

BERTRAND GAMBIER

**Congruences de cercles ; points focaux**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3<sup>e</sup> série*, tome 25 (1933), p. 69-114

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1933\\_3\\_25\\_\\_69\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1933_3_25__69_0)

© Université Paul Sabatier, 1933, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# CONGRUENCES DE CERCLES; POINTS FOCaux

Par M. BERTRAND GAMBIER.

---

## 1. — INTRODUCTION.

Dans les premières pages du tome II de la *Théorie des Surfaces*, Darboux donne quelques indications rapides sur le problème général de la distribution des points focaux dans une congruence de courbes algébriques. Je me propose de faire ici l'étude complète pour une congruence de cercles, en me bornant au cas de cercles réels (accidentellement imaginaires, mais représentés par deux équations à coefficients réels). Chaque cercle de la congruence porte *six points focaux, dont deux sont les points à l'infini du cercle*. En général ces deux points focaux à l'infini sont simples : il peut arriver que l'un des points focaux à distance finie aille rejoindre l'un des points à l'infini (auquel cas, un autre point focal, imaginaire conjugué du précédent, va aussi à l'infini) et il ne reste plus que deux points focaux à distance finie ; la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que la congruence des axes des cercles soit isotrope ; on peut même obtenir certaines congruences de cercles où chaque point focal à l'infini est triple, de sorte qu'il ne reste plus de foyer à distance finie ; M. Vincensini, après échange de vues entre nous, s'est chargé du cas où il ne reste à distance finie que deux (ou zéro) foyers ; c'est l'objet du Mémoire qu'il fait imprimer dans ces *Annales* à la suite de celui-ci. Je me borne donc ici au cas où la congruence des axes des cercles est non isotrope et où, par suite, il y a effectivement quatre foyers à distance finie. La question à résoudre est de savoir si les points focaux sont chacun d'ordre un ou supérieur à un, la somme des ordres étant égale à quatre ; chaque point focal, simple ou non, résulte de l'intersection du cercle qui lui a donné naissance avec un cercle infiniment voisin convenablement choisi : il s'agit de savoir si ces deux cercles se coupent en un point unique, ou en deux points (qui sont alors tous deux foyers), points qui peuvent d'ailleurs être distincts ou non. Il faut bien se garder de croire que si un foyer est double, à titre de foyer, il est double dans l'intersection du cercle, qui lui donne naissance, et du cercle infiniment voisin correspondant : traçons, sur une surface

S arbitraire,  $\infty^1$  courbes  $\gamma$ ; en un point M d'une courbe  $\gamma$  coupons S par un plan contenant la tangente en M à  $\gamma$ , mais *distinct du plan osculateur* et traçons le cercle C osculateur à la section : sur chaque cercle C le point M est double comme foyer, mais simple comme point commun à C et au cercle relatif au point infiniment voisin M' de M sur  $\gamma$ ; *si le plan choisi est osculateur* à  $\gamma$ , cette fois M est double comme point commun aux deux cercles. On a des résultats analogues pour les foyers triples ou quadruples. D'autre part nous verrons qu'un foyer  $f$  du cercle général C d'une congruence quelconque détermine un cercle  $C_1$  infiniment voisin de C et un seul coupant C en  $f$ . Les divers cas à étudier sont donc représentés dans le tableau schématique

1°)	$f_1 f_2 f_3 f_4$ $C_1 C_2 C_3 C_4$	$\underbrace{f_1 f_2 f_3 f_4}$ $C_1 C_3 C_4$	$\underbrace{f_1 f_2} \quad \underbrace{f_3 f_4}$ $C_1 C_3$	
2°)	$f_1 f_1 f_2 f_3$ $C_1 C_1 C_2 C_3$	$\underbrace{f_1 f_1} \quad f_2 f_3$ $C_1 C_2 C_3$	$\underbrace{f_1 f_2} \quad f_3 f_3$ $C_1 C_3$	$f_1 \quad \underbrace{f_1 f_2} \quad f_3$ $C_1 C_1 C_3$
3°)	$f_1 f_1 f_2 f_2$ $C_1 C_1 C_2 C_2$	$\underbrace{f_1 f_2} \quad \underbrace{f_1 f_2}$ $C_1 C_1$	$\underbrace{f_1 f_1} \quad f_2 f_2$ $C_1 C_2 C_2$	$\underbrace{f_1 f_1} \quad \underbrace{f_2 f_2}$ $C_1 C_2$
4°)	$f_1 f_1 f_1 f_2$ $C_1 C_1 C_1 C_2$	$\underbrace{f_1 f_1} \quad f_1 f_2$ $C_1 C_1 C_2$	$f_1 f_1 \quad \underbrace{f_1 f_2}$ $C_1 C_1 C_1$	
5°)	$f_1 f_1 f_1 f_1$ $C_1 C_1 C_1 C_1$	$\underbrace{f_1 f_1} \quad \underbrace{f_1 f_1}$ $C_1 C_1$		

Pour le cas n° 2, il a deux foyers simples, un foyer double : la première des cinq hypothèses signifie que le foyer double  $f_1$  donne lieu au cercle infiniment voisin  $C_1$  qui ne recoupe C qu'en l'unique point  $f_1$ , tandis que pour la seconde hypothèse  $C_1$  est tangent à C en  $f_1$  (c'est ce qui a été expliqué à l'instant par voie géométrique intuitive); même explication pour les différents autres schémas.

Grâce à une aide précieuse que MM. Drach et Finikoff m'ont apportée, j'ai pu exposer complètement la recherche des congruences de cercles osculateurs aux lignes de courbure (d'un système) de deux surfaces différentes ou, ce qui revient au même, la recherche des congruences rectilignes telles que les courbes de contact sur les deux nappes focales soient géodésiques (paragraphe 12 de ce Mémoire). J'en exprime ma reconnaissance à MM. Drach et Finikoff.

2. — Rappel de résultats classiques.

Il n'est peut être pas inutile de rappeler quelques résultats classiques : considérons une famille  $\infty^4$  de cercles définis par les deux équations

$$(1) \quad \begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 - \rho^2 = 0, \\ u(x - x_1) + v(y - y_1) + w(z - z_1) - \mu = 0, \end{cases}$$

où  $x_1, y_1, z_1, \rho, u, v, w, \mu$  sont huit fonctions d'un paramètre  $t$ . On peut déplacer le centre  $x_1, y_1, z_1$  de la sphère  $\Sigma$  sur l'axe du cercle  $C$ , en changeant convenablement  $\rho$  et  $\mu$ . Pour que le cercle  $C$  rencontre le cercle infiniment voisin, les équations (1) doivent être compatibles avec les deux suivantes :

$$(2) \quad \begin{cases} (x - x_1)dx_1 + (y - y_1)dy_1 + (z - z_1)dz_1 + \rho d\rho = 0, \\ (x - x_1)du + (y - y_1)dv + (z - z_1)dw - udx_1 - vdy_1 - wdz_1 - d\mu = 0. \end{cases}$$

Or les trois dernières équations de ce système correspondent chacune à un plan : si donc ces trois plans n'ont qu'un point commun les deux cercles n'ont qu'un point commun possible ; si les trois plans ont une droite commune, il y a deux points communs possibles ; dans ce dernier cas, on a

$$(3) \quad \begin{vmatrix} u & v & w \\ du & dv & dw \\ dx_1 & dy_1 & dz_1 \end{vmatrix} = 0$$

et l'axe du cercle engendre une développable : la condition est nécessaire, mais non suffisante : si elle est remplie, il y a deux ou zéro point commun aux deux cercles (mais jamais un seul). En tous cas si l'axe engendre une développable, nous pouvons mettre le point  $(x_1, y_1, z_1)$  centre de la sphère, au point où l'axe touche l'arête de rebroussement ; on peut écrire

$$(4) \quad u = \frac{dx_1}{dt}, \quad v = \frac{dy_1}{dt}, \quad w = \frac{dz_1}{dt}$$

et alors, la condition nécessaire et suffisante pour obtenir deux points est  $\mu = -\rho \frac{d\rho}{dt}$ , de sorte que le cercle est représenté par deux équations

$$(5) \quad \Sigma = 0, \quad \frac{\partial \Sigma}{\partial t} = 0.$$

*Le cercle engendre une surface enveloppe de sphères; il touche l'arête de rebroussement de cette surface enveloppe aux deux points définis par les trois équations*

$$(6) \quad \Sigma = 0, \quad \frac{\partial \Sigma}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial t^2} = 0$$

*et ces deux points se confondent en un seul si le cercle est le cercle osculateur d'une courbe gauche  $\Gamma$ .*

D'autre part pour les congruences très spéciales de courbes représentées par des équations

$$(7) \quad F(x, y, z, u, v) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial u}(x, y, z, u, v) = 0,$$

les points focaux s'obtiennent en adjoignant à ces deux équations les deux suivantes :

$$(8) \quad \frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial v} dv = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} du + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} dv = 0.$$

La première équation (8) se réduit, en vertu de (7), à  $\frac{\partial F}{\partial v} dv = 0$ ; le facteur  $dv = 0$  donne le système

$$(9) \quad F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = 0, \quad dv = 0.$$

de points où la courbe  $F(x, y, z, u, v_0) = 0$ ,  $\frac{\partial F}{\partial u}(x, y, z, u, v_0) = 0$  touche l'arête de rebroussement  $\Gamma_0$  de la surface enveloppe de la surface mobile  $F(x, y, z, u, v_0) = 0$ ; le lieu de  $\Gamma_0$  quand  $v_0$  varie est la surface focale relative à cette première série de foyers : la courbe  $(u, v_0)$  de la congruence admet donc une série de foyers tous situés sur la courbe infiniment voisine  $(u + du, v_0)$ . Le second facteur  $\frac{\partial F}{\partial v} = 0$  donne le système

$$(10) \quad F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial v} = 0, \quad du : dv = - \left( \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} : \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \right)$$

qui donne les points où la surface mobile à deux paramètres  $F = 0$  touche son enveloppe; il n'y a aucune raison pour que la valeur du quotient  $du : dv$  relative à chaque foyer de cette série soit la même que pour un autre foyer : donc, en général, il y aura autant de courbes infiniment voisines distinctes que de foyers distincts.

Pour la congruence de cercles  $\Sigma = 0$ ,  $\Pi = 0$ , où  $\Sigma$  et  $\Pi$  sont une sphère et un plan nous pouvons supposer que les cercles ne sont pas tous de rayon nul, sinon nous aurions en réalité à étudier deux congruences rectilignes de rayons isotropes; chaque point focal donne lieu à un cercle infiniment voisin unique bien déterminé, car le rapport  $du : dv$  est donné par les deux équations

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial u} du + \frac{\partial \Sigma}{\partial v} dv = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial u} du + \frac{\partial \Pi}{\partial v} dv = 0,$$

compatibles par suite du choix du foyer; les quatre dérivées partielles

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial u}, \quad \frac{\partial \Sigma}{\partial v}, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial u}, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial v}$$

ne sont pas nulles ensemble, sinon le foyer se trouverait à la fois sur l'enveloppe de  $\Sigma$  et sur celle de  $\Pi$ ; le plan  $\Pi$  serait toujours tangent à  $\Sigma$  et le cercle aurait son rayon nul, ce que nous écartons.

Enfin nous nous rappellerons que l'ordre d'un foyer (nombre de foyers venus se confondre en un seul) est égal à l'ordre de contact de la courbe variable avec la surface focale (avec règle un peu plus compliquée si la surface est dégénérée en courbe).

### 3. — Étude du cas où les quatre foyers sont distincts.

Le cas

$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$
$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$

est le cas normal, obtenu sans précaution; il n'a donc rien de particulièrement intéressant.

Étudions donc le cas

$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$
⏟		$C_3$	$C_4$
$C_1$			

Quand le cercle initial  $C$  est suivi par  $C_1$ , lequel est suivi par le cercle infiniment voisin correspondant et ainsi de suite, l'axe du cercle  $C$  engendre une développable; nous pouvons supposer que  $v = \text{constante}$  donne ces développables d'axes ou ces familles de cercles consécutifs bi-sécants et les équations du cercle  $C$  sont

$$(1) \quad \Sigma(x, y, z, u, v) = 0, \quad \frac{\partial \Sigma}{\partial u}(x, y, z, u, v) = 0$$

où

$$\Sigma \equiv (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 - \rho_1^2;$$

$x_1, y_1, z_1, \rho_1$  sont quatre fonctions arbitraires de  $u$  et  $v$ ; nous avons expliqué que  $f_1$  et  $f_2$  donnent

$$(2) \quad \Sigma = \frac{\partial \Sigma}{\partial u} = \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial u^2} = 0, \quad dv = 0$$

tandis que  $f_3, f_4$  correspondent au système

$$(3) \quad \Sigma = \frac{\partial \Sigma}{\partial u} = \frac{\partial \Sigma}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial u^2} du + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial u \partial v} dv = 0.$$

Les valeurs de  $du : dv$  relatives à  $f_3$  ou  $f_4$  sont en général distinctes et le seul cas qui nous reste à étudier est :

$$\boxed{\begin{array}{cc} \underbrace{f_1 \quad f_2} & \underbrace{f_3 \quad f_4} \\ C_1 & C_3 \end{array}}$$

et ce cas est obtenu précisément en s'arrangeant pour que ces deux valeurs de  $du : dv$  deviennent égales : on peut supposer que la seconde variable  $u$  est celle qui reste constante quand on suit la série des cercles consécutifs relatifs à ces nouveaux foyers, de sorte que les points focaux  $f_3, f_4$  correspondent au système

$$(4) \quad \Sigma = \frac{\partial \Sigma}{\partial u} = \frac{\partial \Sigma}{\partial v} = \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial u \partial v} = 0, \quad du = 0.$$

Mais alors si l'on pose

$$2\sigma_1 = \rho_1^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2$$

les trois dernières équations (4) doivent représenter trois plans ayant une droite

commune : on voit aussitôt que  $x_1, y_1, z_1$  et  $\sigma_1$  doivent être solutions d'une même équation de Laplace

$$(5) \quad \mathcal{E}(\theta) \equiv \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} - A \frac{\partial \theta}{\partial u} - B \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0$$

et l'on a ainsi retrouvé les résultats que Darboux a exposés au tome II de la *Théorie des Surfaces* (p. 314-345 et, en particulier, p. 323). Pour trouver les coordonnées de  $f_2$  ou  $f_1$ , on peut<sup>(1)</sup> poser

$$(6) \quad x - x_1 = l \frac{\partial x_1}{\partial u} + m \frac{\partial x_1}{\partial v} + n \xi, \quad y - y_1 = \dots \quad z - z_1 = \dots$$

où  $\xi, \eta, \zeta$  sont les mineurs de la matrice

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial y_1}{\partial u} & \frac{\partial z_1}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial y_1}{\partial v} & \frac{\partial z_1}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

En substituant dans les équations  $\Sigma = 0, \frac{\partial \Sigma}{\partial u} = 0, \frac{\partial \Sigma}{\partial v} = 0$  on a aisément, en appelant  $E = S\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2, F = S \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial v}$  et  $G = S\left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)^2$ , les équations

$$(7) \quad \begin{cases} l^2 E + m^2 G + 2lm F + n^2 (EG - F^2) = \rho_1^2, \\ l E + m F + \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial u} = 0, \\ l F + m G + \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial v} = 0. \end{cases}$$

Les deux dernières fournissent  $l, m$ ; on a la combinaison évidente

$$(8) \quad n^2 (EG - F^2) - l \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial u} - m \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial v} = \rho_1^2$$

qui fournit  $n^2$

$$(9) \quad n^2 = \frac{\rho_1^2 [1 - \Delta(\rho_1)]}{EG - F^2}$$

<sup>(1)</sup> Ce calcul est valable même pour le cas précédent.



où  $\Delta$  est le paramètre différentiel bien connu

$$\Delta(\theta) = \frac{E\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v} + G\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2}{EG - F^2}.$$

