

N. ABRAMESCO

## Les polynômes orthogonaux

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3<sup>e</sup> série*, tome 24 (1932), p. 67-87

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1932\\_3\\_24\\_\\_67\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1932_3_24__67_0)

© Université Paul Sabatier, 1932, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# LES POLYNOMES ORTHOGONAUX

Par N. ABRAMESCO (Cluj, Roumanie).



Les polynomes orthogonaux ayant une grande importance dans la représentation des fonctions par des séries de polynomes, nous exposerons leurs principales propriétés (\*).

1. Considérons une fonction  $\varphi(x)$  positive et intégrable dans l'intervalle  $(a, b)$ . Les polynomes  $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x), \dots$  de degré égal à l'indice, qui vérifient les relations d'orthogonalité

$$(1) \quad \int_a^b \varphi(x) P_m(x) P_n(x) dx = 0, \quad m \neq n,$$
$$\int_a^b \varphi(x) P_n^2(x) dx = I_n = \text{const.},$$

s'appellent *polynomes orthogonaux*.

Pour déterminer le polynome

$$P_n(x) = c_{n,n}x^n + c_{n,n-1}x^{n-1} + \dots + c_{n,0},$$

---

(\*) Voir, pour la bibliographie :

(<sup>1</sup>) JACOBI, *Journal de Crelle*, t. 56.

(<sup>2</sup>) TCHEBICHEF, *Œuvres*, t. II, p. 61.

(<sup>3</sup>) CHRISTOFFEL, *Sur une classe particulière de fonctions entières et de fractions continues* (*Annali di Matematica pura ed applicata*, 1877, p. 1-10).

(<sup>4</sup>) HEINE, *Handbuch der Kugelfunktionem* (2<sup>e</sup> édition, Berlin, 1878).

(<sup>5</sup>) DARBOUX, *Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres et sur une classe étendue de développements en séries* (*Journal de Math. pures et appliquées*, t. IV, 1878, p. 411).

(<sup>6</sup>) STIELTJES, *Quelques recherches sur la théorie des quadratures mécaniques* (*Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, 1884, p. 409).

(<sup>7</sup>) PICARD, *Cours d'Analyse supérieure fait à la Sorbonne* en 1912, 1918.

(<sup>8</sup>) SZEGÖ, *A Hankel-féle formákrol* (*Les formes de Hankel*) (*Mathematikai és Természettudományi Ertésítő*, 1918, p. 497); *Ueber die Entwicklungen einer analytischen Funktion nach den Polynomen eines Orthogonalsystems* (*Math. Annalen*, Bd. 82, p. 188).

(<sup>10</sup>) A. ANGELESCO, *Sur les polynomes généralisant les polynomes de Legendre et d'Hermite*, Thèse, 1916.

(<sup>11</sup>) N. ABRAMESCO, *Sulle serie di polinomi di una variabile complessa. Le serie di Darboux* (*Annali di Matematica*, Serie III, t. XXXI, 1922, p. 207); *Résumé des principales propriétés des polynomes orthogonaux* (*Nouvelles Annales de Math.*, 5<sup>e</sup> série, t. II, février 1924); Nou-

on voit que, étant donné un polynôme  $\prod_m (x)$ , de degré  $m < n$ , on peut déterminer les coefficients  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ , tels que

$$\prod_m (x) = \alpha_0 P_0(x) + \alpha_1 P_1(x) + \dots + \alpha_m P_m(x).$$

Multipliant cette relation par  $\varphi(x) P_n(x) dx$ , intégrant, en vertu de (1) on a

$$(2) \quad \int_a^b \varphi(x) \prod_m (x) P_n(x) dx = \sum_{i=0}^m \alpha_i \int_a^b \varphi(x) P_i(x) P_n(x) dx = 0.$$

Supposant  $\prod_k (x) = x^k$ , on a la propriété fondamentale de ces polynomes orthogonaux

$$(3) \quad \int_a^b \varphi(x) x^k P_n(x) dx = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Posant

$$g_s = \int_a^b \varphi(x) x^s dx,$$

les  $n$  équations linéaires (3) peuvent s'écrire

$$(4) \quad \begin{aligned} c_{n,0} g_0 + c_{n,1} g_1 + \dots + c_{n,n} g_n &= 0 \\ c_{n,0} g_1 + c_{n,1} g_2 + \dots + c_{n,n} g_{n+1} &= 0 \\ \dots & \\ c_{n,0} g_{n-1} + c_{n,1} g_n + \dots + c_{n,n} g_{2n-1} &= 0, \end{aligned}$$

d'où l'on peut déduire des valeurs proportionnelles pour  $c_{n,0}, c_{n,1}, \dots, c_{n,n}$ . Le polynome  $P_n(x)$  est complètement défini, à un facteur près, dont la valeur est donnée par la seconde des relations (1).

*velle méthode pour l'étude des régions de convergence des séries de polynomes orthogonaux* (Bulletin des sciences math., t. LIV, novembre 1930); *Sur la détermination des fonctions holomorphes dans des domaines donnés* [Comptes Rendus, t. 194 (1932), p. 163].

(12) C. POSSÉ, *Sur quelques applications des fractions continues*, St. Petersburg, 1886.

(13) J. CHOKHATE, *Sur le développement... et sur les polynomes de Tchebicchef* (Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, 1923, p. 25); *On a general formula in the theory of Tchebicchef polynomials and its applications* (Transactions of the American mat. Society, vol. 29, July 1923); *On the polynomial...* (Math. Annalen, Bd. 102, Heft. 1); *On some properties of polynomials* (Math. Zeitschrift, Bd. 29, Heft. 5); *On Stieltjes continued fractions* (American Journal of Mat., vol. LIV, 1932, p. 79); J. CHOKHATE (Shohat) et J. SHERMAN, *On the numerators of the continued fraction* (Proceedings of the American Academy of Sciences, vol. 18, 1932, p. 283).

(14) S. BERNSTEIN, *Sur les polynomes orthogonaux relatifs à un segment fini* (Journal de Math. pures et appliquées, 9<sup>e</sup> série, t. X, 1931, p. 219).

(15) O. PERRON, *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, 2<sup>e</sup> éd. 1929.

