

PIERRE PAPILLON

**Sur certaines équivalences (Volumes et potentiels)**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3<sup>e</sup> série*, tome 24 (1932), p. 203-226

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1932\\_3\\_24\\_\\_203\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1932_3_24__203_0)

© Université Paul Sabatier, 1932, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# SUR CERTAINES ÉQUIVALENCES

(VOLUMES ET POTENTIELS)

PAR PIERRE PAPILLON

Professeur agrégé au Prytanée militaire de La Flèche (Sarthe) (\*).



## CHAPITRE V

### L'équivalence des volumes tournants.

§ 42. — Expressions des volumes tournants(\*\*). — Soient

$$\frac{X - a}{\lambda} = \frac{Y - b}{\mu} = \frac{Z - c}{\nu}$$

les équations de l'axe de rotation ( $\Delta$ ), en lesquelles  $\lambda, \mu, \nu$ , désignent des cosinus directeurs; l'expression du volume tournant élémentaire qu'engendre  $dS$  conduit à prendre en (6), (7) et (8)

$$\Delta \equiv \frac{\begin{vmatrix} E'_x & E'_y & E'_z \\ \lambda & \mu & \nu \\ X - a & Y - b & Z - c \end{vmatrix}}{\sqrt{E_x'^2 + E_y'^2 + E_z'^2}}$$

---

(\*) Une inadvertance s'est glissée dans la rédaction du chapitre II de ce Mémoire; le lecteur voudra bien substituer au texte erroné du paragraphe 9, page 97, ligne 16, le suivant: l'occasion nous est ainsi offerte de constater que l'hélicoïde a pour transformée une contraposée...

Une Note est d'ailleurs en préparation, concernant les surfaces polaires réciproques des conoïdes.

(\*\*) Parmi les travaux fondamentaux relatifs aux volumes dûs à des contours en mouvement il convient de citer, en tout premier lieu, un Mémoire de G. Kœnigs publié en 1889 au *Journal de Mathématiques pures et appliquées*. Le cas *tournant*, plus simple mais à modalités nombreuses et élégantes, a été repris par M. A. Buhl (*Géométrie et Analyse des Intégrales doubles*, 1920). Personnellement, j'ai présenté à la Faculté des Sciences de Toulouse, en 1923, un travail, *Sur les volumes tournants*, en vue de l'obtention d'un Diplôme d'Études Supérieures, travail dont la proposition fondamentale a été généralisée bientôt dans un article des *Nouvelles Annales de Mathématiques* que j'aurai l'occasion de citer ultérieurement.

P. P.

de sorte que ces intégrales deviennent

$$(34) \quad 2\pi \iint_s \begin{vmatrix} -p & -q & 1 \\ \lambda & \mu & \nu \\ x-a & y-b & z-c \end{vmatrix} \gamma ds,$$

$$(35) \quad V = \frac{2\pi}{m} \iint_s \begin{vmatrix} F'_x & F'_y & F'_z \\ \lambda & \mu & \nu \\ xF^{-\frac{1}{m}}-a & yF^{-\frac{1}{m}}-b & zF^{-\frac{1}{m}}-c \end{vmatrix} F^{-\frac{2}{m}-1} (xx + \beta y + \gamma z) ds,$$

$$(36) \quad \frac{2\pi}{m} \iint_s \begin{vmatrix} F'_x & F'_y & F^{-\frac{1}{m}} F'_z \\ \lambda & \mu & \nu \\ xF^{-\frac{1}{m}}-a & yF^{-\frac{1}{m}}-b & z-c \end{vmatrix} F^{-\frac{1}{m}-1} (xx + \beta y) ds.$$

Lorsqu'en particulier l'axe de révolution passe en  $O$ ,  $a, b, c$  sont nuls et  $V$  prend la valeur  $V_0$ ; dans le premier cas,

$$V - V_0 = 2\pi \iint_s \begin{vmatrix} -p & -q & 1 \\ \lambda & \mu & \nu \\ -a & -b & -c \end{vmatrix} \gamma ds. \quad (37)$$

#### 1. CORRESPONDANCES CYLINDRIQUES.

§ 43. — Étude de  $V - V_0$ . — Développons (37). Il vient

$$V - V_0 = 2\pi \iint_s (-Lp - Mq + N) \gamma ds.$$

En posant

$$L = b\nu - c\mu,$$

$$M = c\lambda - a\nu,$$

$$N = a\mu - b\lambda;$$

on voit que

$$\lambda, \mu, \nu, L, M, N,$$

sont des coordonnées plückériennes de  $(\Lambda)$ .

Or

$$\sqrt{L^2 + M^2 + N^2} = d$$

et

$$\int \int_s \left( -\frac{L}{d} p - \frac{M}{d} q + \frac{N}{d} \right) \gamma ds$$

expriment respectivement la distance du point  $O$  à la droite  $(\Lambda)$  et la projection orthogonale de  $S$  sur tout plan normal à la direction  $(L, M, N)$ , donc parallèle aux droites  $(\Lambda)$  et  $(\Lambda_0)$ ; par suite

$$V - V_0 = 2\pi d \cdot \text{proj } S.$$

*La différence des volumes qu'engendrent les révolutions d'une cloison autour de deux axes parallèles est le produit des nombres qui mesurent une circonférence dont le rayon est la distance de ces axes et la projection de la cloison sur leur plan.*

Lorsqu'en particulier la cloison intéresse une surface de révolution d'axe  $(\Lambda_0)$ ,  $V_0$  s'annule et nous parvenons à cette conséquence, tout à fait comparable au théorème de Kœnigs des cloisons planes :

*Le volume qu'engendre la révolution d'une cloison révolutive autour d'un axe parallèle à son axe de révolution est le produit des nombres qui mesurent une circonférence dont le rayon est la distance de ces axes et la projection de la cloison sur leur plan.*

