M_2 normaux

$$H = -\alpha h + \frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{SG - FT}{\Delta}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{ET - SF}{\Delta}\right)\right] = 0.$$

Cette équation détermine α à moins que l'on n'ait

$$h = 0.$$

Si $h = 0$ (M_2 correspondants aux surfaces minima), on pourra prendre arbitrairement α, mais en revanche S et T seront liés par la relation

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{SG - FT}{\Delta}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{ET - SF}{\Delta}\right) = 0.$$

On prendra

$$SG - FT = \Delta \frac{\partial \psi}{\partial v},$$

$$ET - SF = - \Delta \frac{\partial \psi}{\partial u},$$

ce qui donne S et T avec une fonction arbitraire ψ.

Laissons de côté ce cas d'exception, nous y reviendrons dans le cas des M_2 paraboliques ou des M_2 isotropes.

En résumé : 1) On se donne arbitrairement ρ, λ, μ, ν, c'est-à-dire un M_2 à point fixe (O).

Soit OXYZ une position du trièdre à un instant donné.

Toutes les rotations à cet instant-là sont contenues dans un plan Π qui passe par O. L'axe J du cylindroïde est perpendiculaire à Π.

2) On déplace arbitrairement le point O dans ce plan. Et on construit un nouveau trièdre O'X'Y'Z' ayant ses axes parallèles à l'ancien.

Ceci revient à se donner S et T (produit scalaire de la rotation et de OO').

3) Il sera toujours possible alors de déterminer, et par une relation algébrique, une translation $O'O'' = -2\alpha$ perpendiculaire au plan Π, telle que le M_2 du trièdre O''X''Y''Z'' soit spécial.

§ 2. — M_2 paraboliques.

53. — Détermination. — Bricard[1] appelle M_2 singuliers, les M_2 dans lesquels les deux M_1 qui se réduisent à des rotations pures sont confondus. Nous dirons, par analogie avec les congruences, M_2 paraboliques. La condition est que l'invariant K soit identiquement nul.

Nous avons vu comment, étant donné un M_2 parabolique ($\rho\lambda\mu\nu rlmn$), on en obtient une infinité d'autres en ajoutant à $rlmn$ les translations $r'l'm'n'$ du M_2 de Ribaucour le plus général ayant les rotations $\rho\lambda\mu\nu$.

Nous avons vu aussi comment on peut déterminer analytiquement tous les M_2 paraboliques avec des rotations $\rho\lambda\mu\nu$ arbitrairement données, par une équation algébrique en α.

Il reste à examiner le cas d'exception : α peut-il disparaître de l'invariant K ?

D'abord le coefficient de α^2 dans K est $(k-1)$. Pour que ce coefficient s'annule, il faudrait que la forme $E du^2 + 2F du dv + G dv^2$ ait sa courbure égale à 1.

---

[1] *Leçons de Cinématique*. I. n° 225.

Nous avons vu dans la deuxième partie que cela exige que le M_2 réciproque se réduise à un M_1 ou à un solide fixe.

Un changement de variables permet alors de ramener la seconde forme complexe $(A\,du^2 + 2B\,du\,dv + C\,dv^2)$ à la forme $A\,du^2$ puisque son discriminant est nul.

Supposons alors $B = C = 0$ dans les formules qui donnent D, D', D''.

On voit que D seul contient αA.

Nous supposons $A \neq 0$ (le cas $A = B = C = 0$ a déjà été traité).

Pour que α disparaisse de l'expression $K\Delta^2 = DD'' - D'^2$, il faut que D'' soit nul et la condition $K = 0$ donne alors

$$D' = 0.$$

Il reste donc à résoudre le système

$$\begin{cases} S_2 + T_1 = 0, \\ T_2 = 0. \end{cases}$$

Les relations de Codazzi montrent qu'on peut prendre $T = \dfrac{\Delta}{A} f(u)$ où $f(u)$ est arbitraire. On peut ensuite déterminer S par une quadrature. Ce sont les seuls M_2 paraboliques échappant à la méthode générale.

Nous allons à présent indiquer quelques cas particuliers de M_2 paraboliques obtenus par voie plus géométrique.

54. — Lien avec les congruences asymptotiques. — Une congruence de tangentes asymptotiques est, elle aussi, caractérisée par la condition que son invariant K soit nul. On pressent donc un lien avec les M_2 singuliers.

Le premier résultat obtenu dans cette voie est celui de M. Bricard. Étant donnés un solide fixe et une congruence d'asymptotiques, tous les solides obtenus par symétrie autour des rayons de cette congruence forment un M_2 singulier.

Nous avons généralisé ce résultat dans le premier chapitre, en montrant qu'on pouvait ajouter à la symétrie une translation (variable) quelconque.

Nous pouvons démontrer géométriquement ce résultat. et cela nous permet de le généraliser d'une autre façon en prenant une rotation pure quelconque (variable) au lieu de la symétrie.

Démontrons-le d'abord pour une symétrie.

Soit S un solide fixe; S_i et S_j les solides symétriques par rapport à deux droites Δ_i et Δ_j.

On passera de S_i à S_j en effectuant deux symétries : l'une autour de Δ_i qui redonnera S; l'autre autour de Δ_j qui donnera S .

Pour que deux symétries équivaillent à une rotation pure, il faut et il suffit que leurs axes concourent.

Donc si Δ_i rencontre Δ_j, et dans ce cas seulement, on passera de S_i à S_j par une rotation pure.

Considérons à présent tous les rayons Δ_j voisins de Δ_i. Il y aura autant de M_1 élémentaires se réduisant à une rotation, qu'il y aura de rayons Δ_j qui rencontrent Δ_i.

On sait que dans une congruence, parmi les rayons voisins d'un rayon donné, il y en a deux qui le rencontrent. On serait dans le cas de Bricard si ces deux rayons étaient confondus, c'est-à-dire si la congruence était une congruence de tangentes asymptotiques à une surface.

La démonstration n'a fait intervenir la symétrie que par cette propriété : Deux symétries se composent en une rotation pure si, et si seulement, leurs axes concourent.

La même propriété est évidemment vraie de deux rotations pures, qui équivalent à une seule, si leurs axes concourent, et dans ce cas seulement.

Enfin la même propriété s'applique encore à deux M_1 hélicoïdaux dont la rotation serait de 180°, c'est-à-dire à une symétrie plus une translation quelconque.