2. Le polynome  $P_n(x)$  est unique<sup>(1)</sup>, car si, des relations (4) on aurait deux polynomes  $P_n(x)$  et  $P'_n(x)$ , en les multipliant par les facteurs  $\lambda$  et  $\lambda'$ , convenablement choisis, tels que les coefficients de  $x^n$  dans  $\lambda P_n(x)$  et  $\lambda' P'_n(x)$  soient égaux à 1, de la relation (2) on aurait

$$\begin{aligned}
 & \lambda \int_a^b \varphi(x) \prod_m (x) P_n(x) dx = 0, \\
 & \lambda' \int_a^b \varphi(x) \prod_m (x) P'_n(x) dx = 0, \quad m < n, \\
 & \int_a^b \varphi(x) \prod_m (x) [\lambda P_n(x) - \lambda' P'_n(x)] dx = 0, \\
 (5) \quad & \int_a^b \varphi(x) \prod_m (x) Q_{n-1}(x) dx = 0,
 \end{aligned}$$

où  $Q_{n-1}(x) = \lambda P_n(x) - \lambda' P'_n(x)$  est un polynome de degré  $(n - 1)$ . Prenant pour  $\prod_m (x) = Q_{n-1}(x)$ , de la relation (5) on déduirait

$$\int_a^b \varphi(x) Q_{n-1}^2(x) dx = 0,$$

qui est impossible, car  $\varphi(x) > 0$  dans l'intervalle  $(a, b)$ . On retrouve donc le théorème connu que le polynome  $P_n(x)$  est unique.

Le polynome  $P_n(x)$  est bien déterminé, car le déterminant  $\Delta$  du système (4) est formé d'une série de termes, dont chacun est un produit de  $n$  intégrales de la forme  $\int_a^b \varphi(x) x^k dx$ . En écrivant un tel produit sous la forme d'une intégrale multiple d'ordre  $n$ , on trouve pour  $\Delta$

$$\Delta = \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b \varphi(x_1) \varphi(x_2) \dots \varphi(x_n) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^n \\ x_3^2 & x_3^3 & x_3^4 & \dots & x_3^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^{n-1} & x_n^n & x_n^{n+1} & \dots & x_n^{2n-1} \end{vmatrix} dx_1 \dots dx_n,$$

$$\Delta = \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b \varphi(x_1) \varphi(x_2) \dots \varphi(x_n) x_1 x_2^2 \dots x_n^{n-1} \prod dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

$$\prod = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

La notation des variables étant indifférente, on peut permuter dans cette expression de toutes les manières les indices  $1, 2, \dots, n$  et seulement  $\prod$  change ou non de signe. En ajoutant toutes les relations qu'on obtient, on trouve

$$n! \Delta = \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \sum (\pm x_1 x_2 \dots x_n^{n-1}) \prod dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Or  $\prod$  est le déterminant de Vandermonde,

$$\prod = \sum (\pm x_1 x_2^2 \dots x_n^{n-1}),$$

donc

$$n! \Delta = \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \prod^2 dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Mais  $\varphi(x_i) > 0$  dans l'intervalle  $(a, b)$ , d'où il résulte que  $\Delta$  a une valeur positive, différente de zéro et dont le système (4) est bien déterminé.

**3.** Le polynôme  $P_n(x)$  peut se mettre sous la forme d'un quotient de deux déterminants d'ordre  $n$  (11). Prenant le coefficient  $c_{n,n} = 1$ , le polynôme

$$(6) \quad P_n(x) = x^n + c_{n,n-1} x^{n-1} + \dots + c_{n,0}, \quad (c_{n,n} = 1),$$

vérifie les relations (4) et

$$\int_a^b \varphi(t) P_n^2(t) dt = I_n,$$

qui donne  $I_n$ . Cette expression peut s'écrire

$$\int_a^b \varphi(t) (t^n + c_{n,n-1} t^{n-1} + \dots + c_{n,0}) (t^n + c_{n,n-1} t^{n-1} + \dots + c_{n,0}) dt,$$

et observant (4) elle devient

$$(7) \quad c_{n,0} g_n + c_{n,1} g_{n+1} + \dots + c_{n,n-1} g_{2n-1} + g_{2n} = I_n.$$

Éliminant  $c_{n,0}, c_{n,1}, \dots, c_{n,n-1}$  ( $c_{n,n} = 1$ ) entre les relations (4) et (7), on trouve

$$\begin{vmatrix} g_0 & g_1 & \dots & g_{n-1} & g_n \\ g_1 & g_2 & \dots & g_n & g_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n-1} & g_n & \dots & g_{2n-2} & g_{2n-1} \\ g_n & g_{n+1} & \dots & g_{2n-1} & g_{2n} - I_n \end{vmatrix} = 0,$$

$$(8) \quad I_n = \frac{D_n(\varphi)}{D_{n-1}(\varphi)}, \quad D_n(\varphi) = \begin{vmatrix} g_0 & g_1 & \dots & g_n \\ g_1 & g_2 & \dots & g_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_n & g_{n+1} & \dots & g_{2n} \end{vmatrix}.$$

Éliminant  $c_{n,0}, c_{n,1}, \dots, c_{n,n-1}$  entre les équations (4) et (6), on trouve ( $c_{n,n} = 1$ )

$$P_n(x) = \frac{1}{D_{n-1}(\varphi)} \begin{vmatrix} g_0 & g_1 & g_2 & \dots & g_n \\ g_1 & g_2 & g_3 & \dots & g_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n-1} & g_n & g_{n+1} & \dots & g_{2n-1} \\ 1 & x & x^2 & \dots & x^n \end{vmatrix}.$$

$$P_n(x) = \frac{1}{D_{n-1}(\varphi)} \begin{vmatrix} xg_0 - g_1 & xg_1 - g_2 & \dots & xg_{n-1} - g_n \\ xg_1 - g_2 & xg_2 - g_3 & \dots & xg_n - g_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ xg_{n-1} - g_n & xg_n - g_{n+1} & \dots & xg_{2n-2} - g_{2n-1} \end{vmatrix}.$$

Et, comme

$$D_{n-1}(\varphi) = \begin{vmatrix} g_0 & g_1 & \dots & g_{n-1} \\ g_1 & g_2 & \dots & g_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n-1} & g_n & \dots & g_{2n-2} \end{vmatrix}, \quad g_s = \int_a^b \varphi(t) t^s dt,$$

on voit de même

$$D = \begin{vmatrix} xg_0 - g_1 & \dots & xg_{n-1} - g_n \\ \dots & \dots & \dots \\ xg_{n-1} - g_n & \dots & xg_{2n-2} - g_{2n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \int_a^b (x-t)\varphi(t) dt & \dots & \int_a^b (x-t)\varphi(t)t^{n-1} dt \\ \dots & \dots & \dots \\ \int_a^b (x-t)\varphi(t)t^{n-1} dt & \dots & \int_a^b (x-t)\varphi(t)t^{2n-2} dt \end{vmatrix},$$

$$D = D_{n-1}(F), \quad F = (x-t)\varphi(t),$$

et donc le polynome  $P_n(x)$  peut se mettre sous la forme (\*)