Pour une cloison sphérique, ceci est général :

*Le volume qu'engendre la rotation d'une cloison sphérique autour d'un axe est le produit des nombres qui mesurent une circonférence dont le rayon est la distance du centre de la sphère à l'axe et la projection de la cloison sur le plan central passant par l'axe.*

D'une manière équivalente,

$$V - V_0 = 2\pi(LS_x + MS_y + NS_z),$$

la parenthèse représentant le produit mixte du vecteur aréolaire  $\vec{OS}$  de  $S$ , du vecteur directeur  $\vec{OA}$  de  $(\Lambda)$  et du vecteur  $\vec{OA}$ .  $A$  est le point de  $(\Lambda)$  dont  $a, b, c$  sont les coordonnées. Donc

$$V - V_0 = 2\pi \cdot \vec{OA} \vec{OA} \vec{OS};$$

la différence est invariante lorsque

$$LS_x + MS_y + NS_z = K,$$

ou, sous forme homogène,

$$K(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) - (LS_x + MS_y + NS_z)^2 = 0 :$$

les axes  $(\Lambda)$  forment un complexe du deuxième ordre à cônes de révolution et dont les axes supportent les moments du vecteur aréolaire  $\vec{O\Sigma}$  pour les divers points de l'espace, assertions de vérification fort immédiate.

En particulier,  $V$  égale  $V_0$  quand le produit mixte est nul, donc quand  $\vec{O\Sigma}$  est orthogonal au moment  $(L, M, N)$ , car celui-ci n'est pas nul : situé dans le plan que déterminent  $O$  et  $(\Lambda)$ , le vecteur aréolaire rencontre cet axe et les  $(\Lambda)$  forment alors un complexe spécial dont le support aréolaire est la droite singulière.

L'étude du paragraphe 25 associe à toute surface  $(S_0)$  celles d'équation générale

$$z = z_0 + \lambda b \left( \frac{x}{L} - \frac{y}{M} \right).$$

§ 44. — Propriété de  $V_0$ . — Soient encore  $V_{0_x}, V_{0_y}, V_{0_z}$  les volumes qu'engendre la révolution de  $S$  autour des axes coordonnés  $x'x, y'y, z'z$ ;

$$\begin{aligned} V_0 &= \lambda V_{0_x} + \mu V_{0_y} + \nu V_{0_z}, \\ &= \vec{O\Delta} \cdot \vec{OY}, \\ &= OY \cos \varphi, \end{aligned}$$

le dernier vecteur ayant  $V_{0_x}, V_{0_y}, V_{0_z}$  pour coordonnées et faisant avec le vecteur directeur l'angle  $\varphi$ .

Le volume  $V_0$  est donc invariant pour tout axe  $(\Lambda_0)$  faisant avec  $\vec{OY}$  un angle constant, c'est-à-dire pour toute génératrice d'un cône de révolution autour du précédent support ; il est, en particulier, nul pour tout axe perpendiculaire à ce support.

Prenons l'exemple d'une surface  $(S)$  de révolution autour de  $z'z$  ;  $V_{0_z}$  est nul,  $\vec{OY}$  appartient au plan  $xOy$  : les axes  $(\Lambda_0)$  engendrent des cônes d'axes normaux à l'axe de révolution et ceux qui déterminent des volumes  $V_0$  nuls se situent dans les plans méridiens.

§ 45. — Appliquons à (34) l'identité (3) ; les surfaces  $(S)$  telles que  $V$  égale  $h.s_z$  ont l'équation générale

$$2\pi \int \begin{vmatrix} -p & -q & 1 \\ \lambda & \mu & \nu \\ x-a & y-b & z-c \end{vmatrix} dx + \Omega(y) = hz$$

et elles s'attachent aux associées issues de

$$\begin{vmatrix} -p & -q & 1 \\ \lambda & \mu & \nu \\ x-a & y-b & z-c \end{vmatrix} = W(x, y). \quad (38)$$

§ 46. — **Surfaces associées relatives à un  $W$  constant.** — Lorsqu'en (38)  $W$  est une constante  $k$ ,

$$V = 2\pi \int \int_s k \gamma ds = 2\pi k s_z = 2\pi k S_z.$$

Disposant les axes de façon à prendre l'origine sur l'axe de révolution, nous obtenons pour (38)

$$p(\nu y - \mu z) + q(\lambda z - \nu x) = k + (\mu x - \lambda y),$$

équation dont la résolution(\*) donne les hélicoïdes

$$\eta = k\nu \operatorname{Arctg} \frac{\zeta}{\xi} + \mathcal{A}b(\xi^2 + \zeta^2)$$

ayant pour axe la droite d'équations

$$\frac{x + k\mu}{\lambda} = \frac{y - k\lambda}{\mu} = \frac{z}{\nu},$$

parallèle à  $(\Lambda_0)$  menée par le point  $(-k\mu, k\lambda, 0)$ .

Quand  $(\Lambda_0)$  varie, ces axes hélicoïdaux forment une congruence rectiligne d'ordre 6.

§ 47. — **Axe de rotation parallèle aux génératrices cylindriques.** — Confondant l'axe  $(\Lambda)$  avec  $z'z$ , l'équation des associées d'une surface  $(S_0)$  s'écrit

$$z = z_0 + \mathcal{A}b(x^2 + y^2),$$

après avoir intégré

$$py - qx = p_0 y - q_0 x :$$

(\*) Une résolution plus générale a été publiée dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* : P. PAPILLON, *Sur les volumes tournants*, 5<sup>e</sup> série, t. III, juin 1925.

ce sont les transformées par la dilatation orthogonale  $\mathcal{D}(xOy, z)$  des lieux des milieux des segments, parallèles à  $z'z$ , assujettis à prendre appui sur  $(S_0)$  et sur une révolutive quelconque d'axe  $z'z$ .

