ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

E. ANGLADE

Ligne de striction et paramètre de distribution

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 23 (1931), p. 263-285

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1931_3_23__263_0>

LIGNE DE STRICTION ET PARAMÈTRE DE DISTRIBUTION

PAR M. E. ANGLADE [1].

1. Généralités. — Pour définir une surface réglée (Σ) il suffit de se donner une courbe (C) et, en chacun des points de cette courbe, la direction de la génératrice (G). La simplicité des calculs auxquels conduit l'étude de la surface dépend du choix du support (C) qui sera, dans la suite, la ligne de striction.

2. Notations. — Nous désignerons par :

$x, y, z,$ les coordonnées d'un point M de (C);
X, Y, Z, les coordonnées d'un point de la surface (Σ);
$a, b, c,$ les cosinus directeurs de (G);
$\alpha, \beta, \gamma,$ les cosinus directeurs de la tangente à la courbe (C);
$\lambda, \mu, \nu,$ les cosinus directeurs de la génératrice du cône supplémentaire du cône directeur (D);
σ, l'arc de la courbe (Γ) déterminée par le cône directeur sur la sphère de rayon un dont le centre est au sommet de (D);
τ, l'arc de courbe (Δ) décrit par le point (λ, μ, ν);
s, l'arc de la ligne de striction.

Le vecteur (λ, μ, ν) doit être choisi de telle sorte qu'il forme un trièdre trirectangle direct avec les deux vecteurs (a, b, c), $\left(\frac{da}{d\sigma}, \frac{db}{d\sigma}, \frac{dc}{d\sigma}\right)$.

Dans ces conditions :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{da}{d\sigma} & \frac{db}{d\sigma} & \frac{dc}{d\sigma} \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = 1.$$

[1] Résumé d'un travail présenté à la Faculté des Sciences de Toulouse, en juin 1931, en vue de l'obtention d'un Diplôme d'Études supérieures de Mathématiques. Ce Diplôme a été délivré à M. E. Anglade, Professeur au Lycée français de Madrid, avec Mention Très honorable.

Lorsque le point (a, b, c) décrit (Γ) dans le sens positif, le point (λ, μ, ν) décrit (Δ) dans un sens que l'on prend aussi comme sens positif sur cette courbe. Enfin on choisit le sens positif sur (Γ) de manière à vérifier les relations :

$$\frac{da}{d\sigma} = \frac{d\lambda}{d\tau}; \quad \frac{db}{d\sigma} = \frac{d\mu}{d\tau}; \quad \frac{dc}{d\sigma} = \frac{d\nu}{d\tau}.$$

Ces conventions seront utiles dans ce qui suit.

3. Condition pour qu'une courbe (C) soit la ligne de striction d'une surface réglée (Σ). — Nous supposerons que les coordonnées x, y, z et les cosinus a, b, c sont exprimés en fonction d'un même paramètre. Le plan asymptote a pour paramètres directeurs les coefficients du tableau :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}.$$

Dans ce tableau, a', b', c', représentent les dérivées de a, b, c, par rapport au paramètre. Le plan tangent à (Σ) le long de (C) a pour paramètres directeurs les coefficients du nouveau tableau :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}.$$

En exprimant que ces deux plans sont rectangulaires, on trouve :

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} 1 & \Sigma a x' \\ 0 & \Sigma a' x' \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou :} \quad \Sigma a' x' = 0.$$

Cette condition signifie que les tangentes aux points correspondants de (C) et de (Γ) sont *perpendiculaires*.

4. Autres formes de la condition (1). — 1° Les relations immédiates,

$$\Sigma a'\lambda = 0; \qquad \Sigma a' a = 0; \qquad \Sigma a' \alpha = 0,$$

montrent que les vecteurs (a, b, c), (λ, μ, ν), (α, β, γ) sont coplanaires. Si θ désigne l'angle $(\widehat{\mathrm{MG}, \mathrm{MT}})$ que fait la génératrice avec la tangente à la courbe (C), on peut écrire :

$$(2) \qquad \alpha = a \cos\theta - \lambda \sin\theta; \quad \beta = b \cos\theta - \mu \sin\theta; \quad \gamma = c \cos\theta - \nu \sin\theta.$$

2° Désignons par α', β', γ', les cosinus directeurs de la normale principale de (C) et par $\alpha'', \beta'', \gamma''$, ceux de la binormale.

En introduisant l'angle φ que fait le plan osculateur de (C) avec le plan tangent au point M, nous trouvons :

$$a = \alpha \cos\theta + \sin\theta(\alpha' \cos\varphi + \alpha'' \sin\varphi); \quad b = \beta\cos\theta + \sin\theta(\beta'\cos\varphi + \beta''\sin\varphi); \quad c = \ldots.$$

Après avoir remplacé a, b, c, par leur valeur, la formule (1) devient :

$$\sin\theta\left(\frac{d\theta}{ds} + \frac{\cos\varphi}{R}\right) = 0.$$

En se limitant aux surfaces gauches, il reste :

$$d\theta + \frac{\cos\varphi}{R} \cdot ds = 0. \tag{3}$$

Dans cette formule R représente le rayon de courbure de (C).

3° En posant :

$$a = \sin\omega \cdot \cos\varphi; \quad b = \sin\omega \cdot \sin\varphi; \quad c = \cos\omega,$$

l'équation (1) prend la forme :

$$\omega' \{ \cos\omega[x'\cos\varphi + y'\sin\varphi] - z'\sin\omega \} + \varphi'\sin\omega[y'\cos\varphi - x'\sin\varphi] = 0. \tag{4}$$

5. Calcul du paramètre de distribution. — La formule qui donne le paramètre de distribution[1] devient, avec les notations précédentes et en tenant compte des relations (1), (2) :

$$K = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \Sigma a dx \\ \Sigma a dx & \Sigma dx^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ da & db & dc \\ a & b & c \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \Sigma a\alpha \\ \Sigma a\alpha & 1 \end{vmatrix} ds^2}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ da & db & dc \\ a & b & c \end{vmatrix} ds} = \frac{\sin^2\theta \cdot ds^2}{\sin\theta \cdot ds \cdot d\sigma}.$$

K prend la forme définitive[2] :

$$K = \sin\theta \frac{ds}{d\sigma}. \tag{5}$$

---

[1] E. Vessiot. *Leçons de Géométrie supérieure*, page 103.

[2] ds n'a pas forcément le même signe que $d\sigma$. Ce signe dépend du sens positif choisi sur la courbe (C).

