

JEAN DELSARTE

Les rotations fonctionnelles

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3^e série, tome 20 (1928), p. 47-127

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1928_3_20__47_0

© Université Paul Sabatier, 1928, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LES ROTATIONS FONCTIONNELLES

Par M. JEAN DELSARTE



INTRODUCTION

Nous nous sommes proposés dans ce mémoire d'étudier une classe particulière de transformations linéaires fonctionnelles rentrant dans le type de Fredholm :

$$\varphi(s) = f(s) + \int_a^b K(st)f(t) dt.$$

Ces transformations auxquelles nous avons donné le nom de rotations fonctionnelles — $K(st)$ est alors un noyau de rotation — généralisent dans l'espace fonctionnel les transformations orthogonales à n variables

$$y_i = \sum_{j=1}^n C_{ij}x_j \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

et correspondent au cas où on remplace les deux indices i et j par des variables continues.

Nous étudions dans la suite les propriétés fonctionnelles de ces rotations. Nous donnons d'abord la condition nécessaire et suffisante pour qu'un noyau soit de rotation. Cette condition n'est qu'une extension du fait, connu depuis longtemps, qu'il existe une liaison profonde entre les déterminants orthogonaux et les déterminants symétriques gauches. Nous établissons ensuite deux propriétés importantes de ces rotations : à savoir qu'une rotation fonctionnelle laisse invariant le produit symbolique de deux fonctions de carré sommable $f_1(s)$ et $f_2(s)$.

$$[f_1 \cdot f_2] = \int_a^b f_1(s)f_2(s) ds.$$

Comme conséquence, une rotation fonctionnelle transforme un système orthogonal complet de fonctions (f_i) en un système de même nature. Nous faisons voir ensuite qu'une rotation fonctionnelle transforme une suite de fonctions orthogonales normées également ou normalement denses en une suite ayant la même propriété.

De là résulte que les rotations fonctionnelles sont les transformations fonctionnelles qui se rapprochent le plus des déplacements de la géométrie ordinaire, puisqu'elles conservent non seulement les distances et les angles, mais aussi les notions introduites par MM. Paul LEVY et GATEAUX de surface, courbure, volume, moyenne, dans l'espace fonctionnel.

Nous étudions ensuite les rapports de la théorie des noyaux de rotation avec celle des systèmes de fonctions orthogonales complets et nous sommes conduits à considérer le tableau infini à double entrée des coefficients de FOURIER d'un noyau de rotation relativement à un système orthogonal complet. Un tableau qui ne diffère du précédent que par ses éléments principaux joue un rôle fondamental dans la théorie. Il est orthogonal et complet (ou de SCHMIDT) dans les deux sens et forme de plus un déterminant infini normal au sens de M. von KOCH, dont la valeur ne dépend que du noyau de rotation et non du système de fonctions orthogonales par rapport auquel on « repère » le noyau.

Nous donnons enfin une condition nécessaire et suffisante pour que deux systèmes orthogonaux complets puissent se superposer par une rotation fonctionnelle. Nous sommes ainsi amenés à introduire la notion de systèmes orthogonaux semblablement ordonnés. Quand un de ces systèmes est complet, l'autre lui est superposable par une rotation fonctionnelle, et est par suite complet.

En analysant cette condition d'un peu plus près, nous montrons qu'elle a pour conséquence que les deux systèmes sont asymptotiquement identiques; d'où résulte ce fait qu'une rotation fonctionnelle dérange très peu les coordonnées dans l'espace fonctionnel.

Nous donnons pour terminer les principales propriétés des noyaux de rotation que nous appelons finis et qui sont caractérisés par le fait de n'avoir qu'un nombre fini de valeurs singulières. Les rotations fonctionnelles correspondantes sont topologiquement identiques aux rotations euclidiennes dans les espaces à n dimensions, n étant aussi grand qu'on le veut.

Nous reviendrons, dans un mémoire qui paraîtra prochainement, sur ces noyaux, sur leur composition et sur les groupes finis de rotations fonctionnelles finies.

MM. GOURSAT, VESSIOT, VILLAT ont bien voulu s'intéresser au développement de ce travail et nous encourager fréquemment de leurs conseils. Nous sommes heureux de leur exprimer ici notre profonde gratitude.

Ce travail a été fait en grande partie à la Fondation Thiers; nous tenons à remercier M. REBELLIAU, Directeur de la Fondation, et son Conseil, qui ont bien voulu nous admettre parmi ses pensionnaires.

Paris, le 17 juillet 1927.

ROTATIONS FONCTIONNELLES EN GÉNÉRAL

Sommaire. — Les substitutions orthogonales dans l'espace fonctionnel. — Généralisations diverses. — Les rotations fonctionnelles. — Définition et construction. — Propriétés fondamentales. — Rapport avec la théorie des suites de fonctions orthogonales. — Suites également et normalement denses. — Suites semblablement ordonnées. — Condition nécessaire et suffisante. — Rapports avec la théorie des déterminants de Von Koch. — Les rotations fonctionnelles finies.

1. — Substitutions orthogonales dans l'espace fonctionnel⁽¹⁾. — Généralisations.

Les substitutions orthogonales dans l'espace à n dimensions sont définies par des formules du type

$$y_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

les n^2 coefficients C_{ij} formant un déterminant orthogonal d'ordre n ; c'est-à-dire remplissant les conditions

$$\sum_{k=1}^n C_{ik} C_{jk} = \varepsilon_{ij} \quad (2)$$

avec

$$i, j = 1, 2, \dots, n$$

et $\varepsilon_{ij} = 0$ ou 1 suivant que $i \neq j$ ou $i = j$.

Comme il est bien connu, les conditions (2) entraînent les relations

$$\sum_{k=1}^n C_{ki} C_{kj} = \varepsilon_{ij} \quad (3)$$

et la résolubilité des équations (1) par les formules

$$x_i = \sum_{j=1}^n C_{ji} y_j. \quad (4)$$

⁽¹⁾ Voir à ce sujet P. LÉVY. *Analyse fonctionnelle*, 1^{re} partie, chap. VII, et 2^e partie, chap. III.

Ces formules peuvent aussi s'interpréter comme celles d'un changement de coordonnées dans l'espace à n dimensions.

Quand on veut passer à l'espace fonctionnel, différentes généralisations sont possibles.

On peut d'abord supposer qu'on se trouve dans un espace à une infinité dénombrable de coordonnées, espace ω lieu des points (x) représentant une suite dénombrable de nombres $x_1; x_2; \dots x_n; \dots$; tels que $\sum_n x_n^2$ converge, la distance r de deux points (x) et (x') étant définie par la formule

$$r^2 = \sum_n (x_n - x'_n)^2.$$

Cet espace est quelquefois appelé l'espace hilbertien. Les changements de coordonnées dans un tel espace sont définis par les formules

$$y_i = \sum_{j=1}^{\infty} C_{ij} x_j \quad (1')$$

où les coefficients C_{ij} forment un tableau orthogonal infini, c'est-à-dire que les séries

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_{ik} C_{jk}$$

sont convergentes et ont pour somme ε_{ij} . (La convergence de ces séries pour $i=j$, entraîne qu'elles sont toutes absolument convergentes et que les séries y_i sont aussi absolument convergentes moyennant les hypothèses faites sur les x_i). Le tableau des C_{ij} est dit un tableau de Schmidt dans le sens des lignes.

Mais ici se présente une différence importante. On ne peut pas toujours inverser les formules (1'). Pour que cela soit possible, il est nécessaire et suffisant que⁽¹⁾

$$\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2$$

converge; si cela a lieu, le tableau des C_{ij} est aussi un tableau de Schmidt dans le

(1) Voir FR. RIESZ. *Sur les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues*, chap. III.

sens des colonnes, et on a les relations

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_{ki} C_{kj} = \varepsilon_{ij}$$

les formules de résolution du système (1') sont

$$x_i = \sum_{j=1}^{\infty} C_{ji} y_j.$$

On démontre que cette solution est unique (voir Fr. RIESZ).

En résumé, on peut dire qu'il y a véritablement substitution orthogonale dans ω si les formules (1') sont celles d'un véritable changement de coordonnées, c'est-à-dire donnent un point (y) de l'espace ω .

Il existe une deuxième généralisation fort importante des tableaux orthogonaux qui conduit à la conception des suites de fonctions orthogonales. Elle consiste simplement à remplacer dans un tableau orthogonal d'éléments C_{ij} , un des indices par une variable continue s variant de a à b , l'intervalle (ab) étant égal à 1. On passe alors au point de vue de l'espace fonctionnel à une infinité continue de dimensions et on remplace les coefficients C_{ij} ; où j varie de 1 à l'infini par une fonction de carré sommable $f_i(s)$; où s joue le rôle de second indice. Les relations telles que (2) sont remplacées par

$$\int_a^b f_i(s) f_j(s) ds = \varepsilon_{ij}. \quad (2')$$

On dit que la suite $f_i(s)$ est orthogonale et normée, et coordonne l'espace fonctionnel, ou tout au moins une de ses sections.

Rappelons que l'on dit que la suite (f) est complète si toute fonction de carré sommable est développable en une série de Fourier procédant suivant les fonctions f .

Le changement de coordonnées dans cet espace peut s'interpréter comme il suit. Il consiste, étant données deux suites orthogonales et normées (f) et (φ) à les repérer l'une par rapport à l'autre en introduisant les coefficients

$$C_{ij} = \int_a^b f_i(s) \varphi_j(s) ds.$$

Si le système (f) est complet, le tableau C_{ij} est orthogonal et normé dans le sens des colonnes. Si le système (φ) est complet cela a lieu dans le sens des lignes. Si

(f) et (φ) sont complets, cela a lieu dans les deux sens. Nous sommes ainsi ramenés au point de vue précédent. Nous aurons à revenir là-dessus.

En se bornant à la considération du système (f), si on veut généraliser les relations (3) on est conduit à la notion d'égalité de densité d'une suite orthogonale (Cf. Paul LÉVY). Par interversion de l'indice et de la variable s , et en remplaçant les sommes par des moyennes, on est amené à considérer le système

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(s) &= 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(s, \sigma) &= 0 \quad (s \neq \sigma) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} F_n(s, \sigma) &= \frac{1}{n} [f_1(s)f_1(\sigma) + f_2(s)f_2(\sigma) + \dots + f_n(s)f_n(\sigma)] \\ F_n(s) &= F_n(s, s) \end{aligned}$$

les limites étant prises en moyenne.

On démontre que la seconde condition est toujours remplie si (f) est orthogonale et normée. Mais il n'en est pas de même pour la première. Quand elle est vérifiée on dit que la suite est également dense. Le fait qu'une suite est ou non également dense dépend en général de l'ordre dans lequel sont numérotées les fonctions de la suite, bien qu'il existe des suites également ou non également denses quel que soit leur ordre.

Nous aurons aussi à revenir là-dessus et à préciser ces notions.

2. — Rotations fonctionnelles.

Le but de ce mémoire est d'étudier une troisième généralisation des substitutions orthogonales dans l'espace fonctionnel, généralisation qui s'imposait après les précédentes. Cette généralisation consiste simplement à remplacer dans un tableau orthogonal les deux indices par des variables s et t variant de a à b , en supposant toujours pour plus de simplicité $b - a = 1$. Les coefficients C_{ij} sont alors remplacés par un certain noyau $K(s, t)$ que nous appellerons un noyau de rotation. La transformation orthogonale

$$y_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} x_j$$

qui permet de passer des variables x aux variables y sera remplacée par une transformation linéaire fonctionnelle, faisant passer d'une fonction de carré sommable

$f(s)$ à une autre $\varphi(s)$. Cette transformation étant une transformation de Fredholm dont le noyau est $K(st)$, soit donc

$$\varphi(s) = f(s) + \int_a^b K(st)f(t) dt. \quad (5)$$

A l'avenir, il ne sera plus question que d'intégrales de Lebesgue prises entre les limites a et b ; pour plus de simplicité, nous ne ferons pas figurer ces limites sauf indication contraire.

Pour définir les noyaux $K(st)$ nous devons d'abord observer que la formule précédente doit avoir un sens quelle que soit la fonction de carré sommable $f(s)$. Une condition suffisante pour cela est d'après la formule de Schwarz que $K(st)$ soit de carré intégrable par rapport à la variable d'intégration. En fait nous ferons l'hypothèse que $K(st)$ est de carré intégrable par rapport à chacune de ses deux variables prises séparément, c'est-à-dire que les deux fonctions

$$k_1(s) = \int K(st)^2 dt; \quad k_2(s) = \int K(ts)^2 dt$$

existent et sont bornées quel que soit s dans l'intervalle (ab) et nous verrons que ces hypothèses en apparence distinctes se réduisent à une seule.

Nous obtiendrons la définition des noyaux $K(st)$ en généralisant le fait que les formules (1) sont résolubles par les formules (4) qu'on obtient en échangeant le rôle des indices. Nous supposons donc que la formule (5) a pour conséquence

$$f(s) = \varphi(s) + \int K(ts)\varphi(t) dt. \quad (6)$$

En éliminant $\varphi(s)$ entre (5) et (6) on obtient immédiatement

$$K(st) + K(ts) + \int K(us)K(ut) du = 0 \quad (7)$$

de même, éliminant $f(s)$ on trouve

$$K(st) + K(ts) + \int K(su)K(tu) du = 0. \quad (8)$$

Les conditions (7) et (8) sont équivalentes, car l'une exprime que $K(st)$ est noyau de rotation, tandis que l'autre exprime qu'il en est de même de $K(ts)$. Or le fait que $K(st)$ est de rotation entraîne qu'il en est ainsi de $K(ts)$ d'après la définition même d'un tel noyau. On vérifierait aisément d'ailleurs l'équivalence de (7) et de (8) par un calcul direct.

Remarquons que si dans (7) et (8) on fait $s = t$, on obtient

$$k_1(s) = k_2(s) = -2K(ss).$$

Nous ferons donc simplement l'hypothèse complémentaire que $K(ss)$ existe et est bornée dans l'intervalle (ab) .

Les conditions nécessaires (7) ou (8) sont d'ailleurs suffisantes. Considérons en effet l'équation de Fredholm (1)

$$f(s) = \lambda \int K(st) f(t) dt + \varphi(s)$$

à laquelle se réduit (5) pour $\lambda = -1$. Elle est résolue par la formule

$$f(s) = \varphi(s) + \lambda \int \Gamma(st, \lambda) \varphi(t) dt,$$

où $\Gamma(st; \lambda)$ désigne le noyau résolvant de $K(st)$ pour la valeur λ du paramètre; faisant dans ces formules $\lambda = -1$, on doit avoir, quel que soit $\varphi(s)$,

$$\int K(ts) \varphi(t) dt = - \int \Gamma(st, -1) \varphi(t) dt$$

d'où

$$K(ts) = -\Gamma(st, -1) \tag{9}$$

condition nécessaire et suffisante pour que $K(st)$ soit de rotation. Or la formule (7) n'est autre que l'équation fonctionnelle de la résolvante pour $\lambda = -1$ quand on remplace $\Gamma(st, -1)$ par $K(ts)$. Par suite cette formule (7) est aussi une condition nécessaire et suffisante.

Il est d'ailleurs aisé de résoudre l'équation (9) et de déterminer les noyaux K possibles.

Considérons $\Gamma(st, -1)$ comme un noyau; son noyau résolvant est $\Gamma(st, \lambda - 1)$; soit $\gamma(st, \lambda)$ le noyau résolvant du noyau $-\Gamma(st, -1)$; — il faut et il suffit que l'on ait

$$\gamma(st, \lambda) = \Gamma(st, \lambda - 1).$$

Déterminons $\gamma(st, \lambda)$. Les itérés successifs de $-\Gamma(st, -1)$ sont

$$H^{(n)}(st) = -\Gamma(st, -1)^n$$

(1) Pour l'accord sur les notations et le signe, voir GOURSAT, *Traité d'analyse*, tome III, chap. xxx, § II.

puis

$$H^{(n)}(st) = \int H^{(1)}(su) H^{(1)}(ut) du = \int K(us) K(tu) du = K^{(n)}(ts)$$

et

$$H^{(n)}(st) = -K^{(n)}(ts) \text{ etc.},$$

où K ; $K^{(2)}$; $K^{(3)}$; sont les itérés successifs de $K(st)$.

Il en résulte immédiatement

$$\gamma(st, \lambda) = -\Gamma(ts, -\lambda)$$

d'où l'équation fonctionnelle de la résolvante d'un noyau de rotation

$$\Gamma(st, \lambda - 1) = -\Gamma(ts, -\lambda).$$

Posons

$$\lambda = \rho + \frac{1}{2}; \quad \Gamma(st, \lambda - 1) = \Gamma\left(st, \rho - \frac{1}{2}\right) = \Lambda(st, \rho);$$

$\Lambda(st, \rho)$ n'est autre que le noyau résolvant du noyau

$$\Gamma\left(st, -\frac{1}{2}\right) = h(st)$$

et vérifie l'équation fonctionnelle

$$\Lambda(st, \rho) = -\Lambda(ts, -\rho).$$

Or pour ρ assez petit on a

$$\begin{aligned} \Lambda(st, \rho) &= h(st) + \rho h^{(2)}(st) + \rho^2 h^{(3)}(st) + \dots \\ \Lambda(ts, -\rho) &= h(ts) - \rho h^{(2)}(ts) + \rho^2 h^{(3)}(ts) - \dots \end{aligned}$$

où $h^{(2)}(st)$; $h^{(3)}(st)$ sont les itérés successifs de $h(st)$. Et nous avons immédiatement les conditions

$$h(st) + h(ts) = 0; \quad h^{(2)}(st) - h^{(2)}(ts) = 0, \dots$$

qui expriment simplement que $h(st)$ est un noyau symétrique gauche. C'est nécessaire et suffisant. Revenant au noyau $K(st)$

$$K(st) = \Gamma(st, 0) = \Lambda\left(st, \frac{1}{2}\right)$$

nous voyons que $K(st)$ est la valeur prise par le noyau résolvant d'un noyau symétrique gauche pour $\lambda = \frac{1}{2}$, d'où :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un noyau soit de rotation est que ce noyau soit la valeur prise par la résolvante d'un noyau symétrique gauche pour la valeur $\lambda = \frac{1}{2}$ du paramètre.

On a de même

$$K(ts) = -\Gamma(st, -1) = -\Lambda\left(st, -\frac{1}{2}\right)$$

qui est la valeur pour $\lambda = \frac{1}{2}$ du noyau résolvant du noyau symétrique gauche $-h(st)$.

Nous voyons donc que les noyaux de rotation qui généralisent dans l'espace fonctionnel les substitutions et les déterminants orthogonaux sont intimement liés aux noyaux symétriques gauches. Ce n'est là en somme que l'extension de ce fait connu depuis CAYLEY ⁽¹⁾ que l'on passe de l'équation en s d'un déterminant orthogonal à l'équation en σ d'un déterminant symétrique gauche par la substitution

$$\sigma = \frac{1-s}{1+s}.$$

3. — Propriétés fondamentales. — Groupe. — Invariant.