Au plan  $(S_0)$  qui peut toujours adopter l'équation

$$z = mx$$

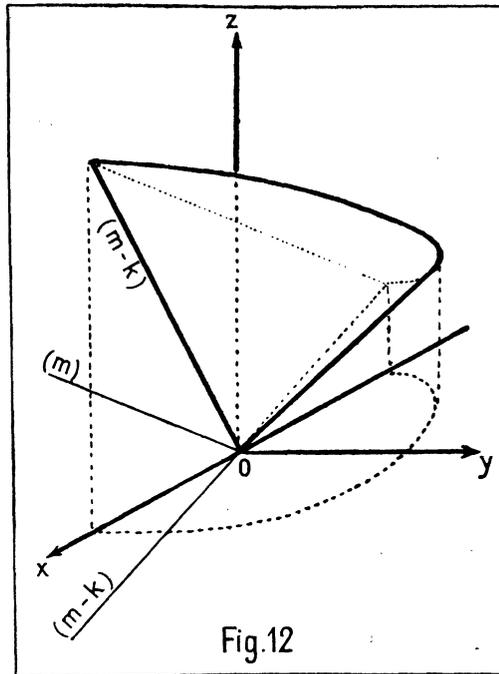


Fig. 12

s'associent les surfaces  $(S)$  pour lesquelles la distance de tout point au plan  $(S_0)$  est une fonction déterminée de sa distance à l'axe  $(\Lambda_0)$ .

Ces distances étant proportionnelles, ce sont les cônes (*fig. 12*)

$$k^2(x^2 + y^2) - (z - mx)^2 = 0$$

engendrés par des ellipses parallèles à  $(S_0)$ , projetées sur  $xOy$  suivant des circonférences de centre  $O$  et dont deux sommets opposés décrivent les droites d'équations

$$y = 0, \quad z = (m \pm k)x.$$

Puis viennent, la première distance étant proportionnelle au carré de la seconde, les paraboloides

$$x^2 + y^2 - 2a(z - mx) = 0$$

touchant à l'origine le plan ( $S_0$ ) et dont les sommets décrivent la droite

$$y = 0, \quad z = \frac{m}{2} x.$$

§ 48. — **Axe de rotation orthogonal aux génératrices cylindriques.** — Confondant l'axe ( $\Lambda$ ) avec l'axe  $x'x$ , l'équation des associées d'une surface ( $S_0$ ) s'écrit

$$z^2 = z_0^2 + \mathfrak{A}b(x),$$

après avoir intégré

$$qz = q_0 z_0.$$

Voici de ce fait quelques applications.

1. L'équation précédente associe les cylindres dont les génératrices sont parallèles à  $y'y$  :

*Soient  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  trois directions triplement orthogonales; sur les cylindres dirigés suivant  $\delta_1$ , tout cylindre de direction  $\delta_2$  découpe des cloisons donnant, par rotation autour d'un axe de direction  $\delta_3$ , des volumes tournants équivalents.*

2. S'associent encore les surfaces

$$Ax^2 + \mathfrak{A}b(x) + B(y - b)^2 + Cz^2 = 1$$

donc, particulièrement, les quadriques

$$A'x^2 + B(y - b)^2 + Cz^2 = 1.$$

*Sur les quadriques centrées se raccordant au long d'une même section principale, tout cylindre dirigé suivant un axe de cette section découpe des cloisons donnant, par rotation autour d'un axe parallèle à la troisième direction principale et située dans le plan principal normal aux génératrices cylindriques, des volumes tournants équivalents.*

Si B égale C les quadriques sont de révolution et comprennent la sphère concentrique et de même équateur; le théorème actuel se confond avec celui du paragraphe 43.

3. Il s'associe enfin les tores

$$(x^2 + y^2 + z^2 \pm C^2 + a^2 - R^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$$

dont les génératrices circulaires ont un centre fixe, mais un rayon variable.

*Sur les tores concentriques et de circonférence moyenne déterminée, tout cylindre dirigé suivant l'axe découpe des cloisons donnant, par rotation autour d'un axe central et situé dans le plan équatorial, des volumes tournants équivalents.*

§ 49. — **Généralisation d'un théorème de M. A. Buhl.** — I. M. A. Buhl s'est proposé de déterminer les surfaces dont les cloisons créent des volumes tournants proportionnels à ceux que fournissent leurs projections sur un plan contenant l'axe de rotation commun(\*).

Prenant cet axe pour celui des abscisses et le plan de projection étant  $xOy$ , le problème admet l'équation

$$\begin{vmatrix} -p & -q & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ x & y & 0 \end{vmatrix},$$

soit, calculs effectués

$$qz = (k - 1)y;$$

de là les surfaces (S)

$$z^2 = (k - 1)y^2 + \mathcal{A}b(x),$$

et la proposition concerne une quadrique, un plan principal et un axe principal de ce plan.

II. Imaginons maintenant les axes  $(\Lambda)$  confondus, mais de position quelconque.

1. Si  $(\Lambda)$  n'est point parallèle au plan de projection, toujours  $xOy$ , donnons-lui les équations

$$\frac{x}{\cos \varepsilon} = \frac{y}{0} = \frac{z}{\sin \varepsilon}$$

et celle du problème,

$$py \operatorname{tang} \varepsilon + q(z - x \operatorname{tg} \varepsilon) = (k - 1)y, \quad (k \neq 0)$$

admet pour solution

$$x^2 + y^2 + \tau z^2 = \mathcal{A}b(z\tau \operatorname{tang} \varepsilon + x)$$

avec

$$\tau = \frac{1}{1 - k}. \quad (\tau \neq 1)$$

Détachons les quadriques de révolution

$$x^2 + y^2 + \tau z^2 = C^2,$$

---

(\*) *Géométrie et Analyse des Intégrales doubles*, page 27.