Les formules (3) et (5) donnent, après élimination de ds :

$$\frac{K}{R} \cdot \cos \varphi = \frac{d(\cos \theta)}{d\sigma}. \tag{6}$$

C'est une relation très intéressante qui lie des éléments fondamentaux de (Σ). Si $\cos \varphi = 1$, la ligne de striction est une asymptotique. L'équation (6) prend la forme :

$$\frac{K}{R} = \frac{d(\cos \theta)}{d\sigma}.$$

6. Surfaces à ligne de striction circulaire. — Les équations du cercle, placé dans le plan xoy, sont :

$$x = R \cos \frac{s}{R}; \qquad y = R \sin \frac{s}{R}.$$

Par conséquent :

$$\alpha = -\sin \frac{s}{R}; \qquad \beta = \cos \frac{s}{R}; \qquad \gamma = 0.$$

Des formules (2) nous déduisons :

$$-\sin \frac{s}{R} = a \cos \theta - \lambda \sin \theta; \qquad \cos \frac{s}{R} = b \cos \theta - \mu \sin \theta; \qquad c \cos \theta - \nu \sin \theta = 0.$$

La troisième relation entraîne :

$$\sin \theta = \frac{\varepsilon c}{\sqrt{c^2 + \nu^2}}; \qquad \cos \theta = \frac{\varepsilon \nu}{\sqrt{c^2 + \nu^2}}; \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

et, par conséquent :

$$\sin \frac{s}{R} = \frac{\varepsilon(\lambda c - a\nu)}{\sqrt{c^2 + \nu^2}}; \qquad \cos \frac{s}{R} = \frac{\varepsilon(b\nu - \mu c)}{\sqrt{c^2 + \nu^2}}.$$

La surface la plus générale a donc pour équations :

$$X = \frac{\varepsilon(b\nu - \mu c)}{\sqrt{c^2 + \nu^2}} + au; \qquad Y = \frac{\varepsilon(\lambda c - a\nu)}{\sqrt{c^2 + \nu^2}} + bu; \qquad Z = cu.$$

u est la longueur de la génératrice comptée à partir de la ligne de striction.

$a, b, c,$ sont donnés en fonction d'un paramètre de telle sorte que : $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Il est possible d'attribuer aux équations précédentes la forme :

$$X = \frac{\varepsilon R\, da}{\sqrt{da^2 + db^2}} + ua; \qquad Y = \frac{\varepsilon R\, db}{\sqrt{da^2 + db^2}} + ub; \qquad Z = uc.$$

Il suffit de remarquer que :

$$\frac{da}{d\sigma} = -(b\nu - \mu c); \qquad \frac{db}{d\sigma} = -(c\lambda - \nu a); \qquad \left(\frac{da}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{db}{d\sigma}\right)^2 = c^2 + \nu^2.$$

On vérifiera aisément que ces surfaces ont bien une ligne de striction circulaire. Sur les équations précédentes l'on aperçoit immédiatement que *si une génératriee* (G) *décrit une surface* (Σ) *dont la ligne de striction est un cercle de centre* O, *la droite symétrique de* (G) *par rapport à* O *décrit une surface admettant la même ligne de striction.*

Nous remarquons aussi que les cosinus (a, b, c), $(a, b, -c)$ déterminent deux surfaces ayant la même ligne de striction (C). Cela prouve que *la surface symétrique de* (Σ) *par rapport au plan du cercle* (C) *admet ce même cercle pour ligne de striction.*

La relation (1) permettra d'étendre cette dernière propriété à toutes les surfaces à ligne de striction plane.

7. Surfaces à cône directeur de révolution. — Prenons oz pour axe du cône. Dans la condition (4) ω doit être constant. Cela entraîne :

$$\omega' = 0, \qquad \text{et par suite :} \qquad y' \cos\varphi - x' \sin\varphi = 0.$$

Le long de la ligne de striction l'on a :

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y'}{x'}.$$

La génératrice (G) *est contenue dans le plan projetant la tangente à la ligne de striction sur le plan* xoy.

Si nous désignons par δ l'axe du cône directeur de révolution nous pouvons énoncer cette propriété sous la forme suivante :

La ligne de striction et δ *déterminent un cylindre. La génératrice* (G) *de la surface* (Σ) *reste tangente à ce cylindre et fait un angle constant avec la génératrice* δ.

Réciproquement, si une tangente à un cylindre fait un angle constant avec la génératrice δ, elle engendre une surface réglée (Σ) à cône directeur de révolution et admettant la courbe de contact pour ligne de striction.

Dans le cas des surfaces à plan directeur l'angle constant est égal à $\frac{\pi}{2}$.

8. Surfaces réglées réciproques. — On sait que la ligne de striction est le lieu du pied de la perpendiculaire commune à deux génératrices infiniment voisines. Cette perpendiculaire commune est dirigée suivant la génératrice (λ, μ, ν) du cône supplémentaire du cône directeur.

Nous savons que :

$$\frac{da}{d\sigma} = \frac{d\lambda}{d\tau}; \qquad \frac{db}{d\sigma} = \frac{d\mu}{d\tau}; \qquad \frac{dc}{d\sigma} = \frac{d\nu}{d\tau}.$$

La condition (1) qui peut s'écrire :

$$\sum \alpha \frac{da}{d\sigma} = 0$$

entraîne :

$$\sum \alpha \frac{d\lambda}{d\tau} = 0.$$

Cela prouve que *la perpendiculaire commune à deux génératrices infiniment voisines engendre une surface réglée* (Σ') *ayant la même ligne de striction que* (Σ).

On peut aussi établir cette propriété en partant de l'équation (3). Cette équation étant vérifiée pour une courbe (C) et une génératrice (G), l'est encore quand on laisse à φ la même valeur et que l'on augmente θ d'une quantité constante w. Autrement dit, toute droite du plan tangent MTG — formé par la génératrice MG et la tangente MT à la ligne de striction — qui fait un angle constant avec MG engendre une surface ayant même ligne de striction. Cet énoncé subsiste dans le cas précédemment étudié $\left(w = \frac{\pi}{2}\right)$.

Le nom de surfaces réglées réciproques se justifie aisément. Les surfaces (Σ) et (Σ') sont tangentes le long de la ligne de striction. En effet, les relations :

$$\Sigma a'x' = 0; \qquad \Sigma aa' = 0; \qquad \Sigma a'\lambda = 0,$$

montrent que ces surfaces admettent la même normale (a', b', c') le long de la courbe (C). Les deux plans centraux sont donc confondus; les plans asymptotes sont perpendiculaires.

