ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

J.-G. VAN DER CORPUT

J.-F. KOKSMA

Sur l'ordre de grandeur de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann dans la bande critique

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 22 (1930), p. 1-39

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1930_3_22__1_0>

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

SUR L'ORDRE DE GRANDEUR DE LA FONCTION $\zeta(s)$ DE RIEMANN DANS LA BANDE CRITIQUE

PAR

MM. J.-G. VAN DER CORPUT et J.-F. KOKSMA, à Groningue.

Afin de déduire l'ordre de grandeur de la fonction de Riemann $\zeta(s) = \zeta(\sigma + it)$ dans la bande $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, il suffit d'examiner la fonction dans la bande $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 1$, car la conduite de $\zeta(s)$, dans la bande $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 1$ étant connue, l'égalité fonctionnelle

$$\zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s} \cdot \Gamma(s) \cdot \cos \frac{\pi s}{2} \zeta(s)$$

nous la fournit dans la bande $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$.

Sans restreindre la généralité nous pouvons supposer ici en outre $t \geqslant 0$, en vertu de l'égalité

$$|\zeta(\sigma - it)| = |\zeta(\sigma + it)|.$$

Comme la conduite de la fonction $\zeta(s)$ dans le rectangle $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 1$; $0 \leqslant t \leqslant e$ est suffisamment connue, nous poserons toujours $t > e$.

Le problème dont nous allons nous occuper, revient finalement à la recherche d'une borne supérieure de $|\zeta(\sigma + it)|$ pour les points

$$\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 1, \qquad t > e.$$

Comme cela ne sera pas plus difficile, nous examinerons au lieu de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, la fonction plus générale $\zeta(s, w)$ $(0 < w \leqslant 1)$, qui pour $\sigma > 1$ est définie par la série

$$\zeta(s, w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+w)^s}$$

et qui dans le cas spécial $w = 1$, est égale à $\zeta(s)$.

Dans ce mémoire nous allons démontrer la proposition suivante.

Proposition : *Désignons par g le nombre entier $\geqslant 3$, qui correspond à chaque nombre σ de l'intervalle $\frac{1}{2} \leqslant \sigma < 1$, tel que*

$$(1) \qquad 1 - \frac{g}{\gamma - 2} \leqslant \sigma < 1 - \frac{g+1}{2\gamma - 2}\text{ (1)}, \qquad \gamma = 2^g.$$

Si $\lambda(\sigma)$ désigne la fonction de σ $\left(\frac{1}{2} \leqslant \sigma < 1\right)$, qui possède en les points

$$\sigma = 1 - \frac{g}{\gamma - 2} \qquad (g = 3, 4, 5 \ldots)$$

la valeur $\frac{1}{\gamma - 2}$ et qui est linéaire sur les segments

$$1 - \frac{g}{\gamma - 2} \leqslant \sigma \leqslant 1 - \frac{g+1}{2\gamma - 2},$$

et si en outre

$$0 < w \leqslant 1, \qquad \frac{1}{2} \leqslant \sigma < 1, \qquad t > e,$$

on a

$$(2) \qquad \left|\zeta(s, w) - \frac{1}{w^s}\right| < c_1 \left(\frac{t^{\lambda(\sigma)}}{\log \frac{1}{1-\sigma}} + \frac{1}{\log \log t}\right) \log t\text{ (2)}.$$

---

(1) Cette correspondance est toujours possible, car si g parcourt la suite des nombres 3, 4, 5 ...., les nombres $1 - \frac{g}{\gamma - 2}$ $\left(\text{commençant par } 1 - \frac{3}{8-2} = \frac{1}{2} \text{ et s'approchant de } 1, \text{ si } g \text{ croît indéfiniment}\right)$, forment une suite toujours croissante, à cause de l'inégalité

$$1 - \frac{g+1}{2\gamma - 2} - \left(1 - \frac{g}{\gamma - 2}\right) = \frac{g\gamma - \gamma + 2}{(\gamma - 2)(2\gamma - 2)} > 0.$$

(2) Les nombres c_1, c_2, c_3, c_4, etc., représenteront toujours des constantes positives et absolues, convenablement choisies.

Si σ ne coïncide avec aucun des points

$$1-\frac{g'}{\gamma'-2}\qquad (g' \text{ entier} \geqslant 3, \qquad \gamma'=2^{g'}),$$

de sorte qu'un nombre positif β (ne dépendant que de σ) existe tel que

$$\left|1-\frac{g'}{\gamma'-2}-\sigma\right| \geqslant \beta \qquad (g'=3, 4, 5\ldots), \tag{3}$$

on a encore

$$\left|\zeta(s, \omega)-\frac{1}{w^s}\right| < \frac{c_2}{\beta}\, t^{\lambda(\sigma)}. \tag{4}$$

Remarque : Supposons que g soit le nombre entier $\geqslant 3$ correspondant à tout σ de $\frac{1}{2} \leqslant \sigma < 1$, moyennant l'inégalité (1).

Alors en mettant $\gamma = 2^g$, on a l'égalité

$$\lambda(\sigma)=\frac{(1-\sigma)\gamma-1}{g\gamma-\gamma+2}, \tag{5}$$

car le second membre est une fonction linéaire de σ dans l'intervalle (1) qui prend la valeur

$$\frac{\dfrac{g\gamma}{\gamma-2}-1}{g\gamma-\gamma+2}=\frac{1}{\gamma-2}$$

au point

$$\sigma = 1-\frac{g}{\gamma-2}$$

et qui pour

$$\sigma \to 1-\frac{g+1}{2\gamma-2}$$

s'approche de la valeur

$$\frac{\dfrac{(g+1)\gamma}{2\gamma-2}-1}{g\gamma-\gamma+2}=\frac{1}{2\gamma-2}.$$

Il y a donc continuité au point $1-\dfrac{g+1}{2\gamma-2}$.

Nous avons jugé superflu la déduction des relations analogues à (2) et (4), relatives aux fonctions $L(s, \chi)$, parce que ces relations résultent immédiatement des propriétés (2) et (4) en vertu de la relation connue

$$L(s, \chi) = \sum_{a=1}^{\infty} \frac{\chi(a)}{a^s} = \sum_{a=1}^{k} \chi(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(kn+a)^s}$$

$$= \frac{1}{k^s} \sum_{a=1}^{k} \chi(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(n + \frac{a}{k}\right)^s} = \frac{1}{k^s} \sum_{a=1}^{k} \chi(a)\, \zeta\left(s, \frac{a}{k}\right)$$

pour $\sigma > 1$, de sorte que la relation

$$L(s, \chi) = \frac{1}{k^s} \sum_{a=1}^{k} \chi(a)\, \zeta\left(s, \frac{a}{k}\right)$$

est valable, partout où les deux membres sont des fonctions analytiques de s.

Pour démontrer l'importance de la proposition, faisons les remarques suivantes :

1° A cause de la continuité de $\zeta(s, w)$ aux points $s = 1 + it$, il résulte de (2) immédiatement :

$$\left| \zeta(1 + it, w) - \frac{1}{w^s} \right| \leqslant c_1 \frac{\log t}{\log \log t}.$$

Cette relation a été trouvée par M. H. Weyl[1] dans le cas particulier $w = 1$.

2° Comme nous allons prouver, il découle de la relation (2) en outre

$$\left| \zeta(s, w) - \frac{1}{w^s} \right| < c_3\, t^{\frac{1-\sigma}{\log \frac{1}{1-\sigma}} \log 2} \frac{\log t}{\log \log t} \tag{6}$$

pour $\frac{1}{2} \leqslant \sigma < 1$.

Ce résultat est plus précis qu'une relation analogue de MM. Hardy-Littlewood[2] qui ont démontré l'inégalité

$$\left| \zeta(s, w) - \frac{1}{w^s} \right| < c_4\, t^{\frac{c_5(1-\sigma)}{\log \frac{1}{1-\sigma}}} \frac{\log t}{\log \log t}$$

$$\left(\frac{1}{2} \leqslant \sigma < 1 \right)$$

qui contenait c_5 considéré seulement comme une constante positive absolue.

---

(1) H. Weyl. « Zur Abschätzung von $\zeta(1 + ti)$ » Math. Zeitschrift, **10** (1921), p. 88-101.

(2) J.-E. Littlewood. « Researches in the theory of the Riemann ζ function »; Records of the London Math. Society, Febr. 10, 1922.

M. E. Landau[1] a simplifié la démonstration non publiée des deux auteurs susnommés et il a prouvé que :

Si $\frac{63}{64} \leqslant \sigma < 1$, on a

$$(7) \qquad \left|\zeta(s, w) - \frac{1}{w^s}\right| < c_6\, t^{\frac{4(1-\sigma)}{\log \frac{1}{1-\sigma}}} \frac{\log t}{\log \log t}.$$

Il saute aux yeux que ce résultat de M. Landau découle immédiatement de (6).

L'importance de la relation (7) de MM. Hardy-Littlewood-Landau découle du fait qu'elle fournit jusqu'à présent le meilleur résultat relatif à la distribution des nombres premiers, savoir que le nombre des nombres premiers inférieurs ou égaux à x, figurant dans une série arithmétique dont la différence k $(k > 0)$ et le terme initial sont premiers entre eux, est approximativement égal à

$$\frac{1}{\varphi(k)} \int_2^x \frac{du}{\log u}$$

(où $\varphi(k)$ désigne le nombre des nombres naturels $\leqslant k$ et premiers par rapport à k), de façon que la différence entre le nombre susnommé des nombres premiers et l'expression $\frac{1}{\varphi(k)} \cdot \int_2^x \frac{du}{\log u}$ est d'une valeur absolue inférieure à

$$c_7 \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{c_8}\sqrt{\log x \cdot \log \log x}} \text{ [2]}.$$

3° Introduisons la fonction $\mu(\sigma)$ de Lindelöf qui, σ et w étant des nombres fixes, désigne la borne inférieure de tous les nombres μ', pour lesquels il existe un nombre C indépendant de t (mais qui peut dépendre de σ, w et μ'), tel que pour $t > e$ on a

$$\left|\zeta(s, w) - \frac{1}{w^s}\right| < C\, t^{\mu'}.$$

Maintenant il résulte immédiatement de la proposition :

$$(8) \qquad \mu(\sigma) \leqslant \lambda(\sigma) \qquad \left(\frac{1}{2} \leqslant \sigma < 1\right).$$

---

(1) E. LANDAU. « Über die ζ Funktion und die L Funktionen ». Math. Zeitschr. **20** (1924), p. 105-125. — Voir E. LANDAU. « Vorlesungen über Zahlentheorie », Band II, p. 38.

(2) E. LANDAU. Voir le mémoire cité sous (1) et « Vorlesungen ». Band II, p. 3-46.