$$(9) \quad P_n(x) = \frac{D_{n-1}(F)}{D_{n-1}(\varphi)}.$$

On voit que  $D_{n-1}(F)$  et  $D_{n-1}(\varphi)$  sont les déterminants des formes quadratiques

$$(10) \quad \int_a^b (x-t) \varphi(t) (y_0 + y_1 t + \dots + y_{n-1} t^{n-1})^2 dt = \sum_p \sum_q (x g_{p+q} - g_{p+q+1}) y_p y_q,$$

$$(11) \quad \int_a^b \varphi(t) (y_0 + y_1 t + \dots + y_{n-1} t^{n-1})^2 dt = \sum_p \sum_q g_{p+q} y_p y_q,$$

$$p, q = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

4. Le polynome  $P_n(x)$  peut se mettre sous la forme (11)

$$P_n(x) = \frac{1}{(b-a)^n n!} \frac{1}{\varphi(x)} \frac{d^n}{dx^n} [(x-a)^n (x-b)^n \psi_n(x)],$$

$\psi_n(x)$  étant une fonction finie pour  $x = a$  et  $x = b$ . En effet, on a la relation

$$(12) \quad \int_a^b \varphi(x) Q(x) P_n(x) dx = 0, \quad Q(x) = 1, x, \dots, x^{n-1}.$$

On peut supposer que  $\varphi(x) P_n(x)$  est la dérivée d'ordre  $n$  d'une fonction  $U(x)$ , telle que  $U(x)$  et ses  $(n-1)$  premières dérivées soient nulles pour  $x = a$ , c'est-à-dire

$$(13) \quad U(a) = 0, \quad U'(a) = 0, \quad \dots, \quad U^{(n-1)}(a) = 0.$$

La relation (12) devient

$$\int_a^b Q \frac{d^n U(x)}{dx^n} dx = 0.$$

Intégrant par parties, on déduit

$$\int_a^b Q \frac{d^n U}{dx^n} dx = [Q(x) U^{(n-1)}(x) - Q'(x) U^{(n-2)}(x) + \dots + (-1)^{n-1} Q^{(n-1)} U]_a^b = 0.$$

En vertu des relations (13), on a

$$(14) \quad Q(b) U^{(n-1)}(b) - Q'(b) U^{(n-2)}(b) + \dots + (-1)^{n-1} Q^{(n-1)}(b) U(b) = 0.$$

---

(\*) Cette expression a été trouvée par une autre voie par M. Szegő [Voir (8)].

Faisant  $Q(x)$  égal à  $1, x, \dots x^{n-1}$ , de la relation (14) on a successivement  $U(b) = 0, U'(b) = 0, \dots U^{(n-1)}(b) = 0$ .

Donc, la fonction  $U(x)$  et ses  $(n-1)$  premières dérivées s'annulent pour  $x = a, x = b$ , c'est-à-dire

$$U(x) = k(x-a)^n(x-b)^n \psi_n(x),$$

$\psi_n(x)$  étant finie pour  $x = a, x = b$ . Par conséquent

$$\varphi(x) P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} [k(x-a)^n(x-b)^n \psi_n(x)],$$

et, sans diminuer la généralité, on peut prendre  $k$  tel que l'on ait

$$(15) \quad P_n(x) = \frac{1}{(b-a)^n n!} \frac{1}{\varphi(x)} \frac{d^n}{dx^n} [(x-a)^n(x-b)^n \psi_n(x)].$$

*Détermination de la fonction  $\psi_n$ .* De (15) il résulte

$$\psi_n(x) = \frac{(b-a)^n n!}{(x-a)^n(x-b)^n} \int_a^x dx \dots \int_a^x \varphi(x) P_n(x) dx,$$

$P_n(x)$  étant le polynome obtenu avec les relations (4). Sachant que

$$\int_a^x dx \dots \int_a^x f(x) dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-z)^{n-1} f(z) dz,$$

on voit que la fonction  $\psi_n(x)$  est donnée par l'intégrale simple

$$(16) \quad \psi_n(x) = \frac{(b-a)^n n}{(x-a)^n(x-b)^n} \int_a^x (x-z)^{n-1} \varphi(z) P_n(z) dz.$$

Considérant la fonction

$$h(x) = \int_a^x (x-z)^{n-1} \varphi(z) P_n(z) dz,$$

on voit que cette fonction et ses  $(n-1)$  premières dérivées par rapport à  $x$ , sont nulles pour  $x = a$ , donc  $h(x)$  se divise par  $(x-a)^n$ . De même,  $h(x)$  et ses  $(n-1)$  dérivées par rapport à  $x$ , sont égales à une somme d'intégrales de la forme

$$\int_a^x \varphi(z) z^k P_n(z) dz, \quad k < n,$$

qui, en vertu des relations (3), sont nulles pour  $x = b$ . Donc  $h(x)$  se divise par  $(x - b)^n$ ; ainsi la fonction  $\psi_n(x)$ , définie par la relation (16), est bien finie pour  $x = a$ ,  $x = b$ , le polynome  $P_n(x)$  étant obtenu avec les relations (4).

Si  $\varphi(x) = (x - a)^\lambda R(x)$ ,  $\lambda + 1 > 0$ , tel que l'intégrale ait un sens, alors il existe une fonction qui contient en facteur  $(x - a)^{\lambda+1}$  et dont la dérivée soit égale à  $\varphi(x) P_n(x)$ . Donc, l'intégrale d'ordre  $n$  de la fonction  $\varphi(x) P_n(x)$  contient en facteur  $(x - a)^{\lambda+n}$  et donc, de la relation (16), on voit que  $\psi_n(x)$  contient le facteur  $(x - a)^\lambda$ . De (15) on voit que dans la formule (16) on peut prendre comme limites  $x$  et  $b$  au lieu de  $a$  et  $x$ , et donc, de même, on voit que, si  $\varphi(x)$  contient le facteur  $(x - b)^\mu$ ,  $\mu + 1 > 0$ , alors  $\psi_n(x)$  contient aussi le facteur  $(x - b)^\mu$ . Donc, si  $\varphi(x) = (x - a)^\lambda (x - b)^\mu$ ,  $\lambda + 1 > 0$ ,  $\mu + 1 > 0$ , alors  $\psi_n(x) = (x - a)^\lambda (x - b)^\mu$ .