9. Relations entre les paramètres de distribution. — Pour la surface (Σ) :

$$K = \sin\theta \,.\, \frac{ds}{d\sigma}.$$

Pour la surface (Σ') :

$$K' = \cos\theta \,.\, \frac{ds}{d\tau}.$$

De ces équations on déduit :

$$(7) \qquad ds^2 = K^2 d\sigma^2 + K'^2 d\tau^2; \qquad \frac{K}{K'} = \operatorname{tg}\theta \,.\, \frac{d\tau}{d\sigma}.$$

La quantité $\frac{d\tau}{d\sigma}$ représente la courbure géodésique de la courbe (Γ). Remarquons, pour le démontrer, que (λ, μ, ν) sont les coefficients du tableau :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{da}{d\sigma} & \frac{db}{d\sigma} & \frac{dc}{d\sigma} \end{vmatrix}.$$

Désignons par l, m, n, les cosinus directeurs de la normale principale et par ρ le rayon de courbure de (Γ). On peut écrire, sous forme symbolique :

$$(d\lambda, d\mu, d\nu) = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} a & b & c \\ l & m & n \end{vmatrix} d\sigma.$$

De cette relation on déduit :

$$d\tau^2 = \frac{\sin^2\alpha}{\rho^2} \,.\, d\sigma^2 \qquad \text{ou :} \qquad \frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{\sin\alpha}{\rho}.$$

α désigne l'angle fait par la génératrice du cône directeur avec la normale principale de la courbe (Γ). Il est aisé de se rendre compte que les signes sont corrects dans la dernière équation.

Réciproquement, la courbe (Δ) décrite par le point de coordonnées λ, μ, ν, a pour courbure géodésique $\frac{d\sigma}{d\tau}$. *Les courbes décrites par les points* (a, b, c), (λ, μ, ν) *ont des courbures géodésiques inverses.*

A cette propriété, des cônes supplémentaires, on peut en rattacher une autre très curieuse. On sait[1] que :

$$\frac{\cos\alpha}{\rho} = -1.$$

Par suite :

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = -\operatorname{tg}\alpha.$$

(1) E. Vessiot. *Leçons de géométrie supérieure*, page 115.

De même pour la courbe (Δ) :

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = -\operatorname{tg} \alpha_1 .$$

Par conséquent :

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg} \alpha_1 .$$

Considérons, l'un des angles aigus faits par la génératrice du cône directeur avec la normale principale de (Γ), et l'angle aigu correspondant sur la courbe (Δ). *Ces deux angles sont complémentaires. Les deux normales principales sont parallèles.*

Enfin, en terminant, nous signalerons une propriété de toute surface (Σ_1) engendrée par une droite contenue dans le plan tangent TMG et qui fait un angle constant w avec MG. Pour cette surface :

$$a_1 = a \cos w + \lambda \sin w ; \qquad b_1 = b \cos w + \mu \sin w ; \qquad c_1 = c \cos w + \nu \sin w ;$$
$$\lambda_1 = \lambda \cos w - a \sin w ; \qquad \mu_1 = \mu \cos w - b \sin w ; \qquad \nu_1 = \nu \cos w - c \sin w .$$

Ces équations donnent en définitive :

$$d\sigma_1^2 = (\cos w \,.\, d\sigma + \sin w \,.\, d\tau)^2 ; \qquad d\tau_1^2 = (\sin w \,.\, d\sigma - \cos w \,.\, d\tau)^2 .$$

En ajoutant membre à membre nous trouvons :

$$(8) \qquad d\sigma_1^2 + d\tau_1^2 = d\sigma^2 + d\tau^2 ,$$

et, en vertu des premières formules du paragraphe 9 :

$$(9) \qquad \frac{\sin^2(\theta + w)}{K_1^2} + \frac{\cos^2(\theta + w)}{K_1'^2} = \frac{\sin^2 \theta}{K^2} + \frac{\cos^2 \theta}{K'^2} .$$

C'est la relation que nous voulions établir. L'expression $\frac{\sin^2 \theta}{K^2} + \frac{\cos^2 \theta}{K'^2}$ a la même valeur pour les surfaces tangentes le long de leur ligne de striction commune.

10. Surfaces réglées telles que $K' = AK$; (A = constante). — Donnons-nous a, b, c, K en fonction d'un paramètre. Nous savons que :

$$\alpha = a \cos \theta - \lambda \sin \theta ; \qquad \beta = b \cos \theta - \mu \sin \theta ; \qquad \gamma = c \cos \theta - \nu \sin \theta$$

et que :

$$K = \sin \theta \,.\, \frac{ds}{d\sigma} .$$

De ces équations nous déduisons :

(10) $dx = \mathrm{K}(a \operatorname{cotg} \theta - \lambda) d\sigma ; \quad dy = \mathrm{K}(b \operatorname{cotg} \theta - \mu) d\sigma ; \quad dz = \mathrm{K}(c \operatorname{cotg} \theta - \nu) d\sigma .$

Les surfaces cherchées doivent satisfaire à la condition :

$$\operatorname{tg} \theta \,.\, \frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{1}{\mathrm{A}}.$$

Les équations de la ligne de striction sont donc :

$$x = \int \mathrm{K}(\mathrm{A} a\, d\tau - \lambda\, d\sigma); \quad y = \int \mathrm{K}(\mathrm{A} b\, d\tau - \mu\, d\sigma); \quad z = \int \mathrm{K}(\mathrm{A} c\, d\tau - \nu\, d\sigma).$$

Celles des surfaces cherchées sont :

(11) $$\mathrm{X} = au + \int \mathrm{K}(\mathrm{A} a\, d\tau - \lambda\, d\sigma); \quad \mathrm{Y} = bu + \int \mathrm{K}(\mathrm{A} b\, d\tau - \mu\, d\sigma);$$

$$\mathrm{Z} = cu + \int \mathrm{K}(\mathrm{A} c\, d\tau - \nu\, d\sigma).$$

Les formules (11) donnent toutes les surfaces répondant à la question.

11. Quelques conséquences de l'équation (3). — 1° L'équation considérée est :

$$d\theta + \frac{\cos \varphi}{\mathrm{R}}\, ds = 0.$$

Lorsque l'angle θ reste constant la génératrice est contenue dans le plan rectifiant de la ligne de striction ($\cos \varphi = 0$) ou bien cette ligne de striction est une droite $\left(\frac{1}{\mathrm{R}} = 0\right)$.