Ce n'est pas la première fois qu'une borne supérieure de $\mu(\sigma)$ a été indiquée. MM. Hardy-Littlewood-Landau (¹) ont démontré qu'on a dans l'intervalle $\frac{1}{2} \leqslant \sigma < 1$,

$$\mu(\sigma) \leqslant \nu(\sigma), \tag{9}$$

si $\nu(\sigma)$ désigne la fonction, qui dans les points

$$\sigma = 1 - \frac{1}{\rho} \qquad (\rho = 2^r, \quad r \text{ entier} > 0)$$

prend la valeur

$$\frac{1}{(r+2)\rho}$$

et qui est linéaire sur les segments dans lesquels l'intervalle $\frac{1}{2} \leqslant \sigma < 1$ est partagé par les points $\sigma = 1 - \frac{1}{\rho}$, $(r = 1, 2, 3 \ldots)$.

Nous allons démontrer que sur l'intervalle $\frac{1}{2} < \sigma < 1$, on a

$$\lambda(\sigma) < \nu(\sigma) \tag{10}$$

c.-à.-d. que l'inégalité (8) est meilleure que l'inégalité (9).

Pour $\sigma \to 1$, les fonctions $\lambda(\sigma)$ et $\nu(\sigma)$ s'approchent toutes les deux de zéro.

Dans le point $\sigma = \frac{1}{2}$ les deux inégalités (8) et (9) fournissent le même résultat, notamment

$$\mu(\sigma) \leqslant \frac{1}{6}.$$

Le seul résultat relatif à l'ordre de grandeur de la fonction $\zeta(s)$ qui est connu jusqu'à ce jour et qui ne découle pas de notre proposition, est l'inégalité suivante, déduite par M. A. Walfisz (²)

$$\left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)\right| < c_9\, t^{\frac{163}{988}} \qquad (t > e)$$

(¹) E. LANDAU. Voir le mémoire cité sous (¹), p. 5, et « Vorlesungen », Band II, p. 55.

(²) A. WALFISZ. « Zur Abschätzung von $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$ ». Nachrichten der Gesellsch. der Wissensch. zu Göttingen; Math.-physik. Klasse (1924), p. 155-158.

de laquelle il découle

$$\mu\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant \frac{163}{988}$$

et ce résultat est meilleur que la relation fournie par (8) à cause de la relation évidente

$$\frac{163}{988} < \frac{1}{6}.$$

Nous commençons par démontrer que (6) résulte de la proposition, par quoi toutes les conclusions mentionnées sous la 2e remarque seront justifiées.

A cause de (5) on a

$$\lambda(\sigma) < \frac{(1-\sigma)\gamma}{g\gamma - \gamma} - \frac{1}{g\gamma} = \frac{1-\sigma}{g-1} - \frac{1}{g\gamma}. \tag{11}$$

A cause de $g \geqslant 3$ et de (1) on a en outre

$$2^{g-1} > \frac{2^{g+1}-2}{g+1} > \frac{1}{1-\sigma},$$

donc

$$g - 1 > \frac{1}{\log 2} \cdot \log \frac{1}{1-\sigma},$$

de sorte qu'il découle de (11)

$$\lambda(\sigma) < \log 2 \cdot \frac{1-\sigma}{\log \dfrac{1}{1-\sigma}} - \frac{1}{g\gamma}. \tag{12}$$

Remarquons qu'en vertu de (1) on a

$$\frac{1}{1-\sigma} \geqslant \frac{2^g - 2}{g}.$$

Puisque pour $g \geqslant 3$

$$\log \frac{2^g-2}{g} > \log 2^g - \log 2g = g \cdot \left(\log 2 - \frac{\log 2g}{g}\right) > \frac{g}{c_{10}},$$

nous trouvons de plus encore l'inégalité

$$\log \frac{1}{1-\sigma} > \frac{1}{c_{10}} \cdot g. \tag{13}$$

Distinguons maintenant deux cas différents :

1° Supposons $g \geqslant \log\log t$.

A cause de (13) on a

$$\log \frac{1}{1-\sigma} > \frac{1}{c_{10}} \log \log t,$$

de sorte qu'il résulte de (2) et de (12)

$$\left|\zeta(s, \omega) - \frac{1}{w^s}\right| < c_1 \left(\frac{t^{\log 2 \cdot \frac{1-\sigma}{\log \frac{1}{1-\sigma}}}}{\frac{1}{c_{10}} \log \log t} + \frac{1}{\log \log t} \right) \log t$$

$$\leqslant c_3 \cdot t^{\log 2 \frac{1-\sigma}{\log \frac{1}{1-\sigma}}} \frac{\log t}{\log \log t}.$$

2° Supposons

$$g < \log \log t.$$

Alors on a

$$\gamma < 2^{\log \log t} = (\log t)^{\log 2},$$

d'où

$$-\frac{1}{g\gamma} \log t + \log \log t < -\frac{\log t}{\log \log t} \cdot \frac{1}{(\log t)^{\log 2}} + \log \log t < c_{11};$$

donc

$$t^{-\frac{1}{g\gamma}} \log t = e^{-\frac{1}{g\gamma} \log t + \log \log t} < e^{c_{11}},$$

de sorte qu'il découle de (12) et de la proposition

$$\left|\zeta(s, w) - \frac{1}{w^s}\right| < c_{12} \left(t^{\log 2 \frac{1-\sigma}{\log \frac{1}{1-\sigma}}} + \frac{\log t}{\log \log t} \right) < c_3 t^{\log 2 \frac{1-\sigma}{\log \frac{1}{1-\sigma}}} \frac{\log t}{\log \log t}.$$

Par ceci (6) est démontré complètement.

Ensuite nous allons montrer que la proposition est meilleure que l'inégalité (9) de MM. Hardy-Littlewood-Landau, mentionnée sous la 3ᵉ remarque, c.-à-d. nous allons prouver l'inégalité (10)

$$\lambda(\sigma) < \nu(\sigma), \qquad \left(\frac{1}{2} < \sigma < 1\right).$$

A cet effet, nous distinguons deux cas :

1° Soit

$$\sigma = 1 - \frac{1}{\rho}, \qquad \rho = 2^r, \qquad r \text{ entier} \geqslant 2.$$

A cause de (1) on a

$$\frac{g+1}{2\gamma - 2} < 1 - \sigma = \frac{1}{\rho},$$

d'où il suit, g étant supérieur à 2,

$$\frac{2}{\gamma} = \frac{4}{2\gamma} < \frac{g+1}{2\gamma - 2} < \frac{1}{\rho}$$

c.-à-d,

$$2 \cdot 2^r < 2^g;$$

par conséquent

$$g \geqslant r + 2.$$

Il résulte de $\nu(\sigma) = \dfrac{1}{(r+2)\rho}$ et de (5)

$$\begin{aligned} \nu(\sigma) - \lambda(\sigma) &= \frac{1}{(r+2)\rho} - \frac{\frac{1}{\rho}\gamma - 1}{g\gamma - \gamma + 2} = \frac{g\gamma - \gamma + 2 - (r+2)(\gamma - \rho)}{(r+2)\rho(g\gamma - \gamma + 2)} \\ &= \frac{(g - r - 3)\gamma + (r+2)\rho + 2}{(g\gamma - \gamma + 2)\rho(r+2)}. \end{aligned}$$

Le dernier nombre est positif, si $g \geqslant r + 3$.

Si $g = r + 2$, c.-à-d. si $\gamma = 4\rho$, on a

$$\nu(\sigma) - \lambda(\sigma) = \frac{-4\rho + (r+2)\rho + 2}{(g\gamma - \gamma + 2)\rho(r+2)} = \frac{(r-2)\rho + 2}{(g\gamma - \gamma + 2)\rho(r+2)} > 0,$$

puisque $r \geqslant 2$.

2° Soit

$$1 - \frac{1}{\rho} < \sigma < 1 - \frac{1}{2\rho}$$

où

$$\rho = 2^r, \qquad r \text{ entier} \geqslant 1.$$

Posons $\sigma_1 = 1 - \frac{1}{\rho}$, $\sigma_2 = 1 - \frac{1}{2\rho}$; alors il découle de ce qui précède

$$(14) \qquad \nu(\sigma_2) > \lambda(\sigma_2) \quad \text{et} \quad \nu(\sigma_1) \geqslant \lambda(\sigma_1).$$

(Dans la dernière relation le signe d'égalité n'est valable que pour $\sigma_1 = \frac{1}{2}$; dans ce cas les deux membres sont égaux à $\frac{1}{6}$).

Puisque $\nu(\sigma)$ est une fonction linéaire de σ sur le segment $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$, on a

$$(15) \qquad (\sigma_2 - \sigma_1)\,\nu(\sigma) = (\sigma_2 - \sigma)\,\nu(\sigma_1) + (\sigma - \sigma_1)\,\nu(\sigma_2).$$

Sur ce segment, $\lambda(\sigma)$ est partout dérivable à droite, et il résulte de (5)

$$\lambda'(\sigma) = -\frac{\gamma}{g\gamma - \gamma + 2}.$$

Le second membre de cette relation est une fonction toujours croissante de g, donc une fonction monotone non décroissante de σ. Alors on a

$$\frac{\lambda(\sigma_2) - \lambda(\sigma)}{\sigma_2 - \sigma} \geqslant \frac{\lambda(\sigma) - \lambda(\sigma_1)}{\sigma - \sigma_1},$$

c'est-à-dire

$$(16) \qquad (\sigma_2 - \sigma_1)\,\lambda(\sigma) \leqslant (\sigma_2 - \sigma)\,\lambda(\sigma_1) + (\sigma - \sigma_1)\,\lambda(\sigma_2).$$

De (14), (15) et (16) il résulte $\lambda(\sigma) < \nu(\sigma)$.

Par ceci l'inégalité (10) est démontrée.

Maintenant nous passons à la démonstration de la proposition.

Lemme 1. — *Si $\sigma > 0$, $s \neq 1$, on a pour tout nombre entier $m \geqslant 0$ la relation*

$$(17) \qquad \left\{ \begin{aligned} \zeta(s, w) &= \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{(n+w)^s} + \frac{1}{(s-1)(m+w)^{s-1}} \\ &\quad - \frac{1}{2}\,\frac{1}{(m+w)^s} - \frac{1}{2}\,s(s+1) \int_m^\infty \frac{\big(u - \mathrm{E}(u)\big)^2 - \big(u - \mathrm{E}(u)\big)}{(u+w)^{s+2}}\,du, \end{aligned} \right.$$

dans laquelle $\mathrm{E}(u)$ *figure le plus grand nombre entier* $\leqslant u$.