Avec la notation  $\mathcal{E}(\theta)$  employée plus haut on trouve aisément le résultat utile pour la suite

$$o = \mathcal{E}(\sigma_1) \equiv \rho_1 \mathcal{E}(\rho_1) + \frac{\partial\rho_1}{\partial u} \frac{\partial\rho_1}{\partial v} - F.$$

#### 4. — Étude des transformations de Laplace relatives au cas

$$\boxed{\begin{array}{cc} f_1 & f_2 \\ \hline C_1 & C_2 \end{array} \quad \begin{array}{cc} f_3 & f_4 \\ \hline C_3 & C_4 \end{array}}$$

Nous venons d'étudier ce cas en rompant la symétrie qui existe entre les variables  $u, v$ ; le cercle variable a été défini par les équations

$$(1) \quad \Sigma_1 = o, \quad \frac{\partial\Sigma_1}{\partial u} = o.$$

$(x_1, y_1, z_1)$  est l'un des points focaux de l'axe du cercle, correspondant aux développables  $v = \text{const}$  de la congruence des axes; l'équation de Laplace obtenue,  $E(\theta) = o$ , montre que la seconde famille de développables correspond à  $u$  constant;  $x_2, y_2, z_2$  désignant les coordonnées du second point focal de l'axe, le même cercle aurait pu être obtenu par les équations

$$(2) \quad \Sigma_2 = o, \quad \frac{\partial\Sigma_2}{\partial v} = o$$

de façon à rétablir la symétrie en  $u$  et  $v$ ; on a posé

$$2\sigma_1 = \rho_1^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2, \quad 2\sigma_2 = \rho_2^2 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2$$

et l'on constate sans peine que la transformation de Laplace appliquée à l'équation

$E(\theta) = 0$  remplace les solutions  $x_1, y_1, z_1, \sigma_1$  par  $x_2, y_2, z_2, \sigma_2$  (\*). Faisons une figure représentant le cercle C, son axe tangent en  $m_1(x_1, y_1, z_1)$  à l'arête de rebroussement ( $v_0$ ), en  $m_2(x_2, y_2, z_2)$  à l'arête de rebroussement ( $u_0$ ) et les points focaux  $M_1, M'_1, \mu_1, \mu'_1$  (en changeant légèrement les notations, pour mieux suivre le raisonnement) (fig. 1). Les points  $M_1, M'_1$ , correspondent aux équations

$$(M_1, M'_1) \left\{ \begin{array}{l} \Sigma_1 = \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial u^2} = 0, \\ dv = 0, \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma_2 = \frac{\partial \Sigma_2}{\partial v} = \frac{\partial \Sigma_2}{\partial u} = 0, \\ dv = 0, \end{array} \right.$$

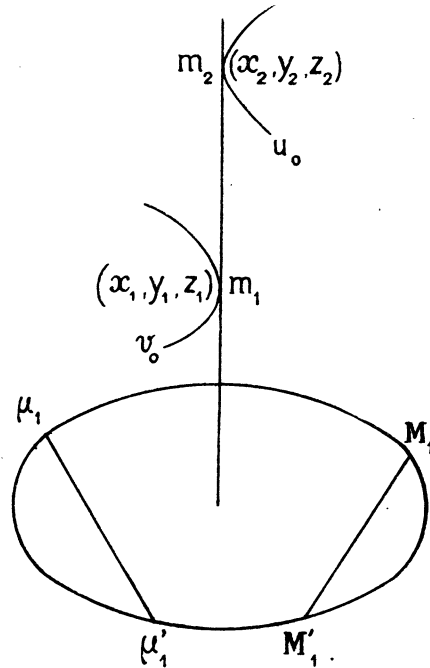


FIG. 1.

tandis que  $(\mu_1, \mu'_1)$  correspondent aux équations

$$(\mu_1, \mu'_1) \left\{ \begin{array}{l} \Sigma_2 = \frac{\partial \Sigma_2}{\partial v} = \frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial v^2} = 0, \\ du = 0, \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma_1 = \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = \frac{\partial \Sigma_1}{\partial v} = 0, \\ du = 0. \end{array} \right.$$

(\*) On a

$$x_2 = x_1 - \frac{1}{B} \frac{\partial x_1}{\partial u}, \quad y_2 = \dots, \quad z_2 = \dots, \quad \text{puis} \quad \rho_2^2 = \left( \rho_1 - \frac{1}{B} \frac{\partial \rho_1}{\partial u} \right)^2 + \frac{1}{B^2} \left[ E - \left( \frac{\partial \rho_1}{\partial u} \right)^2 \right]$$

d'où l'on conclut sans peine

$$\sigma_2 = \sigma_1 - \frac{1}{B} \frac{\partial \sigma_1}{\partial u}.$$

La droite  $M_1M'_1$  est parallèle à la binormale de la courbe  $m_1(v_0)$  ou à la normale de la surface focale lieu de  $m_2$ . Quand on effectue la transformation de Laplace en passant de la surface focale lieu de  $m_1$  à celle lieu de  $m_2$ , il est tout indiqué de remplacer le cercle  $\left(\Sigma_1, \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u}\right)$  par le cercle  $\left(\Sigma_2, \frac{\partial \Sigma_2}{\partial u}\right)$  et ainsi de suite; le cercle  $\left(\Sigma_2, \frac{\partial \Sigma_2}{\partial u}\right)$  a en commun avec le cercle  $\left(\Sigma_2, \frac{\partial \Sigma_2}{\partial v}\right)$ , qui n'est autre que le cercle initial, les deux points focaux  $(M_1, M'_1)$ ; nous avons ainsi une seule série illimitée dans les deux sens de sphères découlant les unes des autres par l'opération de Laplace appliquée aux quatre solutions  $(x_1, y_1, z_1, 2\sigma_1)$

$$\dots \Sigma_{-1}, \Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3 \dots$$

Chaque sphère donne deux cercles dont chacun appartient à l'une ou l'autre des sphères contigües; le cercle  $\left(\Sigma_2, \frac{\partial \Sigma_2}{\partial v}\right)$  est le même que le cercle  $\left(\Sigma_1, \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u}\right)$ , nous l'appellerons  $(\Sigma_1, \Sigma_2)$ ; le cercle  $\left(\Sigma_2, \frac{\partial \Sigma_2}{\partial u}\right)$  est le même que le cercle  $\left(\Sigma_3, \frac{\partial \Sigma_3}{\partial v}\right)$ , nous l'appellerons  $(\Sigma_2, \Sigma_3)$ ; de sorte que nous avons notre suite de cercles

$$\dots (\Sigma_0, \Sigma_1), (\Sigma_1, \Sigma_2), (\Sigma_2, \Sigma_3) \dots$$

Sur les quatre points focaux de chaque cercle, deux appartiennent au suivant, les deux autres au précédent (les rôles d'un couple s'échangeant en passant de l'un à l'autre cercle qui le contiennent).

Le point  $\mu$  d'intersection des deux droites  $(M_1M'_1)$  et  $(\mu_1\mu'_1)$  décrit la surface enveloppe du plan de ces deux droites; ce plan a en effet pour équation  $\frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = 0$  et le point où il touche son enveloppe est défini par le système

$$(3) \quad \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial u^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial u \partial v} = 0.$$

Or nous avons constaté que les deux équations  $\frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = 0, \frac{\partial \Sigma_1}{\partial v} = 0$  qui représentent  $\mu_1\mu'_1$  sont équivalentes aux deux équations  $\frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = 0, \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial u \partial v} = 0$ ; d'autre part les deux équations  $\frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = 0, \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial u^2} = 0$ , représentent  $M_1M'_1$ : cela justifie la proposition.

Nous allons montrer que les deux tangentes  $M_1M'_1$  et  $\mu_1\mu'_1$  à la surface lieu du point  $\mu$  sont conjuguées; en nous déplaçant sur la courbe  $v = \text{const.}$  qui passe en  $\mu$ , les paramètres  $dx, dy, dz$  de la tangente à cette courbe et la différentielle  $du$

satisfont aux équations obtenues en différentiant le système équivalent à (3), à savoir

$$(3') \quad \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \Sigma_1}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial u^2} = 0.$$

En désignant par  $d_1\theta$  l'expression  $\frac{\partial \theta}{\partial x} dx + \frac{\partial \theta}{\partial y} dy + \frac{\partial \theta}{\partial z} dz$ , on a ainsi,  $v$  restant constant,

$$(4) \quad d_1\left(\frac{\partial \Sigma_1}{\partial u}\right) + \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial u^2} du = 0, \quad d_1\left(\frac{\partial \Sigma_1}{\partial v}\right) + \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial u \partial v} du = 0, \quad d_1\left(\frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial u^2}\right) + \frac{\partial^3 \Sigma_1}{\partial u^3} du = 0$$

et puisque en  $\mu$  on a  $\frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial u^2} = 0$ ,  $\frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial u \partial v} = 0$  il reste

$$d_1\left(\frac{\partial \Sigma_1}{\partial u}\right) = 0, \quad d_1\left(\frac{\partial \Sigma_1}{\partial v}\right) = 0.$$

Cela prouve que la direction cherchée est celle de la tangente à la courbe  $\frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = 0$ ,  $\frac{\partial \Sigma_1}{\partial v} = 0$  qui est  $\mu, \mu'$ ; d'autre part l'intersection du plan  $\frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = 0$  avec le plan infiniment voisin  $(u + du, v)$  est fournie par le système  $\frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = 0$ ,  $\frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial u^2} = 0$  qui correspond à  $M, M'$ ; la proposition est donc établie.

Ce dernier résultat peut encore être obtenu de la façon suivante : la droite  $(\mu, \mu')$  est représentée par les équations  $\frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = \frac{\partial \Sigma_1}{\partial v} = 0$ ; la droite infiniment voisine  $(u + du, v)$  donne lieu pour son intersection avec  $\mu, \mu'$  au système compatible

$$\frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = \frac{\partial \Sigma_1}{\partial v} = \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial u \partial v} = 0$$

qui donne le point  $\mu$ ; de même la droite consécutive à  $\mu, \mu'$  correspondant à  $(u, v + dv)$  fournit le foyer défini par les équations compatibles

$$\frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = \frac{\partial \Sigma_1}{\partial v} = \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial v^2} = 0$$

on obtient ainsi le second foyer  $\nu$  de  $\mu, \mu'$ , et cette génération de  $\mu$  et  $\nu$  prouve que

le réseau  $(u, v)$  est conjugué sur chacune des surfaces lieu de  $\mu$  ou  $\nu$ ; la comparaison des équations fournissant  $\mu$  ou  $\nu$

$$\begin{aligned} \mu) \quad & \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = \frac{\partial \Sigma_1}{\partial v} = \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial u^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \Sigma_2}{\partial u} = \frac{\partial \Sigma_2}{\partial v} = \frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial v^2} = 0 \\ \nu) \quad & \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = \frac{\partial \Sigma_1}{\partial v} = \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial v^2} = 0 \end{aligned}$$

prouve que la transformation de Laplace suivie dans le sens

$$\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3 \dots$$

transforme en même temps les cercles

$$(\Sigma_1, \Sigma_2), (\Sigma_2, \Sigma_3) \dots$$

et aussi les surfaces enveloppes des plans de ces cercles. Sur chaque cercle un couple  $(M_1, M'_1)$  ou  $(\mu_1, \mu'_1)$  joue respectivement le rôle de l'un ou l'autre foyer sur une congruence rectiligne, chaque sphère  $\Sigma_1$  ou  $\Sigma_2$  jouant le rôle de l'un ou l'autre plan focal. Nous avons ainsi complété les résultats de Darboux, qui n'avait pas songé à la suite illimitée de sphères; il avait simplement signalé que les plans focaux de la corde  $\mu_1, \mu'_1$  sont respectivement  $\frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = 0$  et  $\frac{\partial \Sigma_1}{\partial v} = 0$  sans signaler que l'un des points focaux de cette corde est le point  $\mu$ .

On constate aisément que si le point  $m_2$  décrit une courbe, au lieu d'une surface,  $\frac{\partial x_2}{\partial v}, \frac{\partial y_2}{\partial v}, \frac{\partial z_2}{\partial v}$  et  $\frac{\partial \rho_2}{\partial v}$  sont nulles de sorte que le cercle C est représenté par les équations  $\Sigma_1 = 0, \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = 0$  tandis que sur les deux équations  $\Sigma_2 = 0, \frac{\partial \Sigma_2}{\partial v} = 0$  la dernière devient illusoire: il y a  $\infty^1$  cercles C situés sur une même sphère  $\Sigma_2$ , ou  $u = \text{constante}$ .

Connaissant la surface  $m_1$  et un réseau conjugué tracé sur elle, il suffit de trouver une quatrième solution de l'équation de Laplace ponctuelle relative à ce réseau pour en déduire la surface  $\mu$ . Inversement, connaissant la surface  $\mu$  et un réseau conjugué sur elle, pour obtenir une congruence de cercles associée, on doit d'abord construire une congruence rectiligne formée de droites parallèles aux normales de  $\mu$  et dont les développables correspondent au réseau conjugué sur la surface  $\mu$ . Ce problème revient à trouver une solution de l'équation de Laplace adjointe à l'équation de Laplace tangentielle relative au réseau conjugué tracé sur  $\mu$  (voir BIANCHI, *Leçons de Géométrie différentielle*, t. I, 3<sup>e</sup> édition, p. 483-485). Nous reviendrons plus bas sur ce point, en nous préoccupant du parallélisme de Peterson; nous voyons aussi l'intérêt de rapporter la congruence des axes à ses développables et à son image sphérique.

Nous avons remarqué que les cordes  $M_1M'_1$  et  $\mu_1\mu'_1$  sont respectivement perpendiculaires aux plans focaux de l'axe  $m_1m_2$  : donc pour que le réseau  $(u, v)$  soit réseau de courbure pour la surface  $\mu$ , il faut et suffit que la congruence des axes des cercles  $C$  soit une congruence de normales<sup>(1)</sup>. On remarquera d'ailleurs que si cette propriété a lieu pour la congruence  $(\Sigma_1, \Sigma_2)$ , elle n'a pas lieu pour les autres cercles. Si  $S$  est une surface normale aux axes  $(m_1, m_2)$ , les surfaces  $S$  et  $\mu$  sont parallèles, au sens de Peterson, suivant leur réseau de courbure.

Ajoutons encore quelques résultats que nous confronterons avec ceux de Darboux, relatifs au cas spécial où, en outre des conditions déjà écrites, on a  $F = \frac{\partial \rho_1}{\partial u} \frac{\partial \rho_1}{\partial v}$  et où par suite  $\rho_1$  est lui aussi solution de l'équation de Laplace qui admet déjà pour solutions  $x_1, y_1, z_1, \sigma_1$ . [Nous supposons  $\left(\frac{\partial \rho_1}{\partial u}\right)^2 \neq E$  pour écarter le cas de cercles tous de rayon nul]. Nous savons que, dans ce cas, le cercle normal  $\Gamma$  à la sphère  $\Sigma_1$  aux points  $\mu_1, \mu'_1$  engendre une congruence cyclique, c'est-à-dire une nouvelle congruence de cercles où chaque cercle  $\Gamma$  : 1° est rencontré en deux points par deux cercles infiniment voisins, ce qui est le cas étudié ici pour la congruence  $C$ , 2° est orthogonal à  $\infty^1$  surfaces  $L$  dont les lignes de courbure se correspondent entre elles en même temps qu'au réseau  $u, v$  conjugué tracé sur les surfaces  $m_1, m_2$ ; ces  $\infty^1$  surfaces appartiennent à un système triple orthogonal.