On a donc le théorème : Étant donnée une congruence d'asymptotiques, si l'on fait subir à un solide fixe, autour des rayons de cette congruence, soit une symétrie pure, soit une symétrie et translation quelconque, soit une rotation pure quelconque, l'ensemble des solides obtenus forme dans chaque cas un M_2 parabolique.

55. — Congruences cotées. — Pour généraliser davantage le résultat de Bricard, il faut considérer un M_2 comme obtenu par les déplacements hélicoïdaux d'un solide fixe autour des droites Δ_i d'une congruence quelconque. A chaque droite de la congruence sont donc attachés deux nombres, T et θ, la translation et la rotation du déplacement hélicoïdal.

En somme, un M_2 est l'analogue d'une congruence cotée.

A une congruence cotée donnée, ne correspond qu'un M_2.

Le choix du solide qui subit le déplacement est sans importance.

Mais l'inverse n'est pas vrai. A un M_2 donné correspondent une infinité de congruences cotées : les relations entre ces congruences sont d'ailleurs difficiles à préciser.

Du point de vue géométrique, les seules propriétés intéressantes sont celles qui font abstraction de la cote, celles qui se rapportent à la congruence (non cotée), support de la congruence cotée.

La question se pose alors : pour qu'un M_2 soit singulier, la congruence des axes a-t-elle des conditions à remplir ? On voit facilement que non.

Nous allons montrer qu'étant donnée une congruence quelconque, on peut, et d'une infinité de façons, choisir sa cote de façon à avoir un M_2 parabolique.

Le calcul est assez simple :

Soient XYZ, $\alpha\beta\gamma$, les coordonnées de Plucker des axes de la congruence.

On a les relations
$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1,$$
$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0.$$

Nous désignerons par $\overline{E}du^2 + 2\overline{F}dudv + \overline{G}dv^2 = \Sigma dX^2$

et
$$\overline{D}du^2 + 2\overline{D'}du\,dv + \overline{D''}dv^2 = \Sigma d\alpha \,.\, dX$$

les deux formes de la congruence.

Le M_2 obtenu par les déplacements hélicoïdaux (θ, T) aura pour paramètres

$$\rho = \cos\frac{\theta}{2}, \qquad \lambda = X\sin\frac{\theta}{2}, \qquad \mu = Y\sin\frac{\theta}{2}, \qquad \nu = Z\sin\frac{\theta}{2},$$
$$r = -\frac{T}{2}\sin\frac{\theta}{2}, \quad l = \alpha\sin\frac{\theta}{2} + X\frac{T}{2}\cos\frac{\theta}{2}, \quad m = \beta\sin\frac{\theta}{2} + Y\frac{T}{2}\cos\frac{\theta}{2}, \quad n = \gamma\sin\frac{\theta}{2} + Z\frac{T}{2}\cos\frac{\theta}{2},$$

d'après les formules de l'introduction.

On trouve alors immédiatement pour la première forme du M_2

$$\Sigma d\rho^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = \left(d\frac{\theta}{2}\right)^2 + \sin^2\frac{\theta}{2}(dX^2 + dY^2 + dZ^2)$$

d'où $\quad E = \overline{E}\sin^2\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2 \quad$ et deux formules analogues.

Pour trouver la seconde forme $-\Sigma d\rho dr = Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2$ on peut, soit faire le calcul direct, soit la déduire de la première dont elle est la partie complexe quand on remplace

$$(E, F, G, \quad \text{ou} \quad \overline{E}, \overline{F}, \overline{G}) \quad \text{par} \quad (E - 2\varepsilon D, \ldots \quad \overline{E} - 2\varepsilon\overline{D}, \ldots),$$
$$\left(XYZ \quad \text{et} \quad \frac{\theta}{2}\right) \qquad \text{par} \quad \left(X + \varepsilon\alpha, \quad \ldots \quad \text{et} \quad \frac{\theta + \varepsilon T}{2}\right).$$

On obtient ainsi

$$-\Sigma d\rho dr = Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2 = \sin^2\frac{\theta}{2}\Sigma d\alpha dX + \frac{T}{2}\sin\theta\,\Sigma dX^2 + \frac{1}{2}d\theta\,.\,dT$$

ou encore

$$-\Sigma d\rho dr = \sin^2\frac{\theta}{2}\Sigma dX^2\left[T\cot\!g\frac{\theta}{2} + \frac{\Sigma d\alpha dX}{\Sigma dX^2}\right] + \frac{1}{2}d\theta\,.\,dT.$$

Or, dans une congruence, le rapport $-\frac{\Sigma d\alpha dX}{\Sigma dX^2}$ est égal au paramètre de distribution p de la surface réglée élémentaire définie dans la congruence par le déplacement du, dv.

Supposons alors pour trouver une propriété géométrique, que θ ou T soient constants. Il restera

$$-\Sigma d\rho dr = \sin^2\frac{\theta}{2}\,\Sigma dX^2\left[T\cotg\frac{\theta}{2}-p\right].$$

La condition pour qu'un M_1 élémentaire se réduise à une rotation pure s'écrira : $\Sigma d\rho dr = 0$

ou
$$p = T\cotg\frac{\theta}{2}.$$

Il y aura donc, dans le M_2, autant de rotations pures, qu'il y a de surfaces réglées dans la congruence, admettant le long d'une génératrice donnée, un paramètre p donné.

Il en passe en général deux par chaque génératrice.

On aura un M_2 singulier si ces deux surfaces coïncident.

La formule d'Hamilton donne pour le paramètre d'une surface élémentaire

$$p = p_1\sin^2 V + p_2\cos^2 V$$

en appelant p_1 et p_2 les paramètres des surfaces distributrices, et V l'angle du plan central de la surface considérée avec l'une des distributrices.

A une valeur donnée de p, correspondent pour l'angle V deux valeurs égales et de signes contraires, et donc deux rotations pures.

On aurait une seule valeur si p coïncidait avec l'un des paramètres p_1 ou p_2.

Donc, on peut toujours choisir le paramètre pour que les deux surfaces réglées soient confondues.

Et par suite, quelle que soit la congruence, on peut :

1) Ou bien se donner T constant, et choisir θ tel que $T\cotg\frac{\theta}{2} = p_1$ (ou p_2);

2) Ou bien se donner θ constant, et choisir T par la même égalité.

Il n'y a donc pas à chercher, dans le cas général, de propriétés géométriques de la congruence (non cotée).

56. — Interprétation géométrique du cas où $\theta = c^t$ (ou bien $T = c^t$). — Nous avons supposé les coordonnées normales : c'est-à-dire que l'on a

$$\rho^2 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1.$$

Si nous laissions les coordonnées homogènes, la première forme changerait, mais, à un facteur constant près, la seconde forme ne changerait pas, et, en particulier, si le M_2 est parabolique, elle resterait carré parfait.