Nous pouvons encore dire que si une droite est contenue dans le plan rectifiant d'une courbe (C) *et fait un angle constant avec la tangente, elle engendre une surface* (Σ) *admettant la courbe* (C) *pour ligne de striction.*

La binormale est dans ce cas. Nous avons :

$$a = \alpha \cos \theta + \alpha'' \sin \theta; \qquad b = \beta \cos \theta + \beta'' \sin \theta; \qquad c = \gamma \cos \theta + \gamma'' \sin \theta;$$

$$da = \alpha'\left(\frac{\cos \theta}{\mathrm{R}} + \frac{\sin \theta}{\mathrm{T}}\right) ds; \quad db = \beta'\left(\frac{\cos \theta}{\mathrm{R}} + \frac{\sin \theta}{\mathrm{T}}\right) ds; \quad dc = \gamma'\left(\frac{\cos \theta}{\mathrm{R}} + \frac{\sin \theta}{\mathrm{T}}\right) ds.$$

Par suite :

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{\cos \theta}{\mathrm{R}} + \frac{\sin \theta}{\mathrm{T}}. \text{ (1)}$$

(1) Le signe est correct, à condition que l'on prenne sur la normale principale un sens

L'expression du paramètre de distribution devient :

$$K = \sin\theta : \left(\frac{\cos\theta}{R} + \frac{\sin\theta}{T}\right). \tag{12}$$

Pour la surface des binormales :

$$K = T.$$

Le paramètre de distribution ne peut être constant, en même temps que θ, que si l'on a :

$$\frac{\cos\theta}{R} + \frac{\sin\theta}{T} = \text{constante}.$$

La ligne de striction est alors une courbe de Bertrand, ou une courbe à torsion constante si $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Il sera facile de montrer que, pour les surfaces telles que $\theta =$ constante, la relation (9) devient :

$$\frac{\sin^2\theta}{K^2} + \frac{\cos^2\theta}{K'^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2}. \tag{13}$$

2° La génératrice étant placée dans le plan osculateur de (C), cette courbe sera la ligne de striction si :

$$\theta = -\int \frac{ds}{R}. \tag{14}$$

La ligne de striction est alors une asymptotique.

12. Détermination d'une surface réglée, connaissant K, $\operatorname{cotg}\theta$, a, b, c, **en fonction d'un même paramètre.** — Les équations (10) nous donnent :

$$X = au + \int K(a\operatorname{cotg}\theta - \lambda)\,d\sigma; \quad Y = bu + \int K(b\operatorname{cotg}\theta - \mu)\,d\sigma; \tag{15}$$

$$Z = cu + \int K(c\operatorname{cotg}\theta - \nu)\,d\sigma.$$

Les éléments donnés définissent donc parfaitement la surface réglée.

---

positif qui soit le même que celui que l'on a choisi sur la tangente à la courbe (Γ). (Ces deux droites sont parallèles).

13. Surfaces réglées à paramètre de distribution constant. — Si K est constant, les équations (15) deviennent :

$$(16)\qquad X = au + K\int (a\,\mathrm{cotg}\,\theta - \lambda)\,d\sigma;\quad Y = bu + K\int (b\,\mathrm{cotg}\,\theta - \mu)\,d\sigma;$$
$$Z = cu + K\int (c\,\mathrm{cotg}\,\theta - \nu)\,d\sigma.$$

Les formules (16) donnent toutes les surfaces à paramètre de distribution constant.

14. Équations des courbes de Bertrand. — K et θ étant constants, la ligne de striction est une courbe de Bertrand. Ces courbes ont donc pour équations :

$$(17)\qquad x = K\int (a\,\mathrm{cotg}\,\theta - \lambda)\,d\sigma;\quad y = K\int (b\,\mathrm{cotg}\,\theta - \mu)\,d\sigma;$$
$$z = K\int (c\,\mathrm{cotg}\,\theta - \nu)\,d\sigma$$

ou : (1)

$$(17\ bis)\qquad x = m\int a\,d\sigma - n\int \lambda\,d\sigma;\quad y = m\int b\,d\sigma - n\int \mu\,d\sigma;$$
$$z = m\int c\,d\sigma - n\int \nu\,d\sigma;$$

m et n sont deux constantes.

15. Courbes à torsion constante. — Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ les équations (17) deviennent, en remarquant que $K = T$:

$$(18)\qquad x = -T\int \lambda\,d\sigma;\quad y = -T\int \mu\,d\sigma;\quad z = -T\int \nu\,d\sigma.$$

Ce sont les équations des courbes à torsion constante. Mais, on sait que :

$$\lambda = b\frac{dc}{d\sigma} - c\frac{db}{d\sigma};\qquad \mu = c\frac{da}{d\sigma} - a\frac{dc}{d\sigma};\qquad \nu = a\frac{db}{d\sigma} - b\frac{da}{d\sigma}.$$

---

(1) G. DARBOUX. *Théorie générale des surfaces*, tome I, pages 60 et 63.

Les équations que nous avons obtenues prennent la forme : (¹)

$$(18\,bis)\quad x = \mathrm{T}\int (c\,db - b\,dc); \quad y = \mathrm{T}\int (a\,dc - c\,da); \quad z = \mathrm{T}\int (b\,da - a\,db).$$

16. Applications des équations (15). — 1° *Surfaces réglées à plan directeur :* Soit xoy ce plan. Dans ces conditions :

$$a = \cos\sigma; \qquad b = \sin\sigma; \qquad c = \lambda = \mu = 0; \qquad \nu = 1.$$

Les formules (15) deviennent :

$$(19)\quad \mathrm{X} = u\cos\sigma + \int \mathrm{K}\cot\theta \,.\, \cos\sigma \,.\, d\sigma; \quad \mathrm{Y} = u\sin\sigma + \int \mathrm{K}\cot\theta \,.\, \sin\sigma \,.\, d\sigma;$$
$$\mathrm{Z} = -\int \mathrm{K}\,d\sigma.$$

Si $\mathrm{K}\cot\theta$ est une quantité constante il existe un cylindre circulaire directeur d'axe oz. La ligne de striction est tracée sur ce cylindre. En prenant pour $\mathrm{K}\cot\theta$ et pour K des expressions convenables les quadratures (19) s'expliciteront.