indépendantes de  $\epsilon$ ; inversement, il correspond à tout diamètre du plan  $xOz$  pour la quadrique

$$A(x^2 + y^2) + Cz^2 = 1$$

des volumes en rapport

$$\frac{C - A}{A} = e^2.$$

*Une cloison d'une quadrique de révolution et sa projection sur l'équateur engendrent, par rotation autour d'un même diamètre, des volumes dont le rapport égale le carré de l'excentricité.*

2. Si  $(\Lambda)$  est parallèle au plan de projection et possède les équations

$$y = 0, \quad z = 0,$$

celle du problème conduit aux surfaces

$$(z - c)^2 = (k - 1)y^2 + \text{ll}(x) :$$

ce sont, à une translation près, celles du théorème initial :

*Une cloison d'une quadrique et sa projection sur un plan parallèle à un plan principal engendrent, par rotation autour d'un axe principal de ce plan, des volumes dont le rapport égale le carré de l'excentricité de la section en jeu.*

Ceci peut être déduit du théorème initial et de celui de Kœnigs.

III. Supposons encore les axes  $(\Lambda)$  distincts, le second étant la projection du premier sur le plan considéré.

Conservons au premier les équations

$$\frac{x}{\cos \epsilon} = \frac{y}{0} = \frac{z}{\sin \epsilon} ;$$

pour celle du problème,

$$py \operatorname{tang} \epsilon + q(z - x \operatorname{tang} \epsilon) = \left( \frac{k}{\cos \epsilon} - 1 \right) y :$$

les solutions sont celles de II, 1, sauf à poser

$$\tau = \frac{1}{1 - \frac{k}{\cos \epsilon}}.$$

Il correspond à tout diamètre du plan  $xOz$  pour la quadrique

$$A(x^2 + y^2) + Cz^2 = 1$$

des volumes en rapport

$$\frac{C - A}{A} \cos \varepsilon = e^2 \cos \varepsilon.$$

*Une cloison d'une quadrique de révolution et sa projection sur l'équateur engendrent, en tournant respectivement autour d'un diamètre et de sa projection, des volumes proportionnels.*

## 2. CORRESPONDANCES CONIQUES.

§ 50. — S'il s'agit d'un axe  $(\Lambda_0)$ , le problème d'association à une surface  $(S_0)$  se traite en toute généralité et conduit, par intégration de

$$\sum (\mu z - \nu y) \frac{\partial \left( F^{-\frac{3}{m}} - F_0^{-\frac{3}{m}} \right)}{\partial x} = 0,$$

aux surfaces  $(S)$

$$F_0^{-\frac{3}{m}}(x, y, z) + \mathbb{M}(x^2 + y^2 + z^2, \lambda x + \mu y + \nu z) = 1,$$

la fonction  $\mathbb{M}$  étant nulle ou homogène et de degré  $-3$  pour  $xyz$ .

*Conséquence.* — Les surfaces  $(\mathfrak{S})$  d'équation

$$F_0^{-\frac{3}{m}} + \frac{k^3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = 1,$$

indépendantes de  $\lambda, \mu, \nu$ , s'associent à  $(S_0)$  pour tout axe  $(\Lambda_0)$  :

*Toute surface appartient à une famille  $(\mathfrak{S})$  telle qu'un cône y découpe des cloisons donnant des volumes équivalents par rotation autour d'un axe quelconque passant au sommet conique.*

§ 51. — Au plan d'équation

$$z = l,$$

s'associent les surfaces (S)

$$\frac{l^3}{z^3} + \frac{k^3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = 1$$

de révolution autour de  $z'z$  et dont les méridiennes admettent l'équation polaire générale

$$r^3 = k^3 + \frac{l^3}{\sin^3 \theta};$$

parmi les (S), les cylindres

$$\frac{l^3}{z^3} + \frac{k^3}{(\lambda x + \mu y + \nu z)^3} = 1$$

dont les génératrices ont la direction

$$z = 0, \quad \lambda x + \mu y = 0,$$

projection de la direction d'axe sur  $(S_0)$ (\*).

§ 52. — Soit le cylindre de révolution

$$x^2 + y^2 = R^2$$

dont l'axe passe au sommet O; pour (S) vient l'équation

$$\frac{R^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{k^3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = 1,$$

puis l'équation polaire méridienne dans  $xOz$

$$r^3 = k^3 + \frac{R^3}{\cos^3 \theta}.$$

Enfin,  $(\Lambda_0)$  étant perpendiculaire à celui de  $(S_0)$ , s'associent les cylindres (S) dont les sections droites, dans  $xOy$ , ont l'équation polaire

$$r^3 = R^3 + \frac{k^3}{\cos^3 \theta}.$$

---

(\*) J'ai mentionné ces figures car les cloisons découpées par les cônes actuels limitent avec un plan asymptotique mené par le sommet conique des volumes cylindriques droits équivalents; la même propriété s'applique à des révolutes qu'engendrent les sections droites.

## § 53. — Propriétés des courbes

$$(C) \quad r^3 = a^3 + \frac{b^3}{\cos^3 \theta}.$$

L'étude actuelle et certain résultat du paragraphe 30 mettent en évidence les propositions suivantes :

*Soient les pseudo-conchoïdes (C) dans le plan  $xOz$ ;*

*1° ce sont les sections droites de cylindres sur lesquels tout cône de sommet O découpe des cloisons limitant avec le plan  $xOy$  des volumes cylindriques équivalents et donnant des volumes canaux d'axe  $x'x$  équivalents, quand  $b$  varie;*

*2° ce sont les méridiennes de surfaces révolutives d'axes  $x'x$  et  $z'z$  sur lesquelles tout cône de sommet O découpe des cloisons donnant des volumes canaux équivalents d'axe quelconque issu de O, quand  $a$  varie.*

## § 54. — A la sphère d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2Rz = 0$$

se joignent les révolutives (S) d'axe  $z'z$  et d'équation polaire méridienne

$$r^3 = k^3 + 8R^3 \sin^3 \theta;$$

les formes rappelées sont celles des limaçons de Pascal.