Si, en effet, on multiplie les coordonnées par a, on a

$$\Sigma d(a\rho)\, d(ar) = \Sigma(a\,d\rho + \rho\,da)(a\,dr + r\,da) = a^2 \Sigma\, d\rho\, dr$$

puisque l'on a $$\Sigma \rho r = 0$$

et, en différentiant $$\Sigma(\rho\, dr + r\, d\rho) = 0.$$

Ceci posé, soient $\lambda\mu\nu\rho$ $lmnr$ les coordonnées du M_2. Divisons-les par $\sqrt{1-\rho^2}$ et représentons par des lettres accentuées les coordonnées nouvelles

$$\lambda' = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\rho^2}}, \ \ldots, \qquad l' = \frac{l}{\sqrt{1-\rho^2}}, \ \ldots.$$

On a les relations

$$\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 = 1,$$
$$\lambda' l' + \mu' m' + \nu' n' + \rho' r' = 0.$$

On peut interpréter $\lambda'\mu'\nu'$ comme les cosinus directeurs des droites d'une congruence, qui aurait pour surface de départ $x = l'$, $y = m'$, $z = n'$.

La seconde forme du M_2 est, à un facteur près,

$$d\lambda'\, dl' + d\mu'\, dm' + d\nu'\, dn'$$

puisque ρ' est constant.

C'est la deuxième forme de Kummer de la congruence. Dire qu'elle est un carré parfait, c'est dire que la surface de départ est une des surfaces limites de la congruence [1],

Réciproquement, étant donné une congruence quelconque, il suffit de prendre comme surface de départ une des surfaces limites, et le calcul précédent donnera une infinité de M_2 paraboliques (avec ρ constante arbitraire).

Rien ne serait changé au calcul, si nous supposions la translation, au lieu de la rotation, constante,

On aurait $$r' = \frac{r}{\sqrt{1-p^2}} = -\frac{T}{2} = c^{te}.$$

La deuxième forme de la congruence serait encore la deuxième forme de Kummer.

La conclusion subsisterait. A toute congruence correspond une ∞ de M_2 paraboliques (avec translation arbitraire).

---

(1) BIANCHI. *Lezioni di Geometria differenziale*, 3 éd., Vol. I, part. II, § 176.

57. — Autre interprétation du cas général dans la théorie des surfaces. — L'équation $\Sigma d\rho dr =$ carré parfait, est susceptible d'une interprétation en théorie des surfaces, qui nous permettra de déduire d'un M_2 singulier connu une infinité d'autres M_2 singuliers.

Soient $\rho\lambda\mu\nu$ $rlmn$ les coordonnées homogènes d'un solide animé d'un M_2 parabolique.

Posons
$$x = \frac{\lambda}{\rho}, \qquad y = \frac{\mu}{\rho}, \qquad z = \frac{\nu}{\rho},$$
$$x' = \frac{l}{\rho}, \qquad y' = \frac{m}{\rho}, \qquad z' = \frac{n}{\rho}.$$

Nous aurons

$$(1) \qquad dx dx' + dy dy' + dr dr' = \frac{\Sigma d\rho\, dr}{\rho^2} = \text{carré parfait.}$$

Soient alors deux surfaces xyz, $x'y'z'$, en correspondance ponctuelle.

L'équation $dx dx' + dy dy' + dz dz' = 0$ exprime l'orthogonalité des éléments linéaires. Elle a ordinairement deux solutions distinctes.

Si elle en a plus de deux, elle est identiquement satisfaite. On a la correspondance étudiée par Darboux(1).

Le cas des M_2 paraboliques correspond aux couples de surfaces ayant un seul élément linéaire orthogonal.

On en déduirait les couples de surfaces ayant une seule famille de courbes d'égale longueur(2).

On pourrait résoudre directement l'équation (1) en supposant connus xyz. Il faudrait exprimer xyz par les formules de Lelieuvre en rapportant la première surface à ses asymptotiques.

On aurait alors $x'y'z'$ avec deux fonctions arbitraires. C'est une nouvelle solution analytique du problème posé ici. Nous ne la développerons pas, préférant appliquer au problème une considération que fait Darboux dans le cas des éléments identiquement orthogonaux. C'est qu'une homographie conserve les ds^2 orthogonaux. Elle conserve donc aussi les M_2 singuliers. Elle permettra donc, étant donné un tel M_2, d'en obtenir une infinité d'autres.

---

(1) *Th. des Surfaces*, tome IV, chap. I, II.

(2) Voir dans les *Nouv. Ann. de Math.*, Décembre 1924, p. 95, la résolution par M. Gambier d'un problème d'agrégation.

58. — Homographie. — Nous avons vu dans l'introduction comment, en laissant les coordonnées homogènes, on pouvait définir des homographies de la forme

$$\begin{aligned}
\rho' &= a_1\rho + b_1\lambda + c_1\mu + d_1\nu,\\
\lambda' &= a_2\rho + b_2\lambda + c_2\mu + d_2\nu,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\nu' &= a_4\rho + b_4\lambda + c_4\mu + d_4\nu
\end{aligned}$$

où les $(a_i\ldots)$ sont des quantités complexes quelconques (ρ et ρ' sont complexes aussi).

On peut définir des homographies plus générales encore, Il suffit de considérer $\rho\lambda\mu\nu$ $rlmn$ comme les coordonnées homogènes d'un point dans l'espace à sept dimensions, et de soumettre ce point à la transformation linéaire la plus générale qui conserve l'expression

$$\rho r + \lambda l + \mu m + \nu n = 0.$$

Cette homographie conserve évidemment la deuxième forme fondamentale, puisque la transformation étant linéaire, $d\rho$ et dr subissent la même transformation que ρ et r, et $\Sigma d\rho dr$ se conserve comme $\Sigma\rho r$.

L'homographie conserve donc les M_2 de Ribaucour $\Sigma d\rho dr \equiv 0$, et les M_2 paraboliques $\Sigma d\rho dr =$ carré parfait.

Elle conserve en général dans un M_2 les M_1 qui sont des rotations pures, comme l'homographie ponctuelle conserve la seconde forme des surfaces, et donc les lignes asymptotiques, ou comme, en coordonnées de Plucker, elle conserve la seconde forme des congruences, et donc les développables.

Il resterait à étudier la signification d'une telle homographie en géométrie de position.