De même que les substitutions orthogonales à n variables forment un groupe dans l'espace à n dimensions, de même les rotations fonctionnelles forment un groupe dans l'espace fonctionnel. — Soient en effet deux noyaux de rotation $K(st)$ et $H(st)$ et une fonction arbitraire de carré sommable $f(s)$; faisons subir à $f(s)$ successivement les deux rotations de noyaux K et H . On obtient

$$\varphi(s) = f(s) + \int K(st)f(t) dt$$

$$\psi(s) = \varphi(s) + \int H(st)\varphi(t) dt$$

et en éliminant $\varphi(s)$

$$\psi(s) = f(s) + \int L(st)f(t) dt$$

⁽¹⁾ Voir CAYLEY, *Œuvres*. Sur quelques propriétés des déterminants gauches, I-52; I-69; II-137; et J. DE CRELLE, t. XXXII, pp. 119-123; t. XXXVIII, pp. 93-96; t. L, pp. 288-289.

avec

$$L(st) = K(st) + H(st) + \int H(su) K(ut) du \quad (10)$$

qui est la formule de composition. Il faut vérifier que $L(st)$ est un noyau de rotation. C'est ce que montre un calcul facile, mais un peu long. Formons en effet

$$\mathfrak{R}[L] = L(st) + L(ts) + \int L(su) L(tu) du$$

il vient

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}[L] &= K(st) + K(ts) + \int H(su) K(ut) du + H(st) + H(ts) + \int H(tu) K(us) du \\ &+ \int K(su) K(tu) du + \int H(su) H(tu) du + \int K(su) H(tu) du + \int H(su) K(tu) du \\ &+ \int \int H(sv) K(vu) K(tu) dudv + \int \int H(sv) K(vu) H(tu) dudv \\ &+ \int \int K(su) H(tv) K(vu) dudv + \int \int H(su) H(tv) K(vu) dudv \\ &+ \int \int \int H(sv) K(vu) H(tw) K(wu) dudv dw \end{aligned}$$

qu'on peut écrire encore sous la forme

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}[L(st)] &= \mathfrak{R}[K(st)] + \mathfrak{R}[H(st)] \quad (11) \\ &+ \int H(su) \mathfrak{R}[K(ut)] du + \int H(tu) \mathfrak{R}[K(us)] du \\ &+ \int \int H(su) H(tv) \mathfrak{R}[K(vu)] dudv \end{aligned}$$

après quelques transformations simples.

Ceci montre que $\mathfrak{R}[L]$ est nul pourvu que $\mathfrak{R}[H]$ et $\mathfrak{R}[K]$ le soient — d'où la proposition annoncée.

Remarquons en passant que si $\mathfrak{R}[K] = 0$ sans que $\mathfrak{R}[H]$ le soit, on a

$$\mathfrak{R}[L] = \mathfrak{R}[H].$$

La quantité $\mathfrak{R}[H]$ est donc invariante quand on compose à la Fredholm, c'est-à-dire suivant la formule (10) le noyau $H(st)$ avec un noyau de rotation.

Si l'on prend $H(st) = K(ts)$, il vient $L(st) = \mathfrak{R}[K] = 0$ et la rotation de noyau $L(st)$ se réduit à la transformation identique. La rotation de noyau $K(ts)$ sera dite inverse de la rotation de noyau $K(st)$.

La formule de composition (10) permet aussi de définir les puissances successives d'une rotation de noyau $K(st)$. Prenant $H(st) = K(st)$ on trouve

$$L(st) = {}_2K(st) + K^{(2)}(st) = K_2(st)$$

où $K^{(2)}$ est le premier itéré de K .

Composant à son tour ce noyau K_2 , qui est le noyau de la rotation carrée de la rotation de noyau K ; avec K on trouve

$$K_3(st) = 3K(st) + 3K^{(2)}(st) + K^{(3)}(st) \text{ etc.};$$

d'une manière générale on voit sans peine que le noyau de la puissance $n^{\text{ème}}$ (n entier > 0) de la rotation de noyau K est égale symboliquement à

$$K_n(st) = [1 + K]^n - 1$$

où les exposants de K dans le second nombre doivent être considérés comme des indices d'itération.

Passons maintenant à une seconde propriété importante des rotations fonctionnelles. — Les transformations orthogonales à n variables sont des déplacements dans l'espace à n dimensions, et comme tels laissent invariants les éléments fondamentaux distances et angles. De même les rotations fonctionnelles sont des déplacements dans l'espace fonctionnel et laissent invariant le produit intérieur symbolique de deux fonctions de carré sommable

$$[\varphi_1 \cdot \varphi_2] = \int \varphi_1(s) \varphi_2(s) ds.$$

Soit en effet un noyau de rotation $K(st)$ qui transforme $\varphi_1(s)$ et $\varphi_2(s)$ en

$$\psi_1(s) = \varphi_1(s) + \int K(st) \varphi_1(t) dt$$

$$\psi_2(s) = \varphi_2(s) + \int K(st) \varphi_2(t) dt.$$

On a immédiatement

$$[\psi_1 \cdot \psi_2] = [\varphi_1 \cdot \varphi_2] + \int \int \left[K(st) (\varphi_1(s) \varphi_2(t) + \varphi_1(t) \varphi_2(s)) + \int K(us) K(ut) \varphi_1(s) \varphi_2(t) du \right] ds dt$$

qu'on peut encore écrire

$$\begin{aligned} [\psi_1, \psi_2] &= [\varphi_1, \varphi_2] + \iint \left[K(st) + K(ts) + \int K(us) K(ut) du \right] \varphi_1(s) \varphi_2(t) ds dt \quad (12) \\ &= [\varphi_1, \varphi_2] \end{aligned}$$

d'après la condition (7), d'où la propriété annoncée.

Remarquons qu'inversement le calcul précédent montre que si l'on s'était proposé de trouver tous les noyaux $K(st)$ tels que la transformation de Fredholm correspondante laisse invariant le produit symbolique $[\varphi_1, \varphi_2]$ de deux fonctions quelconques de carré sommable, on aurait trouvé la condition (7) comme condition nécessaire et suffisante. Les noyaux de rotation sont donc les seuls ayant la propriété en question.

Comme conséquence importante, nous voyons qu'une rotation fonctionnelle transforme un système orthogonal normé de fonctions (φ_i) en un système orthogonal normé de fonctions (ψ_i) . Les coefficients de Fourier d'une fonction f par rapport au système (φ_i) étant les mêmes que ceux de sa transformée g par la rotation de noyau K relativement au système (ψ_i) .

Il découle immédiatement de là et de la condition nécessaire et suffisante de Lauricella⁽¹⁾ pour qu'un système orthogonal normé de fonctions soit complet, que les rotations fonctionnelles transforment un système complet en un système complet.

Cette propriété est essentielle.

Donnons en troisième lieu une propriété géométrique des rotations fonctionnelles qui justifie leur nom.

Rappelons d'abord que d'après un théorème de Lalesco⁽²⁾ les valeurs singulières d'un noyau symétrique gauche sont imaginaires pures et deux à deux conjuguées; et que les fonctions fondamentales correspondantes sont deux à deux conjuguées et isotropes (leur carré symbolique est nul).

Ceci posé, employons le langage géométrique et proposons-nous de déterminer dans l'espace fonctionnel les \mathcal{M}_1 linéaires fonctionnelles qu'une rotation fonctionnelle de noyau $K(st)$ laisse invariantes.

Une telle multiplicité passe évidemment par l'origine qui est invariante par toutes les rotations; et $\varphi(s)$ étant une fonction de la multiplicité est transformé en $k\varphi(s)$ ou k est une constante. On a donc

$$(k - 1)\varphi(s) = \int K(st)\varphi(t) dt.$$

⁽¹⁾ Voir LAURICELLA. *Rendiconti di Palermo*, t. XXIX, 1910.

⁽²⁾ Voir LALESCO. *Introduction à la théorie des équations intégrales* (Hermann, 1912) et GOURSAT. *Traité*, t. III, chap. XXXII, § 597.

En se souvenant que $K(st) = \Lambda\left(st, \frac{1}{2}\right)$ valeur pour $\lambda = \frac{1}{2}$ de la résolvante d'un noyau symétrique gauche $h(st)$, nous voyons que si

$$\varphi(s) = \psi(s) - \frac{1}{2} \int h(st) \psi(t) dt$$

on a aussi

$$\psi(s) = \varphi(s) + \frac{1}{2} \int K(st) \varphi(t) dt$$

ou

$$\psi(s) = \frac{1}{2}(k+1)\varphi(s)$$

par suite

$$\varphi(s) = \frac{1}{2}(k+1)\varphi(s) - \frac{1}{4}(k+1) \int h(st) \varphi(t) dt$$

ou enfin

$$\varphi(s) = \frac{1}{2} \frac{k+1}{k-1} \int h(st) \varphi(t) dt$$

$\frac{1}{2} \frac{k+1}{k-1}$ est donc une valeur singulière du noyau symétrique gauche $h(st)$; et $\varphi(s)$ la fonction fondamentale correspondante. Nous supposons ici que cette valeur singulière est simple. Alors $\varphi(s)$ est déterminée à une constante près.

Nous poserons donc

$$\frac{1}{2} \frac{k+1}{k-1} = \alpha i \quad (i^2 = -1)$$

α étant réel; et

$$2\alpha = \cotg V$$

V étant un angle réel

$$0 < V < \frac{\pi}{2}$$

les limites étant pour le moment exclues. Le changement de V en $-V$ revient à prendre la valeur singulière conjuguée. On a alors

$$k' = e^{-2iV}$$

Soit

$$\varphi(s) = u(s) + iv(s)$$

la fonction fondamentale de $h(st)$ correspondant à la valeur singulière αi . Cette fonction est isotrope, c'est-à-dire que u et v sont deux fonctions réelles vérifiant les conditions

$$[u^2] = [v^2], \quad [u \cdot v] = 0$$

qui entraînent

$$[\varphi^2] = 0$$

$\varphi(s)$ étant déterminé à une constante près, nous prendrons

$$[u^2] = [v^2] = 1.$$

À la valeur singulière conjuguée $-\alpha i$ correspond la fonction fondamentale conjuguée

$$\bar{\varphi} = u - iv$$

qui est également isotrope. On a de plus

$$[\varphi \cdot \bar{\varphi}] = [u^2] + [v^2] = 2.$$

Désignons d'une manière générale par $K[f]$ la transformée de la fonction f par la rotation du noyau K . Nous avons, d'après ce qui précède,

$$K[u + iv] = k(u + iv) = e^{-2iV}(u + iv)$$

$$K[u - iv] = e^{2iV}(u - iv)$$

d'où l'on tire, puisque la rotation fonctionnelle est une transformation linéaire,

$$K[u] = u \cos 2V + v \sin 2V$$

$$K[v] = -u \sin 2V + v \cos 2V.$$

Soit maintenant $f(s)$ une fonction quelconque de l'espace, et $g(s)$ sa transformée

$$g = K[f].$$

Considérons les « composantes » de f et g sur les fonctions unitaires u et v , à savoir

$$[f \cdot u]; \quad [f \cdot v]; \quad [g \cdot u]; \quad [g \cdot v]$$

la propriété d'invariance donne

$$[f \cdot u] = [K[f] \cdot K[u]]$$

d'où

$$\begin{aligned} [f \cdot u] &= [g \cdot u] \cos 2V + [g \cdot v] \sin 2V \\ [f \cdot v] &= -[g \cdot u] \sin 2V + [g \cdot v] \cos 2V \end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned} [g \cdot u] &= [f \cdot u] \cos 2V - [f \cdot v] \sin 2V \\ [g \cdot v] &= [f \cdot u] \sin 2V + [f \cdot v] \cos 2V. \end{aligned}$$

En particulier, les fonctions f de la forme $\alpha u + \beta v$ où α et β sont des constantes qui sont des fonctions appartenant à la \mathbb{A}_2 linéaire fonctionnelle construite sur les fonctions u et v , ou plan (uv) , restent dans ce plan et tournent dans ce plan autour de l'origine de l'angle $2V$; et il y a dans cette « \mathbb{A}_2 canonique » qui glisse sur elle-même pendant la rotation deux \mathbb{A}_1 invariantes qui glissent aussi sur elles-mêmes, ce sont les isotropes de cette \mathbb{A}_2 , lieu des fonctions

$$f(s) = \lambda \varphi(s)$$

et

$$f(s) = \lambda \bar{\varphi}(s)$$

où λ est un paramètre invariable.

Les fonctions φ et $\bar{\varphi}$ sont isotropes et conjuguées, et on a

$$[\varphi \cdot \bar{\varphi}] = 2.$$

A chaque valeur singulière *simple* du noyau $K(st)$ correspond une telle \mathbb{A}_2 canonique.

Nous verrons dans d'autres cas plus particuliers ce qui se passe quand la valeur singulière est multiple.

Nous terminerons ce paragraphe en donnant une propriété très importante des rotations fonctionnelles. *Nous allons démontrer qu'une rotation fonctionnelle transforme un système de fonctions orthogonales normées également dense en un système de même nature.*

Soit donc un système orthogonal normé de fonctions

$$\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots, \varphi_n(s), \dots$$

posons (cf. Paul LEVY)

$$\Phi_n(st) = \frac{1}{n} [\varphi_1(s) \varphi_1(t) + \varphi_2(s) \varphi_2(t) + \dots + \varphi_n(s) \varphi_n(t)]$$

$$\Phi_n(s) = \Phi_n(ss).$$

Comme le système (φ_i) est orthogonal et normé, on sait que $\Phi_n(st)$ tend en moyenne vers 0 pour n infini dans le carré $a < s < b$; $a < t < b$. Si (φ_i) est également dense, $\Phi_n(s)$ tend en moyenne vers 1 dans l'intervalle (ab) ; ou $\Phi_n(st)$ tend en moyenne vers 1 sur la droite $s = t$.

Soit un noyau de rotation $K(st)$ qui transforme le système (φ_i) en un système orthogonal normé (ψ_i) avec

$$\psi_i = K[\varphi_i]$$

posons encore

$$\begin{aligned} \Psi_n(st) &= \frac{1}{n} [\psi_1(s) \psi_1(t) + \psi_2(s) \psi_2(t) + \dots + \psi_n(s) \psi_n(t)] \\ \Psi_n(s) &= \Psi_n(ss) \end{aligned}$$

ici encore $\Psi_n(st)$ tend en moyenne vers 0 dans le carré $a < s < b$; $a < t < b$; puisque (ψ_i) est orthogonal et normé. Il s'agit de montrer que $\Psi_n(s)$ tend en moyenne vers 1 dans l'intervalle (ab) . Or on a

$$\begin{aligned} \psi_n(s) &= \varphi_n(s) + \int K(su) \varphi_n(u) du \\ \psi_n(t) &= \varphi_n(t) + \int K(tu) \varphi_n(u) du \\ \psi_n(s) \psi_n(t) &= \varphi_n(s) \varphi_n(t) + \int K(su) \varphi_n(u) \varphi_n(t) du + \int K(tu) \varphi_n(u) \varphi_n(t) du \\ &\quad + \int \int K(su) K(tv) \varphi_n(u) \varphi_n(v) du dv \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \Psi_n(st) &= \Phi_n(st) + \int K(su) \Phi_n(ut) du + \int K(tu) \Phi_n(us) du \\ &\quad + \int \int K(su) K(tv) \Phi_n(uv) du dv \end{aligned}$$

et enfin

$$\Psi_n(s) = \Phi_n(s) + 2 \int K(su) \Phi_n(us) du + \int \int K(su) K(sv) \Phi_n(uv) du dv.$$

Posons

$$\begin{aligned} \Phi_n(s) - 1 &= \delta_n(s); & \Psi_n(s) - 1 &= \varepsilon_n(s) \\ \int K(su) \Phi_n(us) du &= \alpha_n(s) \\ \int \int K(su) K(sv) \Phi_n(uv) dudv &= \beta_n(s) \end{aligned}$$

alors

$$\varepsilon_n(s) = \delta_n(s) + 2\alpha_n(s) + \beta_n(s)$$

par hypothèse $\delta_n(s)$ tend en moyenne vers 0. Je dis qu'il en est de même de $\alpha_n(s)$; $\beta_n(s)$.

En effet, d'après la formule de SCHWARZ, on a

$$\alpha_n^2(s) \leq \left[\int K(su)^2 du \right] \cdot \left[\int \Phi_n(us)^2 du \right].$$

Mais la fonction positive

$$k(s) = \int K(su)^2 du$$

est bornée par hypothèse (voir § 2) dans l'intervalle (ab)

$$k(s) \leq M.$$

On a donc

$$\alpha_n^2(s) \leq M \int \Phi_n(us)^2 du$$

puis

$$\int \alpha_n^2(s) ds \leq M \int \int \Phi_n(us)^2 dudv$$

qui peut être rendue aussi petite qu'on le veut puisque $\Phi_n(us)$ tend en moyenne vers 0. Il résulte bien de là que $\alpha_n(s)$ tend en moyenne vers 0 dans l'intervalle (ab) . Remarquons qu'ici l'hypothèse que $K(st)$ est de carré intégrable par rapport à chacune des deux variables prises séparément joue un rôle essentiel — car $\alpha_n(s)$ ne tendrait pas forcément vers 0 en moyenne si $\int K(st)^2 dt$ n'était pas bornée par rapport à la variable s .

Passons à $\beta_n(s)$.

La formule de SCHWARZ donne ici

$$\beta_n^2(s) \leq \left[\int \int K(su)^2 K(sv)^2 dudv \right] \cdot \left[\int \int \Phi_n(uv)^2 dudv \right]$$

ou

$$\beta_n^2(s) \leq k^2(s) \int \int \Phi_n(uv)^2 dudv \leq M^2 \int \int \Phi_n(uv)^2 dudv$$

puis

$$\int \beta_n^2(s) ds \leq M^2 \int \int \Phi_n(uv)^2 dudv$$

puisque l'intervalle d'intégration vaut 1. De cette inégalité résulte comme plus haut que $\beta_n(s)$ tend en moyenne vers 0. L'inégalité précédente montre même que $\beta_n(s)$ tend vers 0 au sens ordinaire du mot dans l'intervalle (ab) .

En définitive $\varepsilon_n(s)$ se présente comme la somme de trois fonctions tendant respectivement en moyenne vers 0.

Sans qu'il soit besoin d'entrer dans le détail, il résulte de là que $\varepsilon_n(s)$ tend aussi en moyenne vers 0. On le voit aisément en raisonnant d'abord sur deux fonctions et s'appuyant sur l'inégalité évidente

$$\int [A + B]^2 ds \leq 2 \int A^2 ds + 2 \int B^2 ds$$

puis en raisonnant ensuite de proche en proche.

Par suite le système (ψ_i) est bien également dense et les rotations fonctionnelles conservent l'égalité densité des systèmes orthogonaux.

Une extension importante de la notion d'égalité densité a été donnée par M. Paul LÉVY. C'est ce que cet auteur appelle la notion de densité normale d'une suite de fonctions orthogonales.

Quand une telle suite (φ_i) est également dense, la fonction $\Phi_n(st)$, qui tend en moyenne vers 0 dans le carré $a < s < b$; $a < t < b$, et par suite dans tout domaine superficiel intérieur à ce carré, tend en moyenne vers 1 sur la bissectrice $s = t$. M. Paul LÉVY dit que la suite (φ_i) est normalement dense si de plus $\Phi_n(st)$ tend en moyenne vers 0 sur toute courbe tracée dans ce carré; sauf naturellement la bissectrice $s = t$, et sauf peut-être sur des parallèles aux axes.

Nous allons démontrer que toute rotation fonctionnelle transforme une suite orthogonale normée normalement dense en une suite de même espèce.

Soit $K(st)$ le noyau de rotation qui transforme la suite (φ_i) en la suite (ψ_i) . On a comme plus haut

$$\begin{aligned} \Psi_n(st) = \Phi_n(st) + \int K(su) \Phi_n(ut) du + \int K(tu) \Phi_n(us) du \\ + \int \int K(su) K(tv) \Phi_n(uv) dudv. \end{aligned}$$

On peut évidemment, sans changer la limite en moyenne de $\Phi_n(st)$ sur une courbe, s'arranger pour que cette courbe ait une tangente en chacun de ses points; et on peut toujours supposer ces courbes partagées en un nombre fini d'arcs AB satisfaisant aux conditions suivantes :

Cet arc AB est rencontré en un seul point par une parallèle à l'un des axes

(l'axe des t par exemple). Le long de l'arc, la pente de la tangente relativement à l'autre axe (celui des s) a une limite inférieure *non nulle*. La tangente pourra devenir parallèle à l'axe des t à l'une des extrémités de l'arc A ou B.