## 3. CORRESPONDANCES CONOÏDALES.

§ 55. — Nous confondons l'axe conoïdal et l'axe de rotation avec  $z'z$ ; la résolution de

$$y \frac{\partial H}{\partial x} - x \frac{\partial H}{\partial y} = W(x, y, z),$$

en laquelle

$$H(x, y, z) \equiv F^{-\frac{2}{m}},$$

attribue aux (S) l'équation

$$F_0^{-\frac{2}{m}}(x, y, z) \pm \frac{k^2}{x^2 + y^2} = 1.$$

Aux surfaces du deuxième degré

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

— quadriques centrées, cylindres, plus — s'associent les quartiques

$$(x^2 + y^2)(Ax^2 + By^2 + Cz^2) = (1 \pm k^2 A)x^2 + (1 \pm k^2 B)y^2;$$

au cylindre de révolution

$$x^2 + y^2 - 2Rx = 0,$$

les cylindres quartiques

$$(x^2 + y^2)^2 = (4R^2 \pm k^2)x^2 \pm k^2y^2.$$

dont les sections droites sont les podaires centrales des coniques homofocales

$$\frac{x^2}{4R^2 \pm k^2} \pm \frac{y^2}{k^2} - 1 = 0.$$

---

CHAPITRE VI.

L'équivalence des volumes conoïdaux.

§ 56. — Expressions des volumes conoïdaux. — Soient

$$\frac{X-a}{\lambda} = \frac{Y-b}{\mu} = \frac{Z-c}{\nu}$$

les équations de l'axe conoïdal ( $\Delta$ ), en lesquelles  $\lambda, \mu, \nu$  désignent des cosinus directeurs; avec

$$\Delta \equiv \frac{\begin{vmatrix} E'_x & E'_y & E'_z \\ \lambda & \mu & \nu \\ \nu(Y-b) - \mu(Z-c) & \dots & \dots \end{vmatrix}}{\sqrt{E_x'^2 + E_y'^2 + E_z'^2}}$$

les intégrales (6) et (7) deviennent(\*)

$$(39) \quad V = \begin{cases} \frac{1}{2} \iint_s \begin{vmatrix} -p & -q & 1 \\ \lambda & \mu & \nu \\ \nu(y-b) - \mu(z-c) & \dots & \dots \end{vmatrix} \gamma ds, \\ \frac{1}{2m} \iint_s \begin{vmatrix} F'_x & F'_y & F'_z \\ \lambda & \mu & \nu \\ \nu\left(yF'^{-\frac{1}{m}} - b\right) - \mu\left(zF'^{-\frac{1}{m}} - c\right) & \dots & \dots \end{vmatrix} F'^{-\frac{2}{m}-1} \Sigma \alpha x ds. \end{cases} \quad (40)$$

Lorsque l'axe conoïdal passe en O, V prend la valeur  $V_0$ ; dans le premier cas

$$(41) \quad V - V_0 = \frac{1}{2} \iint_s \begin{vmatrix} -p & -q & 1 \\ \lambda & \mu & \nu \\ \mu c - \nu b & \dots & \dots \end{vmatrix} \gamma ds.$$

---

(\*) Les correspondances conoïdales, déterminées par (8), ne conduisent à aucun résultat d'intérêt vraiment nouveau. Dans la formule (40) on a écrit  $\Sigma \alpha x$  pour  $(\alpha x + \beta y + \gamma z)$ ; il en est de même plus loin.

I. CORRESPONDANCES CYLINDRIQUES.

§ 57. — Étude de  $V - V_0$ . — Développons (41) : nous avons alors, pour  $V - V_0$ ,

$$\frac{1}{2} \int \int_s [- (M\nu - N\mu) p - (N\lambda - L\nu) q + (L\mu - M\lambda)] \gamma ds,$$

c'est-à-dire

$$V - V_0 = \frac{1}{2} d \text{ proj } S,$$

$d$  représentant toujours la distance des axes  $(\Lambda)$  et  $(\Lambda_0)$  et la projection se faisant, cette fois, sur un plan perpendiculaire à ladite distance :

*La différence des volumes conoïdaux relatifs à deux axes parallèles est le demi-produit des nombres qui mesurent la distance de ces axes et la projection de la cloison sur un plan normal à cette distance.*

Lorsqu'en particulier la cloison se situe sur un conoïde d'axe  $(\Lambda_0)$ ,  $V_0$  s'annule et nous parvenons à cette conséquence :

*Le volume conoïdal relatif à une cloison conoïdale et à un axe parallèle à celui du conoïde est le demi-produit des nombres qui mesurent la distance de ces axes et la projection de la cloison sur le plan normal à cette distance.*

D'une manière équivalente

$$V - V_0 = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ \lambda & \mu & \nu \\ L & M & N \end{vmatrix};$$

la différence est invariante avec le déterminant, de sorte que *les axes  $(\Lambda)$  forment un complexe du deuxième ordre.*

En particulier,  $V$  égale  $V_0$  quand le déterminant est nul, donc quand

$$\frac{S_x}{L} = \frac{S_y}{M} = \frac{S_z}{N}$$

ou quand

$$\frac{S_x}{\lambda} = \frac{S_y}{\mu} = \frac{S_z}{\nu};$$

( $\Lambda$ ) se meut dans un plan normal au vecteur aréolaire de  $S$  ou parallèlement à ce vecteur(\*).