Le point  $\mu_1$  engendre une des surfaces  $L_0$  annoncée; on constate sans peine, en dérivant en  $v$  les équations  $\Sigma_1 = 0, \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = 0$ , vérifiées par le point  $\mu_1$ , que  $\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$  pour le point  $\mu_1$  vérifient les équations  $S(x-x_1) \frac{\partial x}{\partial v} = 0, S \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x_1}{\partial u} = 0$  de sorte que la tangente principale de  $L_0$  relative à  $\mu_1$  et à  $u = \text{const}$ , est précisément la tangente en  $\mu_1$  au cercle  $C$ ; le point  $\varphi$  où la tangente en  $m_1$  à la courbe  $u$  de la surface  $(m_1)$  coupe le plan du cercle  $C$  a pour coordonnées

$$(\varphi) \quad x_1 - \rho_1 \frac{\frac{\partial x_1}{\partial v}}{\frac{\partial \rho_1}{\partial v}}, \quad y_1 - \rho_1 \frac{\frac{\partial y_1}{\partial v}}{\frac{\partial \rho_1}{\partial v}}, \quad z_1 - \rho_1 \frac{\frac{\partial z_1}{\partial v}}{\frac{\partial \rho_1}{\partial v}}$$

et l'on constate que ce point est sur la tangente en  $\mu_1$  au cercle  $C$ ; ceci revient en effet à écrire en  $\mu_1$

$$\frac{\partial x}{\partial v} : \frac{\partial y}{\partial v} : \frac{\partial z}{\partial v} :: x_1 - x - \rho_1 \frac{\frac{\partial x_1}{\partial v}}{\frac{\partial \rho_1}{\partial v}} : y_1 - y - \rho_1 \frac{\frac{\partial y_1}{\partial v}}{\frac{\partial \rho_1}{\partial v}} : z_1 - z - \rho_1 \frac{\frac{\partial z_1}{\partial v}}{\frac{\partial \rho_1}{\partial v}}$$

(1) Cela signifie que la courbe  $(v_0)$  est géodésique sur le lieu du point  $m_1$  et que la courbe  $(u_0)$  est géodésique sur la surface lieu de  $m_2$ .

et il suffit de tenir compte des équations  $S(x - x_1) \frac{\partial x}{\partial v} = 0$ ,  $S \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x_1}{\partial u} = 0$  pour le vérifier; or, dans le cas étudié ici,  $\varphi$  est l'un des points focaux de la droite d'intersection des plans tangents en  $\mu_1$  et  $\mu'_1$  à  $\Sigma_1$ , l'autre point focal étant sur l'axe du cercle C (tangent à la courbe  $v_0$  de la surface  $m_1$ ) et sur la tangente principale ( $v = \text{const}$ ) de la surface  $\mu_1$ , (résultats donnés par Darboux).

On remarquera ici que ces résultats ne s'appliquent pas aux sphères  $\Sigma_2$  et  $\Sigma_0$  contiguës à  $\Sigma_1$  dans la suite de Laplace; la quantité  $\rho_2$  n'est pas solution de l'équation de Laplace relative à la surface  $m_2$  (du moins en général). D'ailleurs, si cela arrive,  $\rho_2$  n'est pas la solution déduite de  $\rho_1$ , comme le montre la formule

$$\rho_2^2 = \left( \rho_1 - \frac{1}{B} \frac{\partial \rho_1}{\partial u} \right)^2 + \frac{1}{B^2} \left[ E - \left( \frac{\partial \rho_1}{\partial u} \right)^2 \right].$$

### 5. — Cas du point focal double et de deux points focaux simples.

Nous avons à traiter d'abord les deux cas

$f_1$	$f_1$	$f_2$	$f_3$
$C_1$	$C_1$	$C_2$	$C_3$

$f_1$	$f_1$	$f_2$	$f_3$
$\underbrace{\hspace{2em}}$		$C_2$	$C_3$
$C_1$			

qui ont été signalés dans l'introduction. Sur une surface S quelconque on trace  $\infty^1$  courbes  $\gamma$  arbitrairement; au point M de S on mène un plan déterminé par la tangente à la courbe  $\gamma$  qui passe en M et l'on trace le cercle C osculateur en M à la section plane ainsi obtenue sur S; si le plan ne coïncide pas avec le plan osculateur de  $\gamma$ , on a le premier des deux cas en question; si le plan est osculateur on a le second cas; c'est évident géométriquement, car les surfaces cerclées obtenues en associant des cercles C consécutifs sécants donnent une famille de  $\infty^1$  cercles C doués d'une enveloppe: dans le premier cas le cercle C étant simplement tangent à  $\Gamma$ , le point de contact de C et  $\gamma$  est simple dans l'intersection de C et du cercle consécutif  $C_1$  bien qu'il compte pour deux foyers réunis en un seul; dans le second cas, le cercle C et le cercle infiniment voisin sont tangents en M.

On peut s'en assurer par un exemple simple: prenons comme surface S le cylindre  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$ , comme courbes  $\gamma$  les sections horizontales de S; si on considère la section plane obtenue par le plan  $z - v = 0$  et le point  $M(a \cos \varphi,$

$b \sin \varphi, v)$  les cercles osculateurs aux sections planes menées par la tangente sont, d'après le théorème de Meusnier, sur la sphère d'équation

$$(1) \quad x^2 + y^2 + (z - v)^2 - \frac{2c^2}{a} x \cos^3 \varphi + \frac{2c^2}{b} y \sin^3 \varphi - (2b^2 - a^2) - 3c^2 \sin^2 \varphi = 0$$

qui a pour cercle diamétral le cercle de courbure de l'ellipse principale; nous prenons pour cercle C la section de cette sphère par le plan

$$(2) \quad \frac{x}{a} \cos \varphi + \frac{y}{b} \sin \varphi - 1 - \frac{z - v}{l} = 0$$

où  $l$  est une constante. Les points focaux s'obtiennent en annulant le Jacobien

$$(3) \quad \begin{vmatrix} 6c^2 \cos \varphi \sin \varphi \left( \frac{x}{a} \cos \varphi + \frac{y}{b} \sin \varphi - 1 \right) & 2(v - z) \\ -\frac{x}{a} \sin \varphi + \frac{y}{b} \cos \varphi & \frac{1}{l} \end{vmatrix} = 0.$$

En remplaçant  $z - v$  par  $l \left( \frac{x}{a} \cos \varphi + \frac{y}{b} \sin \varphi - 1 \right)$  dans ce Jacobien, on trouve le facteur  $\frac{x}{a} \cos \varphi + \frac{y}{b} \sin \varphi - 1 = 0$ , qui entraîne la condition  $z - v = 0$ ; on trouve donc bien deux foyers confondus avec M; l'autre facteur

$$3c^2 \cos \varphi \sin \varphi + l^2 \left( -\frac{x}{a} \sin \varphi + \frac{y}{b} \cos \varphi \right) = 0$$

ne s'annule pas en M et conduit aux deux autres foyers.

Le cercle infiniment voisin qui passe en M conduit aux deux équations

$$(4) \quad \begin{cases} 6c^2 \cos \varphi \sin \varphi \left( \frac{x}{a} \cos \varphi + \frac{y}{b} \sin \varphi - 1 \right) d\varphi + 2(v - z) dv = 0, \\ \left( -\frac{x}{a} \sin \varphi + \frac{y}{b} \cos \varphi \right) d\varphi + \frac{dv}{l} = 0 \end{cases}$$

dont la première se réduit à une identité pour M et dont la seconde donne  $dv = 0$ ; l'intersection de C avec le cercle  $(\varphi + d\varphi, v)$  conduit à associer aux équations (1), (2) les nouvelles équations déduites de (4) en faisant  $dv = 0$

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{x}{a} \cos \varphi + \frac{y}{b} \sin \varphi - 1 = 0, \\ -\frac{x}{a} \sin \varphi + \frac{y}{b} \cos \varphi = 0. \end{cases}$$



Or ces deux équations représentent la parallèle à Oz issue de M, qui coupe C uniquement en M d'ordre 1 dans l'intersection. Au contraire si le cercle C est précisément le cercle osculateur de l'ellipse principale, M compte pour deux dans l'intersection de C et du cercle voisin (pour ce cas particulier, les deux autres foyers se trouvent renvoyés à l'infini, par suite de l'exemple particulier adopté où les cercles passent tous par deux points fixes du cercle de l'infini; chacun de ces points compte pour deux foyers) (\*).

6. — Traitons maintenant les deux autres cas suivants prévus dans l'introduction.

D'abord

$$\begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{cccc} f_1 & f_2 & f_3 & f_3 \\ \hline C_1 & C_3 & C_3 & \end{array}} \end{array}$$

Le cercle C est donné par deux équations

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma_1 \equiv (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 - \rho_1^2 = 0, \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} \equiv (x - x_1) \frac{\partial x_1}{\partial u} + (y - y_1) \frac{\partial y_1}{\partial u} + (z - z_1) \frac{\partial z_1}{\partial u} + \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial u} = 0 \end{array} \right.$$

où  $x_1, y_1, z_1, \rho_1$  sont quatre fonctions de  $u$  et  $v$ ;  $f_1$  et  $f_2$  sont fournis par les équations  $\Sigma_1 = \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial u^2} = 0, dv = 0$ ; les deux autres foyers sont fournis par les équations

$$(7) \quad \Sigma_1 = \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = \frac{\partial \Sigma_1}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial u^2} du + \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial u \partial v} dv = 0.$$

---

(\*) En réalité l'exemple qui vient d'être traité est un cas particulier du type suivant : les deux foyers simples donnent lieu au même cercle infiniment voisin. La seconde équation (4), en remplaçant  $\left(-\frac{x}{a} \sin \varphi + \frac{y}{b} \cos \varphi\right)$  par  $\frac{-3c^2}{l^2} \cos \varphi \sin \varphi$  donne en effet une seule valeur du rapport  $\frac{dv}{d\varphi}$ ; on a  $ldv - 3c^2 \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = 0$  ou  $2lv - c^2 \sin^2 \varphi = \text{constante}$ . Mais le résultat important est de déterminer l'ordre de multiplicité du foyer double comme point d'intersection de deux cercles consécutifs.

Il est bien connu que le système (7) conduit à calculer le déterminant

$$\delta = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial y_1}{\partial u} & \frac{\partial z_1}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial y_1}{\partial v} & \frac{\partial z_1}{\partial v} \end{vmatrix} \quad \delta^2 = \begin{vmatrix} \rho_1^2 & -\rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial u} & -\rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial v} \\ -\rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial u} & E & F \\ -\rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial v} & F & G \end{vmatrix} = \rho_1^2 (EG - F^2) [1 - \Delta(\rho_1)]$$

où  $\Delta(\rho_1)$  signifie le paramètre différentiel déjà signalé; les deux points focaux  $f_1, f_2$  se confondent donc en un seul  $f_3, f_3$  si  $\delta = 0$ , c'est-à-dire si les courbes  $\rho_1 = \text{const.}$  tracées sur la surface  $(x_1, y_1, z_1)$  sont géodésiquement parallèles,  $\rho_1$  désignant l'arc des géodésiques orthogonales. Les sphères  $\Sigma_1$  ne sont autres que les sphères principales (d'un système) de la surface focale S engendrées par le foyer double  $f_3$ ; la surface lieu du centre  $\omega(x_1, y_1, z_1)$  est la développée D correspondante de S; sur D on trace une série de courbes quelconques ( $v = \text{constante}$ ) et le cercle C est le cercle limite de la sphère  $\Sigma_1$  quand son centre décrit une courbe v. Les explications qui précèdent suffisent, géométriquement, pour obtenir la congruence: en tous cas, il est clair que l'on doit choisir comme courbes  $v = \text{const.}$  des courbes autres que les géodésiques, enveloppes, sur la surface D, des normales de la surface S; mais, pour étudier, analytiquement, la congruence il y a lieu de choisir à bon escient le paramètre u qui n'a pas encore été fixé: en d'autres termes, les développements analytiques qui précèdent laissent la faculté de poser  $v_1 = v$ ,  $u_1 = f(u, v)$  où f est une fonction arbitraire. Il y a donc intérêt à opérer ce changement de variables de façon que le paramètre  $u_1$  soit celui qui individualise les géodésiques enveloppes des normales de S; supposons ce changement effectué et supprimons, pour  $u_1$ , l'indice 1. On aura donc simplement

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = \left( \frac{F}{\sqrt{G}} du + \sqrt{G} dv \right)^2 + \frac{EG - F^2}{G} du^2, \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial u} = \frac{F}{\sqrt{G}}, \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial v} = \sqrt{G}$$

et la sphère a pour équation  $\Sigma_1 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 - \rho_1^2 = 0$ , le cercle est représenté par  $\Sigma_1 = 0, \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = 0$ . Nous pouvons représenter (fig. 2) la surface S, un point F de S, la ligne de courbure ( $u = \text{constante}$ ) issue de F le long de laquelle la sphère  $\Sigma_1$  reste osculatrice à S; figurons le centre  $\omega$  de  $\Sigma_1$  et la courbe développée décrite par  $\omega$  quand F décrit la ligne de courbure en jeu: c'est la géodésique  $u = \text{const.}$  issue de  $\omega$  sur D; les trajectoires orthogonales de ces géodésiques sont les courbes  $\rho_1 = \text{constante}$  de D. Le cercle C est tangent en F à la ligne de courbure issue de F, et osculateur à la surface S; si en  $\omega$  on mène la courbe  $v = \text{constante}$  qui passe sur D, le plan du cercle C est le plan mené

par  $F$  perpendiculairement sur la tangente à la courbe  $v$ ; l'enveloppe du cercle  $C$  quand on suit ceux qui se coupent successivement en  $F$  (qui est le foyer double  $f_2, f_3$ ) est la ligne de courbure  $u = \text{constante}$  issue de  $F$ . (Si les courbes  $v = \text{const.}$

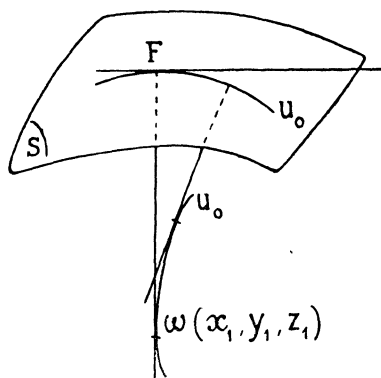


FIG. 2.

se confondaient avec les courbes  $u = \text{const.}$  de  $D$ , le plan du cercle serait le plan tangent en  $F$  à  $S$  et le cercle  $C$  aurait son rayon nul, cas que nous écartons systématiquement.) Le point  $f_3$  ou  $F$  a pour coordonnées

$$x_1 - \frac{\rho_1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x_1}{\partial v}, \quad y_1 - \frac{\rho_1}{\sqrt{G}} \frac{\partial y_1}{\partial v}, \quad z_1 - \frac{\rho_1}{\sqrt{G}} \frac{\partial z_1}{\partial v}$$

et l'on vérifie sans peine que ce point donne les relations  $\Sigma_1 = \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = \frac{\partial \Sigma_1}{\partial v} = \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial u \partial v} = 0$  de sorte que les équations (7) entraînent  $du = 0$  et ceci justifie à nouveau la façon dont nous avons choisi le paramètre  $u$ .

### 7. — Ces résultats géométriques bien compris, le cas suivant

$$\boxed{\begin{array}{cc} \overbrace{f_1 \quad f_2} & \overbrace{f_3 \quad f_3} \\ C_1 & C_3 \end{array}}$$

s'obtient sans peine par voie géométrique; il suffit évidemment que nous tracions les cercles osculateurs des lignes de courbure d'une famille de la surface  $S$ ; l'axe du cercle osculateur en  $F$  à la ligne de courbure passe par  $\omega$  d'après le théorème de Meusnier, il est perpendiculaire au plan osculateur de la ligne de courbure de  $S$  et

est tangent à la surface D ; on peut remarquer que si F décrit la ligne de courbure choisie, le point  $\omega$  décrit une géodésique de D, développée de la ligne de courbure de S ; les deux plans normaux consécutifs à cette ligne de courbure sont tangents à D et ont pour intersection l'axe du cercle de courbure dont nous parlons, *axe qui est donc la tangente conjuguée de la tangente  $\omega F$  à D* ; donc il est naturel de prendre comme variable  $u$  le paramètre fixant les lignes de courbure de S dans la famille adoptée ; les courbes  $u = \text{constante}$  sont géodésiques sur D et les courbes  $v = \text{const}$  sont précisément, d'après ce qui précède, les conjuguées sur D des courbes  $u$ , puis pu'elles sont tangentes aux axes des cercles C : nous avons retrouvé le résultat obtenu déjà quand les quatre foyers étaient distincts et répartis par couples sur deux cercles infiniment voisins de C.