On peut démontrer, le calcul est facile mais un peu long et je ne le transcris pas ici, que toute homographie se ramène, à des changements de coordonnées près :

1) à des transformations du type

$$\rho' = a\rho, \qquad r' = \frac{r}{a}, \qquad (a = \text{c}^{\text{te}}).$$

Les autres coordonnées ne variant pas.

2) à des transformations du type

$$\rho' = r, \qquad r' = \rho.$$

Les autres coordonnées restant encore inchangées.

Il est aisé de voir la signification géométrique de ces deux homographies particulières.

a) Considérons d'abord la première, et revenons à la signification même des coordonnées de position.

$\rho\lambda\mu\nu\, rlmn$ désigne un solide S déduit du solide origine S_0

par une rotation θ $$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}{\rho}$$

et une translation T $$T = -\frac{2r}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}$$

autour d'un axe de coordonnées tensorielles $\lambda\mu\nu\, lmn$;

$a\rho,\ \lambda,\ \mu,\ \nu,\ \frac{r}{a},\ l,\ m,\ n$ désignera un solide S′ déduit de S_0

par une rotation θ' $$\operatorname{tg}\frac{\theta'}{2} = \frac{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}{a\rho} = \frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$$

et une translation T′ $$T' = \frac{-2r}{a\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}} = \frac{T}{a}$$

autour du même axe.

Sont donc homographiques deux congruences cotées ayant pour support la même congruence

et des cotes vérifiant la relation $$\frac{T}{T'} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\theta'}{2}} = c^{te}.$$

On voit que $T \operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}$ reste invariant et l'on vérifiera facilement en se rapportant au N° 55, que tous les M_2 singuliers obtenus là en faisant varier les constantes T (1^er^ cas) ou θ (2^e^ cas) sont homographiques entre eux.

b) Considérons à présent la 2^me^ substitution (échange de ρ et de r).

Les solides S et S′ sont encore déduits du solide origine par des vissages autour de la même droite.

La rotation nouvelle θ' est donnée par

$$\operatorname{cotg}\frac{\theta'}{2} = \frac{r}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}} = -\frac{T}{2}$$

et la translation T' par

$$\frac{T'}{2} = -\frac{\rho}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}} = -\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}.$$

Ici encore $\frac{T}{2}\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}$ est resté invariant. Les deux facteurs se sont simplement échangés.

On vérifierait encore que les M_2 singuliers du N° 55 ($\theta = c^{te}$ ou $T = c^{te}$) sont homographiques entre eux si l'on choisit bien les constantes. De sorte qu'à une homographie près, les M_2 obtenus là reviennent à un seul.

Quand on effectue sur des coordonnées de Plucker $\lambda\mu\nu$ lmn de droites, une substitution linéaire qui conserve l'expression

$$\lambda l + \mu m + \nu n = 0$$

on sait que la transformation se ramène à une homographie (ponctuelle), et à une corrélation.

Ici, la substitution que nous avons considérée en dernier lieu, se ramène aussi à une corrélation.

Les deux positions $\rho\lambda\mu\nu$ $rlmn$ et $r\lambda\mu\nu$ ρlmn sont conjuguées par rapport à la pentasérie

$$\rho = r.$$

Car on peut considérer des positions conjuguées par rapport à une pentasérie, comme l'on a des droites conjuguées par rapport à un complexe et même des vecteurs conjugués[1].

On peut du reste, en appliquant successivement aux quatre coordonnées cette substitution, obtenir l'analogue de la dualité pour les droites : dualité qui se traduit par l'échange des coordonnées de Plucker comme il est bien connu.

Ici de même, à une position S : ($\rho\lambda\mu\nu$ $rlmn$) nous faisons correspondre S' : ($rlmn$ $\rho\lambda\mu\nu$).

Cherchons la relation entre S et S'.

1) Ces deux positions sont symétriques (à une translation près). Leur angle est en effet

$$\cos V = \frac{\Sigma\rho r}{\sqrt{\Sigma\rho^2}\sqrt{\Sigma r^2}} = 0.$$

---

(1) Cf. SAUSSURE. *Système de corps solides.* (Archives des Sc. Physiques et naturelles, Genève, 1909 et 1910) et d'Ocagne. *Cours de Géométrie*, 1918, tome II, p. 324.

2) Les sommets des deux trièdres sont inverses l'un de l'autre par rapport à l'origine. Ces sommets sont en effet

$$x_0 = \frac{2[l\rho - r\lambda + n\mu - m\nu]}{\Sigma\rho^2}$$

et deux formules analogues pour y_0 et z_0 en permutant;

et $$x'_0 = \frac{2[\lambda r - l\rho + m\nu - n\mu]}{\Sigma r^2} = -x_0 \frac{\Sigma\rho^2}{\Sigma r^2}$$

et deux expressions analogues pour y'_0 et z'_0.

Or on vérifie aussitôt que l'on a

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = \frac{4\Sigma r^2}{\Sigma\rho^2} = \frac{16}{x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2}.$$

3) Enfin, l'axe de la symétrie et de la translation amenant S sur S' est justement la droite joignant les origines des trièdres.

Si l'on calcule en effet cet axe conformément aux formules de l'introduction, en effectuant successivement les déplacements

$$(-\rho, \lambda, \mu, \nu, \ -r, l, m, n) \text{ qui ramène S sur } S_0$$

puis $(+r, l, m, n, +\rho, \lambda, \mu, \nu)$ qui ramène S_0 sur S' on trouve pour les coordonnées du déplacement résultant.

$$\rho_1 = 0, \quad \lambda_1 = \frac{x_0}{2}\sqrt{\frac{\Sigma\rho^2}{\Sigma r^2}}, \quad \mu_1 = \frac{y_0}{2}\sqrt{\frac{\Sigma\rho^2}{\Sigma r^2}}, \quad \nu_1 = \frac{z_0}{2}\sqrt{\frac{\Sigma\rho^2}{\Sigma r^2}},$$
$$r_1, \qquad l_1 = 0, \qquad m_1 = 0, \qquad n_1 = 0.$$

ce qui représente une symétrie et translation le long de l'axe joignant l'origine au point x_0.

§ 3. — M_2 isotropes.

59. Notion. — Nous avons appelé M_2 isotropes, les M_2 dans lesquels les coefficients de la première forme complexe ont leur rapport réel, ce qui, en explicitant les parties complexes, s'écrit simplement

$$\frac{E}{D} = \frac{F}{D'} = \frac{G}{D''}.$$

On peut les considérer comme une généralisation des M_2 de Ribaucour.