L'étude du paragraphe 25 associe à toute surface ( $S_0$ ) celles dont l'équation générale est

$$z = z_0 + \mathfrak{Ab} \left( \frac{x}{M\nu - N\mu} - \frac{y}{N\lambda - L\nu} \right).$$

§ 58. — Soient, inversement, les surfaces

$$z = z_0(x, y) + \mathfrak{Ab} \left( \frac{x}{l} - \frac{y}{m} \right)$$

définies à partir d'une surface ( $S_0$ ) et d'un cylindre quelconque de direction ( $l, m, 0$ ); tout cylindre dirigé suivant  $z'z$  y découpe des cloisons donnant :

- 1° des projections équivalentes sur tout plan parallèle à la direction ( $-m, l, 0$ );
- 2° des différences volumiques équivalentes relativement aux axes de rotation parallèles ( $\Lambda$ ) et ( $\Lambda_0$ ) tels que

$$\frac{L}{l} = \frac{M}{m};$$

- 3° des différences volumiques équivalentes relativement aux axes conoïdaux parallèles ( $\Lambda$ ) et ( $\Lambda_0$ ) tels que

$$\frac{M\nu - N\mu}{l} = \frac{N\lambda - L\nu}{m}.$$

Dans ces deux derniers cas, la triple infinité des axes ( $\Lambda$ ) forme un complexe spécial et un complexe du second ordre, respectivement.

§ 59. — Appliquons à (39) l'identité (3); les surfaces ( $S$ ) telles que  $V$  égale  $hs$ , ont l'équation

$$\frac{1}{2} \int \left| \begin{array}{ccc|c} -p & -q & 1 & \\ \lambda & \mu & \nu & \\ \nu(y-b) - \mu(z-c) & \dots & \dots & \end{array} \right| dx + \Omega(y) = hz$$

et elles s'attachent aux associées issues de

$$\left| \begin{array}{ccc|c} -p & -q & 1 & \\ \lambda & \mu & \nu & \\ \nu(y-b) - \mu(z-c) & \dots & \dots & \end{array} \right| = W(x, y). \quad (42)$$

---

(\*) A. BUHL, 1<sup>re</sup> Mémoire, §§ 25 et 26.

§ 60. — Surfaces associées relatives à un  $W$  constant. — Lorsqu'en (42)  $W$  est une constante  $k$  et si l'origine des coordonnées est prise sur l'axe conoïdal, les surfaces associées ont l'équation

$$\begin{aligned} & (\lambda^2 + \mu^2)z - \nu(\lambda x + \mu y) - k(\lambda^2 + \mu^2) \\ &= (\lambda y - \mu x) \operatorname{Ab} \left[ (\lambda y - \mu x) e^{\frac{\lambda x + \mu y + \nu z}{k\nu}} \right]; \end{aligned}$$

par la substitution orthogonale

$$\begin{cases} \xi = \frac{\lambda y - \mu x}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}, \\ \eta = \frac{-\nu(\lambda x + \mu y) + (\lambda^2 + \mu^2)z - k\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}, \\ \zeta = \lambda x + \mu y + \nu z, \end{cases}$$

cette équation devient

$$e^{-\frac{\eta}{k\nu}} = \xi \operatorname{Ab} \left( \frac{\eta}{\xi} \right).$$

Si  $k$  est nul, nous trouvons les conoïdes d'axe  $z'z$ , comme il était a priori prévu.

Dans le cas général, les lignes asymptotiques s'obtiennent par quadratures; le plan tangent au point  $(\xi, \eta, \zeta)$  rencontre  $\zeta'z$  au point de cote  $\zeta + k\nu$ .

§ 61. — Axe conoïdal parallèle aux génératrices cylindriques. — Confondant l'axe  $(\Lambda)$  avec  $z'z$ , l'équation des associées d'une surface  $(S_0)$  s'écrit

$$z = z_0 + \operatorname{Ab} \left( \frac{y}{x} \right),$$

après avoir intégré

$$px + qy = p_0x + q_0y :$$

ce sont les transformées par la dilatation orthogonale  $\mathcal{D}(xOy, 2)$  des lieux des milieux des segments, parallèles à  $z'z$ , assujettis à prendre appui sur  $(S_0)$  et sur un conoïde quelconque d'axe  $z'z$ .

C'est ainsi qu'à un plan s'associent les conoïdes d'axe  $z'z$  qui l'admettent pour plan directeur.

§ 62. — **Axe conoïdal orthogonal aux génératrices cylindriques.** — Confondant l'axe  $(\Lambda)$  avec  $x'x$ , l'équation des associées d'une surface  $(S_0)$  s'écrit

$$z = z_0 + y \cdot \text{Ab}(x)$$

après avoir intégré

$$z - qy = z_0 - q_0 y :$$

ce sont les transformées par la dilatation orthogonale  $\mathcal{D}(xOy, 2)$  des lieux des milieux des segments, parallèles à  $z'z$ , assujettis à prendre appui sur  $S_0$  et sur un conoïde quelconque d'axe  $x'x$ .

Au plan s'associent les conoïdes dont l'axe est la trace de ce plan sur  $xOz$  et dont  $yOz$  est le plan directeur.

§ 63. — **Remarque.** — Il convient ici de rapprocher les conclusions des paragraphes 34, 47 et 61.

Les surfaces associées à  $(S_0)$  sur lesquelles un cylindre dirigé suivant  $z'z$  découpe des cloisons créant des volumes coniques de sommet  $O$ , canaux ou conoïdaux d'axe  $z'z$ , équivalents ont une équation de la forme

$$z = z_0 + z_1;$$

les termes du second membre sont, en fonction de  $x$  et  $y$ , les cotes de  $(S_0)$  et d'un cône de sommet  $O$ , d'une révolutive ou d'un conoïde d'axe  $z'z$ .