2° *Surfaces réglées à directrice rectiligne :* Pour que oz soit cette directrice, il faut que :

$$x = ma; \quad y = mb,$$

ou, en différentiant :

$$\mathrm{K}(a\cot\theta - \lambda) = m\frac{da}{d\sigma} + a\frac{dm}{d\sigma};$$

$$\mathrm{K}(b\cot\theta - \mu) = m\frac{db}{d\sigma} + b\frac{dm}{d\sigma}.$$

Nous pouvons maintenant calculer m et $\cot\theta$ en supposant connues les fonctions : K, a, b, c. On trouve :

$$m = \frac{\mathrm{K}}{\nu}\cdot\frac{dc}{d\sigma}; \qquad \cot\theta = \frac{1}{\mathrm{K}}\cdot\frac{d}{d\sigma}\left\{\frac{\mathrm{K}}{\nu}\cdot\frac{dc}{d\sigma}\right\} - \frac{c}{\nu}.$$

Les équations (15) deviennent :

$$(20)\quad \mathrm{X} = a\left(u + \frac{\mathrm{K}}{\nu}\cdot\frac{dc}{d\sigma}\right); \quad \mathrm{Y} = b\left(u + \frac{\mathrm{K}}{\nu}\cdot\frac{dc}{d\sigma}\right); \quad \mathrm{Z} = c\left(u + \frac{\mathrm{K}}{\nu}\cdot\frac{dc}{d\sigma}\right) - \int \frac{\mathrm{K}}{\nu}\,.\,d\sigma.$$

(¹) G. Darboux. *Théorie générale des surfaces*, tome I, pages 60 et 63.

Pour avoir celles de ces surfaces qui ont un plan directeur, il suffit de remplacer a, b, c, par les valeurs suivantes :

$$a = p\cos\sigma + p'\sin\sigma; \quad b = q\cos\sigma + q'\sin\sigma; \quad c = r\cos\sigma + r'\sin\sigma.$$

(p, q, r), (p', q', r') désignent les cosinus directeurs de deux droites rectangulaires du plan.

Les formules précédentes se transforment aisément quand on suppose constant le paramètre de distribution.

3° *Surfaces dont la ligne de striction est une asymptotique :* Nous verrons plus loin que l'on a, pour de telles surfaces :

$$\operatorname{cotg}\theta = \frac{d\tau}{d\sigma}.$$

Les équations (15) prennent la nouvelle forme : (¹)

$$X = au + \int K(a\,d\tau - \lambda\,d\sigma); \quad Y = bu + \int K(b\,d\tau - \mu\,d\sigma);$$
$$Z = cu + \int K(c\,d\tau - \nu\,d\sigma).$$

Les relations (7) s'écrivent :

$$K = K'; \quad ds^2 = K^2(d\sigma^2 + d\tau^2).$$

(¹) En tenant compte des formules :

$$a = \alpha\cos\theta + \alpha'\sin\theta; \quad b = \beta\cos\theta + \beta'\sin\theta; \quad c = \gamma\cos\theta + \gamma'\sin\theta,$$

ainsi que de : $d\theta = -\frac{ds}{R}$, on trouve la relation : $d\sigma = \frac{\sin\theta}{T}\,.\,ds$, qui prouve que le paramètre de distribution est égal au rayon de torsion de la ligne de striction, lorsque celle-ci est en même temps asymptotique.

Pour la surface réciproque : $d\tau = \frac{\cos\theta}{T}\,.\,ds$, et, après division : $\frac{d\tau}{d\sigma} = \operatorname{cotg}\theta$. Comme nous l'avons dit, cette dernière relation se présentera naturellement par la suite.

La torsion de la ligne de striction est constante en même temps que le paramètre de distribution. Les équations :

$$x = T\int(a\,d\tau - \lambda\,d\sigma); \quad y = T\int(b\,d\tau - \mu\,d\sigma); \quad z = T\int(c\,d\tau - \nu\,d\sigma),$$

sont donc celles des courbes à torsion constante. Elles ont une forme différente de celle que nous avons déjà donnée.

Deux surfaces réciproques qui ont pour ligne de striction une asymptotique commune, ont le même paramètre de distribution.

La formule (6) peut se mettre sous une forme qui ne fait intervenir que la courbure géodésique de (Γ) :

$$\varepsilon\frac{K}{R} = \frac{d}{d\sigma}\left\{\frac{\frac{d\tau}{d\sigma}}{\sqrt{1+\left(\frac{d\tau}{d\sigma}\right)^2}}\right\}; \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Lorsque le paramètre de distribution est constant, les coordonnées d'un point de la ligne de striction se présentent comme la différence entre les coordonnées correspondantes des courbes à *torsion constante* :

$$x = K\int a\,d\tau; \qquad y = K\int b\,d\tau; \qquad z = K\int c\,d\tau.$$

$$x = K\int \lambda\,d\sigma; \qquad y = K\int \mu\,d\sigma; \qquad z = K\int \nu\,d\sigma.$$

Les courbes ainsi rapprochées jouissent de propriétés curieuses. Leurs tangentes sont perpendiculaires; leurs normales principales sont parallèles; leurs binormales sont aussi perpendiculaires.

Déformation des surfaces réglées.

La déformation des surfaces gauches a été étudiée(1) d'une manière très complète. Il est tout de même intéressant d'obtenir quelques-uns des résultats en partant toujours du même point de vue.

Nous nous limiterons au cas où la surface se déforme en laissant rectilignes ses génératrices.

17. Forme du dS^2. — Soit :

$$X = x + au; \qquad Y = y + bu; \qquad Z = z + cu.$$

Le carré de l'élément linéaire est de la forme :

$$dS^2 = du^2 + 2\left(\sum a\frac{dx}{ds}\right)du\,.\,ds + \left[1 + 2u\frac{d\sigma}{ds}\left(\sum\frac{da}{d\sigma}\cdot\frac{dx}{ds}\right) + u^2\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2\right]ds^2.$$

---

(1) G. Darboux. *Théorie générale des surfaces*, tome III, page 293 et suivantes.

Or :

$$\sum a \frac{dx}{ds} = \cos\theta;$$

et, d'après (1) :

$$\sum \frac{da}{d\sigma} \cdot \frac{dx}{ds} = 0.$$

La forme quadratique précédente prend donc la forme :

(21) $$dS^2 = du^2 + 2\cos\theta \,.\, du \,.\, ds + \left[1 + u^2\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2\right] ds^2;$$

ou, en introduisant le paramètre de distribution :

(21 *bis*) $$dS^2 = du^2 + 2\cos\theta \,.\, du \,.\, ds + \left[1 + \frac{u^2 \sin^2\theta}{K^2}\right] ds^2.$$

18. Conséquences. — Si une surface (Σ) se déforme en laissant rectilignes ses génératrices, elle engendre une surface (Σ_1). (C) occupe la position (C_1).