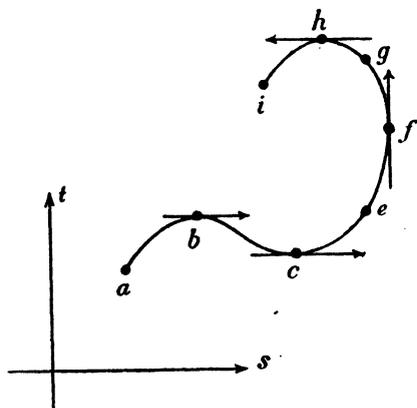


FIG. 1.

Par exemple si nous prenons un arc ayant la forme ci-contre, on le décompose en arcs partiels :

- (ab) Les conditions précédentes sont remplies (avec échange de s et t);
- (bc) idem;
- (ce) idem;
- (ef) idem (sans échange);
- (fg) idem (sans échange);
- (gh) idem (avec échange);
- (hi) idem; (*fig. 1*).

Pour qu'une telle décomposition soit possible, il faut que l'arc ne contienne aucune portion parallèle à l'un des axes.

Prenons donc un petit arc AB remplissant les conditions précitées plus haut et soient α le s de A; β celui de B

$$a \leq \alpha < \beta \leq b$$

et supposons que le long de cet arc $\Phi_n(st)$ converge en moyenne vers 0.

Je dis qu'il en est de même de $\Phi_n(st)$.

D'après les hypothèses faites, on peut définir l'axe AB par une relation

$$t = f(s)$$

où $f(s)$ est une fonction définie pour $\alpha \leq s \leq \beta$; admettant une dérivée bornée inférieurement en valeur absolue

$$|f'(s)| \geq h > 0.$$

Le long de AB on a

$$\begin{aligned} \Psi_n[s, f(s)] &= \Phi_n[s, f(s)] + \int K(su) \Phi_n[u, f(s)] du + \int K[f(s), u] \Phi_n(us) du \\ &+ \int \int K(su) K[f(s), v] \Phi_n(uv) dudv \end{aligned}$$

ou

$$\varepsilon_n(s) = \delta_n(s) + \alpha_n(s) + \beta_n(s) + \gamma_n(s)$$

en posant comme plus haut

$$\begin{aligned}\alpha_n(s) &= \int \mathbf{K}(su) \Phi_n[u, f(s)] du; & \beta_n(s) &= \int \mathbf{K}[f(s), u] \Phi_n(us) du \\ \gamma_n(s) &= \int \int \mathbf{K}(su) \mathbf{K}[f(s), v] \Phi_n(uv) du dv \\ \delta_n(s) &= \Phi_n[s, f(s)]; & \varepsilon_n(s) &= \Psi_n[s, f(s)].\end{aligned}$$

Par hypothèse $\delta_n(s)$ tend en moyenne vers 0 dans l'intervalle $(\alpha\beta)$. Nous allons montrer qu'il en est de même de $\alpha_n(s)$; $\beta_n(s)$; $\gamma_n(s)$; et par suite aussi de $\varepsilon_n(s)$.

Voyons-le d'abord pour $\beta_n(s)$ et $\gamma_n(s)$ où le raisonnement est le même que pour l'égalité.

La formule de Schwarz donne

$$\begin{aligned}\beta_n^2(s) &\leq \left[\int \mathbf{K}[f(s), u]^2 du \right] \left[\int \Phi_n(us)^2 du \right] \\ &= k[f(s)] \int \Phi_n(us)^2 du \leq M \int \Phi_n(us)^2 du\end{aligned}$$

car $f(s)$ reste compris entre a et b quand s varie entre α et β ; puis

$$\int_{\alpha}^{\beta} \beta_n^2(s) ds \leq M \int_{\alpha}^{\beta} ds \int_a^b \Phi_n(us)^2 du \leq M \int \int \Phi_n(us)^2 du ds$$

qui peut être rendue aussi petite qu'on le veut. Par suite $\beta_n(s)$ tend bien en moyenne vers 0.

On a ensuite par le même procédé

$$\gamma_n^2(s) \leq k(s)k[f(s)] \cdot \int \int \Phi_n(uv)^2 du dv \leq M^2 \int \int \Phi_n(uv)^2 du dv$$

qui peut être rendue aussi petite qu'on le veut. Donc $\gamma_n(s)$ tend vers 0 au sens ordinaire du mot quel que soit s dans l'intervalle $(\alpha\beta)$. Il tend par suite en moyenne vers 0 dans cet intervalle.

Passons maintenant à $\alpha_n(s)$. Le même procédé donne encore

$$\alpha_n^2(s) \leq \left[\int \mathbf{K}(su)^2 du \right] \cdot \left[\int \Phi_n[u, f(s)]^2 du \right] \leq M \int \Phi_n[u, f(s)]^2 du$$

on a ensuite

$$\int_{\alpha}^{\beta} \alpha_n^2(s) ds \leq M \int \int_{\mathbf{R}} \Phi_n[u, f(s)]^2 du ds$$

où R est le rectangle défini par les inégalités

$$a \leq u \leq b; \quad \alpha \leq s \leq \beta$$

faisons dans la 2^{ème} intégrale le changement de variable

$$t = f(s)$$

t varie de γ à δ ; avec $\gamma = f(\alpha)$; $\delta = f(\beta)$; comme cette deuxième intégrale est certainement positive et que $f'(s)$ garde un signe constant, on peut l'écrire

$$\int \int_{R'} \Phi_n^2[u, t] \frac{du dt}{|f'(s)|}$$

où R' est le rectangle défini par $a \leq u \leq b$; t compris entre γ et δ et on a

$$\int_{\alpha}^{\beta} \alpha_n^2(s) ds \leq M \int \int_{R'} \Phi_n(ut)^2 \frac{du dt}{|f'(s)|}$$

Mais tenant compte de la condition

$$|f'(s)| \geq h > 0$$

on a ensuite

$$\int_{\alpha}^{\beta} \alpha_n^2(s) ds \leq \frac{M}{h} \int \int_{R'} \Phi_n(ut)^2 du dt \leq \frac{M}{h} \int \int \Phi_n(ut)^2 du dt$$

qui peut être rendue aussi petite qu'on le veut. Donc, moyennant les hypothèses faites sur l'arc AB ; $\alpha_n(s)$ tend aussi en moyenne vers 0 sur cet axe. Le raisonnement s'achève ensuite comme pour l'égalité densité, et on voit de même que $\varepsilon_n(s)$ tend en moyenne vers 0 sur l'arc AB . D'une manière plus générale ce raisonnement prouve que sur un tel arc AB , $\Phi_n(st)$ et $\Psi_n(st)$ ont même limite en moyenne, car si cette limite en moyenne est $\lambda(s)$, il suffit de prendre dans le raisonnement précédent

$$\delta_n(s) = \Phi_n[s, f(s)] - \lambda(s); \quad \varepsilon_n(s) = \Psi_n[s, f(s)] - \lambda(s)$$

et il résulte bien de là que si la suite (φ_i) est normalement dense, il en est de même de la suite (ψ_i) .

Ceci a une conséquence importante. On sait en effet que d'après les travaux de MM. Paul Lévy et Gâteaux⁽¹⁾ le fait que les fonctions coordonnées soient ordonnées

⁽¹⁾ Voir Paul LÉVY, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, III^e partie; et R. GÂTEAUX, *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1919.

d'une manière également ou normalement dense, suivant les cas, joue un rôle important quand on veut définir dans l'espace fonctionnel certaines notions comme la valeur moyenne d'une fonctionnelle, ou plus spécialement le laplacien d'une fonctionnelle, le volume d'un domaine, la courbure d'une surface, etc. Les rotations fonctionnelles ne modifiant pas l'égalité ou la normale densité de la suite orthogonale des fonctions coordonnées, nous voyons que ces rotations laisseront pareillement invariantes les notions énumérées plus haut. D'une manière générale, une transformation linéaire fonctionnelle ayant cette propriété doit être une transformation d'égalité, c'est-à-dire laisser invariant le produit symbolique de deux fonctions. C'est bien le cas des rotations fonctionnelles, et ces rotations fournissent, à notre connaissance, le premier exemple d'une classe, d'ailleurs étendue, de transformations linéaires ayant la propriété précitée. Ce qui nous semble avoir une certaine importance. Il serait intéressant de rechercher s'il existe d'autres transformations linéaires fonctionnelles, ne rentrant pas dans le groupe de Fredholm, qui soient des transformations d'égalité, ou déplacements, et qui laissent invariantes les notions de Gâteaux.

4. — Extensions diverses de la notion de rotation fonctionnelle.

Avant d'appliquer les rotations fonctionnelles à la théorie des systèmes de fonctions orthogonales, il est nécessaire tout d'abord d'étendre un peu la définition des rotations fonctionnelles. Nous donnerons d'abord une première extension qui, sans nous être directement utile, nous paraît cependant avoir quelque intérêt.

L'idée est d'introduire un paramètre variable dans la définition.

Nous dirons que le noyau $K(st)$ est un noyau de rotation de paramètre ε , quand la relation

$$g(s) = f(s) + \varepsilon \int K(st) f(t) dt$$

est résolue inversement quelle que soit $f(s)$ par

$$f(s) = g(s) + \varepsilon \int K(ts) g(t) dt.$$

Les noyaux définis plus haut correspondent au cas où $\varepsilon = 1$.

Le calcul qui va déterminer ces noyaux que nous désignerons par la notation $K_\varepsilon(st)$ est entièrement identique à celui du § 2. On doit avoir comme à cet endroit

$$\Gamma(st, -\varepsilon) = -K(ts)$$

$\Gamma(st, \lambda)$ étant le noyau résolvant de $K(st)$.

On tire de là en passant aux résolvantes

$$\Gamma(st, \lambda - \varepsilon) = -\Gamma(ts, -\lambda)$$

puis posant

$$\lambda = \rho + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{et} \quad \Gamma(st, \lambda - \varepsilon) = \Gamma\left(st, \rho - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \Lambda(st, \rho)$$

où $\Lambda(st, \rho)$ est la résolvante du noyau $\Gamma\left(st, -\frac{\varepsilon}{2}\right) = h(st)$, on a la condition

$$\Lambda(st, \rho) = -\Lambda(ts, -\rho)$$

d'où l'on tire comme plus haut que $h(st)$ est symétrique gauche.

Par suite

$$K_\varepsilon(st) = \Lambda\left(st, +\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

est la valeur prise pour $\lambda = \frac{\varepsilon}{2}$ par la résolvante d'un noyau symétrique gauche $h(st)$. De même

$$K_\varepsilon(ts) = -\Lambda\left(st, -\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

valeur prise pour $\lambda = \frac{\varepsilon}{2}$ par la résolvante du noyau symétrique gauche $-h(st)$.

Ces noyaux ne diffèrent d'ailleurs pas en fait des noyaux de rotation de paramètre 1. Il suffit de remarquer que $\varepsilon K_\varepsilon(st)$ est un noyau de paramètre 1. D'ailleurs $\varepsilon \Lambda\left(st, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ est bien la résolvante pour $\lambda = \frac{1}{2}$ du noyau symétrique gauche $\varepsilon h(st)$. A cause de cela les noyaux $K_\varepsilon(st)$ ont toutes les propriétés des noyaux K . Remarquons encore que si $\varepsilon \rightarrow 0$; $\Lambda\left(st, \frac{\varepsilon}{2}\right) \rightarrow h(st)$ et K_ε devient un noyau symétrique gauche. On peut donc prendre comme rotations fonctionnelles infinitésimales les transformations linéaires

$$g(s) = f(s) + \varepsilon \int h(st) f(t) dt$$

où ε est infiniment petit, et $h(st)$ symétrique gauche. Ce résultat a déjà été rencontré dans un ordre d'idées tout différent par G. Kowalewsky⁽¹⁾.

Nous n'insisterons pas ici sur ces noyaux K_ε nous réservant d'y revenir s'il y a lieu.

(1) G. KOWALEWSKY, voir C. R., 1911, t. CLIII, pp. 1452-1454.

Une autre extension importante et qui nous sera utile est la suivante :

Nous dirons qu'un noyau $K(st)$ est « quasi de rotation » quand les fonctions de deux variables

$$K(st) + K(ts) + \int K(su) K(tu) du$$

et

$$K(st) + K(ts) + \int K(us) K(ut) du$$

sont presque partout nulles dans le carré : $a \leq s \leq b$; $a \leq t \leq b$.

Nous allons montrer qu'on obtient un noyau quasi de rotation en ajoutant à un noyau de rotation une fonction presque partout nulle dans le carré. Une telle fonction est une fonction $O(st)$ nulle pour tout point du carré sauf un ensemble de points \mathcal{E} de mesure superficielle nulle. Cet ensemble \mathcal{E} sera formé en général d'ensembles partiels ayant une mesure linéaire non nulle. Nous diviserons \mathcal{E} en deux ensembles \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 . \mathcal{E}_1 est composé uniquement d'ensembles \mathcal{E} de mesures linéaires nulles ou non, mais qui sont coupées par toute parallèle aux axes suivant un ensemble de mesure nulle.

\mathcal{E}_2 au contraire est uniquement composé d'ensembles rectilignes parallèles aux axes de mesure linéaire non nulle — à savoir une série d'ensembles parallèles à l'axe des t situés sur des droites d'abscisses

$$s_1, s_2, \dots, \text{ etc.},$$

comprises entre a et b ; et une série d'ensembles parallèles à l'axe des S situés sur des droites d'ordonnées

$$t_1, t_2, \dots, \text{ etc.},$$

comprises entre a et b .

D'ailleurs les ensembles des points s_i et t_j sont de mesures nulles, sans quoi \mathcal{E}_2 et par suite \mathcal{E} ne pourrait avoir une mesure superficielle nulle.

De même nous remplacerons la fonction $O(st)$ partout nulle sauf sur \mathcal{E} par

$$O(st) = O_1(st) + O_2(st)$$

où O_1 est partout nulle sauf sur \mathcal{E}_1 , et O_2 partout nulle sauf sur \mathcal{E}_2 .

Prenons maintenant un noyau de rotation $K(st)$ et considérons le noyau

$$\overline{K(st)} = K(st) + O(st)$$

et formons pour ce noyau les fonctions

$$\mathfrak{R}[\bar{K}] = \overline{K(st)} + \overline{K(ts)} + \int \overline{K(su)} \overline{K(tu)} du$$

et

$$\mathfrak{R}'[\bar{K}] = \overline{K(st)} + \overline{K(ts)} + \int \overline{K(us)} \overline{K(ut)} du$$

soit à former par exemple $\mathfrak{R}[\bar{K}]$; tenant compte de $\mathfrak{R}[K] = 0$, il vient

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}[\bar{K}] &= \Omega(st) = O_1(st) + O_1(ts) + O_2(st) + O_2(ts) \\ &+ \int K(su) O_1(tu) du + \int K(su) O_2(tu) du + \int O_1(su) K(tu) du + \int O_2(su) K(tu) du \\ &+ \int O_1(su) O_1(tu) du + \int O_1(su) O_2(tu) du + \int O_2(su) O_1(tu) du + \int O_2(su) O_2(tu) du \end{aligned}$$

prenons d'abord l'intégrale $\int K(su) O_1(tu) du$. Elle est nulle. Il faut en effet prendre comme champ d'intégration les points de \mathcal{E}_1 situés sur une parallèle à l'axe des t d'abscisse égale à t puisqu'il s'agit de $O_1(tu)$. Ces points formant par hypothèse un ensemble de mesure nulle l'intégrale est bien nulle. Il en est de même pour une raison analogue de toutes les intégrales où figure $O_1(st)$, et il reste

$$\Omega(st) = O_1(st) + O_2(st) + O_1(ts) + O_2(ts) + \omega_2(st)$$

avec

$$\omega_2(st) = \int K(su) O_2(tu) du + \int O_2(su) K(tu) du + \int O_2(su) O_2(tu) du.$$

Étudions $\omega_2(st)$; pour calculer $\int K(su) O_2(tu) du$, il faut prendre comme champ d'intégration une parallèle à l'une des t d'abscisse t . Si t n'a pas une des valeurs

$$t = s_i$$

sur cette parallèle $O_2(tu)$ est partout nulle, et l'intégrale est nulle. Au contraire, si $t = s_i$, $O_2(tu)$ ne sera pas nulle, et l'intégrale aura une certaine valeur non nulle sur les parallèles à l'axe des s d'ordonnées $t = s_i$. De même $\int O_2(su) K(tu) du$ n'a une valeur non nulle que sur une parallèle à l'axe des t d'abscisse

$$s = s_i.$$

De même enfin $\int O_2(su) O_2(tu) du$ n'est non nulle qu'aux points d'intersection de ces deux systèmes de parallèles.

En résumé, $\omega_2(st)$ est une fonction presque partout nulle, symétrique du type de O_1 . On obtient l'ensemble \mathcal{C}_2 sur lequel elle n'est pas nulle en prenant dans \mathcal{E}_2 l'ensemble \mathcal{E}_{2s} formé de droites parallèles à l'axe des t et en y joignant son symétrique par rapport à la bissectrice $s = t$.

De là résulte immédiatement que $\Omega(st)$ est une fonction presque partout nulle de la forme

$$\Omega(st) = \Omega_1(st) + \Omega_2(st)$$

avec

$$\begin{aligned} \Omega_1(st) &= O_1(st) + O_1(ts) \\ \Omega_2(st) &= O_2(st) + O_2(ts) + \omega_2(st). \end{aligned}$$

Ω_1 est du type de O_1 , et l'ensemble E_1 sur lequel elle n'est pas nulle s'obtient en prenant \mathcal{E}_1 et lui adjoignant son symétrique par rapport à la bissectrice $s = t$.

Ω_2 est du type de O_2 , et l'ensemble E_2 sur lequel elle n'est pas nulle s'obtient en prenant \mathcal{E}_2 et lui adjoignant son symétrique par rapport à la bissectrice $s = t$. Par suite, K est bien un noyau quasi de rotation, car le raisonnement que nous venons de faire pour $\mathcal{R}[\bar{K}]$ se répète sans modification pour $\mathcal{R}'[\bar{K}]$.

Inversement, étant donnée une fonction presque partout nulle $\Omega(st)$, on peut se proposer de trouver les noyaux de rotations et quasi de rotations correspondants. Soient donc comme plus haut

$$\Omega(st) = \Omega_1(st) + \Omega_2(st)$$

Ω_1 et Ω_2 sont connus. Le noyau de rotation $K(st)$ est arbitraire et il suffit de déterminer les fonctions presque partout nulles O_1 et O_2 par la condition

$$\mathcal{R}[K + O_1 + O_2] = \Omega_1 + \Omega_2$$

pour déterminer O_2 nous avons la condition unique

$$\Omega_2(st) = O_2(st) + O_2(ts) + \omega_2(st).$$

Considérons les parallèles aux axes sur lesquelles Ω_2 n'est pas nulle. Ω_2 étant symétrique, elles forment un réseau symétrique par rapport à la bissectrice dont les abscisses ou les ordonnées sont des nombres

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots, \text{ etc.,}$$

compris entre $(a \text{ et } b)$ et formant dans (ab) un ensemble de mesure nulle. (La notation n'est pas correcte; l'ensemble des α peut ne pas être dénombrable; nous l'employons pour plus de commodité).

Et on a sur ces parallèles

$$\Omega_2[x_i t] = \varphi_i(t); \quad \Omega_2[s \alpha_i] = \varphi_i(s)$$

où les φ_i sont données. On a de plus

$$\varphi_i(\alpha_j) = \varphi_j(\alpha_i) = \Omega_2[x_i \alpha_j] = \Omega_2[x_j \alpha_i]$$

Sur certaines de ces parallèles la fonction O_2 n'est pas nulle. Nous supposons plus généralement que

$$O_2[x_i t] = f_i(t); \quad O_2[s \alpha_i] = g_i(s)$$

certaines des fonctions f ou g pouvant être partout nulles.