Il est intéressant de voir les résultats analytiques correspondants : on a quatre fonctions inconnues  $x_1, y_1, z_1, \rho_1$  de  $(u, v)$  ; nous retrouvons d'abord toutes les rela-

tions du cas traité précédemment  $\left[ \begin{array}{cc} \underbrace{f_1 \ f_2}_{C_1} & \underbrace{f_3 \ f_4}_{C_3} \end{array} \right]$ , auxquelles on ajoute l'équation

$\Delta(\rho_1) = 1$  qui résulte de la réunion de  $f_3, f_4$  en un seul foyer  $f_3$ . Cela donne le système nécessaire et suffisant

$$(E) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v} - A \frac{\partial x_1}{\partial u} - B \frac{\partial x_1}{\partial v} = 0, \\ \frac{\partial^2 y_1}{\partial u \partial v} - A \frac{\partial y_1}{\partial u} - B \frac{\partial y_1}{\partial v} = 0, \\ \frac{\partial^2 z_1}{\partial u \partial v} - A \frac{\partial z_1}{\partial u} - B \frac{\partial z_1}{\partial v} = 0, \\ \rho_1 \left( \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial u \partial v} - A \frac{\partial \rho_1}{\partial u} - B \frac{\partial \rho_1}{\partial v} \right) + \frac{\partial \rho_1}{\partial u} \frac{\partial \rho_1}{\partial v} - F = 0, \\ G \left( \frac{\partial \rho_1}{\partial u} \right)^2 - 2F \frac{\partial \rho_1}{\partial u} \frac{\partial \rho_1}{\partial v} + E \left( \frac{\partial \rho_1}{\partial v} \right)^2 = EG - F^2. \end{array} \right.$$

L'élimination de A, B et le remplacement de E, F, G par  $S \left( \frac{\partial x_1}{\partial u} \right)^2$ ,  $S \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial v}$ ,  $S \left( \frac{\partial x_1}{\partial v} \right)^2$  donnent trois équations à 4 inconnues  $x_1, y_1, z_1, \rho_1$  ; les considérations géométriques nous ont permis de découvrir que ces équations entraînent  $\left( \frac{\partial \rho_1}{\partial v} \right)^2 = G$ ,  $\frac{\partial \rho_1}{\partial u} \frac{\partial \rho_1}{\partial v} = F$ . Ce serait assez malaisé à découvrir analytiquement : si on emploie les notations  $p, q, r, s, t$  de Monge pour désigner  $\frac{\partial \rho_1}{\partial u}, \frac{\partial \rho_1}{\partial v}, \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial u^2} \dots$  on déduit,

par dérivations, de la dernière équation (E)

$$(1) \begin{cases} 2(Gp - Fq)r + 2(Eq - Fp)s + \frac{\partial E}{\partial u} q^2 - 2 \frac{\partial F}{\partial u} pq + \frac{\partial G}{\partial u} p^2 - \frac{\partial}{\partial u} (EG - F^2) = 0, \\ 2(Gp - Fq)s + 2(Eq - Fp)t + \frac{\partial E}{\partial v} q^2 - 2 \frac{\partial F}{\partial v} pq + \frac{\partial G}{\partial v} p^2 - \frac{\partial}{\partial v} (EG - F^2) = 0. \end{cases}$$

Si  $Gp - Fq$ ,  $Eq - Fp$  sont toutes deux non nulles, on a donc,  $s$  étant connu par la quatrième (E), les valeurs de  $r, s, t$ ; en dérivant en  $u$ , puis  $v$ , la quatrième équation (E) une fois, puis deux fois la cinquième, on a 5 équations entre les dérivées  $\frac{\partial^3 \rho_1}{\partial u^3}$ ,  $\frac{\partial^3 \rho_1}{\partial u^2 \partial v}$ ,  $\frac{\partial^3 \rho_1}{\partial u \partial v^2}$ ,  $\frac{\partial^3 \rho_1}{\partial v^3}$  en nombre égal à 4 : l'élimination des dérivées d'ordre 3 se fait aisément [ cette élimination se fait aisément en dérivant la première équation (1) en  $v$ , ce qui introduit  $\frac{\partial^3 \rho_1}{\partial u^2 \partial v}$ ,  $\frac{\partial^3 \rho_1}{\partial u \partial v^2}$ , dérivées obtenues en dérivant en  $u$  et en  $v$ , la quatrième équation (E) ]; on a ainsi une équation ne contenant que les dérivées d'ordre 2, qui s'éliminent elles-mêmes en remplaçant  $r, s, t$  par leurs valeurs déjà obtenues : en joignant cette équation à la dernière équation (E), on a deux équations en  $p, q$  et le système ainsi obtenu doit, d'après ce que nous avons obtenu par voie directe, soit conduire à une impossibilité soit conduire à l'une ou l'autre des hypothèses  $Gp - Fq = 0$ ,  $Eq - Fp = 0$ . L'hypothèse  $Gp - Fq = 0$  est celle que nous avons utilisée, car avec la dernière équation (E) elle donne  $q^2 = G$ ,  $pq = F$ . La relation  $Eq - Fp = 0$  conduit à un cercle de rayon nul, cas que nous écartons systématiquement. Nous avons ainsi confirmé les résultats obtenus par Darboux sur les enveloppes de sphères à deux paramètres et les lignes principales de cette enveloppe, même dans le cas particulier où les deux points de contact de la sphère avec son enveloppe sont confondus, la sphère ayant son centre sur la développée de l'enveloppe. Ici non seulement  $x_1, y_1, z_1, \rho_1^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2$  mais encore  $\rho_1$  sont solutions de la même équation de Laplace; toutefois, au point de vue des systèmes cycliques, il n'y a rien à tirer, car il faudrait construire le cercle normal à la sphère aux points où elle touche son enveloppe : ici ce cercle est de rayon nul et se décompose.

Si l'on compare maintenant les résultats de ce cas

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{cc} f_1 & f_2 \\ \hline C_1 \end{array} & \begin{array}{cc} f_3 & f_4 \\ \hline C_3 \end{array} \\ \hline \end{array}$$

à ceux du

$$\text{cas } \begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{cc} f_1 & f_2 \\ \hline C_1 \end{array} & \begin{array}{cc} f_3 & f_4 \\ \hline C_3 \end{array} \\ \hline \end{array}$$

traité au n° 4, nous voyons que la figure 1 doit être repro-

duite avec cette modification que les foyers  $(\mu_1, \mu'_1)$ , qui jouent le rôle de  $f_2$  et  $f_1$ , sont confondus en un seul, que nous avons ici appelé F; ce point F est ici le point focal, autre que  $\mu$ , de cette corde  $\mu_1 \mu'_1$ , qui est devenue, dans la figure 2, la tangente à la ligne de courbure  $u = \text{constante}$  de la surface S; nous nous rappelons aussi que la corde  $\omega F$  est tangente à la courbe  $u = \text{const.}$  de la surface lieu de  $\omega$ .

D'une façon générale, si l'on se reporte à la figure 1 (sans supposer que  $\rho_1$  soit solution de l'équation de Laplace vérifiée par  $x_1, y_1, z_1, \sigma_1$ ), la tangente à la courbe  $u$ , décrite par le point  $m_1$  sur la surface focale de l'axe du cercle ne rencontre pas en général la corde  $\mu_1 \mu'_1$ ; car  $\mu_1 \mu'_1$  a pour équations

$$(2) \quad \begin{cases} (x - x_1) \frac{\partial x_1}{\partial u} + (y - y_1) \frac{\partial y_1}{\partial u} + (z - z_1) \frac{\partial z_1}{\partial u} + \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial u} = 0, \\ (x - x_1) \frac{\partial x_1}{\partial v} + (y - y_1) \frac{\partial y_1}{\partial v} + (z - z_1) \frac{\partial z_1}{\partial v} + \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial v} = 0 \end{cases}$$

et la tangente en  $m_1$  à la courbe  $u$ , a pour équations

$$(3) \quad \frac{x - x_1}{\frac{\partial x_1}{\partial v}} = \frac{y - y_1}{\frac{\partial y_1}{\partial v}} = \frac{z - z_1}{\frac{\partial z_1}{\partial v}}.$$

Si  $\lambda$  est la valeur commune des rapports (3), la condition de rencontre se traduit par deux équations en  $\lambda$

$$\lambda G + \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial v} = 0, \quad \lambda F + \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial u} = 0$$

ou, éliminant  $\lambda$ ,  $G \frac{\partial \rho_1}{\partial u} - F \frac{\partial \rho_1}{\partial v} = 0$ . Si on suppose, de plus, que  $\rho_1$  vérifie l'équation de Laplace, nous avons vu que le point où la tangente en  $m_1$  à la courbe  $u$ , perce le plan de C est pôle de  $\mu_1 \mu'_1$  par rapport à C; si donc cette tangente coupe  $\mu_1 \mu'_1$ , c'est que  $\mu_1 \mu'_1$  est tangente à C et nous retrouvons le cas actuel avec  $\frac{\partial \rho_1}{\partial v} = \sqrt{G}$ ,  $\frac{\partial \rho_1}{\partial u} = \frac{F}{\sqrt{G}}$ .

Nous avons vu aussi au paragraphe 4 la chaîne de cercles obtenue par la transformation de Laplace appliquée indéfiniment dans l'un ou l'autre sens : le cercle C étudié est le cercle mené par  $(M_1, M'_1)$  [ou  $f_1, f_2$ ] dans le plan perpendiculaire à la tangente à la courbe  $v = \text{const.}$  de la surface  $(m_1)$  ou à la tangente à la courbe  $u = \text{constante}$  de la surface  $(m_2)$ ; le cercle *antérieur* est celui qui est mené par  $(\mu_1, \mu'_1)$  ou  $(f_3, f_4)$  à la tangente à la courbe  $u = \text{constante}$  de la surface  $(m_1)$ ; ici puisque  $\mu_1, \mu'_1$  sont confondus avec l'unique point F, on trouve le cercle de rayon nul

obtenu en coupant la sphère  $\Sigma_1$ , de centre  $m_1$  et rayon  $m_1F$ , par son plan tangent en  $F$ ; donc, si en étudiant *une seule congruence de cercles*, il est naturel d'éliminer les cercles de rayon nul, nous devons au contraire les accepter dans une chaîne de Laplace; l'apparition d'un tel cercle (dont le centre est au point de contact de son plan avec la surface enveloppe du plan) ne gêne pas pour continuer la suite. On peut même définir à priori la suite par une congruence de tels cercles : on adopte une famille  $u = \text{constante}$  de lignes de courbure sur la surface  $S$  lieu du centre  $F$  du cercle et enveloppe du plan du cercle; la seconde surface focale de la congruence des tangentes aux lignes de courbure  $u = \text{const.}$  donne sur la tangente le second foyer, appelé  $\mu$ , au numéro 4 de ce Mémoire, puis la tangente conjuguée  $M, M'$ ; le point  $m_1$  décrit la développée de  $S$  relative aux arêtes de rebroussement des normales à  $S$  le long des lignes  $u = \text{const.}$ ; sur cette développée on mène la tangente en  $m_1$  à la ligne  $v = \text{const.}$ ; la sphère de centre  $m_1$  et rayon  $m_1F$  est ensuite coupée par le plan issu de  $MM_1$  perpendiculairement à la tangente qui vient d'être indiquée et nous avons reconstitué la figure; si en  $F$  on adopte au contraire la ligne de courbure  $v = \text{const.}$ , cela revient à parcourir la suite de Laplace dans l'autre sens : nous avons ainsi, dans la suite de cercles, une famille de cercles osculateurs aux lignes de courbure d'un système de la surface  $S$ , puis une famille de cercles de rayon nul (tangentes isotropes de la surface  $S$ ) puis les cercles osculateurs de la seconde famille de lignes de courbure de  $S$ .

8. — Le dernier cas prévu à priori dans le cas d'un foyer double,

$f_1$ $f_2$	$f_1$ $f_3$
$C_1$	$C_1$ $C_3$

peut sembler paradoxal au premier abord; nous allons l'obtenir très simplement par voie purement géométrique. D'après ce qui a été déjà expliqué, le cercle  $C$ , par un choix convenable des paramètres, est représenté par les deux équations

$$\Sigma_1 = 0, \quad \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = 0$$

de façon à être coupé par le cercle infiniment voisin  $(u + du, v)$  en deux points distincts  $f_1$  et  $f_2$ ; quand  $u$  et  $v$  varient ensuite librement, le point  $f_1$  décrit une nappe focale  $S_1$ ,  $f_2$  une autre nappe  $S_2$ . Si le cercle  $C$  est osculateur à  $S_1$ , le foyer  $f_1$  compte pour deux unités et par suite est l'un des deux foyers nouveaux donnés par l'ensemble des équations  $\Sigma_1 = 0$ ,  $\frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = 0$ ,  $\frac{\partial \Sigma_1}{\partial v} = 0$ ;  $f_1$  est donc aussi l'un des deux points  $f_1, f_3$  où  $\Sigma_1$  touche son enveloppe à deux paramètres, enveloppe constituée d'après ces résultats par  $S_1$  et une certaine surface  $S_3$  lieu de  $f_3$ . Partons donc d'une surface  $S_1$  arbitraire : en chaque point  $f_1$  de  $S_1$  construisons une sphère

$\Sigma_1$  déterminée tangente à  $S_1$  en  $f_1$ ; il suffit de prendre le centre  $m_1$  sur la normale en  $f_1$  d'après une loi continue, mais arbitraire, en fonction de  $f_1$ . La sphère  $\Sigma_1$  coupe  $S_1$  suivant une courbe gauche admettant en  $f_1$  deux branches tangentes aux rayons communs des deux indicatrices de Dupin; soit  $\Gamma_1$  l'une de ces deux branches; coupons  $\Sigma_1$  par le plan contenant la tangente à  $\Gamma_1$  en  $f_1$  et la normale abaissée de  $f_1$  sur le plan tangent à la surface lieu de  $m_1$  (normale qui va passer au second point limite  $f_3$  de  $\Sigma_1$ ): le cercle  $C$  ainsi obtenu est, d'après le théorème de Meusnier, osculateur à la section plane de  $S_1$  par son plan; il a donc trois points communs avec  $S_1$  réunis en  $f_1$  de sorte que  $f_1$  compte pour deux foyers réunis de ce cercle  $C$ ; l'axe de  $C$  est dans le plan médiateur de  $f_1 f_3$ , plan tangent à la surface  $(m_1)$ : les courbes de  $(m_1)$  constamment tangentes à cette direction du plan tangent fournissent les courbes  $v = \text{const}$ , telles que les cercles  $C$  consécutifs soient représentés par les équations  $\Sigma_1(u, v_0) = 0$ ,  $\frac{\partial \Sigma_1}{\partial u}(u, v_0) = 0$ ; les deux foyers correspondants s'obtiennent en abaissant de  $f_1$ , qui est l'un, la perpendiculaire au plan osculateur de la courbe  $v_0$  de  $(m_1)$ : cette remarque conduira à examiner si la courbe  $v_0$  ne peut être asymptotique de  $(m_1)$ , auquel cas le foyer  $f_2$  se confond lui aussi avec  $f_3$ ; si  $(m_1)$  est un plan, la circonstance se produit automatiquement: nous reviendrons sur ce cas spécial.

Il est bon de donner un exemple simple; on prendra par exemple la surface  $(m_1)$  arbitraire et on supposera le rayon de  $\Sigma_1$  constant, de sorte que  $S_1$  est une surface parallèle à  $(m_1)$ ; les deux points limites sont de part et d'autres de  $m_1$  sur la normale en  $m_1$  à la surface  $(m_1)$ ; les courbes  $v_0$  de  $(m_1)$  ne sont jamais asymptotiques sur  $(m_1)$ . Aucune difficulté pour vérifier les résultats énoncés; une surface  $(m_1)$  simple telle que le cylindre elliptique  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$  pourra être utilisée; je développerai plus loin les calculs en prenant le cylindre de révolution  $x^2 + y^2 - z = 0$  qui donne cette particularité complémentaire que  $f_2$  se confond lui-même avec  $f_1$ .