Une démonstration commune peut être présentée sous une forme nouvelle. Les relations (25), (34) et (39) s'explicitent suivant

$$V = V_0 + \int \int_s \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3}(-px - qy + z) \gamma ds, \\ 2\pi(py - qx) \gamma ds, \\ -\frac{1}{2}(px + qy) \gamma ds, \end{array} \right.$$

$V_0$  s'adressant à la cloison de  $(S_0)$ ;  $V$  égale  $V_0$  si les intégrales sont nulles, quelle que soit  $s$ , donc si les parenthèses le sont : or

$$\begin{array}{l} px + qy - z = 0, \\ py - qx = 0, \\ px + qy = 0, \end{array}$$

sont les équations caractéristiques des cônes de sommet O, des révolutes et des conoïdes d'axe  $z'z$ .

Des résultats plus généraux pourraient être obtenus par voie analogue.

## 2. CORRESPONDANCES CONIQUES.

§ 64. — Bornons-nous au cas d'un axe  $(\Lambda_0)$ . Le problème d'association à une surface  $(S_0)$  peut être traité en toute généralité et conduit, par intégration de

$$\sum [\mu(\lambda y - \mu x) - \nu(\nu x - \lambda z)] \frac{\partial \left( F_0^{-\frac{3}{m}} - F_0^{-\frac{3}{m}} \right)}{\partial x} = 0,$$

aux surfaces (S)

$$F_0^{-\frac{3}{m}}(x, y, z) + (\lambda x + \mu y + \nu z)^{-3} \mathfrak{A}b \left( \frac{\mu z - \nu y}{\lambda z - \nu x} \right) = 1;$$

la fonction  $\mathfrak{A}b$  est arbitraire.

Si  $(\Lambda_0)$  se confond avec  $z'z$ , il vient la réduite

$$F_0^{-\frac{3}{m}}(x, y, z) + z^{-3} \mathfrak{A}b \left( \frac{y}{x} \right) = 1.$$

§ 65. — Les solutions (J)

$$F_0^{-\frac{3}{m}}(x, y, z) + \frac{k^3}{(\lambda x + \mu y + \nu z)^3} = 1,$$

ou, sous forme réduite,

$$F_0^{-\frac{3}{m}}(x, y, z) + \frac{k^3}{z^3} = 1,$$

sont communes aux équations des paragraphes 50 et 63 :

*Une droite  $(\Lambda)$  étant donnée, toute surface appartient à une famille (J) telle que tout cône ayant son sommet sur  $(\Lambda)$  y découpe des cloisons donnant des volumes équivalents pour cet axe de révolution ou conoïdal.*

Avec une sphère ( $S_0$ ) de centre  $O$ , les surfaces ( $J$ ) admettent ( $\Lambda_0$ ) — qu'on peut prendre comme axe des cotes — pour axe de révolution et pour équation polaire méridienne

$$r^3 = k^3 + \frac{R^3}{\sin^3 \theta};$$

nouvelle propriété des courbes du paragraphe 53, concernant certains volumes sphéro-conoïdaux.

§ 66. — **Associées cylindriques et révolutives.** — Prenons un cylindre ( $S_0$ ) dirigé suivant  $y'y$ , orthogonalement à l'axe conoïdal  $z'z$  : pour les ( $S$ )

$$F_0^{-\frac{3}{m}}(x, z) + z^{-3} \mathfrak{Ab}\left(\frac{y}{x}\right) = 1.$$

Prenons la révolutive ( $S_0$ ) d'axe  $z'z$  et dont la méridienne est section droite du cylindre : pour les ( $S$ )

$$F_0^{-\frac{3}{m}}(\sqrt{x^2 + y^2}, z) + z^{-3} \mathfrak{Ab}\left(\frac{y}{x}\right) = 1.$$

En conséquence, les surfaces ( $J$ ) sont des cylindres et des révolutives qu'engendrent les mêmes courbes, tour à tour sections droites et sections méridiennes.

Les exemples simples abondent; il est superflu d'insister.

## CHAPITRE VII.

### L'équivalence des potentiels.

§ 67. — En Électricité, où la masse attirante s'étale à la surface des conducteurs, on est conduit à étudier les potentiels dûs aux cloisons. En Mécanique Céleste, les attractions sont exercées par des corps occupant certains volumes; le potentiel newtonien en un point O étant  $\mathcal{P}$ , une couche superficielle d'équation

$$\mathcal{P} = C^{1n}$$

t de densité

$$\Delta = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\mathcal{P}}{dn}$$

provoque en M une attraction identique à celle du corps envisagé.

Il est donc utile de porter notre attention sur les potentiels de simples couches; nous nous placerons encore au point de vue de l'équivalence et la dénomination de *cloisons isopotentielles pour un point* s'entend d'elle-même.

§ 68. — **Expression du potentiel en un point.** — Soit une cloison prise sur une surface (S) d'équation

$$E(X, Y, Z) = 0$$

et possédant en M la densité  $D(X, Y, Z)$ ; l'expression

$$\mathcal{P} = k \int \int_s D \cdot \frac{dS}{OM}$$

du potentiel produit à l'origine des coordonnées, est, par une correspondance conique de sommet O, transformée en

$$\mathcal{P} = k \int \int_s D(X, Y, Z) \frac{\sqrt{E_x'^2 + E_y'^2 + E_z'^2}}{X E_x' + Y E_y' + Z E_z'} \frac{\rho^3}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} \Sigma \alpha x ds$$

avec

$$X = \rho x, \quad Y = \rho y, \quad Z = \rho z, \quad E(\rho x, \rho y, \rho z) = 0.$$

L'hypothèse d'univocité impose

$$E \equiv F(X, Y, Z) - 1,$$

F étant homogène et de degré  $m$  pour XYZ, en sorte que

$$\mathfrak{F} = k \int \int_s D(xT, yT, zT) \sqrt{\frac{\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2}{x^2 + y^2 + z^2}} \Sigma \alpha x ds \quad (43)$$

avec

$$T(x, y, z) \equiv F^{-\frac{1}{m}};$$

T est homogène et de degré  $-1$  pour  $xyz$ .