De plus

$$O_2[x_i \alpha_j] = f_i(\alpha_j) = g_j(\alpha_i).$$

On a ensuite :

pour $s \neq \alpha_i$; $t \neq \alpha_j$

$$O_2(st) + O_2(ts) = 0$$

pour $s \neq \text{des } \alpha$; $t = \alpha_i$

$$O_2(s \alpha_i) + O_2(\alpha_i s) = f_i(s) + g_i(s)$$

pour $s = \alpha_i$; $t \neq \text{des } \alpha$

$$O_2(\alpha_i t) + O_2(t \alpha_i) = f_i(t) + g_i(t)$$

pour $s = \alpha_i$; $t = \alpha_j$

$$O_2(\alpha_i \alpha_j) + O_2(\alpha_j \alpha_i) = f_i(\alpha_j) + f_j(\alpha_i) = g_i(\alpha_j) + g_j(\alpha_i) = f_i(\alpha_j) + g_i(\alpha_j) = f_j(\alpha_i) + g_j(\alpha_i).$$

De même la valeur de $\omega_2(st)$ est

pour $s \neq \alpha_i$; $t \neq \alpha_j$

$$\omega_2(st) = 0$$

pour $s \neq \text{des } \alpha$; $t = \alpha_i$

$$\omega_2(s \alpha_i) = \int K(su) f_i(u) du$$

pour $s = \alpha_i$; $t \neq \text{des } \alpha$

$$\omega_2(\alpha_i t) = \int K(tu) f_i(u) du$$

pour $s = \alpha_i$; $t = \alpha_j$

$$\omega_2(\alpha_i \alpha_j) = \int K(\alpha_i u) f_j(u) du + \int K(\alpha_j u) f_i(u) du + \int f_i(u) f_j(u) du$$

d'une manière analogue introduisons la fonction

$$\Pi(st) = \mathfrak{R}'[K + O_1 + O_2] = \Pi_1(st) + \Pi_2(st)$$

qui, d'après sa formation, a nécessairement le même ensemble E de mesure superficielle nulle, sur lequel elle n'est pas nulle. Sur le réseau symétrique

$$s = \alpha_i; \quad t = \alpha_j$$

$\Pi_2(st)$ prend les valeurs données

$$\Pi_2(\alpha_i t) = \psi_i(t); \quad \Pi_2(s \alpha_i) = \psi_i(s)$$

avec

$$\psi_i(\alpha_j) = \psi_j(\alpha_i)$$

la valeur de la fonction

$$\mathfrak{O}_2(st) = \int K(us) O_2(ut) du + \int O_2(us) K(ut) du + \int O_2(us) O_2(ut) du$$

est pour $s \neq \alpha_i; t \neq \alpha_j$

$$\mathfrak{O}_2(st) = 0$$

pour $s = \alpha_i; t \neq \text{des } \alpha$

$$\mathfrak{O}_2(\alpha_i t) = \int K(ut) g_i(u) du$$

pour $s \neq \text{des } \alpha; t = \alpha_i$

$$\mathfrak{O}_2(s \alpha_i) = \int K(us) g_i(u) du$$

pour $s = \alpha_i; t = \alpha_j$

$$\mathfrak{O}_2(\alpha_i \alpha_j) = \int K(u \alpha_i) g_j(u) du + \int K(u \alpha_j) g_i(u) du + \int g_i(u) g_j(u) du$$

d'où en définitive pour déterminer les f et les g deux séries de systèmes d'équations :

$$(a) \quad f_i(t) + g_i(t) + \int K(tu) f_i(u) du = \varphi_i(t)$$

et

$$(b) \quad f_i(\alpha_j) + f_j(\alpha_i) + \int K(\alpha_i u) f_j(u) du + \int K(\alpha_j u) f_i(u) du + \int f_i(u) f_j(u) du = \varphi_i(\alpha_j)$$

puis

$$(c) \quad f_i(t) + g_i(t) + \int K(ut) g_i(u) du = \psi_i(t)$$

et

$$(d) \quad g_j(\alpha_i) + g_i(\alpha_j) + \int K(u\alpha_i) g_j(u) du + \int K(u\alpha_j) g_i(u) du + \int g_i(u) g_j(u) du = \psi_i(\alpha_j)$$

avec de plus les conditions

$$(e) \quad f_i(\alpha_j) = g_j(\alpha_i).$$

Occupons-nous d'abord des conditions (a) et (c) en tenant compte de ce que K est un noyau de rotation. Alors (a) donne

$$(f) \quad f_i(t) = \varphi_i(t) - g_i(t) + \int K(ut) [\varphi_i(u) - g_i(u)] du$$

en reportant dans le (c), g_i disparaît et il vient

$$(g) \quad \psi_i(t) = \varphi_i(t) + \int K(ut) \varphi_i(u) du$$

ou

$$(h) \quad \varphi_i(t) = \psi_i(t) + \int K(tu) \psi_i(u) du.$$

Les fonctions φ_i et ψ_i ou Ω_i et Π_i ne sont donc pas indépendantes et leur liaison dépend du noyau $K(st)$. Cette relation pourra s'écrire

$$(i) \quad \Pi_i(st) = \Omega_i(st) + \int K(ut) \Omega_i(su) du.$$

Au sujet des relations (b), (d), (e), il faut convenir qu'aux points (α_i) les fonctions f_i , g_i , φ_i , ψ_i , sont discontinues et que les formules (f), (g), (h), (i), ne sont plus valables. D'ailleurs ces points forment un ensemble de mesure nulle dans le champ de variation de ces fonctions. On peut donc y modifier arbitrairement leur valeur sans changer celles des intégrales où elles entrent.

Si on se donne les fonctions (φ_i) et leurs discontinuités aux points (α) , la formule (g) détermine les fonctions (ψ_i) sauf leurs discontinuités aux points (α) . Partons alors de fonctions (\bar{g}_i) arbitraires et égales aux fonctions (g_i) sauf aux points (α) . Dans les intégrales on peut remplacer (g_i) par (\bar{g}_i) . Alors on aura

$$f_i(t) = \varphi_i(t) - \bar{g}_i(t) + \int K(ut) [\varphi_i(u) - \bar{g}_i(u)] du$$

qui détermine $f_i(t)$ sauf aux points (α) .

Il reste à déterminer f_i ; g_i ; ψ_i aux points (α) . On utilise pour cela les conditions (b); (d); (e) dans lesquelles le calcul des intégrales est possible puisqu'on connaît f_i et g_i à un ensemble de mesure nulle près. Alors (b) nous fait connaître $f_i(\alpha_j) + f_j(\alpha_i)$ égale à $g_i(\alpha_j) + g_j(\alpha_i)$ d'après (e). Donc (d) permet de déterminer $\psi_i(\alpha_j) = \psi_j(\alpha_i)$; en résumé, connaissant les (φ_i) et $K(st)$; les (ψ_i) sont entièrement déterminées; les (g_i) sont arbitraires; les (f_i) sont déterminées sauf aux points (α_i) qui sont des points de discontinuité où on connaît seulement la somme

$$f_i(\alpha_j) + f_j(\alpha_i) = g_i(\alpha_j) + g_j(\alpha_i).$$

C'est tout ce qu'on peut dire sur $O_i(st)$.

Pour $O_i(st)$ on connaît

$$O_i(st) + O_i(ts) = \Omega_i(st).$$

En somme, avec la donnée unique de $\Omega(st)$, $\bar{K}(st)$ est très largement indéterminée, puisque le noyau de rotation $K(st)$ est entièrement arbitraire et que le noyau complémentaire $O(st)$ n'est pas entièrement défini. Mais si on se donne simultanément $\Omega(st)$ et $\Pi(st)$, c'est-à-dire les fonctions (φ_i) et (ψ_i) le noyau de rotation $K(st)$ est d'abord assujéti aux conditions en nombre infini

$$\psi_i(t) = \varphi_i(t) + \int K(ut) \varphi_i(u) du.$$

La détermination de K est alors assez difficile. Elle n'est même pas toujours possible. Nous aurons l'occasion de revenir à ce type de problème prochainement. Remarquons cependant qu'une condition nécessaire pour que le problème soit possible est que

$$[\varphi_i \cdot \varphi_j] = [\psi_i \cdot \psi_j]$$

puisque le noyau $K(st)$ est de rotation.

Nous terminerons ce paragraphe en montrant que les noyaux quasi de rotation ont les principales propriétés des noyaux de rotation.

Reprenant les notations du § 3 et désignant maintenant par K, H, L , des noyaux quasi de rotation, la formule (11) montre immédiatement que si $\mathcal{R}[H]$ et $\mathcal{R}[K]$ sont presque partout nuls, il en est de même de $\mathcal{R}[L]$.

En effet $\int H(su) \mathcal{R}[K(ut)] du$ est nul sauf sur les droites $t = t_i$ sur lesquelles $\mathcal{R}[K(ut_i)]$ n'est pas nulle sur un ensemble de mesure non nulle; et ces droites forment un ensemble de mesure superficielle nulle. De même pour $\int H(tu) \mathcal{R}[K(us)];$ enfin $\int \int H(su) H(tv) \mathcal{R}[K(vu)] dudv$ est nulle.

De même les formules (12) montrent qu'ici encore

$$[\varphi_1, \varphi_2] = [\psi_1, \psi_2]$$

car

$$\iint \mathfrak{R}[\mathbf{K}(st)] \varphi_1(s) \varphi_2(t) ds dt$$

est nulle. Et les conséquences de cette importante propriété sont encore vraies (conservation des systèmes orthogonaux complets, et des systèmes orthogonaux normés également ou normalement denses).

En ce qui concerne la propriété de définition des noyaux de rotation, voyons ici ce qui se passe. Soient $\mathbf{K}(st)$ un noyau quasi de rotation et $f(s)$ une fonction quelconque, puis

$$\varphi(s) = f(s) + \int \mathbf{K}(st) f(t) dt$$

et ensuite

$$\varphi(s) + \int \mathbf{K}(ts) \varphi(t) dt = f(s) + \int \mathfrak{R}[\mathbf{K}(st)] f(t) dt = \psi(s)$$

et $0(s) = \int \mathfrak{R}[\mathbf{K}(st)] f(t) dt$ est nulle sauf pour les valeurs $s = s_i$ abscisses des droites sur lesquelles l'ensemble des points où $\mathfrak{R}[\mathbf{K}(st)]$ n'est pas nulle, n'a pas une mesure nulle. Ces valeurs s_i forment dans l'intervalle (ab) un ensemble de mesure nulle, sans quoi $\mathfrak{R}[\mathbf{K}(st)]$ ne serait pas nulle sur un ensemble de mesure superficielle non nulle; par suite $\psi(s)$ est presque partout égale à $f(s)$ et n'en diffère donc pas dans l'espace des fonctions de carré sommable puisque sa distance à $f(s)$ est nulle.

A l'avenir nous ne distinguerons plus dans le langage les noyaux de rotation des noyaux quasi de rotation.

5. — Rapports de la théorie des noyaux de rotation avec les systèmes orthogonaux. Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un noyau soit de rotation. Systèmes orthogonaux semblablement ordonnés.

Considérons un système orthogonal normé de fonctions

$$\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots, \varphi_n(s), \dots, \text{ etc.},$$

et faisons-lui subir une rotation fonctionnelle de noyau $\mathbf{K}(st)$. Nous obtenons un

nouveau système orthogonal normé

$$\psi_1(s), \psi_2(s), \dots, \psi_n(s), \dots, \text{ etc.}$$

Si l'un est complet, l'autre est aussi complet.

Inversement, partons d'un système orthogonal normé *complet* (φ_i) nous avons le théorème suivant :

Pour qu'un noyau $K(st)$ soit de rotation ou de quasi rotation, il faut et il suffit que la transformation de Fredholm

$$\psi = K[\varphi]$$

ou

$$\psi(s) = \varphi(s) + \int K(st) \varphi(t) dt$$

appliquée à chacune des fonctions du système (φ_i) donne un système de fonctions (ψ_i) orthogonal et normé et qu'inversement la transformation de Fredholm

$$\varphi = K^{-1}[\psi]$$

ou

$$\varphi(s) = \psi(s) + \int K(ts) \psi(t) dt$$

appliquée au système (ψ_i) donne un système de fonctions (λ_i) avec

$$\lambda_i = \varphi_i + o_i$$

où o_i est presque partout nulle.

Nous nous appuierons sur ce qu'une transformation de Fredholm telle que

$$\psi = K[\varphi]$$

est bornée dans l'espace des fonctions de carré sommable. On a en effet

$$[\psi^2] = [\varphi^2] + \iint \mathcal{R}'[K(st)] \varphi(s) \varphi(t) ds dt$$

avec comme d'habitude

$$\mathcal{R}'[K(st)] = K(ts) + K(st) + \int K(us) K(ut) du$$

et on voit sans difficulté que si

$$\int \int K(st)^2 ds dt \leq M$$

de même $\int \int \mathcal{R}'[K(st)]^2 ds dt$ est aussi bornée en fonction de M .

(On trouve exactement

$$\int \int \mathcal{R}'[K(st)]^2 ds dt \leq [3M + 2M^{\frac{3}{2}} + M^2])$$

de là résulte, d'après Schwarz

$$\left| \int \int \mathcal{R}'[K(st)] \varphi(s) \varphi(t) ds dt \right| \leq [3M + 2M^{\frac{3}{2}} + M^2]^{\frac{1}{2}} [\varphi^2]$$

puis enfin

$$[\varphi^2] \leq \{ 1 + [3M + 2M^{\frac{3}{2}} + M^2]^{\frac{1}{2}} \} [\varphi^2]$$

de là résulte en particulier que si φ est presque partout nulle, il en est de même de ψ . Ceci posé, supposons donc que l'on ait en désignant par (φ_i) et (ψ_i) deux systèmes orthogonaux normés, (φ_i) étant de plus complet :

$$\begin{aligned} \psi_i &= K[\varphi_i] \\ \varphi_i + o_i &= K^{-1}[\psi_i] \end{aligned}$$

à toute fonction

$$\Phi_n(s) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(s)$$

où les α_i sont des constantes correspond alors

$$\Psi_n(s) = K[\Phi_n] = \sum_{i=1}^n \alpha_i \psi_i(s)$$

et on a inversement

$$K^{-1}[\Psi_n] = \sum_{i=1}^n \alpha_i K^{-1}[\psi_i] = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\varphi_i + o_i) = \Phi_n(s) + O_n(s)$$

où O_n est presque partout nulle.

Si Φ_n converge en moyenne vers Φ , Ψ_n converge en moyenne vers Ψ avec

$$\Psi = K[\Phi]$$

car

$$\Psi - \Psi_n = K[\Phi - \Phi_n]$$

et d'après la remarque préliminaire

$$\int [\Psi - \Psi_n]^2 ds \leq \rho \int [\Phi - \Phi_n]^2 ds$$

où ρ est une constante qui ne dépend que du noyau K ; dès lors la démonstration s'achève sans peine.

Soit donc $f(s)$ une fonction quelconque de carré sommable dont les coefficients de FOURIER relativement au système complet (φ_i) sont

$$\alpha_i = [\varphi_i \cdot f]$$

alors la fonction

$$\Phi_n(s) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(s)$$

est convergente en moyenne et on peut prendre $f(s)$ pour sa limite en moyenne, puisque (φ_i) est complet.

Puis

$$\Psi_n(s) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \psi_i(s) = K[\Phi_n]$$

converge aussi en moyenne, et on peut prendre pour sa limite en moyenne

$$g(s) = K[f].$$

Mais nous avons aussi

$$X_n(s) = K^{-1}[\Psi_n(s)] = \Phi_n(s) + O_n(s)$$

et comme la transformation de Fredholm de noyau $K(ts)$ est aussi bornée, $\Psi_n(s)$ ayant pour limite en moyenne $g(s)$, $X_n(s)$ sera aussi convergent en moyenne, et on pourra prendre pour sa limite en moyenne

$$h(s) = K^{-1}[g(s)]$$

comme d'ailleurs

$$X_n(s) = \Phi_n(s) + O_n(s)$$

que $\Phi_n(s)$ tend en moyenne vers $f(s)$, et que $O_n(s)$ a pour limite en moyenne une fonction presque partout nulle; nous voyons que $h(s)$ et $f(s)$ ne peuvent différer que par une fonction presque partout nulle.

Il résulte immédiatement de là et de ce que nous avons vu au paragraphe précédent que $K(st)$ et aussi $K(ts)$ ne peuvent être que des noyaux quasi de rotation. Par suite, le système (ψ_i) est complet.

Nous allons maintenant transformer ce résultat et arriver à un autre caractère important des noyaux de rotation et quasi de rotation.

Reprenons un tel noyau $K(st)$; et un système *complet* de fonctions orthogonales et normées (φ_i) , et introduisons les coefficients de FOURIER

$$A_j^i = \iint K(st) \varphi_i(s) \varphi_j(t) ds dt.$$

La série double

$$\sum_{ij} [A_j^i]^2$$

et convergente et la série

$$\sum_{ij} A_j^i \varphi_i(s) \varphi_j(t)$$

converge en moyenne et *absolument* vers $K(st)$.

Exprimons à l'aide des coefficients A_j^i que $K(st)$ est de rotation. On peut procéder de deux manières : écrire que $K(st)$ est de rotation, ou que $K(ts)$ est de rotation.

L'application du théorème précédent conduit à écrire avec la première manière que les fonctions

$$\psi_i = K[\varphi_i]$$

forment un système orthogonal normé, et que

$$\varphi_i = K^{-1}[\psi_i]$$

à une fonction presque partout nulle près.

Avec la seconde manière, on est conduit à écrire que les fonctions

$$\zeta_i = K^{-1}[\varphi_i]$$

forment un système orthogonal et normé et que

$$\varphi_i = K[\zeta_i]$$

à une fonction presque partout nulle près.

Prenons la première manière et calculons les coefficients de FOURIER de ψ_i par rapport au système (φ) . On a

$$[\psi_i \cdot \varphi_j] = [\varphi_i \cdot \varphi_j] + \iint \mathbf{K}(st) \varphi_i(t) \varphi_j(s) ds dt = \varepsilon_{ij} + \mathcal{A}_{ij}^j$$

avec

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_i = 0 \quad \text{si } i \neq j; \quad \text{et } 1 \quad \text{si } i = j.$$

Nous poserons

$$\mathcal{B}_j^i = \mathcal{A}_{ij}^j + \varepsilon_{ij}$$

et on a

$$[\psi_i \cdot \varphi_k] = \mathcal{B}_i^k$$

pour exprimer que (ψ_i) est orthogonal et normé, et suffit d'écrire que

$$[\psi_i \cdot \psi_j] = \varepsilon_{ij}.$$

Mais (φ_i) étant complet, on a

$$[\psi_i \cdot \psi_j] = \sum_k [\psi_i \cdot \varphi_k] [\psi_j \cdot \varphi_k].$$

Nous avons donc les conditions

$$\sum_k \mathcal{B}_i^k \mathcal{B}_j^k = \varepsilon_{ij}.$$

Exprimons maintenant que

$$\varphi_i = \mathbf{K}^{-1}[\psi_i]$$

à une fonction presque partout nulle près.