Tous les M_1 élémentaires, contenus dans le M_2, ont à chaque instant même paramètre, (ce paramètre pouvant varier avec la position). On a un M_2 de Ribaucour si ce paramètre est identiquement nul.

On ne peut pas déterminer ces M_2 par la méthode générale, puisqu'ils dépendent de deux conditions :

Mais nous allons rechercher une classe plus générale de M_2, qui contient les M_2 isotropes comme cas particulier. Ce sont les M_2 définis par la condition

$$H^2 - 4K = 0.$$

D'après l'interprétation géométrique des invariants que nous avons donnée dans la première partie, on voit que ce sont les M_2 dans lesquels à chaque instant le cylindroïde formé par les axes instantanés des vissages élémentaires se réduit à un plan.

Nous avons montré même que les seuls M_2 *réels* de cette catégorie sont les M_2 isotropes.

60. — Détermination. — On les détermine aisément par la méthode générale en exprimant H et K avec les coordonnées réduites ($ST\alpha$).

On a une équation algébrique du second degré pour déterminer α et on prend arbitrairement S et T.

Le cas d'exception peut-il se présenter?

Le coefficient de α^2 dans $H^2 - 4K$ est

$$h^2 - 4(k-1) = 0 = \left[\frac{2FB - GA - EC}{\Delta^2}\right]^2 - 4\frac{AC - B^2}{\Delta^2}$$

ce qui s'écrit en simplifiant

$$\frac{1}{\Delta^4}[(AG - EC)^2 + 4(AF - BE)(CF - BG)]$$

ou encore

$$\frac{1}{E^2\Delta^4}\left[[E(AG - EC) + 2F(BE - AF]^2 + 4\Delta^2(BE - AF)^2\right]$$

ce qui ne peut être nul pour un M_2 *réel* que si l'on a

$$\frac{A}{E} = \frac{B}{F} = \frac{G}{C} = c^{te} \text{ en vertu des relations de Codazzi.}$$

On vérifie alors que le coefficient de α s'annule aussi.

Nous avons étudié ces M_2 dans la seconde partie sous le nom de M_2 sphériques. Nous avons vu qu'un changement de variables permet alors de supposer ρ constant.

Nous traiterons à part ce cas des M_2 sphériques isotropes qui échappent à la méthode générale.

Revenant au cas des M_2 généraux, on peut songer à une autre méthode pour déterminer les M_2 isotropes.

Soit donné un M_2 à point fixe $(\rho\lambda\mu\nu)$ d'élément linéaire

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

On peut prendre pour M_1 coordonnés les M_1 isotropes (qui correspondent en théorie des surfaces aux lignes de longueur nulle).

Le ds^2 devient $ds^2 = 2F\,du\,dv$ pour sa partie réelle.

Les symboles de Christoffel se simplifient alors et deviennent

$$\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{F}\frac{\partial F}{du}, \qquad \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix} = 0,$$

$$\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix} = 0, \quad \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial v}.$$

Les valeurs de $D D' D''$ sont données par

$$\begin{aligned} -\ D &= A\alpha + \frac{\partial S}{\partial u} - \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial u} S, \\ -\ 2D' &= 2B\alpha + \frac{\partial S}{\partial v} + \frac{\partial T}{\partial u}, \\ -\ D'' &= C\alpha + \frac{\partial T}{\partial v} - \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial v} T. \end{aligned}$$

Pour que le M_2 soit isotrope, il faut et suffit que l'on ait

$$D = 0 \quad \text{et} \quad D'' = 0$$

et cela fait deux équations aux inconnues α, S, T.

On intègre en posant

$$\alpha = -F\theta \qquad \text{où } \theta \text{ est arbitraire.}$$

Les équations deviennent

$$\frac{\partial\left(\dfrac{S}{F}\right)}{\partial u} = A\theta, \qquad \frac{\partial\left(\dfrac{T}{F}\right)}{\partial v} = C\theta$$

et donnent S et T avec deux quadratures.

On peut même en éviter une en prenant S arbitraire au lieu de θ.

Alors la première égalité donne θ, et une seule quadrature donnera T.

On a bien ainsi tous les M_2 isotropes, mais le calcul fait avec les coordonnées symétriques ne permet pas de distinguer les M_2 *réels* et les M_2 imaginaires.

61. — Exemples. — Nous avons donné dans le premier chapitre un moyen de construire des M_2 isotropes. On prend une congruence et un solide fixe. En faisant subir à ce solide une symétrie et une translation quelconque autour des axes de cette congruence, on obtient un M_2 isotrope.

On peut généraliser ce résultat, et l'étendre à tous les M_2 obtenus par translation (variable) et rotation constante, ce qui résoudra le cas d'exception signalé plus haut des M_2 sphériques qui en sont un cas particulier.

Soit une congruence ayant pour formes

$$\overline{E}du^2 + 2\overline{F}du\,dv + \overline{G}dv^2 \quad \text{et} \quad \overline{D}du^2 + 2\overline{D'}du\,dv + \overline{D''}dv^2.$$

Si l'on fait subir à un solide fixe la rotation constante θ et la translation quelconque T, on obtient un M_2 qui a pour formes

$$E du^2 + 2F du\,dv + G dv^2 \quad \text{et} \quad D du^2 + 2D' du\,dv + D'' dv^2$$

avec

$$E = \overline{E}\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$D = \overline{D}\sin^2\frac{\theta}{2} + \frac{T}{2}\sin\theta.\overline{E}$$

et des expressions analogues pour F, G, D', D''

d'après les formules données au N° 55.

Pour que ce M_2 soit isotrope, on doit avoir

$$\frac{D}{E} = \frac{D'}{F} = \frac{D''}{G}$$

ou

$$\frac{\overline{D}}{\overline{E}} + T\,\text{cotg}\,\frac{\theta}{2} = \frac{\overline{D'}}{\overline{F}} + T\,\text{cotg}\,\frac{\theta}{2} = \frac{\overline{D''}}{\overline{G}} + T\,\text{cotg}\,\frac{\theta}{2}$$

ou

$$\frac{\overline{D}}{\overline{E}} = \frac{\overline{D'}}{\overline{F}} = \frac{\overline{D''}}{\overline{G}}.$$

Donc, il faut et suffit que la congruence soit elle-même isotrope.

Nous avons aussi remarqué que d'un M_2 isotrope connu, on déduit une infinité d'autres en le composant avec un M_2 de Ribaucour ayant les mêmes rotations.

On peut combiner ceci avec une homothétie.