Le dS^2 de (Σ) est donné par la formule (21). Avec les courbes coordonnées correspondantes, celui de (Σ_1) est :

$$dS_1^2 = du^2 + 2\cos\theta_1 \,.\, du \,.\, ds + \left[1 + 2u \,.\, \frac{d\sigma_1}{ds}\left(\sum \frac{da_1}{d\sigma_1} \cdot \frac{dx_1}{ds}\right) + u^2\left(\frac{d\sigma_1}{ds}\right)^2\right] ds^2.$$

Les deux formes quadratiques doivent être identiques. Par conséquent :

1° $\cos\theta = \cos\theta_1$. Ce résultat devait être prévu. Dans une déformation les courbes correspondantes se coupent sous le même angle.

2° $\sum \frac{da_1}{d\sigma_1} \cdot \frac{dx_1}{ds} = 0$. La courbe (C_1) vérifie la condition (1). *La ligne de striction se conserve au cours de la déformation.*

3° $\frac{d\sigma}{ds} = \pm \frac{d\sigma_1}{ds_1}$. *Lorsque la génératrice glisse sur la ligne de striction, les points* (a, b, c), (a_1, b_1, c_1), *décrivent des arcs égaux sur les courbes* (Γ) et (Γ_1).

4° Les égalités précédentes prouvent que les paramètres de distribution sont *égaux ou opposés.*

Dans une déformation *continue* ces quantités sont forcément égales. Pour que deux surfaces gauches (Σ) et (Σ_1) rapportées à leur ligne de striction soient superposables par déformation continue, il faut que les quantités θ, θ_1, K et K_1 exprimées en fonction de s vérifient les égalités :

$$\theta = \theta_1; \qquad K = K_1.$$

19. Autres conséquences. — 1° Si θ et K sont constants, la ligne de striction est une courbe de Bertrand. Dans une déformation continue θ et K se conservent. La courbe (C) reste une courbe de Bertrand qui vérifie la même relation :

$$\frac{\sin\theta}{T} + \frac{\cos\theta}{R} = \frac{\sin\theta}{K}. \tag{22}$$

On peut même ajouter que cette déformation donne toutes les courbes caractérisées par (22).

2° A chaque courbe de Bertrand (C) on peut faire correspondre ∞^1 hélices circulaires vérifiant la même relation. Soit (H) l'une de ces hélices et soit aussi (Σ) la surface engendrée par une droite du plan rectifiant, glissant le long de (H) et faisant l'angle θ avec la tangente. La déformation de l'hélicoïde (Σ) transformera l'hélice en courbe de Bertrand. En particulier on pourra obtenir la courbe (C).

3° Le pas de l'hélice choisie peut être nul. La surface (Σ) se réduit à l'hyperboloïde de révolution à une nappe. *Toute surface pour laquelle θ et K sont constants est applicable sur un hyperboloïde de révolution à une nappe.*

4° Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, K étant toujours supposé constant, la ligne de striction est une courbe à torsion constante. Dans une déformation continue la torsion reste la même.

5° L'hélice circulaire est une courbe à torsion constante. Par suite, si l'on déforme la surface de la vis à filet carré, on obtient des surfaces admettant chacune pour ligne de striction une courbe à torsion constante.

Toute surface à paramètre de distribution constant, telle que $\theta = \frac{\pi}{2}$, est applicable sur la surface de la vis à filet carré.

Dans ce cas, le carré de l'élément linéaire prend une forme plus simple :

$$dS^2 = du^2 + \left\{1 + \frac{u^2}{T^2}\right\} ds^2,$$

ou :

$$dS^2 = du^2 + \{u^2 + T^2\} dv^2; \qquad \left(v = \frac{s}{T}\right).$$

C'est le dS^2 d'une surface *applicable à la fois sur l'alysséïde et sur l'hélicoïde gauche à plan directeur.*

20. Surfaces gauches applicables sur une surface donnée (Σ) avec correspondance des génératrices. — En vertu de ce que nous avons dit à la fin du paragraphe 18, il faut chercher toutes les surfaces (Σ_1) telles que :

$$\theta_1 = \theta, \qquad K_1 = K.$$

Il sera possible de passer de (Σ) à (Σ_1) par une *déformation continue.*

Plus généralement, en posant :

$$\theta_1 = \varepsilon\theta; \qquad K_1 = \varepsilon' K; \qquad (\varepsilon' = \pm\varepsilon = \pm 1),$$

on obtiendra des surfaces ayant le même élément linéaire que (Σ).

On calcule les éléments θ et K relatifs à la surface (Σ). On se donne ensuite les cosinus $a, b, c,$ de telle sorte que : $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Les formules (15) déterminent les coordonnées d'un point de la surface (Σ_1). On trouve :

$$(23) \quad X = au + \varepsilon' \int K(\varepsilon a \operatorname{cotg} \theta - \lambda)\, d\sigma; \quad Y = bu + \varepsilon' \int K(\varepsilon b \operatorname{cotg} \theta - \mu)\, d\sigma;$$
$$Z = cu + \ldots.$$

Il faut remarquer que les équations (23) définissent plusieurs surfaces isométriques dont les génératrices correspondantes sont parallèles.

Lignes asymptotiques des surfaces réglées.

On sait que cette question dépend, en général, d'une équation de Riccati. De nombreux cas particuliers ont été traités. Signalons surtout le résultat de M. Émile Picard qui ramène à une seule quadrature la recherche des asymptotiques de toute surface réglée dont les génératrices appartiennent à un complexe linéaire (*Traité d'Analyse*, t. I, seconde édition, 1901, p. 440).

Diverses formules ont été données, dans le même ordre d'idées, par L. Raffy (*Applications géométriques de l'Analyse*, 1897, p. 156).

M. A. Buhl en revenant, dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (9e Série, T. VIII, 1929, p. 45), sur les Thèses de Doctorat de Paul Appell et de M. Émile Picard, à l'occasion du Jubilé scientifique de ces deux illustres géomètres, est aussi revenu, très naturellement, au même sujet.