DÉMONSTRATION : Pour tout nombre entier $h \geqslant 0$, on trouve en intégrant par parties

$$\frac{1}{2}s(s+1)\int_h^{h+1}\frac{\big(u-E(u)\big)^2-\big(u-E(u)\big)}{(u+w)^{s+2}}\,du$$

$$=\frac{1}{2}s(s+1)\int_0^1\frac{v^2-v}{(v+h+w)^{s+2}}\,dv$$

$$=\frac{1}{2}s\int_0^1\frac{2v-1}{(v+h+w)^{s+1}}\,dv$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{2v-1}{(v+h+w)^s}\bigg|_0^1+\int_0^1\frac{dv}{(v+h+w)^s}$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(h+1+w)^s}+\frac{1}{(h+w)^s}\right)+\int_h^{h+1}\frac{du}{(u+w)^s}.$$

Moyennant la sommation sur $h = m,\ m+1\ \ldots,$ on obtient pour $\sigma > 1$

$$-\frac{1}{2}s(s+1)\int_m^\infty\frac{\big(u-E(u)\big)^2-\big(u-E(u)\big)}{(u+w)^{s+2}}\,du$$

$$=\frac{1}{2(m+w)^s}+\sum_{h=m+1}^{\infty}\frac{1}{(h+w)^s}-\int_m^\infty\frac{du}{(u+w)^s}$$

et en calculant l'intégrale, on trouve que le terme final a la valeur

$$-\frac{1}{s-1}\cdot\frac{1}{(m+w)^{s-1}}.$$

A cause de ce résultat, on voit immédiatement que les deux membres de (17) s'accordent pour $\sigma > 1$. Et pour $\sigma > 0$, $s \neq 1$ ces deux membres sont des fonctions analytiques de s, d'où il résulte qu'ils sont identiques, si $\sigma > 0$, $s \neq 1$.

LEMME 2. — *Si* $t \geqslant 1$, $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 1$, *on a*

(18) $$\left|\zeta(s,w)-\sum_{n=0}^{E\left(t^{\frac{4}{3}}\right)}\frac{1}{(n+w)^s}\right| < c_{13}.$$

REMARQUE. — *Par ceci nous avons réduit l'examen de la fonction* $\zeta(s,w)$ *à l'examen de la somme*

$$\sum_{n=0}^{E\left(t^{\frac{4}{3}}\right)}\frac{1}{(n+w)^s}.$$

DÉMONSTRATION : A cause de $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 1$ et de $t \geqslant 1$, la valeur absolue du terme final du second membre de (17) est inférieure ou égale à

$$\frac{1}{2}|s| \, . \, (|s|+1) \, . \int_m^\infty \frac{1}{u^{\frac{5}{2}}} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \frac{|s| \, . \, (|s|+1)}{m^{\frac{3}{2}}}$$

$$\leqslant \frac{1}{3} \cdot 2 \, . \, 3 \frac{t^2}{m^{\frac{3}{2}}} .$$

Ainsi on obtient de (17), en posant $m = \mathrm{E}\left(t^{\frac{4}{3}}\right)$,

$$\left| \zeta(s, w) - \sum_{n=0}^{\mathrm{E}\left(t^{\frac{4}{3}}\right)} \frac{1}{(n+w)^s} \right|$$

$$< \frac{c_{13}}{3} \left(\frac{1}{|s| \, . \, t^{\frac{4}{3}(\sigma-1)}} + \frac{1}{t^{\frac{4}{3}\sigma}} + \frac{t^2}{t^{\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}}} \right)$$

$$< \frac{c_{13}}{3} \left(t^{-1+\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}} + t^{-\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}} + 1 \right) < 3 \frac{c_{13}}{3} t^0 = c_{13} .$$

Afin d'examiner la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{\mathrm{E}\left(t^{\frac{4}{3}}\right)} \frac{1}{(n+w)^s}$, nous allons nous servir d'un théorème de Van der Corput(1) qui sera notre lemme 3.

LEMME 3. — *Supposons que sur le segment $a \leqslant x \leqslant b$ (a et b désignant des nombres entiers, $a < b$), la fonction réelle $f(x)$ soit k fois dérivable. Supposons en outre qu'il existe deux nombres positifs r et k, indépendants de x, tels que pour tous les nombres x du segment $a \leqslant x \leqslant b$, on a eonstamment l'inégalité*

$$r \leqslant f^{(k)}(x) \leqslant \mathrm{R}$$

ou constamment l'inégalité

$$-\mathrm{R} \leqslant f^{(k)}(x) \leqslant -r .$$

Posons $\mathrm{K} = 2^k$.

---

(1) J.-G. van der CORPUT. Neue Zahlentheoretische Abschätzungeu (Zweite Mitteilung); Math. Zeitschrift **29** (1928), p. 397. — Voir la proposition 4, p. 426 et la remarque ajoutée. De cette proposition il suit que (19) est valable pour $c_{14} = 21$.

Alors on a

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &\left|\sum_{n=a}^{b} e^{2\pi i f(n)}\right| < c_{14}(b-a) \\ &\qquad \cdot \left\{ \left(\frac{r}{\mathrm{R}^2}\right)^{-\frac{1}{\mathrm{K}-2}} + \left(r(b-a)^k\right)^{-\frac{2}{\mathrm{K}}} + \left(\frac{\mathrm{R}}{r(b-a)}\right)^{-\frac{2}{\mathrm{K}}} \right\}. \end{aligned}\right.$$

LEMME 4. — *Supposons que k soit un nombre entier $\geqslant 2$, et que les deux nombres entiers N et N' remplissent la condition $1 \leqslant \mathrm{N} < \mathrm{N}' \leqslant 2\mathrm{N}$.*

Alors on a pour $\mathrm{K} = 2^k$, $0 \leqslant w \leqslant 1$, $s = \sigma + it$, $t > 1$ et $\sigma \geqslant 0$ l'inégalité suivante :

$$(20)\qquad \left|\sum_{n=\mathrm{N}}^{\mathrm{N}'} \frac{1}{(n+w)^s}\right| < c_{15}\mathrm{N}^{1-\sigma}\left\{\mathrm{N}^{-\frac{k}{\mathrm{K}-2}} t^{\frac{1}{\mathrm{K}-2}} + \mathrm{N}^{-\frac{2}{\mathrm{K}}} + t^{-\frac{2}{\mathrm{K}}}\right\}.$$

DÉMONSTRATION : Nous appliquons le lemme 3 en posant

$$a = \mathrm{N}, \qquad b = \mathrm{N}', \qquad f(x) = -\frac{t}{2\pi}\log(x+w),$$

$$\mathrm{R} = \frac{t}{2\pi}\cdot\frac{(k-1)!}{\mathrm{N}^k},$$

$$r = \frac{t}{2\pi}\cdot\frac{(k-1)!}{3^k\,.\,\mathrm{N}^k}.$$

Maintenant les conditions du lemme 3 sont remplies, car pour $1 \leqslant \mathrm{N} \leqslant n < \mathrm{N}'$, à cause de l'égalité

$$|f^{(k)}(x)| = \frac{t}{2\pi}\cdot\frac{(k-1)!}{(x+w)^k}$$

on a les inégalités

$$|f^{(k)}(x)| \leqslant \frac{t}{2\pi}\cdot\frac{(k-1)!}{\mathrm{N}^k} = \mathrm{R}$$

et

$$|f^{(k)}(x)| \geqslant \frac{t}{2\pi}\cdot\frac{(k-1)!}{(2\mathrm{N}+1)^k} \geqslant \frac{t}{2\pi}\,\frac{(k-1)!}{3^k\,.\,\mathrm{N}^k} = r;$$

il est évident que $f^{(k)}(x)$ est sur le segment $\mathrm{N} \leqslant x \leqslant \mathrm{N}'$ constamment positif ou constamment négatif.

Dans le second membre de (19), $(b-a)$ possède les exposants 1, $1 - \dfrac{2k}{\mathrm{K}}$, et $1-\frac{2}{K}$ qui tous les trois sont $\geqslant 0$. Ainsi à cause de $b-a\leqslant N$, la relation (19) reste valable quand nous remplaçons $(b-a)$ par N dans le membre droit.

Ainsi on obtient

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &\left|\sum_{n=N}^{N'} e^{-it\log(n+w)}\right| \\ &< c_{14} N\left\{\left(\frac{2\pi N^k}{3^k(k-1)!\,t}\right)^{-\frac{1}{K-2}} + \left(\frac{t}{2\pi}\cdot\frac{(k-1)!}{3^k.N^k}.N^k\right)^{-\frac{2}{K}} + \left(\frac{N}{3^k}\right)^{-\frac{2}{K}}\right\} \\ &< c_{16} N\left(N^{-\frac{k}{K-2}} t^{\frac{1}{K-2}} + t^{-\frac{2}{K}} + N^{-\frac{2}{K}}\right) \end{aligned}\right.$$

puisque

$$\left(\frac{3^k.(k-1)!}{2\pi}\right)^{\frac{1}{K-2}} < (3^k.k^k)^{\frac{1}{K-2}} = e^{\frac{k\log k + k\log 3}{K-2}},$$

$$\left(\frac{2\pi.3^k}{(k-1)!}\right)^{\frac{2}{K}} < e^{\frac{2k\log 3 + 2\log 2\pi}{K}}$$

et

$$(3^k)^{\frac{2}{K}} = e^{\frac{2k\log 3}{K}}$$

sont des nombres bornés.

Moyennant la sommation par parties d'Abel la relation (20) résulte de (21) immédiatement, car l'expression $\frac{1}{(n+w)^\sigma}$ est une fonction toujours décroissante de n et on a

$$\frac{1}{(n+w)^\sigma} \leqslant \frac{1}{N^\sigma}$$

et

$$\frac{1}{(n+w)^s} = \frac{1}{(n+w)^\sigma}\cdot\frac{1}{(n+w)^{it}} = \frac{1}{(n+w)^\sigma}\cdot e^{-it\log(n+w)}.$$

Lemme 5. — *Si* $1<t\leqslant N$ *et* $N\leqslant n<N'\leqslant 2N$, *on a*

$$(22)\quad \left|\sum_{n=N}^{N'}\frac{1}{(n+w)^s}\right| < 3c_{15}N^{1-\sigma}.t^{-\frac{1}{2}}.$$

DÉMONSTRATION : En posant $k=2$, nous concluons de (20), à cause de $N \geqslant t$

$$\left|\sum_{n=N}^{N'} \frac{1}{(n+w)^s}\right| < c_{15} N^{1-\sigma}\left(N^{-1} t^{\frac{1}{2}} + N^{-\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\leqslant c_{15} N^{1-\sigma}\left(t^{-1} . t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}\right) = 3 c_{15} N^{1-\sigma} t^{-\frac{1}{2}}.$$

LEMME 6. — *Supposons que* k *soit un nombre entier* $\geqslant 2$ *et posons* $K = 2^k$. *Alors tous les nombres entiers* N *et* N′ *qui remplissent les inégalités*

$$N \leqslant N' \leqslant 2N, \quad \text{et} \quad 1 \leqslant N \leqslant t^{\frac{2}{3}},$$

vérifient la relation

$$\left|\sum_{n=N}^{N'} \frac{1}{(n+w)^s}\right| < c_{17} N^{1-\sigma-\frac{k}{K-2}} t^{\frac{1}{K-2}}. \tag{23}$$

DÉMONSTRATION : Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer $N \geqslant 2$, car si $N = 1$, le premier membre de (23) est égal à

$$\left|\frac{1}{(1+w)^s}\right| < 1 \quad \text{ou à} \quad \left|\frac{1}{(1+w)^s} + \frac{1}{(2+w)^s}\right| < 2,$$

de sorte qu'alors (23) est valable pour $c_{17} = 2$.