Si $(\rho\lambda\mu\nu\; rlmn)$ représente un M_2 isotrope : $(\rho\lambda\mu\nu\; ar, al, am, an)$ où a est une constante quelconque, en sera un autre. Cette transformation revient à une homothétie. Et par suite

si $(\rho\lambda\mu\nu\; rlmn)$, $(\rho\lambda\mu\nu\; r'l'm'n')$ sont deux M_2 isotropes avec les mêmes rotations, on aura un faisceau de M_2 isotropes

$$(\rho\lambda\mu\nu, \quad ar + br', \quad al + bl', \quad am + bm', \quad an + bn')$$

où a et b sont deux constantes quelconques.

§ 4. — Quelques autres M_2 spéciaux.

62. — Relation entre les congruences correspondant à un M_2 à rotation constante. — Le dernier exemple donné pour les M_2 isotropes suggère une généralisation.

A un M_2 donné correspondent, — nous l'avons fait remarquer, — bien des congruences cotées selon le choix que l'on fait du solide origine, et nous avons dit combien il semblait difficile de préciser le rapport entre ces congruences.

Un cas particulier assez facile cependant, est celui où pour chaque droite de la congruence, la rotation θ est fixe (T continuant de rester variable).

En nous servant des formules ci-dessus, nous trouvons pour les invariants du M_2

$$H = \frac{2\,FD' - ED'' - GD}{EG - F^2} = \frac{2\,\overline{F}\,\overline{D'} - \overline{E}\,\overline{D''} - \overline{G}\,\overline{D}}{\overline{E}\overline{G} - \overline{F}^2} - 2\,T\,\mathrm{cotg}\,\frac{\theta}{2}$$

ou

$$H = \overline{H} - 2\,J$$

et de même

$$K = \overline{K} + J^2 - J\,\overline{H}$$

en appelant $\overline{H}$ et $\overline{K}$ les invariants de la congruence et en posant $J = T\,\mathrm{cotg}\,\dfrac{\theta}{2}$.

On tire de là

$$H^2 - 4K = \overline{H}^2 - 4\,\overline{K}.$$

C'est-à-dire que toutes les congruences qui correspondent par rotation constante à un M_2 donné, ont même hauteur du cylindroïde (c'est-à-dire même distance entre les points limites) : à savoir, la hauteur du cylindroïde dans le M_2.

Le cas des M_2 isotropes que nous avons exposé au N° 61 est un cas particulier de ce résultat, le cas où cette hauteur est nulle.

On peut tirer de là quelques constructions de M_2 spéciaux.

a) Soit donnée une congruence quelconque d'invariants

$$\overline{H} \quad \text{et} \quad \overline{K}.$$

On en tire par rotation constante et translation quelconque un M_2 ayant les invariants H et K donnés ci-dessus.

On pourra prendre θ arbitrairement (constant) et on saura alors déterminer J pour donner à H ou à K une valeur arbitraire.

C'est le calcul que nous avons fait pour trouver des M_2 paraboliques. L'équation

$$K = 0 = J^2 - \overline{H}J + \overline{K}$$

donne deux valeurs de J, c'est-à-dire de T, quel que soit θ donné d'avance.

On trouverait semblablement des M_2 normaux

$$H = 0 \quad \text{donne} \quad J = \frac{\overline{H}}{2}.$$

On pourrait obtenir par ce procédé des M_2 pseudo-sphériques. Ici, il y a deux conditions à satisfaire : H et K doivent être constants.

Il faudra prendre une congruence dans laquelle la distance des points limites soit constante (par exemple, une congruence pseudo-sphérique de Bianchi). Le choix de J permettra de donner à H ou à K une valeur constante arbitrairement choisie. L'autre en résultera, constante aussi.

Enfin, si dans un M_2 la courbure est constante, on peut lui faire correspondre une congruence cotée avec $\theta = c^{te}$. On pourra alors, en changeant T, c'est-à-dire J, augmenter d'une quantité quelconque (la même pour tous à un instant donné) le paramètre des vissages élémentaires.

On peut remarquer que si l'on prend pour θ diverses valeurs, J ne variant pas, on obtient des M_2 homographiques entre eux, et possédant les mêmes spécialités.

63. — M_2 et congruences de normales. — Un solide étant soumis à un M_2, une droite fixe de ce solide décrit une congruence quelconque; et il n'y a pas, en général, dans un M_2, de droite décrivant une congruence de normales.

Il est facile de trouver la condition pour qu'il y en ait.

Soient A, B, C les coordonnées pluckériennes complexes d'une droite fixe du solide. Nous avons calculé (n° 29) l'élément linéaire complexe de la congruence qu'elle décrit

$$ds^2 = (A^2 + B^2 + C^2)(P^2 + Q^2 + R^2) - (AP + BQ + CR)^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2.$$

Son discriminant est rationnel. On trouve

$$\delta = \sqrt{eg - f^2} = A(q_1 r_2 - q_2 r_1) + B(r_1 p_2 - p_1 r_2) + C(p_1 q_2 - p_2 q_1).$$

On aura le premier invariant h de cette congruence en calculant la partie complexe $\delta . h$ de ce discriminant (cf. N° 20).

La condition pour que (A, B, C) décrive une congruence normale est donc que δ soit réel. On la simplifie en introduisant les cosinus $\alpha\beta\gamma$ de l'axe J.

$$\alpha = \frac{q_1 r_2 - q_2 r_1}{4\Delta}.$$

Il vient

$$4\Delta(A\alpha + B\beta + C\gamma) \text{ réel}$$

ou, si nous explicitons, en représentant par $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\ldots$ la partie complexe de $ABC\ldots$

$$\Delta H(A\alpha + B\beta + C\gamma) + \Delta(\bar{A}\alpha + \bar{B}\beta + \bar{C}\gamma + A\bar{\alpha} + B\bar{\beta} + C\bar{\gamma}) = 0$$

$$\text{ou} \quad \Sigma(\bar{A} + HA)\alpha + \Sigma A\bar{\alpha} = 0. \qquad (1)$$

Cette condition exprime que la droite J appartient à un complexe de paramètre H et d'axe $(A, \bar{A})$.

Si le M_2 est normal, la condition s'interprète aisément. Supposons plus généralement H constant. Nous aurons les théorèmes :

1) Pour que dans un M_2 à H constant il existe une droite qui décrive une congruence de normales il faut et il suffit que l'axe J fasse constamment partie d'un complexe linéaire de paramètre H. L'axe de ce complexe est la droite cherchée.

Plus particulièrement, si $H = 0$, il faut et il suffit que J rencontre une droite fixe.