9. — Jusqu'ici nous n'avons pas parlé du cas où une ou plusieurs nappes focales dégénèrent en courbes, les foyers étant simples ou non. Il est facile de voir que l'on peut se donner arbitrairement quatre courbes focales  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ . Choisissons en effet, arbitrairement, un point  $f_1$  sur  $\Gamma_1$  et un point  $f_2$  sur  $\Gamma_2$ ; un plan quelconque mené par  $f_1 f_2$  perce  $\Gamma_3$  en  $f_3$  et  $\Gamma_4$  en  $f_4$  et le quadrilatère  $f_1 f_2 f_3 f_4$  en général n'est pas inscriptible dans un cercle: en exprimant cette propriété, on a une équation qui fixe l'orientation du plan et le cercle  $C$ . De même on peut se donner arbitrairement quatre surfaces focales  $S_1, S_2, S_3, S_4$ ; si nous les coupons par un plan quelconque, les sections planes correspondantes n'admettent pas en général de cercle tangent à elles quatre; pour qu'un tel cercle existe, il suffit d'une relation qui



donne donc  $\infty^2$  plans et dans chacun d'eux un cercle. On peut faire des remarques analogues pour la donnée de  $i$  courbes focales différentes et de  $(4 - i)$  surfaces focales. Des considérations analogues s'appliquent au cas de foyers multiples : donnons-nous par exemple une surface  $S_1$  lieu du foyer double  $f_1$ , deux surfaces focales  $S_2$  et  $S_3$  lieu des foyers simples  $f_2$  et  $f_3$  : si nous coupons  $S_1$  par un plan quelconque, la section plane correspondante admet  $\infty^1$  cercles osculateurs, dont l'un est tangent à  $S_2$  mais, en général, non tangent à  $S_3$  : une condition imposée au plan donne la congruence demandée. De même on peut donner une surface  $S_1$  lieu d'un foyer triple  $f_1$  et une surface  $S_2$  lieu du foyer simple  $f_2$  : la section plane générale de  $S_1$  admet un cercle surosculateur en général non tangent à  $S_2$  : une condition suffit pour établir le contact, donc obtenir la congruence. De même pour tous les cas que l'on peut imaginer : mais si la méthode est précieuse pour rassurer *a priori* le chercheur sur la possibilité de telle distribution de foyers, elle ne nous renseigne pas sur l'ordre de ces foyers à titre de point d'intersection de deux cercles voisins.

#### 10. — Cas de deux foyers doubles.

Nous aurons en général le cas

$f_1$	$f_1$	$f_2$	$f_2$
$C_1$	$C_1$	$C_2$	$C_2$

La résolution *a priori* de ce cas peut s'obtenir comme au numéro précédent. Tâchons d'arriver aux constructions les plus précises.

Supposons d'abord que  $f_1$  et  $f_2$  engendrent deux courbes focales  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  : on doit donner non seulement  $\Gamma_1$  mais en chaque point  $f_1$  de  $\Gamma_1$  indiquer encore le plan  $P_1$ , tangent à  $\Gamma_1$ , contenant les tangentes aux divers cercles  $C$  qui passeront en  $f_1$ , de sorte que  $f_1$  soit foyer double; de même en chaque point  $f_2$  de  $\Gamma_2$  on indique un plan  $P_2$  tangent à  $\Gamma_2$ ; choisissons  $f_1$  sur  $\Gamma_1$  et  $f_2$  sur  $\Gamma_2$  arbitrairement; les plans  $P_1$ ,  $P_2$  correspondants se coupent suivant une droite  $D$  et le plan médiateur de  $f_1 f_2$  perce  $D$  en  $\omega$ ; il existe manifestement un cercle  $C$  tangent en  $f_1$  à  $\omega f_1$  et en  $f_2$  à  $\omega f_2$ ; c'est le cercle général de notre congruence.

Supposons maintenant que  $f_1$  engendre une courbe focale  $\Gamma_1$ , pendant que  $f_2$  engendre une surface focale  $S_2$ . Au point  $f_1$  on a donné *a priori*, comme plus haut, le plan tangent à  $\Gamma_1$  correspondant à  $f_1$ ; si on prend  $f_2$  d'abord au hasard sur  $S_2$ , on construit comme plus haut le cercle unique tangent en  $f_1$  à  $P_1$  et en  $f_2$  à  $S_2$ ; le plan tangent en  $f_2$  à  $S_2$  joue le rôle de  $P_2$ ; en général, le cercle obtenu n'est pas

osculateur à  $S_2$ : cette condition livre sur  $S_2$  une simple infinité de points  $f_2$  que l'on peut associer à  $f_1$  et nous avons ainsi notre congruence.

Si  $f_1$  et  $f_2$  engendrent chacune une surface,  $S_1$  ou  $S_2$ , le même procédé permet de construire le cercle tangent en  $f_1$  à  $S_1$  et en  $f_2$  à  $S_2$ ; si  $f_1$  et  $f_2$  sont fixés, en général le cercle n'est osculateur ni à  $S_1$ , ni à  $S_2$ : cette double condition donne deux relations liant les paramètres curvilignes  $(u_1, v_1)$  de  $f_1$  sur  $S_1$  et  $(u_2, v_2)$  de  $f_2$  de  $S_2$ , de sorte que, en général, le point  $f_1$  pourra se déplacer librement sur  $S_1$ , les deux conditions obtenues faisant correspondre à  $f_1$  un certain nombre de points de  $S_2$ . Cette méthode entraîne des calculs compliqués même si les surfaces adoptées sont simples. Nous pouvons indiquer quelques exemples de simplification (relative).

Supposons que  $S_1$  et  $S_2$  soient symétriques par rapport à un plan  $\Pi$ ;  $f_1$  et  $f_2$  étant deux points homologues dans cette symétrie, prenons l'intersection  $N$  avec  $\Pi$  de la normale en  $f_1$  à  $S_1$ ; la sphère de centre  $N$  et rayon  $Nf_1$  coupe  $S_1$  suivant une courbe ayant un point double en  $f_1$ ; adoptons la tangente  $f_1T$  à l'une des deux branches; coupons la sphère par le plan  $f_1Tf_2$ : nous avons un cercle qui répond aux conditions; cela a été expliqué au paragraphe huit et nous voyons qu'ici il y a deux foyers doubles  $f_1, f_2$  et un cercle unique infiniment voisin de  $C$ , recoupant  $C$  en  $f_1$  et  $f_2$ : c'est un exemple du cas

$$\boxed{\begin{array}{cc} \overbrace{f_1 \quad f_2} & \overbrace{f_1 \quad f_2} \\ C_1 & C_1 \end{array}}$$

Cette méthode appliquée par exemple aux deux paraboloides  $xy + z = 0$ ,  $xy - z = 0$  permet d'associer à un point de l'un successivement ses symétriques par rapport aux trois plans de coordonnées: il peut y avoir d'autres correspondances et l'on voit que, même ce cas simple donne lieu à des calculs compliqués, en dehors des correspondances par symétrie.

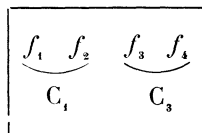
Il est intéressant de revenir sur le cas

$$\boxed{\begin{array}{cc} \overbrace{f_1 \quad f_2} & \overbrace{f_1 \quad f_2} \\ C_1 & C_1 \end{array}}$$

Les considérations géométriques directes du numéro huit nous l'ont déjà annoncé comme cas spécial de

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \overbrace{f_1 \quad f_2} & \overbrace{f_1} & \overbrace{f_2} \\ C_1 & C_1 & C_2 \end{array}}$$

et c'est ainsi que nous avons reconnu que *l'axe du cercle C est tangente asymptotique sur la surface lieu du centre  $m_1$  de la sphère  $\Sigma_1$ , le cercle C étant représenté par les équations  $\Sigma_1 = 0$ ,  $\frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = 0$ . Nous aurions pu aussi considérer ce cas comme spécialisation du cas*



En obligeant les deux nappes de la surface focale des axes à se confondre, on arrive encore à cette conclusion que les courbes  $(v_0)$  de la surface des centres des sphères  $\Sigma_1$  sont des asymptotiques : le lecteur se reportera au paragraphe 4 et à la figure 1. En tous cas écrivons les équations de C

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma_1 \equiv (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 - \rho_1^2 = 0, \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} \equiv (x - x_1) \frac{\partial x_1}{\partial u} + (y - y_1) \frac{\partial y_1}{\partial u} + (z - z_1) \frac{\partial z_1}{\partial u} + \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial u} = 0. \end{array} \right.$$

Les points  $f_1$  et  $f_2$  sont donnés par le système

$$(2) \quad \Sigma_1 = \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial u^2} = 0, \quad dv = 0.$$

Les deux autres points focaux sont donnés par le système

$$(3) \quad \Sigma_1 = \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = \frac{\partial \Sigma_1}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial u^2} du + \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial u \partial v} dv = 0.$$

Pour retrouver les points  $f_1, f_2$  il est donc nécessaire et suffisant que les trois plans

$$(4) \quad \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \Sigma_1}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial u^2} = 0$$

aient une droite commune, ce qui entraîne que  $x_1, y_1, z_1$  et  $\sigma_1$  (avec  $2\sigma_1 = \rho_1^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2$ ) soient solutions d'une même équation

$$(5) \quad \mathcal{E}(\theta) \equiv \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + A \frac{\partial \theta}{\partial u} + B \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0.$$

Ce résultat montre que les courbes  $v = \text{constante}$  sont asymptotiques sur la surface lieu de  $(x_1, y_1, z_1)$  et que  $\sigma_1$  s'obtient ensuite en prenant une nouvelle solution de l'équation (5), de sorte que tous nos résultats géométriques se trouvent confirmés, et en même temps complétés par un moyen régulier de réaliser ce cas. On peut remarquer l'identité

$$\varepsilon(\sigma_1) \equiv \rho_1 \varepsilon(\rho_1) + \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial u}\right)^2 - E, \quad \left[ E = S \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2 \right].$$

On doit écarter la solution  $\frac{\partial \rho_1}{\partial u} = \sqrt{E}$  qui donnerait un cercle C de rayon nul (on aurait d'ailleurs  $\frac{\partial \rho_1}{\partial u} \frac{\partial \rho_1}{\partial v} = F, \varepsilon(\rho_1) = 0$ ).

11. — Nous devons maintenant étudier le cas

$$\boxed{\begin{matrix} f_1 & f_1 & f_2 & f_2 \\ C_1 & C_2 & C_2 \end{matrix}}, \quad \text{particularisation du cas} \quad \boxed{\begin{matrix} f_1 & f_3 & f_2 & f_2 \\ C_1 & C_2 & C_2 \end{matrix}}$$

traité au paragraphe 6. Nous particularisons les paramètres  $u, v$  comme dans ce paragraphe, auquel le lecteur voudra bien se reporter. Nous avons pour définir le cercle C les équations

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma_1 \equiv (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 - \rho_1^2 = 0. \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} \equiv (x - x_1) \frac{\partial x_1}{\partial u} + (y - y_1) \frac{\partial y_1}{\partial u} + (z - z_1) \frac{\partial z_1}{\partial u} + \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial u} = 0. \end{array} \right.$$

On a de plus

$$(2) \quad dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = d\rho_1^2 + C^2 du^2$$

ce qui avec les notations usuelles donne

$$(3) \quad G = \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial v}\right)^2, \quad F = \frac{\partial \rho_1}{\partial u} \frac{\partial \rho_1}{\partial v}, \quad C^2 = \frac{EG - F^2}{G} = E - \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial u}\right)^2.$$

Nous devons maintenant exprimer que les trois équations

$$(4) \quad \Sigma_1 = 0, \quad \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial u^2} = 0$$

définissent deux points confondus. Nous introduisons, selon l'usage, l'inconnue auxiliaire

$$\delta = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial y_1}{\partial u} & \frac{\partial z_1}{\partial u} \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y_1}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z_1}{\partial u^2} \end{vmatrix}$$

dont le carré est

$$\delta^2 = \begin{vmatrix} \rho_1 & -\rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial u} & E - \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial u}\right)^2 - \rho_1 \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial u^2} \\ -\rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial u} & E & \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u} \\ E - \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial u}\right)^2 - \rho_1 \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial u^2} & \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u} & S\left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2}\right)^2 \end{vmatrix}.$$

Les deux points  $f_1$  et  $f_2$  se confondent en un seul si  $\delta$  est nul; on a ainsi l'équation

$$\rho_1^2 \left[ \left( E - \frac{F^2}{G} \right) S\left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2}\right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial E}{\partial u}\right)^2 \right] + \rho_1 \frac{F}{\sqrt{G}} \frac{\partial E}{\partial u} \left[ \rho_1 \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{F}{\sqrt{G}} \right) + \frac{F^2}{G} - E \right] - E \left[ E - \frac{F^2}{G} - \rho_1 \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{F}{\sqrt{G}} \right) \right]^2 = 0$$

qu'il est avantageux de mettre sous la forme

$$(5) \quad \rho_1^2 \left[ \left( E - \frac{F^2}{G} \right) \left\{ S\left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{F}{\sqrt{G}}\right)^2 \right\} - \frac{1}{4} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left( E - \frac{F^2}{G} \right) \right\}^2 \right] + \left( E - \frac{F^2}{G} \right) \rho_1 \frac{2EF}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial u} \log \left( \frac{F}{\sqrt{EG}} \right) - E \left( E - \frac{F^2}{G} \right)^2 = 0.$$

Nous avons ainsi entre les inconnues  $x_1, y_1, z_1, \rho_1$  trois équations, à savoir (5) et les deux premières équations (3). On peut remarquer que l'équation (5) se réduit à une identité si  $EG - F^2$  est nul, ce qui donnerait une surface  $(x_1, y_1, z_1)$  réduite à une courbe, solution à écarter; on peut d'ailleurs remplacer (5) par l'équation

$$(5') \quad \rho_1^2 \left[ S\left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{F}{\sqrt{G}}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial u} \sqrt{E - \frac{F^2}{G}}\right)^2 \right] + \frac{2EF}{\sqrt{G}} \rho_1 \frac{\partial}{\partial u} \left( \log \frac{F}{\sqrt{EG}} \right) - E \left( E - \frac{F^2}{G} \right) = 0$$

qui ne présente plus l'inconvénient d'introduire cette solution étrangère; en résolvant cette équation en  $\rho_1$  et remplaçant  $\rho_1$  par cette valeur dans les équations

$$G = \left( \frac{\partial \rho_1}{\partial v} \right)^2, \quad F = \frac{\partial \rho_1}{\partial u} \frac{\partial \rho_1}{\partial v}$$

nous obtenons deux équations assez compliquées définissant  $x_1, y_1, z_1$  au moyen de  $u, v$ ; nous sommes assurés d'avoir des solutions du problème; le paragraphe suivant, qui introduit une équation de plus, confirme l'existence de solutions. *Nous obtenons les  $\infty^2$  sphères principales d'une certaine surface S, dont chacune porte un cercle C tangent à la ligne de courbure correspondante de S et d'autre part osculateur à l'une des courbes d'une famille simplement infinie tracée sur une autre surface S<sub>1</sub>. La surface S est le lieu du foyer f<sub>1</sub> et la surface S<sub>1</sub> est le lieu du foyer f<sub>1</sub>.*

**12. — Congruence de cercles osculateurs aux lignes de courbure d'un système de deux surfaces différentes.**

Abordons maintenant le cas

$$\boxed{\begin{array}{cc} \underbrace{f_1 \ f_2} & \underbrace{f_3 \ f_4} \\ C_1 & C_2 \end{array}}$$

qui est une particularisation des cas déjà envisagés

$$\boxed{\begin{array}{cc} \underbrace{f_1 \ f_2} & \underbrace{f_3 \ f_4} \\ C_1 & C_3 \end{array}},$$

$$\boxed{\begin{array}{cc} \underbrace{f_1 \ f_2} & \underbrace{f_3 \ f_3} \\ C_1 & C_3 \end{array}},$$