Si l'on pose

$$u_k = N^{-\frac{k}{K-2}} t^{\frac{1}{K-2}} \qquad (k \geqslant 2, \; K = 2^k),$$

on a

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = N^{-\frac{k+1}{2K-2}} t^{\frac{1}{2K-2}} N^{\frac{k}{K-2}} t^{-\frac{1}{K-2}} = \left(\frac{N^{kK-K+2}}{t^K}\right)^{\frac{1}{(K-2)(2K-2)}},$$

donc

$$u_{k+1} > u_k, \quad \text{si} \quad N > t^{\frac{K}{kK-K+2}}, \tag{24}$$

$$u_{k+1} \leqslant u_k, \quad \text{si} \quad N \leqslant t^{\frac{K}{kK-K+2}}. \tag{25}$$

Envisageons la puissance $t^{\frac{\rho}{r\rho-\rho+2}}$, dans laquelle r soit un nombre entier $\geqslant 2$ et $\rho = 2^r$.

Cette puissance est égale à $t^{\frac{4}{8-4+2}} = t^{\frac{2}{3}} \geqslant N$, si $r=2$; elle est une fonction décroissante de r, à cause de la relation

$$(26)\qquad \frac{\rho}{r\rho-\rho+2}-\frac{2\rho}{2(r+1)\rho-2\rho+2} = \rho\left(\frac{1}{r\rho-\rho+2}-\frac{1}{r\rho+1}\right)>0 \quad \text{pour} \quad r\geqslant 2.$$

Si r croît indéfiniment, la puissance $t^{\frac{\rho}{r\rho-\rho+2}}$ tend vers le nombre $1<N$. Par conséquent un nombre entier $r\geqslant 2$ existe, tel que

$$N\leqslant t^{\frac{K}{kK-K+2}}, \quad \text{si} \quad k=2, 3, \dots r,$$

et

$$N>t^{\frac{K}{kK-K+2}}, \quad \text{si} \quad k\geqslant r+1.$$

En vertu de (24) et (25), il en résulte

$$u_2\geqslant u_3 \dots \geqslant u_r \geqslant u_{r+1}\leqslant u_{r+2}\leqslant u_{r+3} \dots .$$

Le nombre u_k, donc aussi le second membre de (23), prend une valeur minima si $k=r+1$. Il suffit de prouver (23) dans le cas $k=r+1$, car le lemme étant prouvé pour cette valeur de k, est sûrement valable pour toute autre valeur entière de $k\geqslant 2$. Il résulte de la supposition $k=r+1$

$$(27)\qquad N\leqslant t^{\frac{\frac{1}{2}K}{(k-1)\frac{1}{2}K-\frac{1}{2}K+2}} = t^{\frac{K}{kK-2K+4}}.$$

A cause du lemme 4 on a

$$(28)\qquad \left|\sum_{n=N}^{N'}\frac{1}{(n+w)^s}\right| < c_{15} N^{1-\sigma-\frac{k}{K-2}}\left(t^{\frac{1}{K-2}}+N^{\frac{k}{K-2}-\frac{2}{K}}+N^{\frac{k}{K-2}}.t^{-\frac{2}{K}}\right).$$

Remarquons qu'à cause de (27) et de la relation

$$\left(\frac{k}{K-2}-\frac{2}{K}\right)\frac{K}{kK-K+4}=\frac{kK-2K+4}{(K-2)(kK-2K+4)}=\frac{1}{K-2},$$

on a

$$N^{\frac{k}{K-2}-\frac{2}{K}} \leqslant t^{\frac{1}{K-2}} \tag{29}$$

et qu'on a encore à cause de (27)

$$N^{\frac{k}{K-2}}\, t^{-\frac{2}{K}} \leqslant t^{\frac{k}{K-2}\cdot\frac{K}{kK-2K+4}-\frac{2}{K}} \leqslant t^{\frac{1}{K-2}}, \tag{30}$$

puisque

$$\frac{1}{K-2}-\frac{kK}{(K-2)(kK-2K+4)}+\frac{2}{K}$$
$$=-\frac{2(K-2)}{(K-2)(kK-2K+4)}+\frac{2}{K}=\frac{2}{K}-\frac{2}{kK-2K+4}\geqslant 0.$$

La dernière inégalité est évidente pour $k\geqslant 3$ et pour $k=2$ on a l'égalité

$$\frac{2}{K}-\frac{2}{kK-2K+4}=\frac{2}{4}-\frac{2}{8-8+4}=0.$$

La relation (23) résulte immédiatement de (28), (29) et (30) et par ceci nous avons démontré le lemme.

Lemme 7. — *Supposons $g\geqslant 3$, $\gamma=2^g$, g désignant le nombre entier qui correspond à chaque σ de l'intervalle $\frac{1}{2}\leqslant\sigma<1$, moyennant l'inégalité (1).*

Si $\lambda(\sigma)$ désigne la fonction définie dans la proposition, on a pour $t>e$

$$\left|\sum_{n=E(t)+1}^{E\left(t^{\frac{4}{3}}\right)}\frac{1}{(n+w)^s}\right|<c_{18}+\frac{c_{19}}{g}\,t^{\lambda(\sigma)}.\log t \tag{31}$$

et en outre le membre gauche de (31) *est inférieur à*

$$\frac{c_{20}}{1-\sigma-\dfrac{g+1}{2\gamma-2}}\,t^{\lambda(\sigma)}.$$

Démonstration : Écrivons

$$\sum_{n=E(t)+1}^{E\left(t^{\frac{4}{3}}\right)}\frac{1}{(n+w)^s}=\sum_{h=0}^{H}\sum_{N_h}^{N'_h}\frac{1}{(n+w)^s}, \tag{32}$$

où le nombre entier H est défini moyennant l'inégalité

$$\text{(33)} \qquad E(2^{H}.t) < E\left(t^{\frac{4}{3}}\right) \leqslant E(2^{H+1}.t),$$

et où nous avons posé

$$N_h = E(2^h t) + 1,$$
$$N'_h = E(2^{h+1} t), \qquad (0 \leqslant h \leqslant H-1)$$
$$N'_H = E\left(t^{\frac{4}{3}}\right).$$

Si nous appliquons le lemme 5 en posant $N = N_h$, $N' = N'_h$, nous obtenons pour $0 \leqslant h \leqslant H$

$$\text{(34)} \qquad \left|\sum_{n=N_h}^{N'_h} \frac{1}{(n+w)^s}\right| < 3 \,.\, c_{15} N^{1-\sigma} t^{-\frac{1}{2}}.$$

A cause de $N_h \leqslant t^{\frac{4}{3}}$, il suit de (34)

$$\text{(35)} \qquad \left|\sum_{n=N_h}^{N'_h} \frac{1}{(n+w)^s}\right| < 3 \,.\, c_{15} t^{\frac{4}{3}(1-\sigma)} t^{-\frac{1}{2}} = 3 \,.\, c_{15} t^{\frac{5}{6}-\frac{4}{3}\sigma}.$$

Il résulte de (33)

$$\text{(36)} \qquad 2^H t < t^{\frac{4}{3}},$$

donc

$$H + 1 < \frac{\log t^{\frac{1}{3}}}{\log 2} + 1 < c_{21} \log t,$$

de sorte que nous tirons de (35) et de (32) selon la dernière inégalité

$$\text{(37)} \qquad \left|\sum_{n=E(t)+1}^{E\left(t^{\frac{4}{3}}\right)} \frac{1}{(n+w)^s}\right| < c_{22} t^{\frac{5}{6}-\frac{4}{3}\sigma} \log t.$$

A cause de $N_h \leqslant 2^h t + 1 < 2^{h+1} t$, il résulte de (33) et de (34) en outre

$$\left| \sum_{n=E(t)+1}^{E\left(t^{\frac{4}{3}}\right)} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < 3 \, . \, c_{15} t^{-\frac{1}{2}} \sum_{h=0}^{H} (2^{h+1} \, . \, t)^{1-\sigma} < 3 \, . \, c_{15} t^{\frac{1}{2}-\sigma} \sum_{h=-\infty}^{H} 2^{(h+1)(1-\sigma)}$$

$$= 3 \, . \, c_{15} t^{\frac{1}{2}-\sigma} \frac{2^{(H+1)(1-\sigma)}}{1 - 2^{-(1-\sigma)}} < \frac{c_{23}}{1-\sigma} \, . \, t^{\frac{1}{2}-\sigma+\frac{1}{3}(1-\sigma)}, \qquad \text{[à cause de (36)]}$$

donc

$$(38) \qquad \left| \sum_{n=E(t)+1}^{E\left(t^{\frac{4}{3}}\right)} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < \frac{c_{23}}{1 - \sigma - \frac{g+1}{2\gamma-2}} \, t^{\frac{5}{6}-\frac{4}{3}\sigma}.$$

Nous distinguons à présent deux cas différents.

1° Supposons que

$$\frac{1}{2} \leqslant \sigma < \frac{5}{7}.$$

Dans ce cas le nombre entier g correspondant à σ, moyennant l'inégalité (1) est égal à 3, car pour $g = 3$, on a

$$1 - \frac{g}{\gamma - 2} = 1 - \frac{3}{8-2} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 1 - \frac{g+1}{2\gamma-2} = 1 - \frac{4}{16-2} = \frac{5}{7}.$$

Selon (5) on a, dans cet intervalle,

$$\lambda(\sigma) = \frac{8(1-\sigma)-1}{24-8+2} = \frac{7}{18} - \frac{4}{9}\sigma.$$

Remarquons que

$$\frac{5}{6} - \frac{4}{3}\sigma \leqslant \frac{7}{18} - \frac{4}{9}\sigma,$$

puisque pour $\sigma = \frac{1}{2}$, les deux nombres sont égaux à $\frac{1}{6}$ et le premier membre est décroissant plus rapidement que le second.