2) Si deux droites décrivent une congruence de normales, J décrira l'intersection de deux complexes, c'est-à-dire une congruence linéaire.

En particulier si $H = 0$, les droites seront les deux directrices de cette congruence.

3) Si trois droites décrivent une congruence de normales, J décrira une semiquadrique. On aura trois équations de la forme (1)

$$\Sigma A_i \bar{\alpha} + \Sigma(\bar{A}_i + HA_i)\alpha = 0. \qquad (i = 1, 2, 3)$$

L'infinité de droites

$$A_j = lA_1 + mA_2 + nA_3$$
$$B_j = lB_1 + mB_2 + nB_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

où lmn sont des constantes réelles telles que A_j soit une droite, c'est-à-dire telles que

$$A_j^2 + B_j^2 + C_j^2 = 1$$
$$A_j\overline{A}_j + B_j\overline{B}_j + C_j\overline{C}_j = 0$$

vérifiera aussi l'équation (1); il y aura donc une infinité de droites (formant une semi-quadrique) qui décriront une congruence de normales.

Si le M_2 est normal, ce sera la semi-quadrique complémentaire de celle que décrit J.

Les résultats sont bien plus compliqués si H n'est pas constant. On peut cependant avoir un théorème intéressant lorsque deux droites décrivent une congruence de normales. On a alors deux équations analogues à (1) avec H variable. Eliminant H entre ces deux équations, il reste une équation quadratique en $\alpha\beta\gamma$ $\overline{\alpha}\overline{\beta}\overline{\gamma}$, et donc si deux droites différentes décrivent une congruence de normales dans un M_2 quelconque l'axe J appartient à un complexe quadratique.

On peut définir aussi des M_2 dans lesquels toutes les droites passant par un point fixe décrivent une congruence normale. Il faut et il suffit pour cela que trois droites concourantes formant trièdre décrivent une telle congruence.

Si nous prenons le point fixe pour origine, on trouve que J passe par ce point, que le M_2 est normal, et le M_2 polaire aussi [1].

Réciproquement si dans un M_2 normal, J passe par un point fixe, toute autre droite passant par ce point décrit une congruence de normales.

64. — On peut définir encore des M_2 spéciaux intéressants à un titre ou à un autre.

D'abord l'analogie avec les congruences permet d'attacher au M_2 un certain nombre de surfaces : les lieux dans l'espace fixe (ou mobile) du point central, des points limites; l'enveloppe du plan central, etc...

---

[1] On vérifie sans difficulté que des trois propriétés : *a*) un M_2 est normal, *b*) son M_2 polaire est normal, *c*) la congruence des axes J est normale, deux quelconques entraînent la troisième.

Pour donner un exemple, nous déterminerons tous les M_2 dont le plan central passerait par un point fixe de l'espace mobile et de l'espace fixe : ils sont analogues aux congruences dont l'enveloppée moyenne est un point (congruences d'Appell).

On peut aussi déterminer des M_2 spéciaux en étudiant la congruence des axes $\overrightarrow{J}$, ses surfaces focales, ses surfaces limites, son enveloppée moyenne, etc...

Nous déterminerons tous les M_2 où l'axe $\overrightarrow{J}$ décrirait une gerbe à la fois dans l'espace fixe et dans l'espace mobile : ils correspondent aux congruences de normales de la géométrie elliptique.

65. — **M_2 dont l'enveloppée moyenne est un point.** — Appell a étudié les congruences de normales dont l'enveloppée moyenne est un point. Bianchi a généralisé et appelé congruences d'Appell toutes celles, normales ou non, dont le plan central passe par un point fixe [1].

On peut chercher de même tous les M_2 dont le plan central passerait par un point fixe à la fois dans l'espace mobile et dans l'espace fixe. Les calculs, assez aisés, donnent un résultat très analogue à celui obtenu pour les congruences : il faut et il suffit que la partie complexe du ds^2 soit une dérivée seconde covariante.

Nous prenons les points enveloppés, O et O'. pour origines, dans l'espace fixe et dans l'espace mobile.

La distance de l'origine mobile au plan central est

$$l = \frac{\Sigma p_2 \xi_1 - \Sigma p_1 \xi_2}{8\Delta}$$

et si on l'exprime en fonction des invariants il vient

$$2\Delta l = 2\Delta\alpha + \frac{\partial T}{\partial u} - \frac{\partial S}{\partial v} = 0.$$

On aurait de même pour l'origine fixe

$$2\Delta l' = -2\Delta\alpha + \frac{\partial T}{\partial u} - \frac{\partial S}{\partial v} = 0$$

ce qui donne $\alpha = 0$

(et cette condition, qui pouvait se prévoir géométriquement, exprime simplement que OO' est perpendiculaire à $\overrightarrow{J}$)

puis
$$\frac{\partial S}{\partial v} = \frac{\partial T}{\partial u}.$$

---

[1] Bianchi. *Lezioni di Geometria dif.*, 1 vol., part. II, § 188.

On peut prendre $\mathrm{T} = \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \qquad \mathrm{S} = \frac{\partial \Phi}{\partial u},$

où Φ est une fonction arbitraire de u et de v et la forme

$$-(\mathrm{D}du^2 + 2\mathrm{D}'du\,dv + \mathrm{D}''dv^2)$$

est alors la dérivée seconde covariante de Φ. On voit l'analogie parfaite avec les congruences d'Appell.

On pourrait du reste pousser plus loln encore l'analogie et introduire pour de tels M_2 une transformation analogue à celle d'Antomari pour les congruences(1).

On mène par l'origine fixe une parallèle à $\overrightarrow{\mathrm{J}}$.

On fait tourner l'origine du trièdre mobile de $\frac{\pi}{2}$ autour de cette parallèle, et on construit en ce point un trièdre parallèle au trièdre primitif. On a ainsi un nouvel M_2 qui est normal si le premier était d'Appell.

Notons du reste que cette transformation, applicable à tous les M_2, donne des résultats intéressants principalement lorsque $\alpha = \Sigma \mathrm{R}r$ est nul. Et en particulier, comme une congruence isotrope que conserve la transformation d'Antomari, un M_2 isotrope reste isotrope.

Mais ceci nous entraînerait trop loin.

66. — M_2 où l'axe J décrit une gerbe.

L'axe J décrit, pendant un M_2, une congruence dans l'espace mobile et une dans l'espace fixe. Ces congruences sont liées entre elles par deux relations : leurs représentations sphériques se correspondent avec égalité d'aire complexe. Il peut donc arriver que l'une d'elles se réduise à une gerbe, l'autre restant une congruence (nor male) quelconque.