§ 69. — **Problème.** — Une surface (S) étant donnée, déterminer la densité sur une surface ( $\Sigma$ ) de façon que tout cône de sommet O y découpe des cloisons isopotentielles pour ce point.

Avec d'évidentes notations, l'équation du problème

$$\Delta(\xi, \eta, \zeta) \sqrt{\frac{\left(\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)^2 + \dots}{x^2 + y^2 + z^2}} = D(xT, \dots) \sqrt{\frac{\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \dots}{x^2 + y^2 + z^2}},$$

avec

$$\xi = \rho x, \quad \eta = \rho y, \quad \zeta = \rho z, \quad \rho = \Theta(x, y, z),$$

détermine  $\Delta(\xi, \eta, \zeta)$ ; les propriétés d'homogénéité pour les expressions  $xT, \dots$ , — de degré 0 — et  $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2, \dots$ , — de degré  $-4$  — donnent finalement

$$\Delta(\xi, \eta, \zeta) = D[\xi T(\xi, \eta, \zeta), \dots, \dots] \sqrt{\frac{\left(\frac{\partial T}{\partial \xi}\right)^2 + \dots + \dots}{\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \xi}\right)^2 + \dots + \dots}}. \quad (44)$$

§ 70. — **Première conséquence.** — La forme de ce résultat montre que la distribution de la densité sur ( $\Sigma$ ) est la même pour toutes les surfaces (S) issues de l'équation

$$D^2(xT, yT, zT) \left[ \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2 \right] = W(x, y, z). \quad (45)$$

Si  $D$  est constant ou, plus généralement, homogène et de degré nul pour  $xyz$ , (45) devient

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2 = W(x, y, z)$$

$W$  étant ici homogène et de degré  $-4$ , homogénéité qui permet de poser

$$T \equiv x^{-1} \varphi(u, v) \\ u = \frac{y}{x}, \quad v = \frac{z}{x},$$

et de transformer (45) en

$$\left(\varphi + u\varphi'_u + v\varphi'_v\right)^2 + \varphi_u'^2 + \varphi_v'^2 = \Psi(u, v). \quad (46)$$

§ 71. — **Cylindres et surfaces de révolution isopotentielles.** — Choisissons  $z'z$  parallèle aux génératrices cylindriques; (46) se rend indépendante de  $v$  et devient, en coordonnées cylindriques,

$$\varphi^2(\theta) + \varphi'^2(\theta) = \Psi(\theta).$$

Si  $z'z$  est axe de révolution, (45) devient, en coordonnées sphériques,

$$\varphi^2(\lambda) + \varphi'^2(\lambda) = \Psi(\lambda).$$

Ces résultats prolongent au cas actuel la proposition du paragraphe 16. C'est ainsi que s'associeront les cylindres

$$r = R \cos(\theta - \alpha), \quad r = R,$$

d'une part, et, d'autre part, les révolutes

$$\rho = R \cos(\lambda - \alpha), \quad \rho = R.$$

§ 72. — **Seconde conséquence.** — La loi de densité varie avec la surface  $(\Sigma)$  qu'on s'est imposée a priori; la relation (44) permettra

1° de déterminer  $\Delta$  pour une surface  $(\Sigma)$  donnée : un plan ou une sphère de centre  $O$ , par exemple;

2° de déterminer la surface  $(\Sigma)$  sur laquelle la distribution densitaire est uniforme.

§ 73. — **Distributions planes et sphériques.** — A la surface ( $\Sigma$ ) peut être attribuée l'équation

$$\zeta = h;$$

la densité, fournie par (44), a pour expression

$$\Delta(\xi, \eta, h) = h D(\xi T, \eta T, \zeta T) \sqrt{\left(\frac{\partial T}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial \zeta}\right)^2}$$

$\zeta$  étant, au second membre, remplacé par la constante  $h$ .

Avec la sphère ( $\Sigma$ ) centrée en O,

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = h^2,$$

l'expression de la densité revêt, toujours d'après (44), la forme précédente, mais les coordonnées  $\xi, \eta, \zeta$  satisfont à l'équation de la sphère. En introduisant la longitude  $L$  et la latitude  $\lambda$  du point sphérique on obtient une expression  $\Delta(L, \lambda)$  égale à

$$\frac{1}{h} D(\mathcal{C} \cos L \cos \lambda, \mathcal{C} \sin L \cos \lambda, \mathcal{C} \sin \lambda) \sqrt{\mathcal{C}^2 + \frac{1}{\cos^2 \lambda} \mathcal{C}'^2 + \mathcal{C}''^2},$$

car  $T$  est devenue  $h^{-1} \mathcal{C}(L, \lambda)$ .

*Exemple.* — Prenons une couche sphérique (S) de centre O et de rayon R : un calcul simple montre que la densité au point  $\mu$  de la couche plane ( $\Sigma$ ), transformé du point M de (S), a pour valeur

$$\Delta_\mu = \frac{R}{h} D_M \cos^2 \gamma,$$

$\gamma$  mesurant la colatitude du rayon OM; en choisissant ( $\Sigma$ ) tangent à (S),  $h$  égale R et

$$\Delta_\mu = D_M \cos^2 \gamma.$$

§ 74. — **Surface à distribution uniforme.** — Une surface ( $\Sigma$ ), isopotentielle à (S) et ses associées, pour laquelle  $\Delta$  est une constante, se détermine grâce à l'équation aux dérivées partielles

$$\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \zeta}\right)^2 = \frac{D^2[\xi T(\xi, \eta, \zeta), \dots, \dots]}{\Delta^2} \left[ \left(\frac{\partial T}{\partial \xi}\right)^2 + \dots \right]$$

car le second membre est une fonction connue des variables  $\xi, \eta, \zeta$ , et homogène s'il en est ainsi de  $D(X, Y, Z)$ .