Par conséquent on a dans ce cas

$$\frac{5}{6} - \frac{4}{3}\sigma \leqslant \lambda(\sigma),$$

de sorte que les inégalités du lemme résultent immédiatement de (37) et (38), notamment avec

$$c_{19} = 3c_{22}, \qquad c_{20} = c_{23}.$$

2° Supposons que

$$\frac{5}{7} \leqslant \sigma < 1.$$

Maintenant l'exposant

$$\frac{5}{6} - \frac{4}{3}\sigma$$

figurant dans les inégalités (37) et (38) est tout au plus égal à

$$\frac{5}{6} - \frac{4}{3}\cdot\frac{5}{7} = \frac{5}{6} - \frac{20}{21} < 0,$$

et par ceci il résulte de (37)

$$\left| \sum_{n=E(t)+1}^{E\left(t^{\frac{4}{3}}\right)} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < c_{24}.$$

A cause de

$$\frac{5}{6} - \frac{4}{3}\sigma < 0 < \lambda(\sigma)$$

on a encore selon (38)

$$\left| \sum_{n=E(t)+1}^{E\left(t^{\frac{4}{3}}\right)} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < \frac{c_{23}}{1 - \sigma - \dfrac{g}{\gamma - 2}} t^{\lambda(\sigma)}.$$

Par ceci le lemme 7 est démontré complètement avec

$$c_{18} = c_{24}, \qquad c_{19} = 3c_{22}, \qquad c_{20} = c_{23}.$$

Lemme 8. — *Supposons* $g \geqslant 3$, $\gamma = 2^g$, *g désignant le nombre entier qui correspond à chaque* σ *de l'intervalle* $\frac{1}{2} \leqslant \sigma < 1$, *moyennant l'inégalité* (1).

Si $\lambda(\sigma)$ *désigne la fonction définie dans la proposition, on a pour* $t > e$

$$\left| \sum_{n=1}^{E\left(t^{\frac{\gamma}{g\gamma - \gamma + 2}}\right)} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < 1 + \frac{c_{25}}{g} t^{\lambda(\sigma)} . \log t$$

et, en outre, le membre gauche de cette inégalité est inférieur à

$$\frac{c_{26}}{1-\sigma-\frac{g+1}{2\gamma-2}}\cdot t^{\lambda(\sigma)}.$$

Démonstration : Écrivons

$$\sum_{n=1}^{E\left(t^{\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}}\right)} \frac{1}{(n+w)^s} = \frac{1}{(1+w)^s} + \sum_{h=1}^{H}\sum_{n=N_h}^{N'_h} \frac{1}{(n+w)^s} \tag{39}$$

où le nombre entier H est défini moyennant l'inégalité

$$2^H < E\left(t^{\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}}\right) \leqslant 2^{H+1}, \tag{40}$$

et où nous avons posé

$$N_h = 2^h,$$
$$N'_h = 2^{h+1}-1, \qquad (1 \leqslant h \leqslant H-1)$$
$$N'_H = E\left(t^{\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}}\right).$$

Remarquons que, selon l'inégalité (26), $\frac{-\gamma}{g\gamma-\gamma+2}$ est une fonction décroissante de g.

Alors on a

$$2 \leqslant N_h \leqslant N'_h \leqslant t^{\frac{8}{3.8-8+2}} = t^{\frac{4}{9}} < t^{\frac{2}{3}},$$

de sorte qu'il est permis d'appliquer le lemme 6.

En mettant $k = g+1$, $N = N_h$, $N' = N'_h$, nous tirons de (23)

$$\left|\sum_{n=N_h}^{N'_h}\frac{1}{(n+w)^s}\right| < c_{17} N_h^{1-\sigma-\frac{g+1}{2\gamma-2}}\, t^{\frac{1}{2\gamma-2}} = c_{17}\, 2^{h\left(1-\sigma-\frac{g+1}{2\gamma-2}\right)}\cdot t^{\frac{1}{2\gamma-2}}. \tag{41}$$

En vertu de

$$N_h \leqslant t^{\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}} \quad \text{et} \quad 1-\sigma-\frac{g+1}{2\gamma-2} > 0, \qquad \text{[voir (1)]}$$

il résulte encore de (41)

$$(42)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left|\sum_{n=\mathrm{N}_h}^{\mathrm{N}'_h}\frac{1}{(n+w)^s}\right| < c_{17}\,.\,t^{\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}\left(1-\sigma-\frac{g+1}{2\gamma-2}\right)+\frac{1}{2\gamma-2}} \\ &\qquad = c_{17}\,t^{\frac{(1-\sigma)\gamma-1}{g\gamma-\gamma+2}} = c_{17}\,t^{\lambda(\sigma)}, \end{aligned}\right.$$

selon (5).

Il découle de (40)

$$(43)\qquad 2^{\mathrm{H}} < t^{\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}},$$

donc

$$\mathrm{H} \leqslant \frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}\,\frac{\log t}{\log 2} < \frac{c_{27}}{g}\log t,$$

de sorte qu'on obtient de (39) et de (42)

$$\left|\sum_{n=1}^{\mathrm{E}\left(t^{\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}}\right)}\frac{1}{(n+w)^s}\right| < 1 + c_{27}\frac{\log t}{g}\,.\,c_{17}\,t^{\lambda(\sigma)} = 1 + \frac{c_{28}}{g}\,t^{\lambda(\sigma)}\,.\log t\,.$$

Par ceci nous avons démontré la première assertion du lemme (8).

De (39) et de (41), il résulte en outre

$$\left|\sum_{n=1}^{\mathrm{E}\left(t^{\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}}\right)}\frac{1}{(n+w)^s}\right| < 1 + c_{17}\,t^{\frac{1}{2\gamma-2}}\sum_{h=-\infty}^{\mathrm{H}} 2^{h\left(1-\sigma-\frac{g+1}{2\gamma-2}\right)}$$

$$= 1 + c_{17}\,t^{\frac{1}{2\gamma-2}}\,\frac{2^{\mathrm{H}\left(1-\sigma-\frac{g+1}{2\gamma-2}\right)}}{1-2^{-\left(1-\sigma-\frac{g+1}{2\gamma-2}\right)}}$$

$$\leqslant 1 + c_{26}\frac{t^{\frac{1}{2\gamma-2}}}{1-\sigma-\dfrac{g+1}{2\gamma-2}}\,t^{\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}\left(1-\sigma-\frac{g+1}{2\gamma-2}\right)} \qquad \text{[à cause de (43)]}$$

$$= 1 + \frac{c_{26}}{1-\sigma-\dfrac{g+1}{2\gamma-2}}\,t^{\frac{(1-\sigma)\gamma-1}{g\gamma-\gamma+2}} = 1 + \frac{c_{26}}{1-\sigma-\dfrac{g+1}{2\gamma-2}}\,t^{\lambda(\sigma)} \qquad \text{selon (5).}$$

Par ceci nous avons démontré le lemme 8 complètement.

Lemme 9. — *Supposons que k soit un nombre entier $\geqslant 2$ et posons $K = 2^k$. Alors nous avons*

$$\frac{kK - 2K + 4}{K} \cdot 2 \cdot \log \frac{k}{k-1} \leqslant c_{28}. \tag{44}$$

Démonstration : Si k croît indéfiniment, le premier nombre de (44) tend vers

$$\lim_{k\to\infty} \frac{kK}{K} \cdot 2 \log \cdot \frac{k}{k-1} = \lim_{k\to\infty} 2k \cdot \log \frac{k}{k-1} = 2.$$

Lemme 10. — *Supposons que k et g_1 soient des nombres entiers tels que $2 \leqslant k \leqslant g_1$. Posons $K = 2^k$, $\gamma_1 = 2^{g_1}$.*

Si c_{28} désigne la constante du lemme 9, et si l'inégalité

$$\log t \geqslant c_{28}(\gamma_1 - 2)$$

est remplie, on a

$$k^2\, t^{\frac{1}{\gamma_1-2} - \frac{1}{K-2} + \frac{K}{kK-K+2}\left(\frac{k}{K-2} - \frac{g_1}{\gamma_1-2}\right)} \geqslant (g_1 - 1)^2. \tag{45}$$

Démonstration : L'exposant de t dans le premier membre de (45) étant $\geqslant 0$, la valeur de ce membre est $\geqslant k^2$; par conséquent (45) est évident dans les cas où $k = g_1$ ou $g_1 - 1$.

Supposons que l'assertion (45) est valable pour une valeur quelconque de k $(3 \leqslant k \leqslant g_1 - 1)$ et, démontrons-la pour $k - 1$ au lieu de k, c'est-à-dire si G_k désigne le membre gauche de (45), il faut démontrer

$$G_{k-1} \geqslant (g_1 - 1)^2, \qquad (3 \leqslant k \leqslant g_1 - 1)$$

en partant de la supposition $G_k \geqslant (g_1 - 1)^2$.

L'exposant de t figurant dans le membre gauche de (45) est égal à

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\gamma_1 - 2} - \frac{g_1 K}{(kK - K + 2)(\gamma_1 - 2)} + \frac{1}{K-2}\left(-1 + \frac{kK}{kK - K + 2}\right) \\ &= \frac{1}{\gamma_1 - 2} - \frac{g_1 K}{(kK - K + 2)(\gamma_1 - 2)} + \frac{1}{kK - K + 2} \\ &= \frac{1}{\gamma_1 - 2} + \frac{\gamma_1 - 2 - g_1 K}{(kK - K + 2)(\gamma_1 - 2)}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit

$$\frac{G_{k-1}}{G_k} = t^{\frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 2}} \cdot \left(\frac{k-1}{k}\right)^2, \tag{46}$$

où nous avons posé

$$\eta = \frac{\gamma_1 - 2 - \frac{1}{2} g_1 \mathrm{K}}{\frac{1}{2} k\mathrm{K} - \mathrm{K} + 2} - \frac{\gamma_1 - 2 - g_1 \mathrm{K}}{k\mathrm{K} - \mathrm{K} + 2}.$$

Le nombre k étant supposé fixe, η est une fonction croissante de g_1, car si l'on remplace g_1 par $g_1 + 1$, on obtient une augmentation de η qui est égale à

$$\frac{\gamma_1 - \frac{1}{2}\mathrm{K}}{\frac{1}{2} k\mathrm{K} - \mathrm{K} + 2} - \frac{\gamma_1 - \mathrm{K}}{k\mathrm{K} - \mathrm{K} + 2} = \gamma_1 \left(\frac{1}{\frac{1}{2} k\mathrm{K} - \mathrm{K} + 2} - \frac{1}{k\mathrm{K} - \mathrm{K} + 2} \right)$$
$$- \mathrm{K} \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} k\mathrm{K} - \mathrm{K} + 2} - \frac{1}{k\mathrm{K} - \mathrm{K} + 2} \right) > 0$$

parce que $k > 2$, $\mathrm{K} \leqslant \gamma_1$.