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \underbrace{f_1 \ f_1} & f_2 & f_3 \\ C_1 & C_2 & C_2 \end{array}}$$

L'avant-dernier de ces deux cas a été traité au paragraphe 7. Nous savons, d'après ce paragraphe, que l'on a le cercle C par les deux équations

$$(1) \quad \Sigma_1 = 0, \quad \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = 0.$$

Les lignes  $(u, v)$  forment sur la surface  $(x_1, y_1, z_1)$  un réseau conjugué, les lignes  $u = \text{const}$  étant géodésiques; on a de plus

$$(2) \quad \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \right)^2 = G.$$

$$(3) \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} = F.$$

Les cercles C sont les cercles osculateurs des lignes de courbure  $u = \text{const}$  de la surface développante de la surface  $(x_1, y_1, z_1)$  relative au système géodésique  $u = \text{const}$  et à la fonction  $\varphi_1$ . Nous devons adjoindre l'équation

$$(4) \quad \varphi_1^2 \left[ S \left( \frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} \right)^2 - \left( \frac{\partial}{\partial u} \frac{F}{\sqrt{G}} \right)^2 - \left( \frac{\partial}{\partial u} \sqrt{E - \frac{F^2}{G}} \right)^2 \right] + \frac{2EF}{\sqrt{G}} \varphi_1 \frac{\partial}{\partial u} \left( \log \frac{F}{\sqrt{EG}} \right) - E \left( E - \frac{F^2}{G} \right) = 0$$

qui exprime que les foyers définis par les équations  $\Sigma_1 = \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial u^2} = 0$  sont confondus; les équations (2), (3), (4) sont celles du paragraphe précédent; l'équation

$$(5) \quad \left| \frac{\partial x_1}{\partial u} \quad \frac{\partial x_1}{\partial v} \quad \frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v} \right| = 0$$

s'est ajoutée pour exprimer que le cercle C est coupé par le cercle infiniment voisin  $(u, v + dv)$  en deux points confondus avec  $f_2$  et non simplement en l'unique point  $f_2$ . Nous avons ainsi quatre équations aux dérivées partielles à quatre fonctions inconnues  $x_1, y_1, z_1, \varphi_1$ . Si nous nous reportons aux résultats du paragraphe 4, à la

figure 1, ( et aussi aux résultats du paragraphe 7 relatif au cas  $\left( \begin{array}{cc} f_1 & f_2 \\ \hline C_1 & C_3 \end{array} \right)$ ,

nous voyons que les lignes  $u = \text{const}$  de la surface  $(x_1, y_1, z_1)$  et les lignes  $v = \text{const}$  de la surface  $(x_2, y_2, z_2)$  sont géodésiques: c'est la propriété caractéristique pour les deux nappes focales de la congruence des axes des cercles C; les deux cordes  $M_1 M'_1$  et  $\nu_1 \nu'_1$  de la figure 1, appelées ici  $(f_1 f_1)$  et  $(f_2 f_2)$  sont tangentes au cercle C en  $f_1$  et  $f_2$ ; en  $f_2$  le cercle C est osculateur à la ligne de courbure  $u = \text{const}$  de la surface focale lieu de  $f_2$ ; en  $f_1$  le cercle C est osculateur à la ligne de courbure  $v = \text{const}$  de la surface focale lieu de  $f_1$ ; la sphère de centre  $m_1$  et rayon  $m_1 f_2$  contenant C est sphère principale pour la surface lieu de  $f_2$ ; la sphère

de centre  $m_2$  et contenant  $C$  est sphère principale pour la surface lieu de  $f_1$ . Dans la suite de cercles due à la transformation de Laplace, conformément aux résultats du paragraphe 7, le cercle  $C$  est encadré par deux cercles de rayon nul : avant, par le cercle de rayon nul  $f_2$  situé sur la sphère de centre  $m_1$ ; après, par le cercle de rayon nul de centre  $f_1$  situé sur la sphère de centre  $m_2$ .

Si cette méthode conduit moins élégamment au résultat que celle qui va suivre, elle a l'avantage de montrer que pour un couple  $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$  de deux surfaces connu, la fonction  $\rho_1$  s'obtient sans quadrature : en effet l'équation (4) donne  $\rho_1$  par une équation explicite, algébrique et de degré 2; on a même  $\rho_1$  rationnellement; en effet en adjoignant à l'équation (4), écrite pour abrégier,

$$\rho_1^2 + 2M\rho_1 + N = 0$$

les équations dérivées en  $u$  ou  $v$ , on a

$$2(\rho_1 + M)\frac{F}{\sqrt{G}} + 2\frac{\partial M}{\partial u}\rho_1 + \frac{\partial N}{\partial u} = 0,$$

$$2(\rho_1 + M)\sqrt{G} + 2\frac{\partial M}{\partial v}\rho_1 + \frac{\partial N}{\partial v} = 0.$$

On remarquera encore que  $\rho_1$  est solution de l'équation de Laplace vérifiée par  $x_1, y_1, z_1, \sigma_1 (2\sigma_1 = \rho_1^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2)$ ;  $\rho_2$  est aussi solution de l'équation de Laplace vérifiée par  $x_2, y_2, z_2, \sigma_2 (2\sigma_2 = \rho_2^2 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2)$  transformée de la précédente en écrivant  $\theta_2 = \theta_1 - \frac{1}{B}\frac{\partial \theta_1}{\partial u}$ , mais  $\rho_1$  et  $\rho_2$  ne sont pas deux solutions correspondantes; il y a inversion du rôle des variables  $u, v$  en passant de  $S_1$  à  $S_2$ .

Ce Mémoire a été remis à la direction des *Annales de Toulouse* le 15 mars 1933; j'avais signalé en mars 1933, par écrit à MM. Cartan, Finikoff et Vincensini, oralement à M. Drach, l'intérêt que présentent les congruences rectilignes dont les développables touchent les surfaces focales suivant des géodésiques ( $u = \text{constante}$  sur l'une des focales,  $v = \text{constante}$  sur l'autre), à l'opposé des congruences de normales qui donnent sur les focales des géodésiques comme arêtes de rebroussement. M. Finikoff m'a envoyé, dans une lettre reçue le 30 mars 1933, les calculs qui suivent (donnant le système E); je les avais envoyés, comme supplément à mon travail, le 15 avril 1933, [en y ajoutant les systèmes E', E'' plus commodes pour la discussion], puis indiquant, toujours d'après M. Finikoff, un cas d'intégrabilité par équations différentielles ( $e = g$ ;  $e, g, f$  fonctions de  $u + v$ ); j'ignorais, en rédigeant ce complément, que M. Drach avait donné le 10 avril aux *Comptes Rendus* une Note (C. R., 196, 10 avril 1933, p. 1057) où il donnait les résultats obtenus par M. Finikoff et moi-même sur ce problème précis, et bien d'autres encore; un échange de vues entre M. Drach et moi a eu comme conclusion deux Notes publiées



l'une par M. Drach, l'autre par moi, au numéro du 1 mai 1933 des *C. R.* J'ai donc de nouveau rédigé la fin de ce paragraphe et résumé dans ce qui suit (écrit à la date du 14 mai 1933) les résultats des deux Notes de M. Drach; je renvoie le lecteur aux Notes indiquées.

La méthode qui suit s'applique chaque fois que les quatre points focaux donnent lieu à deux cercles infiniment voisins, contenant chacun deux des foyers; elle fait intervenir la congruence rectiligne des axes des cercles et la représentation sphérique de cette congruence, d'après Guichard (voir par exemple, BIANCHI, *Géométrie différentielle*, t. I, 3<sup>e</sup> édition, chapitre X, pages 483 et suivantes); les résultats du paragraphe 4 ont déjà mis en évidence la façon naturelle dont s'introduit cette méthode, puisque, d'une part, la congruence rectiligne  $m_1 m_2$  joue un rôle important et que, d'autre part, le point  $\mu$  commun aux deux cordes  $\mu_1 \mu'_1$  et  $M_1 M'_1$  engendre une surface dont la normale est parallèle à  $m_1 m_2$ , rapportée à un réseau conjugué correspondant aux développables de la congruence  $m_1 m_2$ ; on voit aussitôt que le parallélisme, au sens de Peterson, doit jouer un rôle important.

Soit donc

$$(6) \quad d\sigma^2 = e du^2 + 2f du dv + g dv^2$$

la représentation sphérique des développables rapportée à ses congruences (ou la représentation sphérique de la surface lieu du pôle de  $f_1 f_2$  relativement au cercle  $C$ , surface rapportée au réseau conjugué correspondant aux développables). Nous appelons  $2\varphi$  le segment focal et désignons par  $a, b$  les symboles de Christoffel

$$a = \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix}, \quad b = \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix}$$

relatifs à l'élément sphérique (6); on sait que ces symboles  $a, b$  peuvent être définis par les équations

$$(7) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial e}{\partial v} = a e + b f, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial u} = a f + b g.$$

Sur la première nappe focale (lieu de  $m_1$ ) les lignes  $u = \text{const}$  sont géodésiques ce qui donne

$$(8) \quad F \frac{\partial G}{\partial v} - 2G \frac{\partial F}{\partial v} + G \frac{\partial G}{\partial u} = 0;$$

or on a

$$(9) \quad E = 4 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} + b \varphi \right)^2, \quad F = -4a\varphi \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} + b \varphi \right), \quad G = 4\varphi^2 (a^2 + g).$$

L'équation (8) est

$$(10) \left\{ \begin{array}{l} a\rho \left( \frac{\partial \rho}{\partial u} + b\rho \right) \left\{ 2\rho \frac{\partial \rho}{\partial v} (a^2 + g) + \rho^2 \left( 2a \frac{\partial a}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial v} \right) \right\} \\ - 2\rho^2 (a^2 + g) \left\{ \left( \frac{\partial a}{\partial v} \rho + a \frac{\partial \rho}{\partial v} \right) \left( \frac{\partial \rho}{\partial u} + b\rho \right) + a\rho \left( \frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} + \frac{\partial b}{\partial v} \rho + b \frac{\partial \rho}{\partial v} \right) \right\} \\ - \rho^2 (a^2 + g) \left\{ 2\rho \frac{\partial \rho}{\partial u} (a^2 + g) + \rho^2 \left( 2a \frac{\partial a}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial u} \right) \right\} = 0. \end{array} \right.$$

Mais on sait que  $\rho$  satisfait à l'équation

$$(11) \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} + a \frac{\partial \rho}{\partial u} + b \frac{\partial \rho}{\partial v} + \left( \frac{\partial a}{\partial u} + \frac{\partial b}{\partial v} + f \right) \rho = 0$$

de sorte que, dans (10), on peut remplacer  $\frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} + \frac{\partial b}{\partial v} \rho + b \frac{\partial \rho}{\partial v}$  par  $-\left( a \frac{\partial \rho}{\partial u} + \frac{\partial a}{\partial u} \rho + f\rho \right)$ , ce qui donne le résultat

$$(12) \quad \frac{\partial \rho}{\partial u} \left\{ a \frac{\partial g}{\partial v} - 2g \frac{\partial a}{\partial v} - 2a^2 g - 2g^2 \right\} + ab\rho \frac{\partial g}{\partial v} - 2b \frac{\partial a}{\partial v} \rho g \\ + (a^2 + g) \left( 2af\rho - \rho \frac{\partial g}{\partial u} \right) = 0.$$

En remplaçant  $2af - \frac{\partial g}{\partial u}$  par  $(-2bg)$ , on obtient

$$(13) \quad \left( \frac{\partial \rho}{\partial u} + b\rho \right) \left[ a \frac{\partial g}{\partial v} - 2g \frac{\partial a}{\partial v} - 2g(a^2 + g) \right] = 0.$$

Le premier facteur donnerait  $E = F = 0$ , de sorte que la nappe  $(x_1, y_1, z_1)$  dégénérerait en courbe (nous retrouvons par cette voie le résultat obtenu plus haut, car l'équation (4) avait été obtenue après suppression du facteur  $E - \frac{F^2}{G}$ ). Nous devons donc conserver uniquement le second facteur; l'équation obtenue

$$(14) \quad a \frac{\partial g}{\partial v} - 2g \frac{\partial a}{\partial v} - 2g(a^2 + g) = 0$$

ne fait intervenir que l'élément sphérique de l'image des développables, ce qui montre que le parallélisme de Peterson doit entrer en jeu. La condition symétrique pour l'autre nappe (lignes  $v = \text{const.}$  géodésiques) est de même, par échange de  $u$  et  $v$ ,

$$(15) \quad b \frac{\partial e}{\partial u} - 2e \frac{\partial b}{\partial u} - 2e(b^2 + e) = 0.$$

Finalement, nous avons pour les cinq fonctions inconnues  $e, f, g, a, b$  les deux équations (7) qui servent à définir  $a, b$  en fonction de  $e, f, g$ , les deux équations (14), (15) qui signifient que les courbes  $u = \text{const}$  de la première nappe ( $m_1$ ) et  $v = \text{const}$  de la seconde nappe ( $m_2$ ) sont géodésiques et la cinquième équation non encore écrite qui exprime que la courbure de la forme  $d\sigma^2$  est égale à l'unité. Rassemblons ces équations en posant  $f = \sqrt{eg} \cos \omega$ , de sorte que  $\omega$  désigne l'angle des plans focaux :

$$(E) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial e}{\partial v} = 2(ae + bf), \quad \frac{\partial g}{\partial u} = 2(af + bg), \\ a \frac{\partial g}{\partial v} - 2g \frac{\partial a}{\partial v} - 2g(a^2 + g) = 0, \quad b \frac{\partial e}{\partial u} - 2e \frac{\partial b}{\partial u} - 2e(b^2 + e) = 0, \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} + \frac{\partial}{\partial u} \left( b \sqrt{\frac{g}{e}} \sin \omega \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( a \sqrt{\frac{e}{g}} \sin \omega \right) + \sqrt{eg} \sin \omega = 0. \end{array} \right.$$

Il est naturel de poser  $e = \alpha^2, g = \beta^2, f = \alpha\beta \cos \omega$ . On a ainsi

$$(E') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \alpha}{\partial v} = a\alpha + b\beta \cos \omega, \quad \frac{\partial \beta}{\partial u} = a\alpha \cos \omega + b\beta, \\ a \frac{\partial \beta}{\partial v} - \beta \frac{\partial a}{\partial v} - \beta(a^2 + \beta^2) = 0, \quad b \frac{\partial \alpha}{\partial u} - \alpha \frac{\partial b}{\partial u} - \alpha(b^2 + \alpha^2) = 0, \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} + \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{b\beta}{\alpha} \sin \omega \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{a\alpha}{\beta} \sin \omega \right) + \alpha\beta \sin \omega = 0. \end{array} \right.$$

Cette forme suggère de poser

$$(16) \quad \frac{\beta}{a} = \text{tg } \varphi, \quad \frac{\alpha}{b} = \text{tg } \psi,$$

de sorte que l'on a aussitôt

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{g} = \beta = \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \quad \sqrt{e} = \alpha = \frac{\partial \psi}{\partial u}, \quad a = \cot \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \quad b = \cot \psi \frac{\partial \psi}{\partial u}, \\ d\sigma^2 = \left( \frac{\partial \psi}{\partial u} \right)^2 du^2 + 2 \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cos \omega dudv + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 dv^2. \end{array} \right.$$

On a entre  $\varphi, \psi, \omega$  trois équations nécessaires et suffisantes obtenues en gardant les deux premières équations (E'), qui donnent maintenant  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v}$ , et

la dernière équation où l'on remplace  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}$ ,  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v}$  par ces valeurs. On a ainsi le système E''

$$(E'') \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \{ \cot \psi + \cot \varphi \cos \omega \}, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \{ \cot \varphi + \cot \psi \cos \omega \}, \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} + \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \omega}{\partial u} \cot \psi + \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \omega}{\partial v} \cot \varphi \right] \cos \omega + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} [2 \cot \varphi \cot \psi \cos \omega - 1] \sin \omega = 0. \end{array} \right.$$

On y ajoute l'équation (11) en  $\varphi$

$$(18) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cot \psi + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \cot \psi + \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \cot \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \cot \psi \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cos \omega \right] \varphi = 0.$$

J'indique maintenant les résultats  $a, b, c, d$  dus à M. Drach.