D'une manière générale, si

$$\Psi = \mathbf{K}[\Phi]$$

proposons-nous de calculer les $[\Psi \cdot \varphi_i]$ en fonction des $[\Phi \cdot \varphi_i]$. On a

$$[\Psi \cdot \varphi_i] = [\Phi \cdot \varphi_i] + \iint \mathbf{K}(st) \Phi(t) \varphi_i(s) ds dt$$

posons

$$\theta_i(t) = \iint \mathbf{K}(st) \varphi_i(s) ds$$

on a

$$[\theta_i \cdot \varphi_k] = \iint \mathbf{K}(st) \varphi_i(s) \varphi_k(t) ds dt = \mathcal{A}_{ik}^i$$

puis

$$\int \int \mathbf{K}(st) \Phi(t) \varphi_i(s) ds dt = [\theta_i \cdot \Phi] = \sum_k \mathcal{A}_k^i [\Phi \cdot \varphi_k]$$

puisque (φ_i) est complet. D'où

$$[\Psi \cdot \varphi_i] = [\Phi \cdot \varphi_i] + \sum_k \mathcal{U}_k^i [\Phi \cdot \varphi_k] = \sum_k \mathcal{B}_k^i [\Phi \cdot \varphi_k].$$

De là, même manière si

$$\Psi = \mathbf{K}^{-1}[\Phi].$$

On aura

$$[\Psi \cdot \varphi_i] = \sum_k \mathcal{B}_i^k [\Phi \cdot \varphi_k]$$

car \mathbf{K}^{-1} se déduit de \mathbf{K} par échange des variables ou des indices. Faisons donc

$$\Phi = \psi_i; \quad \Psi = \varphi_i$$

il vient

$$[\varphi_i \cdot \varphi_j] = \sum_k \mathcal{B}_j^k [\psi_i \cdot \varphi_k] = \sum_k \mathcal{B}_i^k \mathcal{B}_j^k.$$

d'où la condition

$$\varepsilon_{ij} = \sum_k \mathcal{B}_i^k \mathcal{B}_j^k$$

identique à la précédente.

Un calcul tout analogue donne, en écrivant que \mathbf{K} est de rotation ou de quasi rotation par la seconde manière

$$\varepsilon_{ij} = \sum_k \mathcal{B}_k^i \mathcal{B}_k^j$$

et il résulte de ce qui précède que ces deux conditions sont équivalentes.

Donnons une autre interprétation de ces conditions et reprenons les quantités déjà employées plusieurs fois :

$$\mathfrak{R}[\mathbf{K}(st)] = \mathbf{K}(st) + \mathbf{K}(ts) + \int \mathbf{K}(su) \mathbf{K}(tu) du$$

$$\mathfrak{R}[\mathbf{K}(ts)] = \mathbf{K}(ts) + \mathbf{K}(st) + \int \mathbf{K}(us) \mathbf{K}(ut) du$$

et calculons les coefficients de Fourier de l'une d'entre elles par rapport au système (φ_i) . De $\mathfrak{R}[\mathbf{K}(st)]$ par exemple, il vient

$$\int \int \mathbf{K}(st) \varphi_i(s) \varphi_j(t) ds dt = \mathfrak{A}^i_j$$

$$\int \int \mathbf{K}(ts) \varphi_i(s) \varphi_j(t) ds dt = \mathfrak{A}^j_i$$

puis en posant comme plus haut

$$\int \mathbf{K}(su) \varphi_i(s) ds = \theta_i(u), \quad \int \mathbf{K}(tu) \varphi_j(t) dt = \theta_j(u)$$

$$\int \int \int \mathbf{K}(su) \mathbf{K}(tu) \varphi_i(s) \varphi_j(t) ds dt du = \int \theta_i(u) \theta_j(u) du = \sum_k [\theta_i \cdot \varphi_k] [\theta_j \cdot \varphi_k].$$

Or

$$[\theta_i \cdot \varphi_k] = \mathfrak{A}^i_k, \quad [\theta_j \cdot \varphi_k] = \mathfrak{A}^j_k$$

et enfin

$$\int \int \mathfrak{R}[\mathbf{K}(st)] \varphi_i(s) \varphi_j(t) ds dt = \mathfrak{A}^i_j + \mathfrak{A}^j_i + \sum_k \mathfrak{A}^i_k \mathfrak{A}^j_k$$

introduisons les \mathfrak{B}^i_j ; la quantité précédente prend la forme

$$\mathfrak{B}^i_j + \mathfrak{B}^j_i - 2\varepsilon_{ij} + \sum_k \mathfrak{B}^i_k \mathfrak{B}^j_k - \mathfrak{B}^i_j - \mathfrak{B}^j_i + \sum_k \varepsilon_{ik} \varepsilon_{jk} = -\varepsilon_{ij} + \sum_k \mathfrak{B}^i_k \mathfrak{B}^j_k.$$

De même on trouve pour coefficient de Fourier de $\mathfrak{R}[\mathbf{K}(ts)]$ relativement à $\varphi_i(s) \varphi_j(t)$

$$-\varepsilon_{ij} + \sum_k \mathfrak{B}^k_i \mathfrak{B}^k_j$$

et ces coefficients sont bien symétriques en i et en j .

Si $\mathbf{K}(st)$ est quasi de rotation, ces quantités sont toutes nulles et on retrouve bien les conditions

$$\sum_k \mathfrak{B}^k_i \mathfrak{B}^k_j = \sum_k \mathfrak{B}^i_k \mathfrak{B}^j_k = \varepsilon_{ij}$$

qui sont bien équivalentes puisque

$$\mathfrak{R}[\mathbf{K}(st)] \quad \text{et} \quad \mathfrak{R}[\mathbf{K}(ts)]$$

sont presque partout nulles simultanément d'après leur origine.

Nous voyons donc que les \mathcal{B}_j^i forment un tableau doublement infini qui est orthogonal et normé, ou de Schmidt dans le sens des lignes comme dans le sens des colonnes. C'est donc un tableau complet.

De plus, les \mathcal{A}_j^i sont assujettis à la condition que la série double

$$\sum_{ij} [\mathcal{A}_{ij}^i]^2$$

converge.

Passons aux \mathcal{B}_j^i et faisons la somme de cette série par lignes; ce qui est correct puisque les termes en sont positifs. On a

$$\sum_j [\mathcal{B}_j^i - \varepsilon_{ij}]^2 = \sum_j [\mathcal{B}_j^i]^2 - 2\mathcal{B}_i^i + 1 = 2[1 - \mathcal{B}_i^i]$$

puisque le tableau est orthogonal et normé. Nous voyons donc que la série simple à termes positifs

$$\sum_i [1 - \mathcal{B}_i^i]$$

converge; c'est nécessaire et suffisant pour que $\sum_{ij} [\mathcal{A}_{ij}^i]^2$ converge.

Remarquons d'ailleurs que les

$$\mathcal{B}_j^i = [\varphi_i \cdot \psi_j]$$

ne sont autres que les cosinus à deux indices qui repèrent le système des ψ_i relativement au système des φ_i .

Nous voyons qu'ils sont soumis à trois conditions :

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_k \mathcal{B}_k^i \mathcal{B}_k^j = \varepsilon_{ij} \\ \sum_k \mathcal{B}_k^i \mathcal{B}_k^j = \varepsilon_{ij} \end{array} \right.$$

$$(b) \quad \sum_i [1 - \mathcal{B}_i^i] \text{ convergent.}$$

Les conditions (a) ne font qu'exprimer que l'un des systèmes est orthogonal et normé en tenant compte de ce que l'autre est fermé.

Nous exprimerons la condition (b) en disant que *les deux systèmes sont semblablement ordonnés*.

Toutes les propriétés précédentes se résument dans le théorème suivant qui leur est une sorte de réciproque :

Quand deux systèmes orthogonaux normés (φ_i) et (ψ_i) , dont l'un est complet, sont semblablement ordonnés, l'autre est aussi complet et on peut passer de l'un à l'autre par une rotation ou une quasi rotation fonctionnelle dont le noyau est déterminé à un ensemble de mesure superficielle nulle près. Cette condition d'ordre semblable est nécessaire et suffisante, pourvu que l'un des systèmes soit supposé complet.

Supposons (φ_i) complet. La condition est nécessaire comme il résulte des calculs précédents. Montrons qu'elle est suffisante. D'abord (φ_i) étant complet, les \mathcal{B}_j^i vérifient les conditions

$$\sum_k \mathcal{B}_i^k \mathcal{B}_j^k = \varepsilon_{ij}$$

qui expriment que

$$[\psi_i \cdot \psi_j] = \varepsilon_{ij}$$

puis les deux systèmes étant semblablement ordonnés: $\sum_{ij} [\mathcal{A}_{ij}^i]^2$ converge; et

$\sum_{ij} \mathcal{A}_{ij}^i \varphi_i(s) \varphi_j(t)$ converge en moyenne vers une fonction $K(st)$ qui vérifie les conditions :

$$\int \int K(st) \varphi_i(s) \varphi_j(t) ds dt = \mathcal{A}_{ij}^i$$

et qui est déterminée à un ensemble de mesure superficielle nulle près.

Si nous calculons les coefficients de Fourier de $\mathcal{R}[K(st)]$ par la méthode indiquée plus haut; méthode valable ici car elle repose sur ce que (φ_i) est complet, et sur la valeur des \mathcal{A}_{ij}^i ; nous trouvons que ces coefficients sont tous nuls, à cause de

$$\sum_k \mathcal{B}_i^k \mathcal{B}_j^k = \varepsilon_{ij};$$

donc $K(st)$ ainsi construit est bien de rotation. De plus le coefficient de Fourier de

$$\varphi_j(s) + \int K(st) \varphi_j(t) dt$$

relativement à $\varphi_i(s)$ est

$$\mathcal{A}_{ij}^i + \varepsilon_{ij} = \mathcal{B}_j^i$$

par suite, comme (φ_i) est complet, cette fonction

$$\varphi_j(s) + \int K(st) \varphi_j(t) dt$$

est presque partout égale à $\psi_j(s)$ et n'en diffère pas du point de vue de l'espace fonctionnel des fonctions de carré sommable. Et le noyau de rotation ainsi construit applique bien le système (φ_i) sur le système (ψ_i) avec correspondance des fonctions de même indice. Par suite (ψ_i) est bien complet.

On peut donner aussi de ce théorème l'énoncé suivant qui traduit ce résultat du point de vue de la théorie des tableaux orthogonaux infinis :

Si un tel tableau d'éléments \mathcal{B}_j^i est un tableau orthogonal normé dans le sens des lignes par exemple, et de plus tel que la série formée avec ses termes principaux

$$\sum_i [1 - \mathcal{B}_i^i]$$

converge; ce tableau est orthogonal normé dans le sens des colonnes, et complet.

Autrement dit, la condition (b) et l'une des conditions (a) entraînent l'autre.

Si le système (φ_i) est de plus également ou normalement dense, il en sera de même du système (ψ_i) .

Remarquons que si deux systèmes (φ_i) et (ψ_i) sont semblablement ordonnés, ils le seront encore si l'on dérange dans chaque système un nombre fini de fonctions, ce qui ne fera que modifier un nombre fini de termes de la série

$$\sum_i (1 - \mathcal{B}_i^i).$$

Tout ceci nous permet enfin de donner une autre forme au noyau de rotation $K(st)$.

Remarquons en effet que

$$\sum_j \mathcal{B}_i^j \varphi_j(s)$$

converge en moyenne vers $\psi_i(s)$; tenant compte de

$$\mathcal{B}_i^j = \mathcal{A}_i^j + \varepsilon_{ij}$$

nous voyons que

$$\sum \mathcal{A}_i^j \varphi_j(s)$$

converge en moyenne vers $\psi_i(s) - \varphi_i(s)$; mais $K(st)$ est la limite en moyenne de

$$\sum_{ij} A_{ij}^t \varphi_i(s) \varphi_j(t)$$

quelle que soit la manière dont on fasse la sommation. Nous voyons donc qu'on peut prendre pour $K(st)$ la limite en moyenne de

$$\sum_i \varphi_i(t) [\psi_i(s) - \varphi_i(s)]$$

On pourrait prendre aussi bien la limite en moyenne de

$$\sum_i \varphi_i(s) [\zeta_i(t) - \varphi_i(t)]$$

en posant comme plus haut

$$\zeta_i = K^{-1}[\varphi_i].$$

Il résulte aussi du théorème précédent qu'un système incomplet (ψ_i) ne peut être semblablement ordonné à un système complet (φ_i) .

La question qui se pose maintenant est la suivante : *Étant donnés deux systèmes complets (φ_i) et (ψ_i) , est-il possible de les ordonner semblablement?*

La réponse est négative. Ceci tient à ce qu'il existe, ainsi que l'a montré M. Paul LÉVY (cf. *Traité d'analyse fonctionnelle*), des systèmes orthogonaux qui ne sont jamais également denses quel que soit l'ordre dans lequel on les range. Il est bien clair en effet qu'un tel système (ψ_i) ne peut être ordonné d'une manière semblable à un système (φ_i) qu'on peut rendre également dense. Supposons un tel ordre réalisé. Il existe alors un noyau de rotation $K(st)$ permettant de passer de l'un à l'autre. Ordonnons (φ_i) d'une manière également dense, et ordonnons ensuite (ψ_i) de manière que les mêmes fonctions continuent de se correspondre. Les deux nouveaux systèmes ainsi obtenus $(\dot{\varphi}_i)$ et $(\dot{\psi}_i)$ se correspondront encore par la même rotation; donc $(\dot{\psi}_i)$ sera également dense, ce qui est impossible. Il n'y a donc dans ce cas aucun doute. Que se passe-t-il donc au contraire quand (φ_i) et (ψ_i) sont tous deux susceptibles d'être ordonnés de manière également dense? On ne peut malheureusement rien dire d'assez précis; mais, ainsi que nous allons le montrer, il y a quand même une liaison profonde entre les deux choses : (φ_i) et (ψ_i) ordonnés tous deux de manière également dense; et (φ_i) et (ψ_i) ordonnés semblablement.

Revenons d'abord à la condition d'ordre semblable et remarquons que l'on a

$$2[1 - \mathfrak{B}_i^i] = \int [\varphi_i(s) - \psi_i(s)]^2 ds = \delta_i^2$$

δ_i désignant la distance de $\varphi_i(s)$ et $\psi_i(s)$. La condition d'ordre semblable est donc que

$$\sum_i \delta_i^2$$

converge.

Ceci posé, reprenons les fonctions

$$\Phi_n(s) = \frac{1}{n} \sum_{i_1}^n \varphi_{i_1}^2(s); \quad \Psi_n(s) = \frac{1}{n} \sum_{i_1}^n \psi_{i_1}^2(s)$$

qui tendent en moyenne vers 1 si (φ_i) et (ψ_i) sont tous deux également denses; comme

$$\int \Phi_n(s) ds = 1; \quad \int \Psi_n(s) ds = 1$$

quel que soit n , les conditions d'égalité densité, à savoir que

$$\int [\Phi_n - 1]^2 ds; \quad \int [\Psi_n - 1]^2 ds$$

tendent vers 0 pour n infini, peuvent encore s'exprimer en disant que

$$\int \Phi_n^2 ds; \quad \int \Psi_n^2 ds$$

tendent vers 1 pour n infini; il y a équivalence entre les deux choses.

Ceci posé, posons encore

$$\Pi_n(s) = \frac{1}{n} \sum_{i_1}^n \varphi_{i_1}(s) \psi_{i_1}(s)$$

et considérons la quantité

$$\frac{1}{n} \sum_{i_1}^n \delta_{i_1}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i_1}^n \int [\varphi_{i_1} - \psi_{i_1}]^2 ds = 2 - 2 \int \Pi_n(s) ds$$

on a évidemment

$$0 < \frac{1}{n} \sum_{i1}^n \delta_i^2 \leq 2 + 2 \left| \int \Pi_n(s) ds \right| \leq 2 + 2 \int |\Pi_n(s)| ds \leq 2 + 2 \left[\int \Pi_n^2(s) ds \right]^{\frac{1}{2}}$$

la dernière inégalité découlant de la formule de Schwarz et de ce que le champ d'intégration a pour longueur 1.

Nous avons ensuite

$$\Pi_n^2(s) = \frac{1}{n^2} \left[\sum_{i1}^n \varphi_i(s) \psi_i(s) \right]^2 \leq \frac{1}{n^2} \left[\sum_{i1}^n \varphi_i^2(s) \right] \left[\sum_{i1}^n \psi_i^2(s) \right] = \Phi_n(s) \Psi_n(s)$$

à cause de la formule de Lagrange. La formule de Schwarz donne ensuite

$$\int \Pi_n^2(s) ds \leq \int \Phi_n(s) \Psi_n(s) ds \leq \left[\int \Phi_n^2(s) ds \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int \Psi_n^2(s) ds \right]^{\frac{1}{2}}$$

donc on a

$$0 \leq \frac{1}{n} \sum_{i1}^n \delta_i^2 \leq 2 + 2 \left[\int \Phi_n^2(s) ds \right]^{\frac{1}{4}} \left[\int \Psi_n^2(s) ds \right]^{\frac{1}{4}}$$

faisant ensuite n infini et tenant compte de ce que (φ_i) et (ψ_i) sont également denses, nous avons le théorème suivant :

Quand (φ_i) et (ψ_i) sont également denses, l'infiniment grand

$$\sum_{i1}^n \delta_i^2$$

a pour partie principale pour n infini αn ; étant un nombre positif et inférieur à 4. Il peut d'ailleurs être d'un ordre moindre d'infinitude.

S'il est fini, par définition les deux systèmes sont semblablement ordonnés.

On ne peut d'ailleurs rien tirer de plus de ces prémisses. On peut le voir sur un cas particulier classique. Prenons pour (φ_i) la suite orthogonale complète des fonctions trigonométriques normées :

$$1; \sqrt{2} \cos 2\pi s; \sqrt{2} \sin 2\pi s; \dots \sqrt{2} \cos 2n\pi s; \sqrt{2} \sin 2n\pi s; \dots$$

ou s varie de 0 à 1. Ainsi que l'a montré M. Paul Lévy, cette suite est également dense quel que soit l'ordre. Prenons cette suite pour système (φ_i) et prenons pour système (ψ_i) la même suite rangée dans un autre ordre, en nous arrangeant de manière que φ_i soit toujours différent de ψ_i , ce qui est possible d'une infinité de manières, alors

$$[\varphi_i \cdot \psi_i] = 0 \quad \text{et} \quad \delta_i^2 = 2.$$

Les deux suites sont bien également denses et on a ici exactement

$$\sum_{i=1}^n \delta_i^2 = 2n.$$

Il s'agirait de savoir maintenant si on peut aller plus loin et ordonner deux suites également denses en les laissant également denses, de telle manière que $\sum_{i=1}^n \delta_i^2$ converge. Nous n'avons pu malheureusement parvenir à donner une réponse précise; mais cette réponse nous paraît devoir être négative, ainsi qu'il semble résulter du théorème suivant :

Deux suites ordonnées semblablement sont asymptotiquement identiques.

Dans ce cas

$$\delta_i^2 = \int [\varphi_i - \psi_i]^2 ds$$

tend vers zéro, par suite la fonction

$$\varphi_i(s) - \psi_i(s)$$

tend en moyenne vers zéro. De plus elle tend assez vite vers zéro pour que la série

$$\sum_i \delta_i^2$$

soit convergente. Ce dernier fait permet de préciser beaucoup plus la manière dont $\varphi_i(s) - \psi_i(s)$ tend vers zéro. On a exactement le résultat suivant :

$\varphi_i(s) - \psi_i(s)$ tend vers zéro au sens ordinaire du mot, sauf peut-être sur un ensemble de mesure nulle.

La démonstration qui va suivre n'est qu'une adaptation au cas actuel de celles

données par différents auteurs⁽¹⁾ qui ont essayé de préciser la notion de convergence en moyenne suivant la manière dont $\int [f - f_n]^2 ds$ tend vers zéro (f limite en moyenne de f_n).