Puisque l'on a $3 \leqslant k \leqslant g_1 - 1$, on trouve ($k$ étant fixe) la valeur minima de η en posant $g_1 = k + 1$, donc

$$\eta \geqslant \frac{2\mathrm{K} - 2 - \frac{1}{2}(k+1)\mathrm{K}}{\frac{1}{2} k\mathrm{K} - \mathrm{K} + 2} - \frac{2\mathrm{K} - 2 - (k+1)\mathrm{K}}{k\mathrm{K} - \mathrm{K} + 2}$$
$$= \frac{\frac{3}{2}\mathrm{K} - 2 - \frac{1}{2} k\mathrm{K}}{\frac{1}{2} k\mathrm{K} - \mathrm{K} + 2} + 1 = \frac{\mathrm{K}}{k\mathrm{K} - 2\mathrm{K} + 4}.$$

A cause de (44) on a donc

$$\eta \geqslant \frac{1}{c_{28}} \cdot 2 \cdot \log \frac{k}{k-1}$$

et puisque nous avons supposé

$$\frac{\log t}{\gamma_1 - 2} \geqslant c_{28},$$

on a en outre

(47) $$\frac{\eta}{\gamma_1 - 2} \log t \geqslant \log \left(\frac{k}{k-1} \right)^2 > 0.$$

La relation (46) nous apprend que

$$\log \frac{G_{k-1}}{G_k} = \frac{\eta}{\gamma_1 - 2} \log t + \log\left(\frac{k-1}{k}\right)^2$$
$$= \frac{\eta}{\gamma_1 - 2} \log t - \log\left(\frac{k}{k-1}\right)^2 \geqslant 0 \quad \text{[à cause de (47)]},$$

d'où

$$\frac{G_{k-1}}{G_k} \geqslant 1 \quad \text{pour} \quad 3 \leqslant k \leqslant g_1 - 1,$$

donc

$$G_{k-1} \geqslant G_k \geqslant (g_1 - 1)^2 \quad \text{pour} \quad 3 \leqslant k \leqslant g_1 - 1.$$

et par ceci nous avons démontré l'assertion (45).

LEMME 11. — *Supposons* $g \geqslant 3$, $\gamma = 2^g$, *g désignant le nombre entier qui correspond à chaque* σ *de l'intervalle* $\frac{1}{2} \leqslant \sigma < 1$, *moyennant l'inégalité* (1).

Supposons en outre que g_1 *soit le plus grand nombre entier* $\leqslant g$ *qui remplit la relation*

(48) $$\log t \geqslant c_{28}(\gamma_1 - 2),$$

c_{28} *désignant la constante du lemme* 10.

Posons

$$u(\sigma) = \lambda(\sigma) - \frac{1}{K-2} - \frac{K}{kK - K + 2}\left(1 - \sigma - \frac{k}{K-2}\right),$$

où $\lambda(\sigma)$ *désigne la fonction définie dans la proposition et où k figure un nombre entier, tel que* $2 \leqslant k \leqslant g_1$, $K = 2^k$.

Alors on a

(49) $$k^2 t^{u(\sigma)} \geqslant (g_1 - 1)^2.$$

DÉMONSTRATION : A cause de (5) on a

$$\lambda(\sigma) = \frac{(1-\sigma)\gamma - 1}{g\gamma - \gamma + 2} = \frac{1}{\gamma - 2} - \left(\sigma - 1 + \frac{g}{\gamma - 2}\right)\frac{\gamma}{g\gamma - \gamma + 2},$$

donc

$$u(\sigma) = \frac{1}{\gamma - 2} - \frac{1}{K-2} + \frac{K}{kK - K + 2}\left(\frac{k}{K-2} - \frac{g}{\gamma - 2}\right)$$
$$+ \left(\sigma - 1 + \frac{g}{\gamma - 2}\right)\left(\frac{K}{kK - K + 2} - \frac{\gamma}{g\gamma - \gamma + 2}\right).$$

Il résulte de (1)

$$\sigma - 1 + \frac{g}{\gamma - 2} \geqslant 0,$$

et puisque à cause de (26) l'expression $\dfrac{K}{kK - K + 2}$ est une fonction croissante de k, on a en outre

$$\frac{K}{kK - K + 2} - \frac{\gamma}{g\gamma - \gamma + 2} \geqslant \frac{\gamma}{g\gamma - \gamma + 2} - \frac{\gamma}{g\gamma - \gamma + 2} = 0,$$

car $k \leqslant g$. Il s'ensuit

$$u(\sigma) \geqslant \frac{1}{\gamma - 2} - \frac{1}{K - 2} + \frac{K}{kK - K + 2}\left(\frac{k}{K - 2} - \frac{g}{\gamma - 2}\right). \tag{50}$$

Si $g_1 < g$, on obtient, en posant $\rho = 2^r$, la relation

$$\left(\frac{1}{\gamma - 2} - \frac{K}{kK - K + 2} \cdot \frac{g}{\gamma - 2}\right) - \left(\frac{1}{\gamma_1 - 2} - \frac{K}{kK - K + 2} \cdot \frac{g_1}{\gamma_1 - 2}\right)$$

$$= \sum_{r=g_1}^{g-1} \left\{\left(\frac{1}{2\rho - 2} - \frac{K}{kK - K + 2} \cdot \frac{r + 1}{2\rho - 2}\right) - \left(\frac{1}{\rho - 2} - \frac{K}{kK - K + 2} \cdot \frac{r}{\rho - 2}\right)\right\}$$

$$= \sum_{r=g_1}^{g-1} \frac{1}{(2\rho - 2)(\rho - 2)} \left\{-\rho + K\,\frac{r(2\rho - 2) - (r + 1)(\rho - 2)}{kK - K + 2}\right\}$$

$$= \sum_{r=g_1}^{g-1} \frac{1}{(2\rho - 2)(\rho - 2)} \left\{-\rho + K\,\frac{r\rho - \rho + 2}{kK - K + 2}\right\}$$

$$= \sum_{r=g_1}^{g-1} \frac{r\rho - \rho + 2}{(2\rho - 2)(\rho - 2)} \left\{\frac{K}{kK - K + 2} - \frac{\rho}{r\rho - \rho + 2}\right\} \geqslant 0,$$

puisque on a [à cause de (26) et de $k \leqslant g_1 \leqslant r$] :

$$\frac{K}{kK - K + 2} \geqslant \frac{\rho}{r\rho - \rho + 2}.$$

De ce qui précède, il résulte que le second membre de (50) n'augmente pas, quand nous substituons g_1 à g, si $g_1 \leqslant g$, donc

$$u(\sigma) \geqslant \frac{1}{\gamma_1 - 2} - \frac{1}{K - 2} + \frac{K}{kK - K + 2}\left(\frac{k}{K - 2} - \frac{g_1}{\gamma_1 - 2}\right). \tag{51}$$

A cause de (48) il est permis d'appliquer le lemme 10, pour $2 \leqslant k \leqslant g_1$. En vertu de (51) nous pouvons donc écrire

$$k^2 t^{u(\sigma)} \geqslant (g_1 - 1)^2,$$

et par ceci nous avons démontré le lemme.

Lemme 12. — *Supposons $g \geqslant 3$, $\gamma = 2^g$, g désignant le nombre entier qui correspond à chaque σ de l'intervalle $\frac{1}{2} \leqslant \sigma < 1$, moyennant l'inégalité* (1).

Supposons en outre que g_1 soit le plus grand nombre entier $\leqslant g$, qui satisfait à la relation

$$(52) \qquad \log t \geqslant c_{28}(\gamma_1 - 2),$$

où $\gamma_1 = 2^{g_1}$ et où c_{28} désigne la constante du lemme 11.

Si $\lambda(\sigma)$ désigne la fonction définie dans la proposition, on a pour $t > e^{2c_{28}}$ la relation

$$(53) \qquad \left| \sum_{n=E\left(t^{\frac{\gamma_1}{g_1\gamma_1 - \gamma_1 + 2}}\right)+1}^{E(t)} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < c_{29} \frac{t^{\lambda(\sigma)}}{g_1} \log t.$$

Démonstration : A cause de $t > e^{2c_{28}}$ et de la définition de g_1, on a sûrement $g_1 \geqslant 2$. Soit k un nombre entier tel que $2 \leqslant k \leqslant g_1$ et partageons le segment

$$E\left(t^{\frac{\gamma_1}{g_1\gamma_1 - \gamma_1 + 2}}\right) + 1 \leqslant n \leqslant E(t)$$

en les segments

$$E\left(t^{\frac{K}{kK - K + 2}}\right) + 1 \leqslant n \leqslant E\left(t^{\frac{K}{kK - 2K + 4}}\right)$$

c'est toujours possible, car l'exposant $\frac{K}{kK - K + 2}$ est une fonction décroissante de k à cause de (26).

Écrivons ensuite

$$(54) \qquad \sum_{n=E\left(t^{\frac{K}{kK-K+2}}\right)+1}^{E\left(t^{\frac{K}{kK-2K+4}}\right)} \frac{1}{(n+w)^s} = \sum_{h=0}^{H_k} \sum_{n=N_{h,k}}^{N'_{h,k}} \frac{1}{(n+w)^s},$$

où le nombre entier H_k soit défini moyennant l'inégalité

$$(55)\qquad E\left(2^{H_k} t^{\frac{K}{kK-K+2}}\right) < E\left(t^{\frac{K}{kK-2K+4}}\right) \leqslant E\left(2^{H_k+1} t^{\frac{K}{kK-K+2}}\right)$$

et où nous avons posé

$$N_{h,k} = E\left(2^h . t^{\frac{K}{kK-K+2}}\right) + 1,$$
$$N'_{h,k} = E\left(2^{h+1} . t^{\frac{K}{kK-K+2}}\right) \qquad (0 \leqslant h \leqslant H_k - 1),$$
$$N'_{H_k,k} = E\left(t^{\frac{K}{kK-2K+4}}\right).$$

Il résulte de (55)

$$2^{H_k} < t^{\frac{K}{kK-2K+4} - \frac{K}{kK-K+2}},$$

donc

$$k^2 H_k < k^2\left(\frac{K}{kK-2K+4} - \frac{K}{kK-K+2}\right)\frac{\log t}{\log 2}$$
$$= \frac{k^2 K(K-2)}{(kK-2K+4)(kK-K+2)}\frac{\log t}{\log 2} < c_{30}\log t,$$

car le facteur figurant dans l'avant-dernier membre tend vers 1, si k croît indéfiniment.

Par conséquent on a

$$(56)\qquad H_k < \frac{c_{30}}{k^2}\log t.$$

Il découle de (52)

$$\log t \geqslant c_{28}(2^{g_1} - 2) \geqslant c_{28}\, 2^{g_1 - 1} \geqslant c_{28}\, 2^{k-1} \geqslant c_{31} k^2,$$

c'est-à-dire il résulte de (56)

$$(57)\qquad H_k + 1 < c_{32} . \frac{\log t}{k^2} \qquad (2 \leqslant k \leqslant g_1).$$

Nous allons distinguer deux cas différents :

1° Supposons que $k = 2$. Cela veut dire

$$t^{\frac{2}{3}} \leqslant N_{h,2} \leqslant t.$$

Appliquons le lemme 4 en mettant $k=2$, $N=N_{h,2}$, $N'=N'_{h,2}$.