Nous allons déterminer les M_2 où ces deux congruences se réduiraient à des gerbes, c'est-à-dire où l'axe J passerait par un point fixe et dans l'espace mobile, et dans l'espace fixe.

En prenant ces points fixes pour origines O et O' des trièdres fixes et mobiles il faut alors exprimer

a) que la droite OO' a la direction de l'axe J;

b) puis que O est sur cet axe.

---

(1) Voir la thèse d'ANTOMARI. Ces résultats ont été retrouvés de façon indépendante par M. Turrière : Congruences dont la surface centrale est un point. *Nouvelles Annales*, 1911, et par Forster (*Annals of Math.*, décembre 1923).

La rotation générale $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{\Omega}_1 du + \overrightarrow{\Omega}_2 dv$ étant perpendiculaire à J, la première condition s'écrit simplement :

$$\overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{OO'} = 0$$

ou

$$S = T = 0.$$

Les quantités r, l, m, n, sont alors données par les relations

$$r = \alpha R,$$
$$l = \alpha L,$$
$$m = \alpha M,$$
$$n = \alpha N.$$

Pour exprimer à présent que J passe par O, il suffit d'écrire que ses cosinus directeurs (n° 34) sont réels, et en appelant $(R' L' M' N')$ les parties complexes de $(RLMN)$ il vient

$$\rho L' - R'\lambda + \nu M' - \mu N' = 0,$$
$$\rho M' - R'\mu + \lambda N' - \nu L' = 0,$$
$$\rho N' - R'\nu + \mu L' - \lambda M' = 0.$$

Ces équations homogènes, aux inconnues $(R' L' M' N')$ donnent immédiatement

$$R' = t\rho, \qquad L' = t\lambda, \qquad M' = t\mu, \qquad N' = t\nu.$$

La relation $\Sigma R r + \Sigma R'\rho = 0$ (qui est la partie complexe de $\Sigma R\rho = 0$), donne alors $t = -\alpha$.

Il reste à vérifier les relations

$$\Sigma R \frac{\partial \rho}{\partial u} = 0.$$

$$\Sigma R \frac{\partial \rho}{\partial v} = 0.$$

Explicitant les parties complexes, il vient

$$\alpha = c^{te}.$$

Cette condition est aussi suffisante.

D'où le résultat : Étant donné un M_2 quelconque à point fixe $(\rho\lambda\mu\nu)$, soit $RLMN$ le M_2 polaire, on aura un M_2 de l'espèce indiquée en prenant pour coordonnées $(\rho\lambda\mu\nu \quad r = aR \quad l = aL \quad m = aM \quad n = aN)$ où a est une constante quelconque.

Le M_2 polaire sera $(RLMN \quad R' = -a\rho \quad L' = -a\lambda \quad M' = -a\mu \quad N' = -a\nu)$. On peut remarquer que a donne la distance des origines OO'. — L'origine mobile O' décrit donc une sphère de centre O. Si on prend pour a diverses valeurs, les M_2 obtenus sont homothétiques entre eux. Nous prendrons pour simplifier $a = 1$.

On calcule sans difficulté les formes fondamentales, et on vérifie qu'il y a des M_1 de courbure.

Dans l'espace elliptique, si on interprète $\rho\lambda\mu\nu$ comme les coordonnées d'une direction, et $rlmn$ comme les coordonnées du plan perpendiculaire, on définit une droite. (On peut faire ainsi parce que $r^2 + l^2 + m^2 + n^2 = 1$.)

Les coordonnées pluckeriennes de cette droite sont

$$p_{12} = \begin{vmatrix} \rho & \lambda \\ r & l \end{vmatrix} \qquad p_{34} = \begin{vmatrix} \mu & \nu \\ m & n \end{vmatrix}$$

et quatre coordonnées analogues en permutant $\lambda\mu\nu$, lmn.

Les paramètres de glissement(¹) de cette droite sont $p_{12} + p_{34}$ et les deux coordonnées analogues; $p_{12} - p_{34}$ et les deux coordonnées analogues aussi.

Ce sont les coordonnées des origines mobile dans le trièdre fixe, ou fixe dans le trièdre mobile.

Si la position décrit un M_2 de l'espèce étudiée ici, la droite décrira dans l'espace elliptique une congruence normale(²), et on pourra représenter un M_2 par l'une des surfaces trajectoires de cette congruence.

Cette surface aura pour formes fondamentales la partie réelle et la partie complexe de la première forme du M_2.

Les lignes de courbure correspondront aux M_1 de courbure dont nous avons vérifié l'existence.

A une surface minima $(h = 0)$ correspondra un M_2 normal $(H = 0)$, dans lequel toute droite du solide mobile passant par l'origine décrit une congruence normale (cf. n° 63).

Il est facile de donner un exemple particulier de ce mouvement :

Prenons

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos u \qquad \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin u \qquad \mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos v \qquad \nu = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin v$$

ce qui, dans l'espace elliptique, représente une surface réglée de Clifford rapportée à ses lignes de courbure.

(¹) FUBINI, *Atti della Scuola normale di Pisa*, 1900.
(²) ID. et FIBBI, *Atti della Scuola normale di Pisa*, 1895.

On trouve :

$$r = R = -\rho \qquad l = L = -\lambda \qquad m = M = \mu \qquad n = N = \nu .$$

La deuxième forme est purement réelle et le M_2 a des asymptotiques.

On vérifie aussi que le M_2 est décomposable, et d'une infinité de façons (à la vérité peu distinctes... comme un cylindre est d'une infinité de façons une surface de translation); il suffit de faire le changement de variables :

$$u = \alpha + f(\beta) \qquad v = \alpha + \varphi(\beta) .$$

Ce M_2 est facile à définir géométriquement. C'est le mouvement d'un solide dont un point décrit un cercle, tandis qu'une droite passant par ce point reste constamment tangente à ce cercle.

Il est alors bien connu que toutes les droites passant par le point décrivent des congruences normales.

ERRATA

Page 218, ligne 5 en partant de la fin, *lire* : $\operatorname{tg}\theta = \frac{M}{L} = \frac{b}{a}\frac{Y'}{X}$

— 218, ligne 3 — — *lire* : $\theta + \varepsilon z$ (*et non* $+ \varepsilon r$.

— 267, ligne 5 — — *lire* : ce qui arrive, entr'autres cas, si le M_2 est un M_2 sphérique, ou s'il a des asymptotiques, ou s'il a des M_1 de courbure.