21. Équation des lignes asymptotiques. — 1° *forme* : Dans ce qui suit, nous poserons :

$$(24) \quad \begin{aligned} &a' = \frac{da}{d\sigma}; \quad b' = \frac{db}{d\sigma}; \quad c' = \frac{dc}{d\sigma}; \quad x' = \frac{dx}{d\sigma}; \quad y' = \ldots; \quad z' = \ldots; \\ &a'' = \frac{da'}{d\sigma}; \quad b'' = \ldots; \quad c'' = \ldots; \quad x'' = \frac{dx'}{d\sigma}; \quad y'' = \ldots; \quad z'' = \ldots. \end{aligned}$$

Dans ces conditions,

$$(25) \qquad 2\begin{vmatrix} a \\ x' \\ a' \end{vmatrix}\frac{du}{d\sigma} + \begin{vmatrix} a \\ x' \\ x'' \end{vmatrix} + u\left\{\begin{vmatrix} a \\ a' \\ x'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a \\ x' \\ a'' \end{vmatrix}\right\} + u^2\begin{vmatrix} a \\ a' \\ a'' \end{vmatrix} = 0,$$

est l'équation des lignes asymptotiques différentes des génératrices rectilignes. Cette forme ne fait pas intervenir la ligne de striction.

2° *forme* : Supposons, comme au paragraphe 12, que la surface est définie par son cône directeur, ainsi que par les valeurs de K et de θ.

Remplaçons dans l'équation (25) $x, y, z,$ par leurs valeurs déduites de (15). Nous obtenons :

$$2K\frac{du}{d\sigma} + K^2\left(\operatorname{cotg}\theta - \frac{d\tau}{d\sigma}\right) - u\frac{dK}{d\sigma} - u^2\frac{d\tau}{d\sigma} = 0$$

ou :

$$(26) \qquad 2\frac{du}{d\sigma} = \frac{u^2 + K^2}{K}\cdot\frac{d\tau}{d\sigma} + u\frac{d\log K}{d\sigma} - K\operatorname{cotg}\theta.$$

22. Lignes asymptotiques des surfaces à plan directeur. — Pour ces surfaces : $d\tau = 0$. L'équation différentielle (26) se réduit à :

$$2\frac{du}{d\sigma} = u\frac{d\log K}{d\sigma} - K\operatorname{cotg}\theta.$$

Elle admet la solution :

$$2u + \sqrt{K}\int\sqrt{K}\,.\operatorname{cotg}\theta\,.\,d\sigma = 0.$$

La recherche des lignes asymptotiques ne dépend que d'une quadrature.

En choisissant convenablement K et θ la quadrature peut s'expliciter.

1° Posons, par exemple :

$$K = -\frac{1}{\cos^2\sigma}; \qquad \operatorname{cotg}\theta = -m\cos\sigma; \qquad (m = \text{constante}).$$

La surface a pour équations :

$$X = u\cos\sigma + m\sigma; \qquad Y = u\sin\sigma - m\log(\cos\sigma); \qquad Z = \operatorname{tg}\sigma.$$

Enfin, la relation :

$$2u + \frac{m}{\cos\sigma}\,.\,(\sigma + A) = 0; \quad (A = \text{constante arbitraire}),$$

définit les lignes asymptotiques.

2° Si :

$$K = -\sigma^2; \qquad \operatorname{cotg}\theta = -\frac{m}{\sigma}.$$

on obtient :

$$X = u\cos\sigma + m(\sigma\sin\sigma + \cos\sigma); \qquad Y = u\sin\sigma + m(\sin\sigma - \sigma\cos\sigma); \qquad Z = \frac{\sigma^3}{3},$$

et, pour les lignes asymptotiques :

$$2u + m\sigma(\sigma + A) = 0.$$

3° Les relations :

$$K = -\cos^2\sigma; \qquad \operatorname{cotg}\theta = -\frac{m}{\cos^2\sigma},$$

entraînent :

$$\begin{cases} X = u\cos\sigma + m\sin\sigma; \qquad Y = u\sin\sigma - m\cos\sigma; \qquad Z = \dfrac{1}{2}\left(\sigma + \dfrac{\sin 2\sigma}{2}\right). \\ 2u + m\cos\sigma \,.\left[\log\left(\operatorname{tg}\dfrac{\sigma}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) + A\right] = 0. \end{cases}$$

Cette dernière surface est telle que : $K\operatorname{cotg}\theta = m$. Elle admet un cylindre circulaire directeur; la ligne de striction est tracée sur ce cylindre.

Les exemples pourraient être multipliés.

23. Cas où la surface à plan directeur admet un paramètre de distribution constant. — La solution de l'équation différentielle devient :

$$2u + K\int \operatorname{cotg}\theta \,.\, d\sigma = 0.$$

Elle est de la forme :

$$u = f(\sigma) + A \qquad (A = \text{constante arbitraire}).$$

Les lignes asymptotiques déterminent des segments égaux sur les génératrices.

Réciproquement, pour que cette propriété soit vérifiée, il faut que :

$$u = f(\sigma) + A,$$

soit une solution de l'équation (26). Cela ne peut se produire que si les coefficients de u^2 et de u sont nuls. Ces deux conditions :

$$\frac{d\log K}{d\sigma} = 0; \qquad \frac{d\tau}{d\sigma} = 0,$$

expriment que *la surface est à plan directeur et admet un paramètre de distribution constant.*

Les hélicoïdes font partie de ces surfaces. On les trouverait en posant :

$$\operatorname{cotg} \theta = \text{constante}.$$

On peut encore donner de très nombreux exemples de surfaces pour lesquelles toutes les quadratures s'explicitent.

Par exemple, si : $\operatorname{cotg} \theta = \sigma$, on trouve :

$$X = u \cos \sigma + K(\sigma \sin \sigma + \cos \sigma); \quad Y = u \sin \sigma + K(\sin \sigma - \sigma \cos \sigma); \quad Z = -K\sigma,$$

et, pour les lignes asymptotiques :

$$2u + K\frac{\sigma^2}{2} + A = 0.$$

24. Lignes asymptotiques des surfaces à directrice rectiligne. — Les équations (20) peuvent s'écrire :

$$(27) \qquad X = a(u+m); \quad Y = b(u+m); \quad Z = c(u+m) - \int \frac{m}{\left(\frac{dc}{d\sigma}\right)} d\sigma,$$

en posant :

$$m = \frac{K}{\nu} \frac{dc}{d\sigma}.$$

L'équation différentielle (25) devient, en supposant que σ est pris pour paramètre :

$$2\frac{m\nu}{c'}\frac{du}{d\sigma} + \frac{m\nu}{c'}\left(m' + \frac{mc''}{c'}\right) + u\left\{m\sum \lambda a'' - \nu\left(\frac{m'}{c'} - \frac{mc''}{c'^2}\right)\right\} + u^2 \sum \lambda a'' = 0.$$

La directrice rectiligne $u = -m$, est une solution de cette équation.