**5.** L'équation  $P_n(x) = 0$  a toutes ses racines réelles, distinctes et comprises dans l'intervalle  $(a, b)$ . En effet, l'expression  $U(x) = (x - a)^n (x - b)^n \psi_n(x)$  s'annule pour  $x = a$ ,  $x = b$ , donc sa dérivée  $U'(x)$  s'annule pour  $x = a_1$ , comprise entre  $a$  et  $b$ .  $U'(x)$  s'annulant pour  $x = a$ ,  $a_1$ ,  $b$ , sa dérivée,  $U''(x)$ , s'annule pour les valeurs  $a_2$  et  $b_2$  comprises respectivement entre  $a$  et  $a_1$ ,  $a_1$  et  $b$ . Et, ainsi de suite, la dérivée d'ordre  $n$ ,  $U^{(n)}(x)$ , s'annule pour  $n$  valeurs comprises dans l'intervalle  $(a, b)$  et  $\varphi(x)$  étant positive dans cet intervalle, il résulte que  $P_n(x)$  s'annule pour  $n$  valeurs distinctes et comprises dans l'intervalle  $(a, b)$ , c'est-à-dire que l'équation  $P_n(x) = 0$ , de degré  $n$ , a toutes ses racines réelles, distinctes et comprises dans l'intervalle  $(a, b)$ , obtenant ainsi une nouvelle démonstration de ce théorème connu<sup>(1)</sup>.

**6.** Supposons que  $\psi_n(x)$  reste le même pour tous les polynomes  $P_n(x)$  et soit  $\varphi(x)$  sa valeur.  $P_n(x)$  est le coefficient de  $t^n$  dans le développement en série de  $t$  de l'expression  $\frac{\psi(z)}{\varphi(z)} \frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $z$  étant la racine de l'équation

$$z = x + t \frac{(z - a)(z - b)}{b - a}, \quad z = x, \quad t = 0,$$

qui peut se développer avec la formule de Lagrange. Cette expression est une fonction génératrice pour les polynomes  $P_n(x)$ <sup>(2)</sup>. En effet, on a la formule de Lagrange

$$(17) \quad F(z) = F(x) + \frac{t}{1} [F'(x)f(x)] + \dots + \frac{t^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [F'(x)f^n(x)] + \dots, \quad F' = \frac{dF}{dx},$$

$z$  étant la racine de l'équation

$$(18) \quad z = x + tf(z),$$

qui tend vers  $x$  pour  $t \rightarrow 0$ , et  $f(z)$  et  $F(z)$  deux fonctions analytiques (qui se développent en série suivant les puissances de  $z - x$ ).

Prenant la dérivée par rapport à  $x$  de l'expression (17), on a

$$(19) \quad F'(z) \frac{\partial z}{\partial x} = F'(x) + \frac{t}{1} \frac{d}{dx} [F'(x)f(x)] + \dots + \frac{t^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} [F'(x)f^n(x)] + \dots,$$

où  $\frac{\partial z}{\partial x}$  est donné par

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 + tf'(z) \frac{\partial z}{\partial x},$$

qu'on obtient en prenant la dérivée par rapport à  $x$  de l'expression (18).

En remplaçant, en (19),  $F'(z)$  par  $\psi(z)$  et faisant

$$f(z) = \frac{(z-a)(z-b)}{b-a},$$

et divisant après par  $\varphi(x)$ , on a

$$(20) \quad \frac{\psi(z)}{\varphi(x)} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} + \frac{t}{1} \frac{1}{b-a} \frac{1}{\varphi(x)} \frac{d}{dx} [(x-a)(x-b)\psi(x)] + \dots$$

$$+ \frac{t^n}{n!} \frac{1}{(b-a)^n} \frac{1}{\varphi(x)} \frac{d^n}{dx^n} [(x-a)^n(x-b)^n\psi(x)] + \dots$$

Cette relation prouve que le polynome  $P_n(x)$  est le coefficient de  $t^n$  dans le développement en série de  $t$  de la fonction  $\frac{\psi(z)}{\varphi(x)} \frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $z$  étant la racine de l'équation

$$z = x + t \frac{(z-a)(z-b)}{b-a},$$

qui peut se développer avec la formule de Lagrange. Résulte de la relation (20) que cette expression  $\frac{\psi(z)}{\varphi(x)} \frac{\partial z}{\partial x}$  est une fonction génératrice des polynomes  $P_n(x)$ .

*Cas particuliers.* 1°  $\varphi(x) = \psi_n(x) = 1$ ,  $a = -1$ ,  $b = 1$ ;

$$z = x + t \frac{z^2 - 1}{2}, \quad z = x, \quad t = 0; \quad z = \frac{1 - \sqrt{1 - 2tx + t^2}}{t},$$

$$\frac{\psi(z)}{\varphi(x)} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}} = \sum t^n P_n(x),$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n],$$

$$P_n(x) = \frac{2n(2n-1) \dots (n+1)}{2^n \cdot n!} \left[ x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \dots \right]$$

et  $P_n(x)$  est le polynome de Legendre.

$$2^\circ \varphi(x) = \psi_n(x) = (1-x)^\lambda (1+x)^\mu, \quad \lambda+1 > 0, \quad \mu+1 > 0, \quad a = -1, \quad b = 1;$$

$$z = x + \frac{t}{2}(1-z^2), \quad z = \frac{1}{t}(-1 + \sqrt{1+2tx+t^2}), \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1+2tx+t^2}},$$

$$\frac{\psi(z)}{\varphi(x)} \frac{\partial z}{\partial x} = 2^{\lambda+\mu} (1+t+\sqrt{1+2tx+t^2})^{-\lambda} \times (1-t+\sqrt{1+2tx+t^2})^{-\mu} \times (1+2tx+t^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} (1-x)^{-\lambda} (1+x)^{-\mu} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{n+\lambda} (1+x)^{n+\mu}].$$

$P_n(x)$  étant le polynome de Jacobi et l'on a, observant (1),

$$\int_{-1}^{+1} (1-x)^\lambda (1+x)^\mu P_m(x) P_n(x) dx = 0, \quad (m \leq n).$$

$$3^\circ \varphi(x) = \psi_n(x) = x^{\alpha-1} (1-x)^{\alpha-\gamma}, \quad \gamma > 0, \quad \alpha-\gamma+1 > 0, \quad a = 0, \quad b = 1;$$

$$z = x + tz(1-z), \quad z = \frac{t-1 + \sqrt{(t-1)^2 + 4tx}}{2t},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{(t-1)^2 + 4tx}},$$

$$z = \frac{2x}{1-t + \sqrt{(t-1)^2 + 4tx}}, \quad 1-z = \frac{2(1-x)}{1+t + \sqrt{(t-1)^2 + 4tx}},$$

$$\frac{\psi(z)}{\varphi(x)} \frac{\partial z}{\partial x} = 2^{\alpha-1} \frac{[1-t + \sqrt{(t-1)^2 + 4tx}]^{1-\gamma} [1+t + \sqrt{(t-1)^2 + 4tx}]^{\gamma-\alpha}}{\sqrt{(t-1)^2 + 4tx}},$$

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} x^{\alpha-1} (1-x)^{\alpha-\gamma} \frac{d^n}{dx^n} [x^{n+\gamma-1} (1-x)^{n+\alpha-\gamma}],$$

$P_n(x)$  étant le polynome qui résulte de la série hypergéométrique, considéré par Darboux (\*).