Voici brièvement le principe de cette démonstration : Posons

$$\mathfrak{C}(mn) = \sum_{i=m+1}^n \delta_i^2 = \int_a^b \sum_{i=m+1}^n [\varphi_i(s) - \psi_i(s)]^2 ds$$

et considérons l'ensemble $E(mn)$ des points de l'intervalle d'intégration, où

$$\sum_{i=m+1}^n [\varphi_i(s) - \psi_i(s)]^2 < [\mathfrak{C}(mn)]^{\frac{2}{3}}$$

et soit $E'(mn)$ l'ensemble complémentaire; on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}(mn) &= \int_a^b \sum_{i=m+1}^n [\varphi_i(s) - \psi_i(s)]^2 ds \geq \int_{E'(mn)} \sum_{i=m+1}^n [\varphi_i(s) - \psi_i(s)]^2 ds \\ &\geq [\mathfrak{C}(mn)]^{\frac{2}{3}} \text{Mes } E'(mn) \end{aligned}$$

d'où

$$\text{Mes } E'(mn) \leq [\mathfrak{C}(mn)]^{\frac{1}{3}}; \quad \text{Mes } E(mn) \geq 1 - [\mathfrak{C}(mn)]^{\frac{1}{3}}$$

d'ailleurs, si $p > n$

$$\mathfrak{C}(mp) \geq \mathfrak{C}(mn)$$

et

$$\text{Mes } E(mn) \geq 1 - [\mathfrak{C}(mn)]^{\frac{1}{3}} \geq 1 - [\mathfrak{C}(mp)]^{\frac{1}{3}} \geq 1 - [\mathfrak{C}(m\infty)]^{\frac{1}{3}}$$

(1) Voir WEYL, *Über die Konvergenz von Reihen die nach orthogonalfunktionen fortschreiten*. Math. Ann. 67 (1909), pp. 225-245; JEROSCH und WEYL, *Idem*. Math. Ann. 66 (1909), pp. 67-80; HUSSON, *On the convergenz of series of orthogonal functions*. Proceedings of the Lond. Math. Soc. (2)-12 (1913), pp. 297-308; PLANCHEREL, *C. R.*, 157 (1913), pp. 539-542; RADEMACHER, *Quelques théorèmes généraux sur les développements en série de fonctions orthogonales*. Math. Ann. (1922-23), p. 112; KAEZMARZ, *Convergence des séries de fonctions orthogonales*. Math. Zeitschrift (1925), p. 263.

enfin dans $E(mn)$

$$|\varphi_i - \psi_i| \leq \left[\sum_{i=m+1}^n [\varphi_i - \psi_i]^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq [\bar{C}(mn)]^{\frac{1}{3}} \leq [\bar{C}(m\infty)]^{\frac{1}{3}}$$

avec

$$m < i \leq n.$$

Considérons l'ensemble

$$\mathcal{E}(mn) \quad \text{où} \quad |\varphi_i - \psi_i| < [\bar{C}(m\infty)]^{\frac{1}{3}}$$

pour $m < i \leq n$; il contient évidemment $E(mn)$; et

$$\text{Mes } \mathcal{E}(mn) \geq \text{Mes } E(mn) \geq 1 - [\bar{C}(m\infty)]^{\frac{1}{3}}.$$

Enfin la suite des ensembles

$$\mathcal{E}(m, m+1); \mathcal{E}(m, m+2); \dots \mathcal{E}(m, m+p) \dots$$

est telle qu'ils s'emboîtent les uns dans les autres, chacun d'eux contenant le suivant.

Prenons l'ensemble $D(m)$ qui leur est commun, on a

$$\text{Mes } D(m) = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{Mes } \mathcal{E}(m, m+k) \geq 1 - [\bar{C}(m\infty)]^{\frac{1}{3}}$$

et dans $D(m)$ on a

$$|\varphi_i - \psi_i| < [\bar{C}(m\infty)]^{\frac{1}{3}}$$

pour $i > m$.

Prenons enfin l'ensemble $V(m)$ formé de tous les points appartenant à un au moins des ensembles

$$D(m); D(m+1); \dots D(m+p); \dots$$

On a

$$\text{Mes } V(m) \geq \text{Mes } D(m+p) \geq 1 - [\bar{C}(m+p, \infty)]^{\frac{1}{3}}$$

quel que soit p . Faisant p infini, nous voyons que

$$\text{Mes } V(m) = 1.$$

Prenons encore l'ensemble V commun à

$$V(1); V(2); \dots V(m); \dots$$

sa mesure sera évidemment égale à $1 = b - a$; soit un point s_0 de V , il appartient certainement à une infinité de $D(m)$

$$D(m_1); D(m_2); \dots D(m_k); \dots$$

soit un nombre ε arbitrairement petit, et un entier $m(\varepsilon)$ défini par la condition que

$$m > m(\varepsilon) \quad \text{entraîne} \quad \tilde{v}(m, \infty) < \varepsilon^3$$

et $m_k(\varepsilon)$ le premier entier de la suite

$$m_1; m_2; \dots m_k; \dots$$

supérieur à $m(\varepsilon)$; pour s_0 dans V , donc dans $D[m_k(\varepsilon)]$, on a

$$|\varphi_i(s_0) - \psi_i(s_0)| \leq [\tilde{v}[m_k(\varepsilon), \infty)]^{\frac{1}{3}} < \varepsilon$$

pour $i > m_k(\varepsilon)$; par suite $\varphi_i - \psi_i$ converge vers zéro au sens ordinaire du mot pour i infini, pourvu que s soit dans V , c'est-à-dire presque partout.

C'est cela que nous exprimons quand nous disons que $\varphi_i(s)$ et $\psi_i(s)$ sont asymptotiquement identiques, puisque pour i infini ces deux fonctions sont égales sauf peut-être sur un ensemble V' complémentaire de V , et dont la mesure est nulle.

Ceci nous permet de présumer qu'il sera en général impossible d'ordonner semblablement deux systèmes (φ_i) et (ψ_i) ; même lorsqu'ils sont tous deux susceptibles d'être ordonnés d'une manière également dense.

Remarquons d'abord qu'il suffirait pour ce faire d'ordonner semblablement chacun de ces systèmes à l'un d'entre eux pris comme système de référence. En effet, si cela est réalisé, si par exemple (φ_i) et (ψ_i) sont ordonnés tous deux semblablement à un système (t_i) , il existe alors un noyau K de rotation qui fait passer de (φ_i) à (t_i) ; et un noyau H de rotation qui permet de passer de (t_i) à (ψ_i) . En composant à la Fredholm K et H , on obtient un noyau de rotation qui permet de passer de (φ_i) à (ψ_i) ; par suite ces deux systèmes se trouvent être ordonnés semblablement.

Prenons alors pour ce système de références spécial (t_i) le système trigonométrique dont la fonction asymptotique est

$$\sqrt{2} \sin 2\pi nS \quad \text{ou} \quad \sqrt{2} \cos 2\pi nS.$$

Si l'on pouvait ordonner tout système également dense semblablement à celui-là,

il résulterait du théorème précédent que la fonction à l'infini de tout système également dense serait asymptotiquement égale à $\sqrt{2} \begin{cases} \sin \\ \cos \end{cases} \left\{ 2\pi ns; (n \text{ infini}) \right\}$. C'est là un résultat qui nous paraît trop particulier pour être exact. La réponse à la question posée est donc très vraisemblablement négative.

En résumé, et c'est là que nous terminerons ce paragraphe, l'application d'une rotation fonctionnelle quelconque à un système orthogonal ne donne pas à un certain point de vue un système très différent du premier, puisqu'asymptotiquement identique. Il sera en particulier inutile en général d'essayer de montrer qu'un système est complet en essayant de l'ordonner semblablement à un système complet connu, pris comme système de référence, l'opération ne pouvant réussir éventuellement que si ce système connu est asymptotiquement identique au proposé. Remarquons cependant que si cela est réalisé, il n'y a qu'un ensemble dénombrable d'essais à faire, alors que la condition nécessaire et suffisante de LAURICELLA exige que l'on fasse en général un ensemble d'essais ayant la puissance de l'ensemble des fonctions de carré sommable. Il y a donc en ce sens un gros progrès, malheureusement très limité par ce fait qu'on est bien loin de connaître en général un système complet asymptotiquement identique au système proposé.

Remarquons en dernier lieu que le problème que nous avons rencontré à la fin du paragraphe précédent : détermination d'un noyau de rotation K par des conditions du type

$$\psi_i = K[\varphi_i]$$

quand on a $[\varphi_i, \varphi_j] = [\psi_i, \psi_j]$ est en partie résolu par les considérations qui précèdent. Il suffit en effet d'orthogonaliser et de normaliser les deux systèmes (φ_i) et (ψ_i) de manière identique (avec les mêmes formules), ce qui est possible car les deux systèmes sont géométriquement égaux. Si l'un des deux systèmes ainsi obtenu est complet, nous retombons sur le problème que nous venons de traiter et il faut voir si on peut ordonner semblablement les deux systèmes. Sinon, nous allons voir ce qu'on peut dire dans le paragraphe suivant.

6. — Suite du précédent — cas où les deux systèmes ne sont pas complets.

Supposons d'abord que l'un des systèmes (φ_i) par exemple soit complet et que l'on sache que l'autre (ψ_i) est incomplet. Avant de les ordonner semblablement, il faudra d'abord essayer de compléter (ψ_i) , ce qui, comme on le sait, peut se faire d'une infinité de manières. Il est bien évident qu'il devra être possible d'extraire de la suite (φ_i) une suite partielle

$$\varphi_{k_1}; \varphi_{k_2}; \dots \varphi_{k_i}; \dots$$

telle que la série

$$\sum_i [1 - [\varphi_{k_i} \cdot \psi_i]]$$

soit convergente. C'est là une condition nécessaire pour qu'on puisse ordonner semblablement (φ_i) et au moins un des systèmes qu'on obtient en complétant (ψ_i) . Mais cette fois, cette condition n'est plus suffisante comme nous allons le voir. Cela tient à ce qu'il faut de plus que la suite complémentaire de (φ_{k_i})

$$\varphi_{h_1}; \varphi_{h_2}; \dots \varphi_{h_i}; \dots$$

puisse être rendue semblable à l'une des suites qui complètent (ψ_i) . Nous employons ici le terme de suites semblables en entendant que deux telles suites complètes ou non peuvent se recouvrir par une rotation.

Précisons cette idée et soit comme plus haut $K(st)$ le noyau qui réalise l'application de (ψ_i) convenablement complété sur (φ_i) , en supposant qu'un tel noyau existe. Nous supposons donc deux suites d'indices

$$k_1; k_2; \dots k_i; \dots \text{ etc.}$$

$$h_1; h_2; \dots h_i; \dots \text{ etc.}$$

tels que

$$k_i \neq k_j \quad \text{si} \quad i \neq j$$

$$h_i \neq h_j \quad \text{si} \quad i \neq j$$

$k_i \neq h_j$ quels que soient i et j et que la suite formée en réunissant les deux suites (h) et (k) soit la suite naturelle complète $1, 2; \dots i; \dots$

Posons encore

$$B^i = [\varphi_i \cdot \psi_j]$$

le système (φ_i) étant complet, on a

$$\sum_k B^k B^k = \varepsilon_{ij}$$

soit aussi

$$\sum_k B^i B'_k = r_{ij} \neq \text{en général de } \varepsilon_{ij}$$

on a seulement

$$0 < r_{ii} \leq 1$$

et

$$|\tau_{ij}| \leq 1.$$

Enfin posons comme plus haut

$$\mathfrak{A}'_j = \int \int \mathbf{K}(st) \varphi_i(s) \varphi_j(t) ds dt$$

et

$$\mathfrak{B}'_j = \mathfrak{A}'_j + \varepsilon_{ij}$$

$\mathbf{K}(st)$ étant de rotation, nous avons

$$\sum_k \mathfrak{B}'_k \mathfrak{B}'_k = \varepsilon_{ij} \tag{a}$$

$$\sum_k \mathfrak{B}'_k \mathfrak{B}'_k = \varepsilon_{ij} \tag{a'}$$

$$\sum_i [1 - \mathfrak{B}'_i] \text{ convergent} \tag{b}$$

(a) et (a') étant équivalents moyennant (b).

Nous supposons enfin que

$$\varphi_{k_i} = \mathbf{K}[\psi_i]$$

alors un calcul fait plus haut donne immédiatement

$$[\varphi_{k_i} \cdot \varphi_j] = \sum_l \mathfrak{B}'_l [\varphi_l \cdot \psi_i]$$

ou

$$\varepsilon_{jk_i} = \sum_l \mathfrak{B}'_l \mathfrak{B}'_l \tag{c}$$

Mais \mathbf{K} étant de rotation, on a aussi

$$\psi_i = \mathbf{K}^{-1}[\varphi_{k_i}]$$

et le calcul inverse donne

$$[\psi_i \cdot \varphi_j] = \sum_l \mathfrak{B}'_l [\varphi_{k_i} \cdot \varphi_l]$$

ou

$$\mathfrak{B}'_i = \mathfrak{B}'_i \tag{d}$$

Nous devons dans ces équations considérer les (\mathfrak{B}) comme des inconnues.

Des équations (c) nous tirons pour chaque valeur de j qui joue le rôle d'indice muet un système infini linéaire dont le tableau est $\| B^l_i \|$. C'est un tableau orthogonal normé dans le sens des i constants *seulement*.

Les équations (d) nous donnent les solutions de ces systèmes pour les valeurs $j = k_i$ de l'indice muet. Vérifions d'abord qu'il n'y a pas contradiction. Reportons les $\mathfrak{B}_i^{k_i}$ donnés par (d) dans les systèmes (c) où l'on fait $j = k_i$. Il vient

$$\sum_l \mathfrak{B}_l^{k_i} B^l_h = \sum_l B^l_i B^l_h = \varepsilon_{ih} = \varepsilon_{k_i k_h}$$

d'après les relations entre les B, et le fait que $k_i \neq k_h$ si $i \neq h$; par suite les équations (c) correspondantes sont bien vérifiées.

Reportons maintenant ces valeurs dans (a), (a'), (b). (a) s'écrit, puisqu'on a affaire à une série absolument convergente

$$\sum_l \mathfrak{B}_i^{h_l} \mathfrak{B}_j^{h_l} + \sum_l \mathfrak{B}_i^{k_l} \mathfrak{B}_j^{k_l} = \varepsilon_{ij}$$

ou

$$\sum_l \mathfrak{B}_i^{h_l} \mathfrak{B}_j^{h_l} = \varepsilon_{ij} - \sum_l B^l_i B^l_j = \varepsilon_{ij} - \tau_{ij}$$

(a) se traduit donc par la condition suivante sur les $\mathfrak{B}_i^{h_l}$

$$\sum_l \mathfrak{B}_i^{h_l} \mathfrak{B}_j^{h_l} = \varepsilon_{ij} - \tau_{ij} \tag{\alpha}$$

Pour (a') on a différents cas à distinguer :

1° $i = k_l$; $j = k_m$; il vient

$$\sum_k \mathfrak{B}_k^{k_l} \mathfrak{B}_k^{k_m} = \sum_k B^k_l B^k_m = \varepsilon_{lm} = \varepsilon_{k_l k_m} = \varepsilon_{ij}$$

d'après les conditions sur les B. Dans ce cas (a') est bien vérifiée.

2° $i = k_l$; $j = h_m$; il vient

$$\sum_k \mathfrak{B}_k^{k_l} \mathfrak{B}_k^{h_m} = \sum_k B^k_l \mathfrak{B}_k^{h_m} = \varepsilon_{h_m k_l} = \varepsilon_{ij}$$

d'après les conditions (c). A remarquer que dans ce cas ($j = h_m$) les conditions (c) sont des conditions homogènes en \mathfrak{B} , car

$$\varepsilon_{h_m k_l}$$

est toujours nul.

3° $i = h_l$; $j = h_m$; il vient

$$\sum_k \mathfrak{B}_k^{h_l} \mathfrak{B}_k^{h_m} = \varepsilon_{h_m h_l} = \varepsilon_{ml} \quad (\beta)$$

nouvelle condition sur les $\mathfrak{B}_j^{h_i}$ qu'on doit joindre à (x).

Passons enfin à la condition (b). Puisqu'on a affaire à une série absolument convergente, il suffit d'écrire que

$$\sum_i [1 - \mathfrak{B}_{h_i}^{h_i}] \quad \text{et que} \quad \sum_i [1 - \mathfrak{B}_{k_i}^{k_i}]$$

convergent séparément. C'est nécessaire et suffisant.

Nous avons donc encore une autre condition sur les $\mathfrak{B}_j^{h_i}$, à savoir que

$$\sum_i [1 - \mathfrak{B}_{h_i}^{h_i}]$$

soit convergente; puis, comme nous l'avions prévu, une condition sur les B qui est que

$$\sum_i [1 - B_i^{k_i}]$$

converge aussi.

En résumé, les $B_i^{k_i}$ vérifiant cette condition; les $\mathfrak{B}_j^{h_i}$ sont déterminés et conviennent et les $\mathfrak{B}_j^{h_i}$ sont assujettis aux conditions

$$\sum_l \mathfrak{B}_i^{h_l} \mathfrak{B}_j^{h_l} = \varepsilon_{ij} - \gamma_{ij} \quad (\alpha)$$

$$\sum_k \mathfrak{B}_k^{h_l} \mathfrak{B}_k^{h_m} = \varepsilon_{lm} \quad (\beta)$$

$$\sum_k B_l^k \mathfrak{B}_k^{h_m} = 0 \quad (\gamma)$$

$$\sum_i [1 - \mathfrak{B}_{h_i}^{h_i}] \quad \text{convergent.} \quad (\delta)$$

Il résulte d'ailleurs immédiatement de ces calculs que, s'il est possible de déterminer ces $\mathcal{B}_j^{h_i}$, on en déduit sans difficulté un noyau de rotation $K(st)$, déterminé à un ensemble de mesure nulle près, qui applique (ψ_i) sur (φ_{k_i}) . Il suffit pour le voir de reprendre le raisonnement fait au paragraphe précédent.

Il faut examiner maintenant dans quelle mesure les conditions (α) , (β) , (γ) , (δ) sont indépendantes. Il est bien à prévoir que certaines d'entre elles entraînent les autres, puisque les conditions (a) et (b) entraînent (a') et que les conditions (α) , (β) , (γ) , (δ) n'en sont qu'une transformation.

Voyons exactement à quoi revient la recherche des $\mathcal{B}_j^{h_i}$; partons des conditions (β) , puisque

$$\sum_k [\mathcal{B}_k^{h_i}]^2$$

converge;

$$\sum_k \mathcal{B}_k^{h_i} \varphi_k(s)$$

converge en moyenne vers une fonction $\sigma_i(s)$ entièrement déterminée, à un ensemble de mesure nulle près; et on voit immédiatement que les conditions (β) et (γ) se traduisent par

$$[\sigma_i \cdot \sigma_m] = \varepsilon_{im} \quad (\beta)$$

$$[\psi_i \cdot \sigma_m] = 0 \quad (\gamma)$$

par suite les σ forment un système orthogonal et normé de fonctions orthogonales aux (ψ_i) . Inversement la connaissance des σ_i détermine entièrement les $\mathcal{B}_k^{h_i}$. D'ailleurs, K étant supposé déterminé, le coefficient de Fourier de $K[\sigma_i]$ relativement à φ_i est

$$\sum_j \mathcal{B}_j^i [\varphi_j \cdot \sigma_i] = \sum_j \mathcal{B}_j^i \mathcal{B}_j^{h_i};$$

si $i = h_m$ on a

$$[\varphi_{h_m} \cdot K[\sigma_i]] = \sum_j \mathcal{B}_j^{h_m} \mathcal{B}_j^{h_i} = \varepsilon_{im} \quad (\beta)$$

si $i = k_m$ on a

$$[\varphi_{k_m} \cdot K[\sigma_i]] = \sum_j \mathcal{B}_m^j \mathcal{B}_j^{h_i} = 0 \quad (\gamma)$$

ce qui montre qu'à un ensemble de mesure nulle près on a

$$\varphi_{h_i} = K[\sigma_i]; \quad \sigma_i = K^{-1}[\varphi_{h_i}]$$

donc le système (σ_i) n'est autre qu'un système complétant le système (ψ_i) ; celui justement que donne la rotation K^{-1} appliquée au système (φ_i) .

Interprétons sur les (σ_i) la condition (α) .