Le système (E'') est rapporté à ses *caractéristiques*; on remarque que les paramètres  $u, v$  ne sont pas essentiels, que la substitution  $(u, v; U, V)$  où  $U$  et  $V$  sont fonctions arbitraires de  $u, v$  respectivement ne change pas la forme du système; de la sorte l'intégrale  $(\varphi, \psi, \omega)$  du système E'' dépend de six fonctions arbitraires d'une variable, dont deux sont  $U, V$ .

a. — Si donc deux des trois fonctions  $\varphi, \psi, \omega$  sont *indépendantes*, il peut y avoir intérêt à les prendre comme paramètres indépendants nouveaux, au lieu de  $u, v$ : on obtiendrait ainsi trois équations définissant  $u, v, \omega$  en fonction de  $\varphi$  et  $\psi$ ; l'élimination de  $u, v$  fournirait soit une équation d'ordre 4 en  $\omega$  soit un système de plusieurs équations d'ordre au moins 4 en  $\omega$  (compatibles avec une solution dépendant de quatre fonctions arbitraires d'une variable); ensuite on aurait  $u, v$  comme intégrales premières d'une équation

$$R(\varphi, \psi, \omega) d\psi^2 - 2S(\varphi, \psi, \omega) d\varphi d\psi + T(\varphi, \psi, \omega) d\varphi^2 = 0.$$

b. — Si au contraire  $\varphi, \psi$  sont liés par une relation  $\psi \equiv \psi(\varphi)$ , désignons par  $\psi'$  et  $\psi''$  les dérivées de la fonction  $\psi(\varphi)$  par rapport à  $\varphi$ : les deux premières équations (E'') donnent

$$\cos \omega \{ \psi' \cot \varphi - \cot \psi \} = \cot \varphi - \psi' \cot \psi - \frac{\psi''}{\psi'}$$

de sorte que, *en général*,  $\omega$  est lui aussi fonction de  $\varphi$ ;  $\Omega$  désignant une fonction provisoirement indéterminée de  $\varphi$ , on a

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v} = \{ \Omega' \psi' (\cos \omega \cot \varphi + \cot \psi) + \Omega'' \} \varphi_u \varphi_v$$

et par suite, en déterminant  $\Omega(\varphi)$  par l'équation  $\Omega'' + \Omega' \psi' (\cos \omega \cot \varphi + \cot \psi) = 0$ , on a  $\Omega \equiv U + V$  ou plus simplement  $\Omega \equiv u + v$ : on peut donc supposer  $\varphi, \psi, \omega$  fonctions de  $u + v$ ; on obtient alors trois équations différentielles ordinaires pour déterminer  $\varphi, \psi, \omega$  en fonction de  $t = u + v$ .

c. — Si l'on suppose  $\cos \psi = k \cos \varphi$  où  $k$  est une constante quelconque, les deux premières équations (E'') se réduisent à une seule; dans ce cas  $\omega, \varphi$  sont donnés en  $u, v$  par deux équations aux dérivées partielles en  $u, v$ ; si on suppose, *en outre*,  $\omega$  lui-même fonction de  $\varphi$ ,  $\omega$  et  $\varphi$  peuvent être supposés fonctions de  $t = u + v$  et l'on obtient deux équations différentielles pour déterminer  $\omega$  et  $\varphi$  en  $t$  (celles qui ont été signalées au paragraphe b où l'on fait  $\cos \psi = k \cos \varphi$ ). On voit aisément que le cas spécial  $k = \pm 1$  se ramène par changement de notations à  $k = 1, \psi = \varphi$  et on a deux équations aux dérivées partielles pour calculer  $\varphi$  et  $\omega$  en  $u, v$ .

d. — *Pour avoir une congruence rectiligne des axes qui soit de Ribaucour, on doit avoir*  $\frac{\partial a}{\partial u} = \frac{\partial b}{\partial v}$ . (Rappelons qu'une congruence rectiligne de Ribaucour s'obtient en prenant un couple de surfaces  $S, \bar{S}$  se correspondant avec orthogonalité des éléments linéaires homologues; par chaque point  $\bar{M}$  de  $\bar{S}$  on mène le rayon parallèle à la normale au point homologue  $M$  de  $S$ ; les développables de la congruence correspondent aux asymptotiques de  $S$  et coupent la surface *moyenne* suivant un *réseau conjugué à invariants égaux*: cette dernière propriété, d'après Guichard, est caractéristique; il suffit même que le réseau découpé sur la surface moyenne par les développables d'une congruence soit conjugué, pour qu'il soit à invariants égaux et que la congruence soit de Ribaucour). Ici on a

$$a = \frac{\partial}{\partial v} \log \sin \varphi, \quad b = \frac{\partial}{\partial u} \log \sin \psi$$

et la condition devient

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = 0,$$

ce qui permet de supposer [grâce à la substitution  $(u, v; U, V)$ ],

$$\sin \psi = e^{u+v} \sin \varphi \quad \text{ou} \quad \sin \psi = e^u \sin \varphi \quad \text{ou} \quad \sin \psi = k \sin \varphi,$$

en désignant par  $k$  une constante.

Les deux premières hypothèses s'éliminent aisément; si l'on prend la dernière hypothèse, le cas où  $k = \pm 1$  peut, sans restreindre, être ramené à  $k = 1$ ,  $\psi = \varphi$  et l'on retrouve un cas particulier de (c). Si  $k \neq \pm 1$ ,  $\psi$  est fonction de  $\varphi$ ,  $\omega$  aussi : on retrouve un cas particulier de (b), mais alors  $\sin \psi = k \sin \varphi$  est incompatible avec les trois équations qui déterminent  $\varphi, \psi, \omega$  en fonction de  $t = u + v$ .

Voici encore quelques remarques dues à M. Drach;  $\omega$  est l'angle des lignes de coordonnées  $u, v$  sur la sphère;  $\psi(u_1, v_0) - \psi(u_0, v_0)$  est l'arc compris sur la courbe sphérique  $v_0$  entre les points  $(u_1, u_0)$ ; de même  $\varphi$  mesure un arc porté sur la courbe sphérique  $u = \text{constante}$ . Mais l'interprétation de  $\varphi$  ou  $\psi$  est encore plus géométrique sur les nappes focales de la congruence rectiligne; l'angle  $V$  des lignes de coordonnées sur la surface  $(m_1)$  a pour cosinus l'expression  $\frac{F}{\sqrt{EG}}$ ; or on a vu que

$$F = -4a\rho \left( \frac{\partial \rho}{\partial u} + b\rho \right), \quad EG = 16\rho^2 \left( \frac{\partial \rho}{\partial u} + b\rho \right)^2 (a^2 + \beta^2) = 16\rho^2 \left( \frac{\partial \rho}{\partial u} + b\rho \right)^2 \frac{a^2}{\cos^2 \varphi}.$$

On peut donc prendre  $\cos V = \cos \varphi$ , en choisissant convenablement le signe de  $\sqrt{EG}$ ; donc  $\varphi$  est l'angle des lignes coordonnées sur la surface  $(m_1)$  et  $\psi$  l'angle analogue sur la surface  $(m_2)$ .

J'indique maintenant rapidement comment j'ai obtenu une intégrale première du système différentiel d'ordre 4 qui donne  $\varphi, \omega$  en fonction de  $u + v = t$  en supposant  $\varphi \equiv \psi$  et  $\varphi, \omega$  fonctions de  $t$ . On a, dans ces hypothèses, à intégrer le système

$$(19) \quad \begin{cases} \varphi'' = \varphi'^2 (1 + \cos \omega) \cot \varphi, \\ \omega'' + 2\omega' \varphi' \cot \varphi \cos \omega + \varphi'^2 (2 \cot^2 \varphi \cos \omega - 1) \sin \omega = 0. \end{cases}$$

Le  $d\sigma^2$  de la sphère est

$$(20) \quad \begin{aligned} d\sigma^2 &= \varphi'^2 [du^2 + dv^2 + 2dudv \cos \omega], \\ &= \varphi'^2 \left[ (du + dv)^2 \cos^2 \frac{\omega}{2} + (du - dv)^2 \sin^2 \frac{\omega}{2} \right]. \end{aligned}$$

Les accents désignent une dérivation en  $t$ . On voit que si l'on pose

$$(21) \quad \varphi' \cos \frac{\omega}{2} dt = du_1, \quad du - dv = d\lambda, \quad \varphi' \sin \frac{\omega}{2} = U_1$$

l'élément  $d\sigma^2$  prend la forme classique

$$(22) \quad d\sigma^2 = du_1^2 + U_1^2 d\lambda^2$$

où  $U_1$  est fonction du seul argument  $u_1$ . Les courbes  $\lambda = \text{constante}$  sont donc des

grands cercles pivotant autour d'un diamètre fixe de la sphère, et si l'on écarte le cas singulier où ce diamètre serait isotrope (les surfaces obtenues seraient alors imaginaires), on peut prendre  $U_1 = A \sin(u_1 - h)$  où  $A, h$  sont constants; on peut donner à  $h$  telle valeur numérique que l'on veut; car la quadrature  $du_1 = \varphi' \cos \frac{\omega}{2} dt$  introduit une constante arbitraire nouvelle ne portant que sur  $u_1$  et n'intervenant pas dans les constantes relatives aux fonctions  $\omega, \varphi$  de  $t$ . En écrivant donc  $U_1 = A \sin u_1$ , nous avons exprimé que la courbure du  $d\sigma^3$  est l'unité, donc tenu compte de la seconde équation (19) qui disparaît. On a ainsi le système donnant  $u_1, \varphi, \omega$

$$(23) \quad \begin{cases} \varphi'' = \varphi'^2 (1 + \cos \omega) \cot \varphi = 2 \varphi'^2 \cos^2 \frac{\omega}{2} \cot \varphi, \\ \varphi' \cos \frac{\omega}{2} = \frac{du_1}{dt}, \quad \varphi' \sin \frac{\omega}{2} = A \sin u_1. \end{cases}$$

On en déduit

$$(24) \quad \begin{cases} \varphi'^2 = \left(\frac{du_1}{dt}\right)^2 + A^2 \sin^2 u_1, & \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{A \sin u_1}{\left(\frac{du_1}{dt}\right)}, \\ \varphi'' = 2 \cot \varphi \left(\frac{du_1}{dt}\right)^2. \end{cases}$$

La dérivation de l'équation qui donne  $\varphi'^2$  donne aussitôt

$$(25) \quad \cot \varphi = \frac{\frac{d^2 u_1}{dt^2} + A^2 \sin u_1 \cos u_1}{2 \frac{du_1}{dt} \sqrt{\left(\frac{du_1}{dt}\right)^2 + A^2 \sin^2 u_1}}.$$

En dérivant l'équation (25), remplaçant  $\cot \varphi$  et  $\varphi'$  par les valeurs déduites de (25) et (24) on a une équation d'ordre 3 donnant  $u_1$  en  $t$ ;  $\varphi, \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}$  sont donnés explicitement en  $t$  par (25) et (24). L'équation résolvante annoncée ne contient pas  $t$  explicitement, de sorte qu'elle se ramène à une équation d'ordre 2, liant par exemple  $u_1$  et  $\frac{du_1}{dt}$ , donnant  $\frac{du_1}{dt} = P(u_1, C_1, C_2, A)$  où  $C_1, C_2$  sont des constantes, suivie d'une quadrature donnant

$$t = \int \frac{du_1}{P(u_1, C_1, C_2, A)}.$$

On peut remarquer ici que la substitution  $(u, v; \lambda u, \lambda v)$  où  $\lambda$  est une constante arbitraire remplace  $t$  par  $\lambda t$  et  $A$  par  $\frac{A}{\lambda}$ , en raison de l'équation  $d\varphi \sin \frac{\omega}{2} = (A dt) \sin u_1$ , de sorte que l'on peut donner à  $A$  une valeur fixe, telle que l'unité, sans restreindre.

On peut remarquer à l'avance que  $\omega, \varphi$  sont des fonctions de  $t$  de la forme spéciale

$$\varphi \equiv \varphi[\lambda t + \mu, C_1, C_2], \quad \omega \equiv \omega[\lambda t + \mu, C_1, C_2]$$

où  $\lambda, \mu, C_1, C_2$  sont des constantes arbitraires; il existe donc une relation  $R[\varphi, \omega, C_1, C_2] = 0$ ; donc  $\omega$ , considéré comme fonction de  $\varphi$  satisfait à une équation différentielle du second ordre, (équivalente à l'équation du second ordre que j'ai signalée entre  $u_1$  et  $\frac{du_1}{dt}$ ) et on doit obtenir ensuite  $t$  par une quadrature; c'est la méthode que signale M. Drach dans sa seconde note; on a en effet

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{d^2\omega}{dt^2} = \frac{d^2\omega}{d\varphi^2} \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{d\omega}{d\varphi} \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

et la seconde équation (19) devient, en tenant compte de la première

$$(26) \quad \frac{d^2\omega}{d\varphi^2} + \frac{d\omega}{d\varphi} (1 + 3 \cos \omega) \cot \varphi + (2 \cot^2 \varphi \cos \omega - 1) \cos \omega = 0.$$

Si on a suivi cette marche et obtenu  $\omega(\varphi)$ , on a en dérivant la dernière équation (23) en  $t$

$$A \cos u_1 \left(\frac{d\varphi}{dt} \cos \frac{\omega}{2}\right) = \left[2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \cos^2 \frac{\omega}{2} \cot \varphi\right] \sin \frac{\omega}{2} + \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dt} \cos \frac{\omega}{2} \frac{d\omega}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt}$$

de sorte qu'en divisant le tout par  $\frac{d\varphi}{dt} \cos \frac{\omega}{2}$ , on obtient

$$(27) \quad \begin{cases} A \cos u_1 = \left[ \sin \omega \cot \varphi + \frac{1}{2} \frac{d\omega}{d\varphi} \right] \frac{d\varphi}{dt}, \\ A \sin u_1 = \sin \frac{\omega}{2} \frac{d\varphi}{dt}. \end{cases}$$

On a donc par élévation au carré et addition

$$(28) \quad A dt = d\varphi \sqrt{\sin^2 \frac{\omega}{2} + \left[ \sin \omega \cot \varphi + \frac{1}{2} \left(\frac{d\omega}{d\varphi}\right) \right]^2}.$$



On a retrouvé ce fait que  $At$  s'obtient par une quadrature, une fois intégrée l'équation différentielle d'ordre 2; les constantes seules essentielles ici sont  $C_1$  et  $C_2$ .

M. Drach a montré comment  $\varphi, \psi, \omega$  étant fonctions de  $t = u + v$  on doit opérer pour intégrer le système différentiel d'ordre 6 qui généralise celui d'ordre 4 obtenu pour  $\psi \equiv \varphi$ ; on détermine d'abord  $\omega, \psi$  en fonction de  $\varphi$  par un système différentiel d'ordre 4 [obtenu en éliminant  $\lambda t + \mu$  entre les équations

$$\begin{aligned}\varphi &\equiv \varphi(\lambda t + \mu, C_1, C_2, C_3, C_4), & \psi &\equiv \psi(\lambda t + \mu, C_1, C_2, C_3, C_4), \\ \omega &\equiv \omega(\lambda t + \mu, C_1, C_2, C_3, C_4).\end{aligned}$$

Théoriquement, *deux* quadratures seraient nécessaires pour obtenir ensuite  $t$ ; la remarque que j'avais faite et que M. Drach a reprise conduit à une intégrale première qui donne explicitement  $\frac{\lambda dt}{d\varphi}$  et il reste une quadrature à faire.