**7.** Si  $\varphi(x) = \psi_n(x) = (x-a)^\lambda (x-b)^\mu$ ,  $\lambda+1 > 0$ ,  $\mu+1 > 0$ , le polynome  $P_n(x)$  de Jacobi vérifie l'équation différentielle (\*\*)

$$(21) \quad (x-a)(x-b) \frac{d^2 y}{dx^2} + [(2+\lambda+\mu)x - a(\mu+1) - b(\lambda+1)] \frac{dy}{dx} - n(n+1+\lambda+\mu)y = 0,$$

dont l'autre solution est

$$\frac{1}{n!(b-a)^n} (x-a)^{-\lambda} (x-b)^{-\mu} \times \int_a^b (t-a)^{n+\lambda} (t-b)^{n+\mu} (t-x)^{-n-1} dt.$$

En effet, on a

$$(22) \quad P_n(x) = \frac{1}{(b-a)^n n!} (x-a)^{-\lambda} (x-b)^{-\mu} \frac{d^n}{dx^n} [(x-a)^{n+\lambda} (x-b)^{n+\mu}].$$

Posant  $U = (x-a)^{n+\lambda} (x-b)^{n+\mu}$ , on a

$$\frac{U'}{U} = \frac{n+\lambda}{x-a} + \frac{n+\mu}{x-b},$$

ou

$$(x-a)(x-b)U' = [x(2n+\lambda+\mu) - (n+\lambda)b - (n+\mu)a]U.$$

Prenant la dérivée d'ordre  $(n+1)$  avec la formule de Leibnitz, on a

$$(x-a)(x-b) \frac{d^{n+1}U}{dx^{n+1}} + [(2-\lambda-\mu)x + (\lambda-1)b + (\mu-1)a] \frac{d^{n+1}U}{dx^{n+1}} - (n+1)(n+\lambda+\mu) \frac{d^n U}{dx^n} = 0,$$

et posant  $\frac{d^n U}{dx^n} = z$ , on obtient

$$(23) \quad (x-a)(x-b) \frac{d^2 z}{dx^2} + [(2-\lambda-\mu)x + (\lambda-1)b + (\mu-1)a] \frac{dz}{dx} - (n+1)(n+\lambda+\mu)z = 0.$$

Observant (22), on déduit

$$(24) \quad y = P_n(x) = \frac{1}{(b-a)^n n!} (x-a)^{-\lambda} (x-b)^{-\mu} z,$$

ainsi que, après cette transformation, l'équation (23) devient l'équation (21), à laquelle satisfait le polynôme  $P_n(x)$ .

L'équation (21) est complètement intégrable, car ses solutions sont données par la relation (24),  $z$  étant donné par l'équation différentielle (23), qui en dehors de sa solution

$$(25) \quad z = \frac{d^n}{dx^n} [(x-a)^{n+\lambda} (x-b)^{n+\mu}],$$

admet aussi la solution

$$(26) \quad u = \int_a^b (t-a)^{n+\lambda} (t-b)^{n+\mu} (t-x)^{n-1} dt.$$

Pour cela, nous allons montrer que  $u$  satisfait l'équation (23). On a <sup>(16)</sup>

$$\begin{aligned} & d[(t-a)^{n+\lambda+1} (t-b)^{n+\mu+1} (t-x)^{-n-2}] \\ = & v[(n+\lambda+1)(t-b)(t-x) + (n+\mu+1)(t-a)(t-x) - (n-2)(t-a)(t-b)], \end{aligned}$$

où

$$v = (t-a)^{n+\lambda} (t-b)^{n+\mu} (t-x)^{-n-3} dt.$$

Intégrant entre  $a$  et  $b$ , on a en multipliant par  $-(n+1)$ ,

$$0 = \int_a^b (n+1)v[-(n+\lambda+1)(t-b)(t-x) - (n+\mu+1)(t-a)(t-x) + (n+2)(t-a)(t-b)],$$

et ordonnant d'après les puissances de  $(t-x)$ , on obtient

$$(27) \quad 0 = \int_a^b (n+1)v \{ (n+2)(x-a)(x-b) + (t-x)[(2-\lambda-\mu)x + b(\lambda-1) + a(\mu-1)] \\ - (n+\lambda+\mu)(t-x)^2 \}.$$

Or, de (26) on a

$$u = \int_a^b v(t-x)^2, \quad \frac{du}{dx} = (n+1) \int_a^b v(t-x), \quad \frac{d^2u}{dx^2} = (n+1)(n+2) \int_a^b v,$$

et donc l'expression (27) devient

$$\begin{aligned} 0 = & (x-a)(x-b) \frac{d^2u}{dx^2} + [(2-\lambda-\mu)x + b(\lambda-1) + a(\mu-1)] \frac{du}{dx} \\ & - (n+1)(n+\lambda+\mu)u, \end{aligned}$$

qui est l'équation (23). Donc cette équation admet les solutions (25) et (26), et avec la relation (24), on obtient celles de l'équation différentielle (21), c'est-à-dire

$$P_n(x), \quad \frac{1}{(b-a)^n n!} (x-a)^{-\lambda} (x-b)^{-\mu} \int_a^b (t-a)^{n+\lambda} (t-b)^{n+\mu} (t-x)^{n-1} dt.$$

<sup>(16)</sup> En suivant le procédé de M. PICARD, *Traité d'Analyse*, t. VIII, *Intégrales hypergéométriques*, p. 319.