Pour cela, considérons la série

$$\sum_j [B_j^i]^*$$

qui a pour somme r_{ii} ; par suite la série

$$\sum_j B_j^i \psi_j(s)$$

converge en moyenne vers une certaine fonction $\dot{\varphi}_i(s)$ qui est telle que l'on ait

$$\varphi_i(s) = \dot{\varphi}_i(s) + \ddot{\varphi}_i(s)$$

$\ddot{\varphi}_i(s)$ étant orthogonale à tous les (ψ_i) , comme d'ailleurs les $\dot{\varphi}_i$ sont linéaires en ψ , on a quels que soient i et j

$$[\dot{\varphi}_i \cdot \ddot{\varphi}_j] = 0$$

puis

$$\varepsilon_{ij} = [\varphi_i \cdot \varphi_j] = [(\dot{\varphi}_i + \ddot{\varphi}_i) \cdot (\dot{\varphi}_j + \ddot{\varphi}_j)] = [\dot{\varphi}_i \cdot \dot{\varphi}_j] + [\ddot{\varphi}_i \cdot \ddot{\varphi}_j]$$

et enfin d'après leur forme même

$$[\dot{\varphi}_i \cdot \dot{\varphi}_j] = \sum_k B_k^i B_k^j = r_{ij}$$

puis

$$[\ddot{\varphi}_i \cdot \ddot{\varphi}_j] = \varepsilon_{ij} - r_{ij}$$

Enfin remarquons encore que

$$B_l^{hi} = [\sigma_i \cdot \varphi_l] = [\sigma_i \cdot \ddot{\varphi}_l]$$

puisque σ_i est orthogonale à tous les ψ . La condition (α) se traduit donc par

$$\sum_l [\sigma_i \cdot \ddot{\varphi}_l] [\sigma_l \cdot \ddot{\varphi}_j] = [\ddot{\varphi}_i \cdot \ddot{\varphi}_j]$$

et pour qu'elle soit vérifiée, il suffit que les $\ddot{\varphi}_i$ soient linéaires par rapport au système orthogonal (σ_i) . Or, c'est bien ce qui a lieu puisque les $\ddot{\varphi}_i$ sont orthogonales à tous les (ψ_i) et que les (σ_i) complètent le système (ψ_i) . Il y a donc bien équivalence de (α) et de (β) , moyennant (γ) .

Tout ceci suppose que le noyau K existe, c'est-à-dire que (δ) est vérifié. Nous voyons donc que tout revient à compléter le système (ψ_i) par un système (σ_i) , de telle manière que (δ) converge et les conditions (α) , (β) , (γ) , (δ) n'expriment pas autre chose que cela à quoi se réduit tout le problème. C'est bien ce que nous avons prévu.

Le fait nouveau qui se produit, c'est que cette condition (δ) entraîne une condition nécessaire nouvelle sur le tableau des B .

On a en effet d'après les formules précédentes

$$\mathcal{B}_{h_i}^{h_i} = [\sigma_i \cdot \ddot{\varphi}_{h_i}]$$

et la formule de Schwarz donne

$$[\mathcal{B}_{h_i}^{h_i}]^2 \leq [\sigma_i^2] \cdot [\ddot{\varphi}_{h_i}^2] = [\ddot{\varphi}_{h_i}^2] = 1 - r_{h_i h_i}$$

et

$$|\mathcal{B}_{h_i}^{h_i}| \leq [1 - r_{h_i h_i}]^{\frac{1}{2}}$$

donc $1 - \mathcal{B}_{h_i}^{h_i}$ est comprise entre

$$1 - [1 - r_{h_i h_i}]^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad 1 + [1 - r_{h_i h_i}]^{\frac{1}{2}}$$

il est donc nécessaire que

$$\sum_i [1 - [1 - r_{h_i h_i}]^{\frac{1}{2}}]$$

soit convergente, ou ce qui revient au même que

$$\sum_i r_{h_i h_i}$$

converge.

Le choix des indices h_i et k_i est donc soumis à deux conditions nécessaires, à savoir la convergence des deux séries

$$\sum_i [1 - B_i^{h_i}] \quad \text{et} \quad \sum_i r_{h_i h_i}$$

et ces conditions sont évidemment indépendantes puisque les indices h_i et k_i sont séparés.

Nous n'avons pu réussir à démontrer que ces conditions sont suffisantes.

Peut-être ne le sont-elles pas. Bien que les résultats que nous donnons ici soient très incomplets, et qu'ils appellent de nouvelles recherches, nous les signalons pour légitimer ce que nous disions au début de ce paragraphe, à savoir que pour pouvoir appliquer par une rotation un système incomplet (ψ_i) sur une portion (φ_{k_i}) d'un système complet (φ_i) , il faut non seulement que la condition évidente que

$$\sum_i [1 - B_i^{k_i}]$$

converge soit remplie, mais qu'il y a encore d'autres conditions. L'une d'elles est que

$$\sum_i \epsilon_{h_i k_i}$$

converge. Il y en a probablement d'autres qui nous paraissent difficiles à exprimer, tout au moins au point de vue où nous nous plaçons ici.

Nous n'insisterons pas sur le cas où les deux systèmes que l'on considère sont incomplets. Il est bien clair qu'alors les difficultés sont encore plus considérables. Nous nous réservons d'ailleurs de revenir sur ces questions.

7. — Rapports de la théorie précédente et de la théorie des déterminants infinis de Von Koch⁽¹⁾.

M. Von Koch a considérablement étendu les résultats dus à Poincaré sur la convergence des déterminants infinis appelés par lui normaux. Il part de la définition suivante que nous citons textuellement, aux notations près :

Étant donné un tableau à double entrée d'élément courant β_j^i , supposons que le produit infini P formé par tous les éléments diagonaux β_i^i converge absolument (ce qui revient à supposer convergente la série $\sum_i |\beta_i^i - 1|$). Formons une suite de nouveaux produits P' en permutant dans P les indices supérieurs, par exemple, de toutes les manières possibles, en attribuant à chaque produit ainsi obtenu le signe + ou le signe - suivant la parité ou l'imparité du nombre de transpositions nécessaires pour passer du produit initial P au produit considéré.

(1) VON KOCH, *Sur la convergence des déterminants d'ordre infini*. Bihang till. K. Svenska vetenskaps. Akademiens Handlingar, t. XXII, 1896, n° 4, pp. 1-31 et Rendiconti del circolo Matematico di Palermo, t. XXVIII, 1909, pp. 255-266.

Si la série formée avec tous ces produits converge absolument même si l'on remplace partout \mathcal{B}_j^i par $1 + |\mathcal{B}_j^i - 1|$ nous convenons de considérer cette série comme le déterminant des \mathcal{B}_j^i et de dire que le déterminant converge absolument.

Nous voyons s'introduire ici comme condition nécessaire de convergence du déterminant des \mathcal{B}_j^i la condition d'ordre semblable rencontrée plus haut, condition qui exprime le produit diagonal P est convergent.

Il est à remarquer que d'après la définition précédente le signe des produits P' n'est déterminé que pour les produits tels qu'on les obtienne à partir de P en dérangeant seulement un nombre fini (pair ou impair) d'indices supérieurs. Mais il existe aussi dans le déterminant des produits infinis P' qu'on obtient en dérangeant dans P une infinité d'indices supérieurs. Ces produits forment même la fraction la plus importante de ceux qui figurent dans le déterminant. Il est bien connu en effet que considérant les permutations de n indices, si on cherche celles où aucun indice n'est à sa place on en trouve une certaine fraction f_n de l'ensemble qui a pour valeur asymptotique pour n infini, $\frac{1}{e}$, e étant la base des logarithmes népériens. Dans l'ensemble des produits qui figurent dans le déterminant, il y aura donc déjà la fraction $\frac{1}{e}$ de l'ensemble composé de produits où ne figureront aucuns termes principaux. Il faudra encore ajouter à ceux-là tous les produits où figurent un nombre infini de termes principaux, ou un nombre infini, et aussi un nombre infini d'autres termes; pour tous ces produits le signe est indéterminé.

Voici d'ailleurs comment l'auteur tourne l'objection. Posons comme nous l'avons fait plus haut

$$\mathcal{B}_j^i = \varepsilon_{ij} + \mathcal{A}_j^i.$$

En développant les produits P et P' suivant des produits de \mathcal{A}_j^i , l'hypothèse de M. Von Koch revient évidemment à ce que la somme de tous ces produits converge absolument. On peut donc ranger ces termes d'une manière quelconque, on pourra mettre le déterminant infini sous la forme

$$\Delta_1 + (\Delta_2 - \Delta_1) + (\Delta_3 - \Delta_2) + \dots$$

avec

Δ_1 , ensemble des produits partiels où ne figure aucun \mathcal{A}_j^i .

$\Delta_2 - \Delta_1$, ensemble des produits partiels où il n'y a qu'un \mathcal{A}_j^i .

$\Delta_3 - \Delta_2$, ensemble des produits partiels où il n'a que deux \mathcal{A}_j^i , etc.

Ceci conduit à prendre pour valeur du déterminant infini la somme de la série

$$1 + \sum_i \mathcal{A}_i^i + \sum_{ij} \begin{vmatrix} \mathcal{A}_i^i & \mathcal{A}_j^j \\ \mathcal{A}_j^i & \mathcal{A}_i^j \end{vmatrix} + \sum_{ijk} \begin{vmatrix} \mathcal{A}_i^i & \mathcal{A}_j^j & \mathcal{A}_k^k \\ \mathcal{A}_j^i & \mathcal{A}_i^j & \mathcal{A}_k^k \\ \mathcal{A}_k^i & \mathcal{A}_i^j & \mathcal{A}_j^k \end{vmatrix} \text{ etc.}$$

L'hypothèse de M. Von Koch étant que cette série converge absolument. M. Von Koch a montré qu'il était suffisant pour cela que les deux séries

$$\sum_i \mathcal{A}^i \quad \text{et} \quad \sum_{ij} [\mathcal{A}^i]^2$$

convergent. Dans le cas où nous nous plaçons ici, ces deux conditions sont équivalentes et nous voyons qu'un noyau de rotation $K(st)$ donne naissance quand on prend ses coefficients de Fourier \mathcal{A}^i_j relativement à un système orthogonal normé complet (φ_i) à un tableau à double entrée d'éléments

$$\mathcal{B}^i_j = \mathcal{A}^i_j + \varepsilon_{ij}$$

qui forme un déterminant orthogonal infini qui converge à la Von Koch.

Remarquons qu'ici l'objection donnée plus haut à la définition de M. Von Koch tombe d'elle-même.

Prenons en effet un produit infini tiré du déterminant des \mathcal{B}^i_j

$$\prod_i \mathcal{B}^i_{k_i}$$

où nous supposons qu'il y a une infinité d'indices k_i différents de i , je dis qu'un tel produit est nul et que par suite son signe, d'ailleurs indéterminé, n'a aucune importance. Montrons d'abord que la série

$$\sum_i [1 - \mathcal{B}^i_{k_i}]$$

est divergente.

Si en effet elle était convergente, il existerait un noyau de rotation, déterminé à un ensemble de mesure nulle près, réalisant l'application du système orthogonal (φ_{k_i}) sur le système (ψ_i) en désignant comme d'habitude par ψ_i la transformée de φ_i par la rotation ayant pour noyau $K(st)$ dont nous sommes partis. Soit $H(st)$ ce nouveau noyau. Le noyau de rotation qu'on obtient en composant à la Fredholm $K(st)$ et $H(st)$ réalise alors l'application du système (φ_i) sur le système (φ_{k_i}) et par suite la série

$$\sum_i [1 - [\varphi_i \cdot \varphi_{k_i}]]$$

doit être convergente, ce qui est impossible car cette série comprend une infinité de termes égaux à 1. Ceux pour lesquels

$$i \neq k_i$$

les autres étant nuls. Par suite $\sum_i [1 - \mathcal{B}_i^{k_i}]$ est bien divergente.

D'ailleurs on a

$$|\mathcal{B}_i^{k_i}| < 1$$

puis

$$1 - \mathcal{B}_i^{k_i} > 0$$

et

$$\mathcal{B}_i^{k_i} = 1 - (1 - \mathcal{B}_i^{k_i}) = [\varphi_{k_i} \cdot \psi_i]$$

pour les grandes valeurs de i nous avons vu que ψ_i tend en moyenne vers φ_i ; par suite $\mathcal{B}_i^{k_i}$ tend au sens ordinaire du mot vers $[\varphi_{k_i} \cdot \varphi_i] = \varepsilon_{ik_i}$ qui est égal à 1 ou 0 suivant que k_i est égal à i ou différent de i à l'infini.

Distinguons différents cas :

α) k_i a pour valeur asymptotique i ; alors $\mathcal{B}_i^{k_i}$ tend vers 1, et $1 - \mathcal{B}_i^{k_i}$ qui est positif finit par rester inférieur à 1 pour $i > I$.

On a alors pour ces valeurs de i

$$\mathcal{B}_i^{k_i} = 1 - [1 - \mathcal{B}_i^{k_i}] < e^{-[1 - \mathcal{B}_i^{k_i}]}$$

puis le produit

$$\prod_{i=1+1}^{I'} \mathcal{B}_i^{k_i} < e^{-\sum_{i=1+1}^{I'} (1 - \mathcal{B}_i^{k_i})}$$

est positif et décroît quant I' croît car $\mathcal{B}_i^{k_i}$ tend vers 1 par valeurs inférieures et est positif pour $i > I$. Mais le second membre tend vers zéro puisque

$$\sum_i (1 - \mathcal{B}_i^{k_i})$$

diverge. Donc le produit est nul.

β) k_i a une valeur asymptotique différente de i , alors $\mathcal{B}_i^{k_i}$ tend vers zéro; puis $1 - \mathcal{B}_i^{k_i}$ tend vers 1, mais il peut tendre vers 1 en oscillant autour de 1; si il tend vers 1 en lui restant inférieur $\mathcal{B}_i^{k_i}$ finit par rester positif et le raisonnement précé-

dent reste valable; si il tend vers 1 en lui restant supérieur, alors $\mathfrak{B}_i^{k_i}$ finit par rester négatif. Supposons que cela ait lieu pour $i > 1$, pour ces valeurs de i nous poserons

$$|\mathfrak{B}_i^{k_i}| = -\mathfrak{B}_i^{k_i} = 1 - (\mathfrak{B}_i^{k_i} + 1)$$

puis

$$\prod_{i=1+l}^{l'} \mathfrak{B}_i^{k_i} = (-1)^{l'-l} \prod_{i=1+l}^{l'} [1 - (\mathfrak{B}_i^{k_i} + 1)]$$

et $1 + \mathfrak{B}_i^{k_i}$ est positif et inférieur à 1 pour $i > 1$.

Si $\sum_i (1 + \mathfrak{B}_i^{k_i})$ diverge, le raisonnement précédent montre que le produit tend vers zéro en oscillant autour de 0.

Si $\sum_i (1 + \mathfrak{B}_i^{k_i})$ convergerait, le produit infini n'aurait pas de limite, ce qui est contraire aux hypothèses de M. Von Koch.

γ) Quand k_i n'a pas de valeur asymptotique $(1 - \mathfrak{B}_i^{k_i})$ oscille suivant les valeurs de i entre une valeur voisine de zéro et une valeur voisine de 1, et ici encore si le produit infini n'est pas nul il n'a certainement pas de limite, ce qui est contraire aux hypothèses de M. Von Koch. En définitive, le produit $\prod_i \mathfrak{B}_i^{k_i}$ ne peut être convergent. Il faut donc qu'il soit nul; par suite son signe n'a aucune importance.

Nous allons maintenant montrer directement que le déterminant des \mathfrak{B}_j^i converge et donner sa valeur.

Nous supposons donc que $K(st)$ est un noyau de rotation (Nous supposons qu'il est effectivement de rotation et non de quasi rotation).

Calculons pour cela les traces du noyau $K(st)$. Partons des relations

$$\int \int K(st) \varphi_i(s) \varphi_j(t) ds dt = A_{ij}^l$$

$$\sum_{ij} [A_{ij}^l]^2 = \int \int K(st)^2 ds dt$$

K étant de rotation on a

$$K(st) + K(ts) + \int K(su) K(tu) du = 0$$

puis

$$K(ss) = -\frac{1}{2} \int K(su)^2 du$$

et

$$A_i = \int K(ss) ds = -\frac{1}{2} \sum_{ij} [A_j^i]^2 = \sum_i A_i^i$$

d'après les relations entre les A_j^i . Remarquons que cette formule ne vaut que parce que $K(st)$ est un noyau de rotation. Au contraire, les suivantes qui donnent les autres traces valent pour tous les noyaux.

Commençons d'abord par calculer les coefficients de Fourier des itérés successifs de $K(st)$. Soit à calculer

$$\begin{aligned} \int \int K^{(2)}(st) \varphi_i(s) \varphi_j(t) ds dt &= \int \int \int K(su) K(ut) \varphi_i(s) \varphi_j(t) ds dt du \\ &= \int \lambda_i(u) \varphi_j(u) du = \sum_k [\lambda_i \cdot \varphi_k] [\varphi_j \cdot \varphi_k] \end{aligned}$$

en posant

$$\lambda_i(u) = \int K(su) \varphi_i(s) ds; \quad \varphi_j(u) = \int K(ut) \varphi_j(t) dt.$$

Or

$$[\lambda_i \cdot \varphi_k] = \int \int K(su) \varphi_i(s) \varphi_k(u) ds du = A_k^i$$

$$[\varphi_j \cdot \varphi_k] = \int \int K(ut) \varphi_j(t) \varphi_k(u) du dt = A_j^k$$

d'où

$$\int \int K^{(2)}(st) \varphi_i(s) \varphi_j(t) ds dt = \sum_k A_k^i A_j^k.$$

La série du second membre étant absolument convergente puisqu'il en est ainsi de

$$\sum_k [A_k^i]^2; \quad \sum_k [A_j^k]^2.$$

La méthode est évidemment générale et on a

$$\int \int \mathbf{K}^{(m)}(st) \varphi_i(s) \varphi_j(t) ds dt = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_{n-1}} \mathcal{A}_{k_1}^i \mathcal{A}_{k_2}^{k_1} \dots \mathcal{A}_{k_{n-1}}^{k_{n-2}} \mathcal{A}_j^{k_{n-1}}$$

où on voit de proche en proche que les séries du second membre sont convergentes et où on doit prendre dans ces séries toutes les combinaisons des indices k .

Pour le calcul des traces partons de la formule

$$\begin{aligned} & \int \int \mathbf{A}(st) \mathbf{B}(st) ds dt \\ &= \sum_{ij} \left[\int \int \mathbf{A}(st) \varphi_i(s) \varphi_j(t) ds dt \right] \left[\int \int \mathbf{B}(st) \varphi_i(s) \varphi_j(t) ds dt \right] \end{aligned}$$

la $n^{\text{ème}}$ trace étant donnée par la formule

$$\mathbf{A}_n = \int \int \mathbf{K}^{(n-1)}(st) \mathbf{K}(ts) ds dt$$

valable pour $n > 1$ il vient à cause de

$$\begin{aligned} & \int \int \mathbf{K}(st) \varphi_i(s) \varphi_j(t) ds dt = \mathcal{A}_j^i \\ & \mathbf{A}_n = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n} \mathcal{A}_{k_2}^{k_1} \mathcal{A}_{k_3}^{k_2} \dots \mathcal{A}_{k_n}^{k_{n-1}} \mathcal{A}_{k_1}^{k_n} \end{aligned}$$

où on doit encore prendre toutes les combinaisons d'indices; toutes ces séries sont d'ailleurs absolument convergentes.

Calculons maintenant les coefficients du développement de la fonction déterminante fondamentale $\mathbf{D}(\lambda)$ du noyau $\mathbf{K}(st)$ donnés par Fredholm.