En remarquant que $\frac{1}{2}\leqslant\sigma<1$, nous obtenons la relation

$$\left|\sum_{n=N_{h,2}}^{N'_{h,2}}\frac{1}{(n+w)^s}\right|<c_{15}N_{h,2}^{1-\sigma}\left(N_{h,2}^{-1}t^{\frac{1}{2}}+N_{h,2}^{-\frac{1}{2}}+t^{-\frac{1}{2}}\right)<c_{15}\left(t^{-\frac{2}{3}\sigma+\frac{1}{2}}+t^{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)}+t^{\frac{1}{2}-\sigma}\right)$$

$$<3\,.\,c_{15}t^{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\sigma}=3\,.\,c_{15}\,.\,t\,.^{\lambda(\sigma)-u(\sigma)}$$

où nous avons posé

$$u(\sigma)=\lambda(\sigma)-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\sigma=\lambda(\sigma)-\frac{1}{K-2}-\frac{K}{kK-K+2}\left(1-\sigma-\frac{k}{K-2}\right)$$

pour $k=2$.

2° Occupons-nous maintenant du cas $3\leqslant k\leqslant g_1$.

Nous allons appliquer le lemme 6 en mettant

$$N=N_{h,k},\qquad N'=N'_{h,k}\quad\text{pour}\quad 3\leqslant k\leqslant g_1.$$

Les conditions du lemme 6 sont remplies, car pour $3\leqslant k\leqslant g_1$ on a

$$1<N_{h,k}\leqslant t^{\frac{2}{3}}.$$

Nous obtenons la relation

$$\left|\sum_{n=N_{h,k}}^{N'_{h,k}}\frac{1}{(n+w)^s}\right|<c_{17}N_{h,k}^{1-\sigma-\frac{k}{K-2}}t^{\frac{1}{K-2}}\leqslant c_{17}\,t^{\frac{K}{kK-K+2}\left(1-\sigma-\frac{k}{K-2}\right)+\frac{1}{K-2}},$$

parce que

$$N_{h,k}\geqslant t^{\frac{K}{kK-K+2}}$$

et

$$1-\sigma-\frac{k}{K-2}\leqslant 0\qquad\text{pour}\qquad k\leqslant g_1\leqslant g.$$

La dernière inégalité découle du fait que $\frac{k}{K-2}$ est une fonction décroissante de k, à cause de l'inégalité suivante :

$$\frac{k}{K-2}-\frac{k+1}{2K-2}=\frac{kK-K+2}{(K-2)(2K-2)}>0.$$

Dans ce deuxième cas on a donc

$$\left|\sum_{n=N_{h,k}}^{N'_{h,k}} \frac{1}{(n+w)^s}\right| < c_{17}\, t^{\lambda(\sigma)-u(\sigma)},$$

où nous avons posé

$$u(\sigma) = \lambda(\sigma) - \frac{1}{K-2} - \frac{K}{kK-K+2}\left(1-\sigma-\frac{k}{K-2}\right)$$

pour $3 \leqslant k \leqslant g_1$.

En combinant les résultats des deux cas nous pouvons écrire

$$\left|\sum_{n=N_{h,k}}^{N'_{h,k}} \frac{1}{(n+w)^s}\right| < c_{33}\, t^{\lambda(\sigma)-u(\sigma)},$$

où

$$u(\sigma) = \lambda(\sigma) - \frac{1}{K-2} - \frac{K}{kK-K+2}\left(1-\sigma-\frac{k}{K-2}\right)$$

pour $2 \leqslant k \leqslant g_1$.

A cause de (52) il est permis d'appliquer le lemme 11 et nous trouvons

$$\left|\sum_{n=N_{h,k}}^{N'_{h,k}} \frac{1}{(n+w)^s}\right| < c_{33}\, t^{\lambda(\sigma)} \frac{k^2}{(g_1-1)^2},$$

de sorte qu'il résulte de (54) et de (57) pour $2 \leqslant k \leqslant g_1$

$$\left|\sum_{n=E\left(t^{\frac{K}{kK-K+2}}\right)+1}^{E\left(t^{\frac{K}{kK-2K+4}}\right)} \frac{1}{(n+w)^s}\right| < c_{32}\,.\,c_{33} \frac{t^{\lambda(\sigma)}}{(g_1-1)^2}\log t.$$

En étendant la somme sur $k = 2, 3, \ldots, g_1$, on obtient

$$\left|\sum_{n=E\left(t^{\frac{\gamma_1}{g_1\gamma_1-\gamma_1+2}}\right)+1}^{E(t)} \frac{1}{(n+w)^s}\right| < (g_1-1)\,.\,c_{32}\,.\,c_{33}\frac{t^{\lambda(\sigma)}\,.\log t}{(g_1-1)^2} < c_{29}\frac{t^{\lambda(\sigma)}}{g_1}\log t$$

et par ceci l'assertion (53) est démontrée.

Lemme 13. — *Supposons* $g \geqslant 3$, $\gamma = 2^g$, *g désignant le nombre entier qui correspond à chaque* σ *de l'intervalle* $\frac{1}{2} \leqslant \sigma < 1$, *moyennant l'inégalité* (1).

Si $\lambda(\sigma)$ *désigne la fonction, définie dans la proposition, ou a pour* $t > e$

$$(58) \qquad \left| \sum_{n=E\left(t^{\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}}\right)+1}^{E(t)} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < c_{34}\left(\frac{t^{\lambda(\sigma)}}{g} + \frac{1}{\log\log t}\right)\log t.$$

Démonstration : Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer $t > e^{2c_{28}}$, où c_{28} désigne la constante du lemme 12, parce que autrement on a

$$\left| \sum_{n=E\left(t^{\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}}\right)+1}^{E(t)} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < \sum_{n'=1}^{E\left(e^{2c_{28}}\right)} 1 \leqslant e^{2c_{28}},$$

de sorte que l'assertion (58) est alors évidente.

Nous allons distinguer deux cas différents :

1° Supposons que

$$\log t \geqslant c_{28}(\gamma - 2), \quad (\gamma = 2^g),$$

où c_{28} désigne la constante du lemme 12.

Il est permis d'appliquer le lemme 12, en mettant $g_1 = g$, à cause de la définition de g_1.

Par ceci on obtient de (53) immédiatement la relation (58), en mettant $c_{34} = c_{29}$.

2° Supposons que

$$\log t < c_{28}(\gamma - 2), \quad (\gamma = 2^g).$$

Désignons par g_1 le plus grand nombre entier qui possède la propriété

$$\log t \geqslant c_{28}(\gamma_1 - 2) \qquad (\gamma_1 = 2^{g_1})$$

et écrivons

$$(59) \qquad \sum_{n=E\left(t^{\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}}\right)+1}^{E(t)} \frac{1}{(n+w)^s} = \sum_{n=E\left(t^{\frac{\gamma_1}{g_1\gamma_1-\gamma_1+2}}\right)+1}^{E(t)} \frac{1}{(n+w)^s} + \sum_{n=E\left(t^{\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}}\right)+1}^{E\left(t^{\frac{\gamma_1}{g_1\gamma_1-\gamma_1+2}}\right)} \frac{1}{(n+w)^s}.$$

Selon le lemme 12, la valeur absolue de la première somme du dernier membre devient

(60) $$\left| \sum_{n=E\left(t^{\frac{\gamma_1}{g_1\gamma_1-\gamma_1+2}}\right)+1}^{E(t)} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < c_{29} \frac{t^{\lambda(\sigma)}}{g_1} \log t.$$

A cause de la définition de g_1, on a

$$\log t < c_{28}(2^{g_1+1}-2) < c_{28}\, 2^{g_1+1};$$

donc

$$g_1 > \frac{\log \log t}{\log 2} - \frac{\log 2^{c_{28}}}{\log 2} > \frac{1}{c_{35}} \log \log t,$$

puisque $t > e$ et $t > e^{2^{c_{28}}}$.

Par conséquent, on a

(61) $$\frac{1}{g_1} < \frac{c_{35}}{\log \log t}.$$

Remarquons que

$$(\gamma_1 - 2) > \frac{1}{4}(2^{g_1+1}-2) > \frac{1}{4c_{28}} \log t.$$

En vertu de (5) et de (1) on obtient

$$\lambda(\sigma) = \frac{(1-\sigma)\gamma - 1}{g\gamma - \gamma + 2} \leqslant \frac{\frac{g}{\gamma-2}\gamma - 1}{g\gamma - \gamma + 2} = \frac{1}{\gamma - 2} < \frac{c_{28}}{\log t}$$

donc

$$t^{\lambda(\sigma)} \leqslant t^{\frac{1}{\gamma-2}} < e^{c_{28}} = c_{36}. \tag{62}$$

Il résulte de (60), (61) et (62)

(63) $$\left| \sum_{n=E\left(t^{\frac{\gamma_1}{g_1\gamma_1-\gamma_1+2}}\right)+1}^{E(t)} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < c_{34} \cdot \frac{\log t}{\log \log t}.$$

Envisageons maintenant la deuxième somme du dernier membre de (59).

Écrivons

$$(64)\qquad \sum_{n=E\left(t^{\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}}\right)+1}^{E\left(t^{\frac{\gamma_1}{g_1\gamma_1-\gamma_1+1}}\right)} \frac{1}{(n+w)^s} = \sum_{h=0}^{H}\sum_{n=N_h}^{N'_h} \frac{1}{(n+w)^s},$$

où le nombre entier H soit défini moyennant l'inégalité

$$(65)\qquad E\left(2^H.\, t^{\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}}\right) < E\left(t^{\frac{\gamma_1}{g_1\gamma_1-\gamma_1+2}}\right) \leqslant E\left(2^{H+1}\, t^{\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}}\right)$$

et où nous avons posé

$$\begin{aligned} N_h &= E\left(2^h.\, t^{\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}}\right)+1, \\ N'_h &= E\left(2^{h+1}.\, t^{\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}}\right), \qquad (0 \leqslant h \leqslant H-1) \\ N'_H &= E\left(t^{\frac{\gamma_1}{g_1\gamma_1-\gamma_1+2}}\right). \end{aligned}$$

Appliquons le lemme 6 en mettant $k=g_1$, $N=N_h$, $N'=N'_h$. Nous obtenons

$$(66)\qquad \left|\sum_{n=N_h}^{N'_h} \frac{1}{(n+w)^s}\right| < c_{17}.\, N_h^{1-\sigma-\frac{g_1}{\gamma_1-2}}\, t^{\frac{1}{\gamma_1-2}} \leqslant c_{37},$$

à cause de (62) et puisque on a

$$N_h \geqslant 1 \quad \text{et} \quad 1-\sigma-\frac{g_1}{\gamma_1-2} \leqslant 1-\sigma-\frac{g}{\gamma-2} \leqslant 0 \qquad [\text{voir } (1)].$$

Nous tirons de (65)

$$2^H < t^{\frac{\gamma_1}{g_1\gamma_1-\gamma_1+2}-\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}} < t^{\frac{\gamma_1}{g_1\gamma_1-\gamma_1+2}},$$

donc

$$H \log 2 < \frac{\gamma_1}{g_1\gamma_1-\gamma_1+2}\log t$$

c'est-à-dire

$$H+1 < c_{38}\frac{\log t}{g_1}+1 < c_{39}\frac{\log t}{\log\log t},$$

à cause de (61), de sorte qu'il résulte de (64) et de (66)

$$(67)\qquad \left| \sum_{n=E\left(t^{\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}}\right)+1}^{E\left(t^{\frac{\gamma_1}{g_1\gamma_1-\gamma_1+2}}\right)} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < c_{34}\frac{\log t}{\log\log t}.$$

Des relations (67), (63) et (59), il découle que l'assertion du lemme est juste dans le 2ᵉ cas que nous venons d'examiner; c'est-à-dire que nous avons établi complètement ce lemme 13.