*Cas particuliers.* 1°  $\varphi(x) = \psi_n(x) = 1$ ,  $a = -1$ ,  $b = 1$ ; le polynome  $P_n(x)$  de Legendre vérifie l'équation différentielle

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0.$$

2°  $\varphi(x) = \psi_n(x) = (x^2 - a^2)^l$ ,  $l + 1 > 0$ ; le polynome

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} (x^2 - a^2)^{-l} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - a^2)^{n+l}]$$

vérifie l'équation différentielle

$$(x^2 - a^2) \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x(1+l) \frac{dy}{dx} - n(n+1+2l)y = 0.$$

**8. Les polynomes orthogonaux  $P_n(x)$  vérifient une relation de récurrence<sup>(1)</sup>.** En désignant par  $c_{n,n}$  le coefficient de  $x^n$  du polynome  $P_n(x)$ , on peut déterminer les constantes  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ , telles que l'on ait

$$(28) \quad xP_n(x) = \frac{c_{n,n}}{c_{n+1,n+1}} P_{n+1}(x) + \alpha_n P_n(x) + \alpha_{n-1} P_{n-1}(x) + \dots + \alpha_0 P_0(x).$$

Multipliant par  $\varphi(x) P_{n-q}(x) dx$ , intégrant et observant (1), on a

$$(29) \quad \int_a^b x \varphi(x) P_n(x) P_{n-q}(x) dx = \alpha_{n-q} \int_a^b \varphi(x) P_{n-q}^2(x) dx = \alpha_{n-q} I_{n-q}.$$

Mais, si  $q \geq 2$ ,  $xP_{n-q}$  est au plus de degré  $(n-1)$  et, en vertu des relations (3), le premier membre est nul. Donc,  $\alpha_{n-q} = 0$ ,  $q \geq 2$ . La relation (28) est donc de la forme

$$(30) \quad xP_n = \frac{c_{n,n}}{c_{n+1,n+1}} P_{n+1} + \alpha_n P_n + \alpha_{n-1} P_{n-1}.$$

On a de même

$$(31) \quad xP_{n-1} = \frac{c_{n-1,n-1}}{c_{n,n}} P_n + \beta_{n-1} P_{n-1} + \beta_{n-2} P_{n-2}.$$

Faisant en (29)  $q = 1$ , on obtient

$$\int_a^b x \varphi(x) P_{n-1} P_n dx = \alpha_{n-1} I_{n-1},$$

où, en remplaçant  $xP_{n-1}$  par sa valeur de (31), on déduit

$$\int_a^b \psi P_n \left( \frac{c_{n-1, n-1}}{c_{n, n}} P_n + \beta_{n-1} P_{n-1} + \beta_{n-2} P_{n-2} \right) dx = \alpha_{n-1} I_{n-1},$$

$$\frac{c_{n-1, n-1}}{c_{n, n}} I_n = \alpha_{n-1} I_{n-1}, \quad \alpha_{n-1} = \frac{c_{n-1, n-1} I_n}{c_{n, n} I_{n-1}}.$$

En remplaçant en (30), on obtient la relation de récurrence (\*)

$$(32) \quad \frac{c_{n, n}}{c_{n+1, n+1}} P_{n+1} - (x - \alpha_n) P_n + \frac{c_{n-1, n-1} I_n}{c_{n, n} I_{n-1}} P_{n-1} = 0$$

entre trois polynômes orthogonaux consécutifs.

Pour trouver la valeur de  $\alpha_n$ , multiplions en (32) par  $\varphi(x) P_n(x) dx$ , et observant (1), on a

$$\int_a^b (\alpha_n - x) \varphi(x) P_n^2(x) dx = 0, \quad \alpha_n I_n = \int_a^b \varphi(x) x P_n^2(x) dx,$$

ou, en égalant en (32) le coefficient de  $x^n$  à zéro, on obtient

$$(33) \quad \frac{c_{n, n}}{c_{n+1, n+1}} c_{n+1, n} - c_{n, n-1} + \alpha_n c_{n, n} = 0, \quad \alpha_n = \frac{c_{n, n-1}}{c_{n, n}} - \frac{c_{n+1, n}}{c_{n+1, n+1}}.$$

*Cas particuliers.* 1°  $\varphi(x) = \psi_n(x) = 1$ ,  $a = -1$ ,  $b = 1$ ; les polynômes de Legendre vérifient la relation

$$(n+1)P_{n+1} - x(2n+1)P_n + nP_{n-1} = 0.$$

$$2^\circ \varphi(x) = \psi_n(x) = (x-a)^\lambda (x-b)^\mu;$$

$$I_n = \frac{(-1)^n c_{n, n}}{(b-a)^n} \int_a^b (x-a)^n (x-b)^n \varphi(x) dx.$$

Dans le cas des polynômes (\*) qui naissent de la série hypergéométrique,

$$P_n = \frac{1}{n!} x^{1-\gamma} (1-x)^{\gamma-\alpha} \frac{d^n}{dx^n} [x^{n-\gamma-1} (1-x)^{n+\alpha-\gamma}],$$

---

(\*) Obtenue par DARBOUX, Voir (\*) Voir, aussi, le *Cours d'Analyse supérieure*, fait à la Sorbonne, par M. E. PICARD, en 1918; Voir (\*).

on a

$$\frac{(n + \alpha)(n + 1)}{(2n + \alpha + 1)(2n + \alpha)} P_{n+1} + \left[ x - \frac{2n^2 + 2\alpha n + \alpha\gamma - \gamma}{(2n + \alpha - 1)(2n + \alpha + 1)} \right] P_n + \frac{(n + \gamma - 1)(n + \alpha - \gamma)}{(2n + \alpha)(2n + \alpha - 1)} P_{n-1} = 0.$$

9. La limite de  $\sqrt[n]{P_n(x)}$  pour  $n \rightarrow \infty$  est

$$e^{\int_0^1 \log \left( x - \frac{b-a}{2} \cos \pi \theta - \frac{a+b}{2} \right) d\theta}$$

et  $\sqrt[n]{|P_n(x)|} \rightarrow \frac{b-a}{4} |z|$ ,  $z$  étant la racine de plus grand module de l'équation

$$z^2 - \frac{4}{b-a} \left( x - \frac{a+b}{2} \right) z + 1 = 0.$$

De (9) on a

$$(34) \quad \sqrt[n]{P_n(x)} = \frac{\sqrt[n]{D_{n-1}(F)}}{\sqrt[n]{D_{n-1}(\varphi)}}$$

$D_{n-1}(F)$  et  $D_{n-1}(\varphi)$  étant respectivement les déterminants des formes quadratiques (10) et (11)

$$(10) \quad \int_a^b (x-t) \varphi(t) (y_0 + y_1 t + \dots + y_{n-1} t^{n-1})^2 dt = \sum_p \sum_q (x g_{p+q} - g_{p+q+1}) y_p y_q,$$

$$(11) \quad \int_a^b \varphi(t) (y_0 + y_1 t + \dots + y_{n-1} t^{n-1})^2 dt = \sum_p \sum_q g_{p+q} y_p y_q,$$

$$p, q = 0, 1, \dots, n-1.$$

Faisons le changement de variable

$$t = \frac{1}{2} [(b-a) \cos \pi \theta + b + a].$$

Il résulte  $F(t) = (x-t) \varphi(t) = g(\pi \theta)$ ,  $\varphi(t) = h(\pi \theta)$  et  $y_0 + y_1 t + \dots + y_{n-1} t^{n-1}$  devient une fonction  $R_{n-1}$  qui dépend de  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$  et  $\cos \pi \theta, \dots, \cos(n-1)\pi \theta$  (\*).

$$R_{n-1}(\pi \theta) = u_0 + u_1 \cos \pi \theta + \dots + u_{n-1} \cos(n-1)\pi \theta.$$

(\*) Car on peut remplacer  $\cos^q \pi \theta$  en fonction de multiples de l'arc  $\pi \theta$ .