Le changement de variable :

$$u = \frac{1}{p} - m,$$

transforme l'équation précédente en équation linéaire.

$$2\frac{m\nu}{c'} \cdot \frac{dp}{d\sigma} + p\left\{m\sum \lambda a'' + \nu\left(\frac{m'}{c'} - \frac{mc''}{c'^2}\right)\right\} = \sum \lambda a''.$$

Avant de pousser plus loin les transformations, nous remarquerons que :

$$\frac{c'}{}\sum \lambda a'' = \frac{c'(\lambda a'' + \mu b'')}{\nu} + c'c'' = \frac{c'(\lambda a'' + \mu b'') - \nu(a'a'' + b'b'')}{\nu} = \frac{ba'' - ab''}{\nu} = -\frac{\nu'}{\nu}.$$

Dans ces conditions l'équation prend la forme définitive :

$$2\frac{dp}{d\sigma} + p\left\{\frac{m'}{m} - \frac{\nu'}{\nu} - \frac{c''}{c'}\right\} + \frac{\nu'}{m\nu} = 0.$$

Elle admet la solution :

$$2p + \sqrt{\frac{c'\nu}{m}} \int \frac{d\nu}{\nu\sqrt{mc'\nu}} = 0. \tag{28}$$

Cette formule établie en prenant σ pour paramètre est applicable *dans tous les cas* en remplaçant c' par $\frac{dc}{d\sigma}$.

La recherche des lignes asymptotiques d'une surface à directrice rectiligne ne dépend que d'une quadrature.

25. Conséquences. — Aucune quadrature ne subsiste dans le cas des conoïdes droits ou obliques, car $d\nu = 0$. Les lignes asymptotiques sont alors définies par :

$$p = A\sqrt{\frac{c'}{m}},$$

ou par :

$$p = \frac{A}{\sqrt{K}}; \qquad (A = \text{constante arbitraire}).$$

On obtiendra ces surfaces en remplaçant $a, b, c,$ par les valeurs :

$$a = p\cos\sigma + p'\sin\sigma; \qquad b = q\cos\sigma + q'\sin\sigma; \qquad c = r\cos\sigma + r'\sin\sigma,$$

que nous avons déjà signalées au paragraphe 16. Il sera aisé de prouver que la quadrature qui intervient dans (27) disparaît lorsque la surface admet un paramètre de distribution constant. Il en sera ainsi pour $m = nc'$, n étant une constante. Par exemple, pour $n = 1$, on trouve :

$$\begin{aligned}
X &= (p\cos\sigma + p'\sin\sigma)(u + r'\cos\sigma - r\sin\sigma),\\
Y &= (q\cos\sigma + q'\sin\sigma)(u + r'\cos\sigma - r\sin\sigma),\\
Z &= (r\cos\sigma + r'\sin\sigma)(u + r'\cos\sigma - r\sin\sigma) - \sigma.
\end{aligned}$$

Enfin, la formule :

$$u = r\sin\sigma - r'\cos\sigma + A,$$

détermine les lignes asymptotiques.

Remarque : On peut trouver bien d'autres surfaces à directrice rectiligne pour lesquelles aucune quadrature ne subsiste. Par exemple, en posant :

$$m = \frac{1}{c'},$$

la formule (28) donne :

$$p + c'\left\{ A\sqrt{\nu} - 1 \right\} = 0.$$

Le cône directeur est arbitraire. On peut le choisir de révolution. Dans ce cas x, y, z ont des expressions faciles à déterminer.

26. Surfaces à directrice rectiligne et à paramètre de distribution constant. — Comme $m = \frac{K}{\nu} \cdot \frac{dc}{d\sigma}$, la formule (28) prend la forme :

$$2Kp + \nu \int \frac{d\nu}{c'\nu} = 0; \qquad \left(c' = \frac{dc}{d\sigma} \right).$$

On pourrait aussi donner des exemples de telles surfaces pour lesquelles les quadratures s'explicitent.

27. Surfaces dont la ligne de striction est une asymptotique. — $u = 0$ est une solution de l'équation (26). *Le terme indépendant de u disparaît.* L'équation de Riccati se transforme en équation de Bernouilli intégrable par deux quadratures.

Pour ces surfaces : $\frac{d\tau}{d\sigma} = \cotg \theta$.

Le cône directeur d'une surface, dont la ligne de striction (C) *est une asymptotique, découpe sur la sphère de rayon un une courbe* (Γ) *qui a pour courbure géodésique la cotangente de l'angle fait par la génératrice* (G) *avec la courbe* (C).

L'équation différentielle des lignes asymptotiques :

$$2\frac{du}{d\sigma} = \frac{u^2}{K}\frac{d\tau}{d\sigma} + u\frac{d \log K}{d\sigma},$$

admet l'intégrale :

$$(29) \qquad 2\sqrt{K} + u\int \frac{d\tau}{\sqrt{K}} = 0.$$

La recherche de ces lignes ne dépend que d'une quadrature.

Lorsque la ligne de striction est rectiligne θ est constant (§ 11).

La formule (29) devient, en posant : $d\tau = \operatorname{cotg}\theta \,.\, d\sigma$,

$$2\sqrt{K} + u \operatorname{cotg}\theta \int \frac{d\sigma}{\sqrt{K}} = 0.$$

Le paramètre de distribution $\left(K = \sin\theta \frac{ds}{d\sigma}\right)$ est constant en même temps que $\frac{ds}{d\sigma}$. La surface est alors hélicoïdale.

Les lignes asymptotiques sont définies par l'équation :

$$2K + u \operatorname{cotg}\theta(\sigma + A) = 0.$$

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, la quantité $d\tau$ est nulle et (29) prend la forme :

$$u = A\sqrt{K}.$$

28. Surfaces à paramètre de distribution constant dont la ligne de striction est une asymptotique. — L'équation différentielle peut s'écrire :

$$2\frac{du}{d\tau} = \frac{u^2}{K}.$$

Elle admet la solution :

$$u(\tau + A) + 2K = 0.$$

Le calcul de τ exige une quadrature.

29. Lignes asymptotiques de la surface des binormales d'une courbe à torsion constante. — Pour cette surface : $K = T$; $\theta = \frac{\pi}{2}$.

L'équation (26) devient :

$$2T\frac{du}{d\tau} = u^2 + T^2.$$

Elle est vérifiée par :

$$u = T \operatorname{tg}\frac{\tau + A}{2}.$$

Le problème ne dépend encore que d'une quadrature qui sert au calcul de τ