LEMME 14. — *Supposons* $g \geqslant 3$, $\gamma = 2^g$ *et* $\sigma \neq 1 - \frac{g}{\gamma-2}$, *g désignant le nombre entier qui correspond à chaque* σ *de l'intervalle* $\frac{1}{2} \leqslant \sigma < 1$, *moyennant l'inégalité* (1).

Supposons en outre que $\lambda(\sigma)$ *désigne la fonction définie dans la proposition. Alors on a pour* $t > e$

$$\left| \sum_{n=E\left(t^{\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}}\right)+1}^{E(t)} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < c_{40}\frac{t^{\lambda(\sigma)}}{\sigma - 1 + \frac{g}{\gamma-2}}.$$

DÉMONSTRATION : Écrivons

$$(68)\qquad \sum_{n=E\left(t^{\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}}\right)+1}^{E(t)} \frac{1}{(n+w)^s} = \sum_{n=E\left(t^{\frac{2}{3}}\right)+1}^{E(t)} \frac{1}{(n+w)^s} + \sum_{n=E\left(t^{\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+1}}\right)+1}^{E\left(t^{\frac{2}{3}}\right)} \frac{1}{(n+w)^s}.$$

Commençons par envisager la première somme du dernier membre. Nous allons l'écrire sous la forme

$$(69)\qquad \sum_{n=E\left(t^{\frac{2}{3}}\right)+1}^{E(t)} \frac{1}{(n+w)^s} = \sum_{h=0}^{H} \sum_{n=N_h}^{N'_h} \frac{1}{(n+w)^s},$$

où le nombre entier H soit défini moyennant l'inégalité

$$(70)\qquad E\left(2^H . t^{\frac{2}{3}}\right) < E(t) \leqslant E\left(2^{H+1} . t\right),$$

et où nous avons posé

$$N_h = E\left(2^h \cdot t^{\frac{2}{3}}\right) + 1,$$

$$N'_h = E\left(2^{h+1} \cdot t^{\frac{2}{3}}\right) \qquad (0 \leqslant h \leqslant H-1),$$

$$N'_H = E(t).$$

Appliquons le lemme 4 en mettant $k = 2$, $N = N_h$, $N' = N'_h$. Nous obtenons

$$(71) \qquad \left|\sum_{n=N_h}^{N'_h} \frac{1}{(n+w)^s}\right| < c_{15} N_h^{-\sigma}\left(t^{\frac{1}{2}} + N_h^{\frac{1}{2}} + N_h t^{-\frac{1}{2}}\right) < 3 \cdot c_{15} N_h^{-\sigma} \cdot t^{\frac{1}{2}},$$

puisque

$$N_h^{\frac{1}{2}} \leqslant t^{\frac{1}{2}}$$

et puisque

$$N_h t^{-\frac{1}{2}} \leqslant t \cdot t^{-\frac{1}{2}} = t^{\frac{1}{2}}.$$

A cause de l'inégalité $N_h > 2^h \cdot t^{\frac{2}{3}}$ nous pouvons donc écrire au lieu de (71), la relation

$$(72) \qquad \left|\sum_{n=N_h}^{N'_h} \frac{1}{(n+w)^s}\right| < 3 \cdot c_{15}\, 2^{-h\sigma}\, t^{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\sigma}.$$

Distinguons trois cas différents :

1° $$\frac{1}{2} \leqslant \sigma < \frac{5}{7}.$$

Le nombre g, correspondant aux σ de cet intervalle, est égal à 3; par conséquent on a, à cause de (5),

$$\lambda(\sigma) = \frac{7}{18} - \frac{4}{9}\sigma.$$

Il est évident que

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\sigma \leqslant \frac{7}{18} - \frac{4}{9}\sigma = \lambda(\sigma),$$

car les deux membres sont égaux à $\frac{1}{6}$ pour $\sigma = \frac{1}{2}$ et le premier membre décroît plus rapidement que le dernier membre.

2°
$$\frac{5}{7} \leqslant \sigma < \frac{5}{6}.$$

Le nombre g, correspondant aux σ de cet intervalle, est égal à 4; par conséquent on a, à cause de (5),

$$\lambda(\sigma) = \frac{(1-\sigma)\,16 - 1}{50} = \frac{3}{10} - \frac{8}{25}\sigma.$$

Il saute aux yeux que

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\sigma < \frac{3}{10} - \frac{8}{25}\sigma = \lambda(\sigma),$$

puisque pour $\sigma = \frac{5}{7}$, les deux membres de la dernière inégalité prennent respectivement les valeurs $\frac{1}{42}$ et $\frac{1}{14}$ et puisque en outre le membre gauche décroît plus rapidement que le membre droit.

3°
$$\frac{5}{6} \leqslant \sigma < 1.$$

Dans ce troisième cas on a

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\sigma \leqslant \frac{1}{2} - \frac{5}{9} < 0 < \lambda(\sigma).$$

En combinant les résultats des trois cas on obtient que toujours

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\sigma \leqslant \lambda(\sigma).$$

Nous pouvons donc écrire, pour $\frac{1}{2} \leqslant \sigma < 1$, au lieu de (72)

$$\left| \sum_{n=N_h}^{N_h} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < 3 \cdot c_{15} \cdot 2^{-h\sigma} \cdot t^{\lambda(\sigma)}.$$

En étendant la somme sur $h = 0, 1, \ldots, H$ nous trouvons de (69) la relation

$$(73)\quad \begin{cases} \left| \sum_{E\left(t^{\frac{2}{3}}\right)+1}^{E(t)} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < 3 \cdot c_{15} \sum_{h=0}^{\infty} 2^{-h\sigma} t^{\lambda(\sigma)} \\ \qquad = 3 \cdot c_{15} \cdot \frac{1}{1-2^{-\sigma}} t^{\lambda(\sigma)} < \frac{c_{41}}{\sigma} \cdot t^{\lambda(\sigma)} < c_{41} \frac{t^{\lambda(\sigma)}}{\sigma - 1 + \frac{g}{\gamma - 2}}. \end{cases}$$

Envisageons maintenant la dernière somme du dernier membre de (68). Nous écrivons cette somme sous la forme

$$(74)\quad \sum_{n=E\left(t^{\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}}\right)+1}^{E\left(t^{\frac{2}{3}}\right)} \frac{1}{(n+w)^s} = \sum_{h=0}^{H} \sum_{n=N_h}^{N'_h} \frac{1}{(n+w)^s},$$

dans laquelle le nombre H soit défini moyennant l'inégalité

$$E\left(2^H \cdot t^{\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}}\right) < E\left(t^{\frac{2}{3}}\right) \leqslant E\left(2^{H+1} t^{\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}}\right)$$

et dans laquelle nous avons posé en outre

$$N_h = E\left(2^h \cdot t^{\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}}\right) + 1,$$
$$N'_h = E\left(2^{h+1} \cdot t^{\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}}\right), \qquad (0 \leqslant h \leqslant H-1)$$
$$N'_H = E\left(t^{\frac{2}{3}}\right).$$

En appliquant le lemme 6 pour $k = g$, $N = N_h$ et $N' = N'_h$ on trouve

$$\left| \sum_{n=N_h}^{N'_h} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < c_{17} N_h^{1-\sigma-\frac{g}{\gamma-2}} t^{\frac{1}{\gamma-2}} \leqslant c_{17} \left(2^h \cdot t^{\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}}\right)^{1-\sigma-\frac{g}{\gamma-2}} t^{\frac{1}{\gamma-2}},$$

puisque $1 - \sigma - \frac{g}{\gamma-2} < 0$ à cause de (1).

On a donc la relation suivante

$$\left|\sum_{n=N_h}^{N'_h} \frac{1}{(n+w)^s}\right| < c_{17}\, 2^{h\left(1-\sigma-\frac{g}{\gamma-2}\right)}\, t^{\frac{(1-\sigma)\gamma-1}{g\gamma-\gamma+2}} = c_{17}\, 2^{h\left(1-\sigma-\frac{g}{\gamma-2}\right)}\, t^{\lambda(\sigma)};$$

en vertu de (5).

En prenant la somme on tire de la relation (74) l'inégalité

$$(75)\quad \begin{cases} \left|\displaystyle\sum_{n=E\left(t^{\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}}\right)+1}^{E\left(t^{\frac{2}{3}}\right)} \frac{1}{(n+w)^s}\right| < c_{17}\, t^{\lambda(\sigma)} \sum_{h=0}^{\infty} 2^{h\left(1-\sigma-\frac{g}{\gamma-2}\right)} \\ \qquad = c_{17}\, t^{\lambda(\sigma)} \dfrac{1}{1-2^{1-\sigma-\frac{g}{\gamma-2}}} < c_{42} \dfrac{t^{\lambda(\sigma)}}{\sigma-1+\dfrac{g}{\gamma-2}}. \end{cases}$$

L'assertion du lemme 14 résulte immédiatement de (68), (73) et (75).

Démonstration de la proposition.

Des lemmes 2, 7, 8 et 13 nous tirons l'inégalité

$$\left|\zeta(s,w)-\frac{1}{w^s}\right| < c_4\left(\frac{t^{\lambda(\sigma)}}{g}+\frac{1}{\log\log t}\right)\log t.$$

Remarquons que selon l'inégalité (1) on a

$$\gamma > \frac{2\gamma-2}{g+1} \geqslant \frac{1}{1-\sigma}.$$

Cela veut dire

$$g > g\log 2 \geqslant \log\frac{1}{1-\sigma},$$

d'où

$$\left|\zeta(s,w)-\frac{1}{w^s}\right| < c_4\left(\frac{t^{\lambda(\sigma)}}{\log\dfrac{1}{1-\sigma}}+\frac{1}{\log\log t}\right)\log t.$$

Si $\sigma \neq 1 - \frac{g}{\gamma - 2}$ [g étant défini moyennant (1)], on obtient en outre des lemmes 2, 7, 8 et 14, l'inégalité suivante :

$$\left|\zeta(s, w) - \frac{1}{w^s}\right| < \frac{c_2}{2} t^{\lambda(\sigma)} \left(\frac{1}{1 - \sigma - \frac{g+1}{2\gamma - 2}} + \frac{1}{\sigma - 1 + \frac{g}{\gamma - 2}} \right) \leqslant c_2 \frac{t^{\lambda(\sigma)}}{\beta},$$

par suite de la définition de β, moyennant l'inégalité (3).

Et par ceci nous avons établi la proposition.