Faisons sur les quantités  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$  la transformation linéaire

$$y_i = l_{i,0} u_0 + \dots + l_{i,n-1} u_{n-1}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

de déterminant  $\delta_{n-1} \neq 0$ , telle que l'on ait identiquement

$$y_0 + y_1 t + \dots + y_{n-1} t^{n-1} = u_0 + u_1 \cos \pi \theta + \dots + u_{n-1} \cos (n-1) \pi \theta.$$

Les formes (10) et (11) deviennent, après avoir supprimé le facteur  $\frac{b-a}{2} \pi$ .

$$(35) \int_0^1 \Psi(\pi \theta) [u_0 + u_1 \cos \pi \theta + \dots + u_{n-1} \cos (n-1) \pi \theta]^2 d\theta = \sum_{p,q=0,1,\dots,n-1} d_{p,q} u_p u_q.$$

$$\Psi(\pi \theta) = g(\pi \theta) \sin \pi \theta, \quad d_{p,q} = \int_0^1 \Psi(\pi \theta) \cos p \pi \theta \cos q \pi \theta d\theta,$$

$$(36) \int_0^1 \psi(\pi \theta) [u_0 + u_1 \cos \pi \theta + \dots + u_{n-1} \cos (n-1) \pi \theta]^2 d\theta = \sum_p \sum_q e_{p,q} u_p u_q,$$

$$\psi(\pi \theta) = h(\pi \theta) \sin \pi \theta, \quad e_{p,q} = \int_0^1 \psi(\pi \theta) \cos p \pi \theta \cos q \pi \theta d\theta.$$

Désignant par

$$\left(\frac{b-a}{2} \pi\right)^n \Delta_{n-1}(\Psi), \quad \left(\frac{b-a}{2} \pi\right)^n \Delta_{n-1}(\psi)$$

les déterminants des formes quadratiques (35) et (36), multipliées par  $\frac{b-a}{2} \pi$ ,

$$(37) \Delta_{n-1}(\Psi) = \begin{vmatrix} d_{0,0} & d_{0,1} & \dots & d_{0,n-1} \\ d_{1,0} & d_{1,1} & \dots & d_{1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n-1,0} & d_{n-1,1} & \dots & d_{n-1,n-1} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{n-1}(\psi) = \begin{vmatrix} e_{0,0} & e_{0,1} & \dots & e_{0,n-1} \\ e_{1,0} & e_{1,1} & \dots & e_{1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{n-1,0} & e_{n-1,1} & \dots & e_{n-1,n-1} \end{vmatrix},$$

d'après la théorie des formes quadratiques, on sait

$$\left(\frac{b-a}{2} \pi\right)^n \Delta_{n-1}(\Psi) = \delta_{n-1}^2 \mathbf{D}_{n-1}(\mathbf{F}),$$

$$\left(\frac{b-a}{2} \pi\right)^n \Delta_{n-1}(\psi) = \delta^n \mathbf{D}_{n-1}(\varphi),$$

d'où

$$\frac{\mathbf{D}_{n-1}(\mathbf{F})}{\mathbf{D}_{n-1}(\varphi)} = \frac{\Delta_{n-1}(\Psi)}{\Delta_{n-1}(\psi)},$$

et donc, observant (34),

$$(38) \quad \sqrt[n]{P_n(x)} = \frac{\sqrt[n]{\Delta_{n-1}(\Psi)}}{\sqrt[n]{\Delta_{n-1}(\psi)}}.$$

Nous sommes conduits de chercher la limite de la racine n-ème des déterminants (37). Considérons, par ex.,

$$\Delta_{n-1}(\Psi) = \begin{vmatrix} d_{0,0} & d_{0,1} & \dots & d_{0,n-1} \\ d_{1,0} & d_{1,1} & \dots & d_{1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n-1,0} & d_{n-1,1} & \dots & d_{n-1,n-1} \end{vmatrix}, \quad d_{p,q} = \int_0^1 \Psi(\pi\theta) \cos p\pi\theta \cos q\pi\theta d\theta,$$

qui est le déterminant de la forme (35). On sait<sup>(17)</sup>, que pour cette forme, on peut effectuer sur les quantités  $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$ , une transformation homogène linéaire,

$$(39) \quad X_i = m_{i,0} u_0 + m_{i,1} u_1 + \dots + m_{i,n-1} u_{n-1}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

telle que la forme quadratique (35) devient une somme de carrés

$$(40) \quad \lambda_0 X_0^2 + \lambda_1 X_1^2 + \dots + \lambda_{n-1} X_{n-1}^2.$$

Les quantités  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$  s'appellent valeurs spécifiques, qu'on déduit en identifiant les formes (40) et (35) après la transformation (39) et sont les racines de l'équation caractéristique

$$(41) \quad \Delta_{n-1}(\Psi - \lambda) = \begin{vmatrix} d_{0,0} - \lambda & d_{0,1} & \dots & d_{0,n-1} \\ d_{1,0} & d_{1,1} - \lambda & \dots & d_{1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n-1,0} & d_{n-1,1} & \dots & d_{n-1,n-1} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

En effet, ce déterminant est celui de la forme

$$\int_0^1 (\Psi - \lambda) [u_0 + u_1 \cos \pi\theta + \dots + u_{n-1} \cos (n-1)\pi\theta]^2 d\theta,$$

<sup>(17)</sup> HELGE VON KÖCH, *Sur un théorème de M. Hilbert* (*Math. Annalen*, Bd. 69, 1910, p. 216); TOEPLITZ, *Zur Theorie der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen* (*Nachrichten Göttingen*, 1910, p. 489-506).

qui peut s'écrire

$$\int_0^1 \Psi [u_0 + u_1 \cos \pi \theta + \dots + u_{n-1} \cos (n-1) \pi \theta]^2 d\theta \\ - \lambda \int_0^1 [u_0 + u_1 \cos \pi \theta + \dots + u_{n-1} \cos (n-1) \pi \theta]^2 d\theta, \\ \int_0^1 \cos^2 p \pi \theta d\theta = 1, \quad \int_0^1 \cos p \pi \theta \cos q \pi \theta d\theta = 0,$$

et qui, après la transformation orthogonale (39), devient

$$\sum_{s=0}^{n-1} \lambda_s X_s^2 - \sum_{s=0}^{n-1} \lambda X_s^2 = \sum_{s=0}^{n-1} (\lambda_s - \lambda) X_s^2.$$