Il est intéressant de montrer que les surfaces obtenues pour  $\varphi, \psi, \omega$  fonctions de  $u + v$  (ainsi que  $\rho$ ) sont *hélicoïdales*. Cela résulte aussitôt de ce fait que pour  $x_1, y_1, z_1$  coordonnées de  $m_1$ , on a, en appelant  $X, Y, Z$  les coordonnées du point correspondant de la sphère

$$(29) \quad \frac{\partial x_1}{\partial u} = 2 \left( \frac{\partial \rho}{\partial u} + b\rho \right) X, \quad \frac{\partial x_1}{\partial v} = -2a\rho X + 2\rho \frac{\partial X}{\partial v}$$

et analogues pour  $y_1, z_1$ ; les cosinus  $X, Y, Z$  vérifient les équations

$$(30) \quad \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} = a \frac{\partial X}{\partial u} + b \frac{\partial X}{\partial v} - fX$$

de sorte que  $D, D', D''$  coefficients de Gauss pour la surface ( $m_1$ ) dépendent, comme  $E, F, G$  uniquement de  $(u + v)$ . Mais alors la correspondance  $(u, v; u + \lambda, v - \lambda)$  où  $\lambda$  est une constante arbitraire ne change pas  $E, F, G, D, D', D''$ , donc réalise un *déplacement* de la surface, la faisant glisser sur elle-même; elle est donc ou révolutive ou hélicoïdale; pour départager, il suffit de remarquer que les lignes  $u + v = \text{const}$ , le long desquelles la courbure totale reste constante, ne vérifient pas l'équation différentielle des lignes de courbure; les surfaces sont donc hélicoïdales.

Il serait curieux de décider si les cercles déduits de cette recherche, osculateurs aux lignes de courbure de deux surfaces différentes dans un système, peuvent ou non rester orthogonaux à une famille de surfaces. On sait que cette question fait aussi intervenir la représentation sphérique des développables de la congruence des axes; la congruence de ces axes doit être *cyclique*; elle l'est en général une fois et elle ne peut l'être  $\infty$  fois que si l'on a  $\frac{\partial a}{\partial u} = \frac{\partial b}{\partial v} = 2ab$ , condition qui ne peut être réalisée dans le problème actuel.

On remarquera aussi que  $\omega$  ici ne peut devenir égal à  $\frac{\pi}{2}$  d'une façon permanente, de sorte que la congruence des axes des cercles n'est pas normale : autrement dit les surfaces focales ne sont pas surfaces de Voss.

13. — Étude du cas d'un foyer triple.

Prenons d'abord le cas

$$\begin{array}{cccc} f_1 & f_1 & f_1 & f_2 \\ C_1 & C_1 & C_1 & C_2 \end{array}$$

Pour obtenir un cercle ayant quatre points communs avec une surface  $S$ , il suffit de construire une sphère tangente à  $S$  en un point  $M$ , puis de la couper par le plan osculateur à l'une des branches d'intersection de  $S$  et de la sphère issues de  $M$ ; on sait qu'à une direction arbitraire du plan tangent correspond une seule sphère donnant cette direction comme tangente au point double. On pourra donc prendre une surface  $S$  arbitraire comme lieu du foyer triple  $f_1$ ; on trace sur  $S$  une famille arbitraire de courbes  $\gamma$  à un paramètre; à chaque tangente d'une de ces courbes  $\gamma$  on fait correspondre la sphère indiquée à l'instant et la section circulaire qui s'en déduit. Rien de plus à ajouter.

Nous voulons maintenant avoir les cas plus spéciaux : d'abord

$$\begin{array}{cccc} f_1 & f_1 & f_1 & f_2 \\ \text{---} & & & \\ C_1 & & C_1 & C_2 \end{array}$$

C'est un cas particulier du cas

$$\begin{array}{ccc} f_1 & f_2 & f_1 & f_3 \\ \text{---} & & & \\ C_1 & & C_1 & C_3 \end{array}$$

traité au paragraphe 8, cas

où  $f_2$  vient lui-même se confondre avec  $f_1$  (on tiendra compte du changement de notation naturel : si  $f_2$  est venu se confondre avec  $f_1$ , il n'y a plus de raison de garder l'indice 3). Il paraît assez difficile de donner la règle générale pour obtenir ce cas; mais on peut en découvrir très simplement un exemple : la sphère en jeu est

de rayon constant et son centre décrit le cylindre  $x^2 + y^2 = 1$ ; nous écrivons aussitôt les équations du cercle avec deux paramètres  $v$  et  $\varphi$ ;  $b$  est une constante.

$$(1) \quad \begin{cases} (x - \cos \varphi)^2 + (y - \sin \varphi)^2 + (z - v)^2 = (1 + b^2)^2, \\ x \sin \varphi - y \cos \varphi - b(z - v) = 0. \end{cases}$$

Pour obtenir les points focaux on écrit les équations

$$(2) \quad \begin{cases} (x \sin \varphi - y \cos \varphi) d\varphi - (z - v) dv = 0, \\ (x \cos \varphi + y \sin \varphi) d\varphi + b dv = 0. \end{cases}$$

La comparaison de la dernière équation (1) et de la première équation (2) prouve qu'il faut choisir entre les deux hypothèses

$$\begin{aligned} 1^\circ) \quad & b d\varphi - dv \neq 0, \quad x \sin \varphi - y \cos \varphi = 0, \quad z - v = 0, \\ 2^\circ) \quad & b d\varphi - dv = 0. \end{aligned}$$

Prenons la première : elle donne deux points focaux

$$(3) \quad \begin{cases} f_1[-b^2 \cos \varphi, \quad -b^2 \sin \varphi, \quad v], \quad dv = b d\varphi, \\ f_2[(2 + b^2) \cos \varphi, \quad (2 + b^2) \sin \varphi, \quad v], \quad (2 + b^2) d\varphi + b dv = 0. \end{cases}$$

la relation entre  $dv$  et  $d\varphi$  étant obtenue par la dernière équation (2).

La seconde hypothèse entraîne  $x \cos \varphi + y \sin \varphi + b^2 = 0$ ,  $x \sin \varphi - y \cos \varphi - b(z - v) = 0$ ; on en déduit aisément les valeurs de  $x$  et  $y$  en  $z$  et en substituant dans l'équation de la sphère on trouve  $(z - v)^2 = 0$  et on retrouve deux fois le foyer  $f_1$ . On remarquera qu'en posant

$$\varphi = u, \quad v = bu + w$$

les équations du cercle C s'écrivent bien

$$\Sigma_1 = 0, \quad \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = 0.$$

Ici le succès de la méthode tient à ce que la sphère  $\Sigma_1$  et le cylindre  $x^2 + y^2 = b^4$  admettent tous deux le rayon aboutissant en  $f_1$  comme axe de symétrie, de sorte que les plans osculateurs aux deux branches de l'intersection en  $f_1$  contiennent cet axe, qui est la normale commune, c'est-à-dire la droite  $f_1 f_2$  : cette droite  $f_1 f_2$  jointe à la tangente en  $f_1$  donne le plan adopté au paragraphe 8, plan qui dans ce paragraphe 8 n'a pas besoin d'être le plan osculateur.

Il ne reste plus à traiter que le cas

$$\begin{array}{ccc} f_1 & f_1 & \overbrace{f_1 \ f_2} \\ C_1 & C_1 & C_1 \end{array}$$

qui est le seul restant, car nous avons remarqué qu'un foyer ne donne qu'un cercle infiniment voisin; ce cas ne peut se présenter : nous pouvons le voir en remarquant qu'ici la sphère  $\Sigma$ , a deux points limites confondus : elle est osculatrice à la surface S; la tangente indiquée au début de ce paragraphe est une tangente principale; le plan osculateur à employer est le plan tangent à S et il coupe la sphère suivant un cercle de rayon nul, que nous rejetons.

14. — Étude du foyer quadruple.

On sait qu'en chaque point d'une surface il y a dix cercles ayant avec la surface cinq points communs confondus; donc prenant une surface S arbitraire et suivant par continuité un de ces dix cercles nous obtenons la congruence cherchée, qui correspond au cas

$$\begin{array}{cccc} f_1 & f_1 & f_1 & f_1 \\ C_1 & C_1 & C_1 & C_1 \end{array}$$

Le seul cas spécial à envisager est

$$\begin{array}{cc} \overbrace{f_1 \ f_1} & \overbrace{f_1 \ f_1} \\ C_1 & C_1 \end{array}$$

mais il est impossible : c'est un cas particulier du type

$$\begin{array}{ccc} \overbrace{f_1 \ f_2} & f_1 & f_1 \\ C_1 & C_1 & C_1 \end{array}$$

dont

nous avons démontré l'impossibilité (ici on suppose de plus que  $f_2$  et  $f_1$  viennent se confondre).

## 15. — Inversion. Application aux géodésiques.

L'inversion, de puissance égale à l'unité, ayant l'origine pour pôle transforme la sphère d'équation

$$(s) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x_1x - 2y_1y - 2z_1z + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - \rho_1^2 = 0$$

en la nouvelle sphère

$$(S) \quad x^2 + y^2 + z^2 - \frac{2x_1x}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - \rho_1^2} - \frac{2y_1y}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - \rho_1^2} - \frac{2z_1z}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - \rho_1^2} + \frac{1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - \rho_1^2} = 0$$

ayant pour centre  $X_1, Y_1, Z_1$  et pour rayon  $R_1$

$$(1) \quad X_1 = \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - \rho_1^2}, \quad Y_1 = \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - \rho_1^2}, \quad Z_1 = \frac{z_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - \rho_1^2},$$

$$R_1 = \frac{\rho_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - \rho_1^2}$$

on constate aussitôt que

$$(2) \quad dX_1^2 + dY_1^2 + dZ_1^2 - dR_1^2 = \frac{dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 - d\rho_1^2}{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - \rho_1^2)^2},$$

$$X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 - R_1^2 = \frac{1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - \rho_1^2}$$

égalité que l'on peut mettre sous forme plus symétrique

$$(2') \quad \frac{dX_1^2 + dY_1^2 + dZ_1^2 - dR_1^2}{R_1^2} = \frac{dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 - d\rho_1^2}{\rho_1^2}$$

*D'autre part il est clair que toute congruence de cercles est transformée par une opération du groupe conforme de l'espace à 3 dimensions en une congruence offrant les mêmes particularités; ceci explique une pénétration des propriétés métriques et anallagmatiques : les congruences les plus intéressantes sont celles où chaque cercle est représenté par deux équations*

$$(3) \quad s = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial u} = 0$$

où  $s$  est une sphère dépendant des deux paramètres  $u, v$ ; nous avons eu à étudier alors la surface focale des axes de ces cercles, lieu des arêtes de rebroussement des développables  $v = \text{constante}$ , surface que nous avons supposé être le lieu du point  $x_1, y_1, z_1$ ; cette surface, après l'inversion de pôle  $O$ , est remplacée par une autre qui ne lui correspond pas par l'inversion, mais qui lui est liée par les formules (1).

Si  $x_1, y_1, z_1$  et  $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - \rho_1^2$  sont solutions d'une équation de la forme

$$(4) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + A \frac{\partial \theta}{\partial u} + B \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0$$

il en est de même pour  $X_1, Y_1, Z_1, X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 - R_1^2$ ; même remarque s'il s'agit d'une équation de la forme

$$(5) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + A \frac{\partial \theta}{\partial u} + B \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0.$$

Si (indépendamment de la propriété qui précède), les courbes  $\rho_1 = c^1$  sont géodésiquement parallèles sur la surface  $(x_1, y_1, z_1)$ , l'expression  $\rho_1$  étant la longueur d'arc porté sur les géodésiques orthogonales, les courbes  $R_1 = c^1$  sont géodésiquement parallèles sur la surface  $(X_1, Y_1, Z_1)$ . Ces propriétés se vérifient aussitôt par calcul direct, mais elles résultent aussitôt de la transformation par inversion des congruences des divers types dus aux cercles d'équations (3).

Cette remarque est intéressante quand on connaît une surface possédant un faisceau de géodésiques fermées, ayant donc toutes la même longueur  $a$ ; on peut supposer que  $\rho = 0$  donne une trajectoire orthogonale déterminée;  $\rho = a$  donne la même trajectoire et les formules (1), pourvu que l'on prenne au préalable la précaution de déplacer la surface  $S(x_1, y_1, z_1)$  de façon à ce qu'elle n'ait aucun point commun avec la sphère  $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ , donnent une nouvelle surface  $S_1$  ayant une famille de géodésiques, cette fois non fermées. Si on suppose que  $S$  soit une de ces surfaces ayant leurs  $\infty^2$  géodésiques fermées, prenons toutes les géodésiques issues d'un point  $A$  déterminé, géodésiques qui viennent repasser en  $A$  au bout d'un parcours de longueur  $a$ ;  $\rho = 0$  donne le point  $A$ ,  $\rho = a$  donne de nouveau  $A$ ; nos formules livrent une surface  $S_1$  sur laquelle on connaît  $\infty^1$  géodésiques de même longueur  $a$  partant du point  $\frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}, \frac{y_0}{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}, \frac{z_0}{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$  et aboutissant au point  $\frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - a^2}, \frac{y_0}{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - a^2}, \frac{z_0}{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - a^2}$ .

Telles sont les propriétés un peu inattendues qui relient l'étude des congruences de cercles aux lignes géodésiques des surfaces.

En terminant rappelons certaines congruences remarquables, telles que les congruences paratactiques où les surfaces focales se réduisent à deux droites isotropes conjuguées, chaque foyer étant double.

## 16. — Parallélisme de Peterson.

Chaque fois que tout cercle de la congruence est cosphérique à deux cercles infiniment voisins, les développements du paragraphe 4 s'appliquent et il est alors évident que la surface focale  $(x_1, y_1, z_1)$  et la solution  $\rho_1^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2$  ou  $2\sigma_1$  peuvent être transformées par le parallélisme de Peterson, ce qui transforme aussi par parallélisme la seconde nappe  $(x_2, y_2, z_2)$  et les surfaces focales des congruences  $(M_1M'_1), (\mu_1, \mu'_1)$ . C'est encore plus évident si on applique tout de suite la méthode de Guichard pour représenter les congruences rectilignes rapportées à leurs développables.

## 17. — Congruences cycliques.

Si  $\infty^2$  cercles sont orthogonaux à  $\infty^4$  surfaces, ils forment une congruence dite *cyclique*; chaque cercle d'une telle congruence est coupé par deux cercles infiniment voisins en deux points; réciproquement si des cercles sont normaux à deux surfaces et si chacun d'eux est rencontré en deux points par un des cercles infiniment voisins, tous ces cercles sont orthogonaux à une famille de surfaces<sup>(1)</sup>. Darboux donne toutes ces propriétés, au tome II de la *Théorie des Surfaces*, au chapitre déjà signalé p. 314-345. Les surfaces trajectoires orthogonales appartiennent à un système triple et leurs lignes de courbure se correspondent.

Dans les congruences que nous avons signalées, il est assez difficile, pour les cas spéciaux, d'indiquer si la congruence obtenue est ou non cyclique. En tous cas le problème revient à trouver six solutions d'une équation de Laplace liées par une relation quadratique, ce qui explique pourquoi deux surfaces applicables et leur système conjugué commun conduisent à un système cyclique.

---

<sup>(1)</sup> Il faut, pour appliquer cette proposition, prendre la précaution suivante : les deux surfaces en jeu ne doivent pas constituer deux portions d'une même sphère (ou d'un même plan, ce qui, par inversion, est équivalent). Si on considère deux cercles orthogonaux à un même plan, ou bien ils ne se coupent pas, ou bien ils se coupent en deux points. Si donc nous prenons une congruence de cercles orthogonaux à un même plan, chacun est rencontré en deux points par l'un ou l'autre de deux cercles infiniment voisins et, pourtant, la congruence, en général, n'est pas cyclique. D'ailleurs la démonstration fait intervenir la sphère orthogonale au cercle variable aux points où il est orthogonal aux deux surfaces, et cette sphère doit être *variable* pour que la démonstration soit valable.

---