Le déterminant de cette forme est

$$\Delta_{n-1}(\Psi - \lambda) = \begin{vmatrix} \lambda_0 - \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 - \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda_0 - \lambda) \dots (\lambda_{n-1} - \lambda),$$

et on voit que  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$  sont les racines de l'équation (41). Faisant  $\lambda = 0$ , il résulte

$$\Delta_{n-1}(\Psi) = \lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1},$$

et donc

$$\sqrt[n]{\Delta_{n-1}(\Psi)} = \sqrt[n]{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}.$$

Mais cette limite est connue et égale<sup>(18)</sup> à

$$e^{\int_0^1 \log \Psi(\pi \theta) d\theta}$$

<sup>(18)</sup> Proposée comme problème dans l'*Intermédiaire des Math.*, 21 (1914), question 4340, par M. POLYA, et dont la solution a été donnée par M. SZEGÖ, *Ein Grenzwertsatz über die Toeplitzschen Determinanten...* (*Math. Annalen*, Bd. 76, 1915, p. 490).

L'expression de cette limite a été trouvée autrement par M. SZEGÖ, *A Hankel féle formakrol...* (*Les formes de Hankel*) (*Mathematikai es Természettudományi Értesítő*, 1918, p. 492), Voir (\*).

Donc

$$\sqrt[n]{\Delta_{n-1}(\Psi)} \rightarrow e^{\int_0^1 \log \Psi d\theta},$$

$$\Psi = (x-t)\varphi(t)\sin\pi\theta, \quad t = \frac{1}{2}[(b-a)\cos\pi\theta + b + a].$$

De même,

$$\sqrt[n]{\Delta_{n-1}(\psi)} \rightarrow e^{\int_0^1 \log \psi d\theta}, \quad \psi = \varphi(t)\sin\pi\theta,$$

et donc de (38)

$$(42) \quad \sqrt[n]{P_n(x)} \rightarrow e^{\int_0^1 \log(x-t) d\theta}, \quad t = \frac{1}{2}[(b-a)\cos\pi\theta + a + b],$$

ou

$$\sqrt[n]{P_n(x)} \rightarrow e^{\frac{1}{\pi} \int_0^1 \log(x-t) \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}}.$$

Faisant en (42)  $\pi\theta = \omega$ , on a

$$(43) \quad \sqrt[n]{|P_n(x)|} \rightarrow e^{\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log |M + N \cos \omega| d\omega},$$

$$M = x - \frac{a+b}{2}, \quad N = \frac{a-b}{2} \neq 0.$$

Mais

$$|M + N \cos \omega| = \left| \frac{N}{2} z^2 + Mz + \frac{N}{2} \right|_{z=e^{i\omega}} = \frac{|N|}{2} |z - z_1| |z - z_2|_{z=e^{i\omega}},$$

où  $z_1, z_2 = 1$ ,  $z_1$  et  $z_2$  étant les racines de l'équation

$$\frac{N}{2} z^2 + Mz + \frac{N}{2} = 0, \quad z^2 - \frac{4}{b-a} \left( x - \frac{a+b}{2} \right) z + 1 = 0.$$

Considérant l'intégrale

$$I = \int_0^\pi \log |z - \xi| d\omega, \quad z = e^{i\omega}, \quad \xi = \rho e^{i\alpha}, \quad (\rho = |\xi|),$$

on a

$$1 = \int_0^\pi \log \sqrt{1 - 2\rho \cos(\omega - \alpha) + \rho^2} d\omega,$$

qui est une intégrale de Poisson, dont la valeur est égale à zéro si  $\rho < 1$  et à  $\pi \log \rho$  si  $\rho > 1$ .

Or,  $|z_1| \cdot |z_2| = 1$ , et supposant que  $|z_1| > 1$ , on a

$$\int_0^\pi \log |z - z_1| d\omega = \pi \log |z_1|, \quad \int_0^\pi \log |z - z_2| d\omega = 0.$$

Donc

$$\int_0^\pi \log |M + N \cos \omega| d\omega = \int_0^\pi \log \frac{|N|}{2} |z - z_1| |z - z_2| d\omega = \pi \log \frac{|N|}{2} |z_1|,$$

et observant (43), on trouve

$$(44) \quad \sqrt{|P_n(x)|} \rightarrow \frac{b-a}{4} |z|,$$

$z$  étant la racine de plus grand module de l'équation

$$(45) \quad z^2 - \frac{4}{b-a} \left( x - \frac{a+b}{2} \right) z + 1 = 0.$$

Supposant que  $\lim \sqrt[n]{|P_n(x)|} = l$ , donc  $\frac{b-a}{4} |z| = l$ , on a de (45)

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{4} \left( z + \frac{1}{z} \right), \quad |z| = \frac{4l}{b-a} = \rho, \quad z = \rho e^{i\alpha},$$

et donc

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{4} \left( \rho e^{i\alpha} + \frac{1}{\rho} e^{-i\alpha} \right),$$

enfin posant  $x = x_1 + iy_1$ , on a

$$x_1 = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{4} \left( \rho + \frac{1}{\rho} \right) \cos \alpha, \quad y_1 = \frac{b-a}{4} \left( \rho + \frac{1}{\rho} \right) \sin \alpha,$$

ce qui prouve que le point  $x$  décrit une ellipse de centre  $\frac{a+b}{2}$  et de foyers  $a$  et  $b$ .

**10.** Les polynomes orthogonaux  $P_n(x)$  sont les dénominateurs des réduites d'ordre  $n$  du développement de la fonction

$$\int_a^b \frac{\varphi(y)}{y-x} dy,$$

en fraction continue<sup>(19)</sup> (19).

**11.** Les polynomes  $P_n(x)$  interviennent dans la théorie des quadratures mécaniques. La valeur approchée de l'intégrale

$$\int_a^b \varphi(x) f(x) dx$$

est (19)

$$\int_a^b \varphi(x) P_{n-1}^2(x) dx \left[ \sum \frac{f(x_i)}{P'_n(x_i) P_{n-1}(x_i)} \right],$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$  étant les racines du polynome  $P_n(x)$ .

---

(19) Voir, aussi, A. ANGELESCO, Sur les quadratures mécaniques (Bulletin de la Section scientifique de l'Académie Roumaine, vol. VI, 1920, p. 81).

---