Le coefficient de λ^n est

$$\frac{(-1)^n}{n!} \left[\int \right]_n \mathbf{K} \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{pmatrix} ds_1 ds_2 ds_3 \dots ds_n$$

avec

$$\mathbf{K} \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{K}(s_1 s_1); & \mathbf{K}(s_1 s_2); & \dots & \mathbf{K}(s_1 s_n) \\ \mathbf{K}(s_2 s_1); & \mathbf{K}(s_2 s_2); & \dots & \mathbf{K}(s_2 s_n) \\ \dots; & \dots; & & \dots \\ \mathbf{K}(s_n s_1); & \mathbf{K}(s_n s_2); & \dots & \mathbf{K}(s_n s_n) \end{vmatrix}.$$

Comme il est bien connu, ses coefficients s'expriment par des polynomes entiers en fonction des traces.

On a

$$\begin{aligned} \int K \begin{pmatrix} s_1 \\ s_1 \end{pmatrix} ds_1 &= \int K(s_1, s_1) ds_1 = A_1 = \sum_i \mathcal{A}^i_i \\ \int \int K \begin{pmatrix} s_1, s_2 \\ s_1, s_2 \end{pmatrix} ds_1 ds_2 &= \int \int [K(s_1, s_1) K(s_2, s_2) - K(s_1, s_2) K(s_2, s_1)] ds_1 ds_2 \\ &= A_1^2 - A_2 = \sum_i \mathcal{A}^i_i \sum_j \mathcal{A}^j_j - \sum_{ij} \mathcal{A}^i_j \mathcal{A}^j_i \end{aligned}$$

qu'on peut encore écrire puisqu'on a affaire à des séries absolument convergentes

$$\sum_{ij} [\mathcal{A}^i_i \mathcal{A}^j_j - \mathcal{A}^i_j \mathcal{A}^j_i] = \sum_{ij} \begin{vmatrix} \mathcal{A}^i_i & \mathcal{A}^i_j \\ \mathcal{A}^j_i & \mathcal{A}^j_j \end{vmatrix}$$

où on doit prendre toutes les combinaisons d'indices. En excluant la combinaison $i = j$ qui donne un terme nul, et ne distinguant pas la combinaison (ij) de la combinaison (ji) qui donnent deux termes identiques, il vient

$$\int \int K \begin{pmatrix} s_1, s_2 \\ s_1, s_2 \end{pmatrix} ds_1 ds_2 = 2! \sum_{ij} \begin{vmatrix} \mathcal{A}^i_i & \mathcal{A}^i_j \\ \mathcal{A}^j_i & \mathcal{A}^j_j \end{vmatrix}$$

puis de même

$$\int \int \int K \begin{pmatrix} s_1, s_2, s_3 \\ s_1, s_2, s_3 \end{pmatrix} ds_1 ds_2 ds_3 = 3! \sum_{ijk} \begin{vmatrix} \mathcal{A}^i_i & \mathcal{A}^i_j & \mathcal{A}^i_k \\ \mathcal{A}^j_i & \mathcal{A}^j_j & \mathcal{A}^j_k \\ \mathcal{A}^k_i & \mathcal{A}^k_j & \mathcal{A}^k_k \end{vmatrix}.$$

Les séries du second membre sont absolument convergentes comme étant des combinaisons polynomiales de telles séries, et il est bien entendu que dans ces séries, chacun des déterminants qui figure n'y figure qu'une fois.

Si nous formons maintenant la série absolument convergente qui donne $D(-1)$ nous obtenons un développement absolument convergent

$$1 + \sum_i \mathcal{A}^i_i + \sum_{ij} \begin{vmatrix} \mathcal{A}^i_i & \mathcal{A}^i_j \\ \mathcal{A}^j_i & \mathcal{A}^j_j \end{vmatrix} + \dots \text{ etc.}$$

qui n'est autre que le développement qui sert de définition au déterminant des \mathcal{B}^i_j ;

le déterminant converge bien absolument au sens de M. Von Koch, et sa valeur est $D(-1)$, $D(\lambda)$ étant la déterminante fondamentale de $K(st)$ *noyau de rotation*. Il est à remarquer que cette valeur ne dépend que de $K(st)$, et non du système orthogonal normé (φ_i) auquel on réfère ce noyau.

Ajoutons enfin que $D(-1)$ sera en général différent de 1. On ne peut à ce sujet rien dire de précis. Par suite les déterminants $\|\mathcal{B}^i\|$ qui généralisent les déterminants orthogonaux finis, bien que convergents, ne sont pas en général égaux à 1, alors qu'un déterminant orthogonal fini correspondant à un déplacement dans l'espace à n dimensions est toujours égal à 1.

Nous rencontrerons cependant dans la suite certains noyaux de rotation pour lesquels $D(-1) = 1$.

On pouvait d'ailleurs prévoir par une autre voie que ce déterminant infini $\|\mathcal{B}^i\|$ était intimement lié à la déterminante fondamentale du noyau $K(st)$. Celui-ci peut en effet, comme nous l'avons vu plus haut, être considéré comme la limite en moyenne de

$$\sum_i S_i T_i$$

avec

$$S_i = \psi_i(s) - \varphi_i(s)$$

$$T_i = \varphi_i(t)$$

et on a

$$[S_i \cdot T_j] = \mathcal{B}_j^i - \varepsilon_{ij} = \mathcal{A}_j^i.$$

Or MM. Goursat et Lebesgue⁽¹⁾ ont montré que pour le noyau de la forme

$$K(st) = \sum_i S_i T_i$$

où les S_i sont fonctions de s ; et T_i fonctions de t , et où la sommation s'étend à n termes $S_i T_i$, le déterminant ayant pour élément

$$\varepsilon_{ij} - \lambda[S_i \cdot T_j]$$

⁽¹⁾ E. GOURSAT, *Bulletin de la Société Mathématique*, t. XXXV, 1907, p. 163; H. LEBESGUE, *Ibid.*, t. XXXVI, 1908, p. 3.

se réduit identiquement à $D(\lambda)$; pour $\lambda = -1$ on retrouve bien l'élément \mathfrak{B}_j^i . Les mêmes auteurs ont encore montré qu'il en est de même quand $K(st)$ est la somme d'une série *uniformément convergente* du type

$$\sum_i S_i T_i.$$

Les résultats précédents montrent que cette conclusion s'étend, au moins dans le cas des noyaux de rotation, lorsque la somme de la série est prise en moyenne.

Nous arrêtons ici cette étude générale des noyaux de rotation. Ce qui précède n'est pas sans lacune. Sur bien des points il y aurait à améliorer les résultats que nous indiquons ici, en particulier en ce qui concerne les paragraphes 5 et surtout 6. Il nous a pourtant semblé utile de montrer qu'en bien des endroits la théorie des noyaux de rotation est un aboutissant de celle des tableaux orthogonaux infinis ou de celle des fonctions orthogonales. Elle nous paraît même sur quelques points perfectionner ces dernières.

Le dernier paragraphe de ce travail est consacré à l'exposé des propriétés principales des noyaux de rotation finis, ou ne présentant qu'un nombre fini de valeurs singulières. Cette étude sera développée dans un prochain Mémoire.

8. — Rotations fonctionnelles finies. Transpositions fonctionnelles.

Le but de ce paragraphe est d'étudier une classe particulière de noyaux de rotation.

Soit un noyau de rotation $K(st)$. Partons d'une fonction $\varphi_1(s)$ arbitraire de carré sommable et considérons ses conséquentes successives :

$$\varphi_2 = K[\varphi_1]; \quad \varphi_3 = K[\varphi_2]; \quad \dots \quad \varphi_n = K[\varphi_{n-1}]; \quad \dots$$

Soient $K_{(1)}, K_{(2)}, K_{(3)}, K_{(4)}, \dots$ les noyaux de rotation permettant de passer de φ_1 à φ_2 , de φ_1 à φ_3 , de φ_1 à φ_4 , de φ_1 à φ_5 , etc.; c'est-à-dire tels que

$$\varphi_2 = K_{(1)}[\varphi_1]; \quad \varphi_3 = K_{(2)}[\varphi_1]; \quad \dots \quad \varphi_n = K_{(n-1)}[\varphi_1].$$

Ces noyaux sont les noyaux des rotations carrée, cube, etc., de la rotation considérée, et nous avons vu au paragraphe 3 que l'on a

$$\begin{aligned} K_{(1)}(st) &= K^{(1)}(st) = K(st) \\ K_{(2)}(st) &= 2K^{(1)}(st) + K^{(2)}(st) \\ K_{(3)}(st) &= 3K^{(1)}(st) + 3K^{(2)}(st) + K^{(3)}(st) \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

où $K^n(st)$ est le $n^{\text{ème}}$ itéré de $K(st)$. La loi de formation est évidente et l'on a

$$K_{(n)}(st) = [1 + K]^n - 1$$

où dans le second membre, les puissances de K doivent être remplacées par des itérations.

Désignons comme plus haut par $\Phi(s)$ une fonction fondamentale du noyau $K(st)$ et par $\frac{1}{k-1}$ la valeur singulière correspondante supposée simple.

On a alors

$$K[\Phi] = k\Phi$$

et nous avons été conduit à poser

$$k = e^{-2iV}$$

en répétant n fois cette rotation on a

$$K_{(n)}[\Phi] = k^n \Phi = e^{-2niV} \Phi$$

ce qui montre que $K_{(n)}$ a les mêmes $\mathcal{A}b_i$ invariantes que K , l'angle de rotation V correspondant à chaque $\mathcal{A}b_i$ étant n fois plus grand que pour le noyau initial.

Proposons-nous maintenant de déterminer les noyaux de rotation $K(st)$ tels que, quelle que soit la fonction initiale $\varphi_1(s)$ il y ait une même relation linéaire et homogène entre n fonctions conséquentes successives.

Il est alors bien clair que toutes les conséquentes de la fonction φ_1 restent dans une même variété linéaire fonctionnelle à $n-1$ dimensions, déterminée par les $n-1$ premières conséquentes et l'origine.

Soit donc

$$\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \dots + \alpha_n \varphi_n = 0$$

la relation supposée. Les α sont des constantes.

Remplaçons φ_i par $K_{(i-1)}[\varphi_1] = \varphi_1(s) + \int K_{(i-1)}(st) \varphi_1(t) dt$.

On doit avoir quel que soit $\varphi_1(s)$

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \varphi_1(s) + \int [\alpha_2 K_{(1)}(st) + \alpha_3 K_{(2)}(st) + \dots + \alpha_n K_{(n-1)}(st)] \varphi_1(t) dt = 0.$$

Il est nécessaire et suffisant pour cela que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 0. \quad (1)$$

$$\alpha_2 K_{(1)} + \alpha_3 K_{(2)} + \dots + \alpha_n K_{(n-1)} = 0. \quad (2)$$

La seconde relation s'écrit symboliquement, en tenant compte de la première

$$\alpha_1 + \alpha_2(\mathbf{I} + \mathbf{K}) + \alpha_3(\mathbf{I} + \mathbf{K})^2 + \dots + \alpha_n(\mathbf{I} + \mathbf{K})^{n-1} = 0.$$

Il y a donc entre les $(n-1)$, premiers itérés de \mathbf{K} et par suite entre $(n-1)$ itérés successifs une relation linéaire et homogène à coefficients constants

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{K}^{(p)} + \mathbf{A}_1 \mathbf{K}^{(p+1)} + \dots + \mathbf{A}_{n-2} \mathbf{K}^{(p+n-2)} = 0.$$

Cette relation est bien homogène à cause de la relation (1) entre les α et elle exige que l'on ait, d'après une théorie classique

$$\mathbf{K}^{(p)} = k_1 \omega_1^p + k_2 \omega_2^p + \dots + k_{n-2} \omega_{n-2}^p$$

où les k sont des fonctions de s et t convenablement choisies, indépendantes de p , et où les ω sont les racines de l'équation de degré $n-2$

$$\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 \omega + \mathbf{A}_2 \omega^2 + \dots + \mathbf{A}_{n-2} \omega^{n-2} = 0$$

qui s'écrit ici

$$\alpha_1 + \alpha_2(\mathbf{I} + \omega) + \alpha_3(\mathbf{I} + \omega)^2 + \dots + \alpha_n(\mathbf{I} + \omega)^{n-1} = 0$$

elle est bien de degré $n-2$ quand on a éliminé la racine nulle.

Il résulte de là que le noyau résolvant de $\mathbf{K}(st)$ est la fonction rationnelle en λ ;

$$\Gamma(st, \lambda) = \frac{\omega_1 k_1}{1 - \omega_1 \lambda} + \frac{\omega_2 k_2}{1 - \omega_2 \lambda} + \dots + \frac{\omega_{n-2} k_{n-2}}{1 - \omega_{n-2} \lambda}$$

et que par suite la déterminante fondamentale est

$$\mathbf{D}(\lambda) = (1 - \omega_1 \lambda)(1 - \omega_2 \lambda) \dots (1 - \omega_{n-2} \lambda)$$

soit à un facteur constant près

$$\mathbf{A}_0 \lambda^{n-2} + \mathbf{A}_1 \lambda^{n-3} + \dots + \mathbf{A}_{n-2}$$

ou

$$\alpha_1 \lambda^{n-1} + \alpha_2 \lambda^{n-2} (\mathbf{I} + \lambda) + \dots + \alpha_n (\mathbf{I} + \lambda)^{n-1}$$

en réalité de degré $n-2$.

La déterminante fondamentale $\Delta(\lambda)$ du noyau symétrique gauche $H(st)$ qui a donné naissance au noyau de rotation considéré est

$$\Delta(\lambda) = D\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)$$

soit donc à un facteur constant près

$$\alpha_1 \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^{n-1} + \alpha_2 \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^{n-2} \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \dots + \alpha_n \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Pour trouver les valeurs singulières du noyau $H(st)$, posons

$$\theta = \frac{2\lambda - 1}{2\lambda + 1}$$

l'équation en θ est alors

$$\alpha_1 \theta^{n-1} + \alpha_2 \theta^{n-2} + \dots + \alpha_n = 0$$

et elle est à la racine $\theta = 1$. Elle doit avoir $n - 2$ autres racines donnant des valeurs purement imaginaires deux à deux conjuguées pour λ .

En posant comme plus haut

$$\lambda = \frac{i}{2} \cotg V$$

on a

$$\theta = e^{-2iV}$$

et V doit prendre des valeurs deux à deux opposées.

Comme les α sont réels, nous voyons qu'il faut de plus que n soit pair.

Soient alors

$$V_k \quad \left(k = 1, 2, \dots, \frac{n-2}{2}\right)$$

les $\frac{n-2}{2}$ angles de rotations du noyau $K(st)$, supposés tous distincts et correspondants aux $n - 2$ valeurs singulières de ce noyau. L'équation en θ s'écrit

$$(\theta - 1) \prod_{k=1}^{p-1} [\theta^2 - 2\theta \cos 2V_k + 1] = 0 \quad \text{avec} \quad 2p = n$$

et la relation correspondante entre les φ s'écrit symboliquement

$$(\varphi - 1) \prod_{k_1}^{p-1} [\varphi^2 - 2\varphi \cos 2V_k + 1] = 0$$

où on doit développer et remplacer φ^m par φ_{m+1} , φ^0 par φ_1 .

Il vient ainsi les relations

$$\begin{aligned} \varphi_2 - \varphi_1 &= 0 \quad \text{pour } n = 2 \\ \varphi_4 - \varphi_3[1 + 2 \cos 2V_1] + \varphi_2[1 + 2 \cos 2V_2] - \varphi_1 &= 0 \quad \text{pour } n = 4 \\ \varphi_6 - \varphi_5[1 + 2 \cos 2V_1 + 2 \cos 2V_2] + 2\varphi_4[1 + \cos 2V_1 + \cos 2V_2 + 2 \cos 2V_1 \cos 2V_2] \\ &\quad - 2\varphi_3[1 + \cos 2V_1 + \cos 2V_2 + 2 \cos 2V_1 \cos 2V_2] \\ &\quad + \varphi_2[1 + 2 \cos 2V_1 + 2 \cos 2V_2] - \varphi_1 = 0 \\ &\quad \text{pour } n = 6 \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Nous supposons dans tout ceci les V_k tous différents et différents de 0 et $\frac{\pi}{2}$.

On peut les supposer compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, puisqu'ils sont définis par leurs cotangentes et que les valeurs singulières λ sont deux à deux opposées.

Ce qui précède nous montre que seuls ont la propriété demandée les noyaux de rotations ayant un nombre fini de valeurs singulières. Nous nommerons les rotations correspondantes des rotations finies. Remarquons enfin que la relation qui existe entre n consécutives successives n'est pas à coefficients entièrement arbitraires, mais dépend de $\frac{n-2}{2}$ paramètres seulement, qui sont les angles V_k .

Pour un tel noyau on a

$$D(-1) = (1 + \omega_1)(1 + \omega_2) \dots (1 + \omega_{n-2})$$

mais les valeurs singulières d'un tel noyau sont d'une part $\frac{1}{\omega_k}$, et de l'autre

$\frac{1}{e^{-2iV_k} - 1}$; il vient donc

$$1 + \omega_k = e^{-2iV_k}.$$

Le produit du facteur $(1 + \omega_k)$ et de son conjugué qui s'obtient en changeant le signe de V_k est donc 1; et comme il y a un nombre pair de tels facteurs, on a

$$D(-1) = 1.$$

En nous reportant à la fin du paragraphe 7, nous voyons que *les noyaux finis donneront naissance quand on prendra leurs coefficients de Fourier relativement à un système orthogonal complet* (φ_i) *à un déterminant orthogonal infini convergent à la Von Koch vers la valeur* $+1$. Ces remarques étant faites, examinons d'un peu plus près la forme de ces noyaux finis.

Noyaux de premier ordre. — Ils correspondent au cas où $n = 4$. Il y a un seul angle de rotation V , le noyau symétrique gauche correspondant à deux valeurs singulières

$$\pm \frac{i}{2} \cotg V.$$

Soient

$$\Phi(s) = u(s) + iv(s); \quad \bar{\Phi}(s) = u(s) - iv(s)$$

les deux fonctions isotropes conjuguées qui sont les fonctions fondamentales correspondantes; u et v sont des fonctions réelles vérifiant

$$\begin{aligned} [u^2] &= [v^2] = 1 \\ [u \cdot v] &= 0 \end{aligned}$$

alors

$$[\Phi^2] = [\bar{\Phi}^2] = 0; \quad [\Phi \cdot \bar{\Phi}] = 2.$$

Les variétés linéaires unidimensionnelles d'équation

$$f(s) = \rho \Phi(s); \quad f(s) = \rho \bar{\Phi}(s)$$

sont invariantes et glissent sur elles-mêmes pendant la rotation. Le plan canonique bidimensionnel d'équation

$$f(s) = \alpha \Phi(s) + \beta \bar{\Phi}(s)$$

est aussi invariant et tourne sur lui-même autour de l'origine de l'angle $2V$. Comme Φ et $\bar{\Phi}$ sont des fonctions fondamentales associées pour le noyau symétrique gauche $H(st)$ qui donne naissance au noyau de rotation considéré, on a

$$H(st) = k \left[\frac{\Phi(s) \bar{\Phi}(t)}{\frac{i}{2} \cotg V} - \frac{\bar{\Phi}(s) \Phi(t)}{\frac{i}{2} \cotg V} \right]$$

où k est une constante à déterminer.

En écrivant que

$$\Phi(s) = \frac{i}{2} \cotg V \int H(st) \Phi(t) dt$$

et tenant compte de

$$[\Phi^2] = [\bar{\Phi}^2] = 0; \quad [\Phi \cdot \bar{\Phi}] = 2$$

il vient

$$k = \frac{1}{2}$$

et

$$H(st) = \frac{1}{i \cotg V} [\Phi(s) \bar{\Phi}(t) - \Phi(t) \bar{\Phi}(s)]$$

ou encore

$$H(st) = \Re \left[\frac{2 \Phi(s) \bar{\Phi}(t)}{i \cotg V} \right]$$

en désignant par $\Re[U]$ la partie réelle de l'imaginaire U .

Calculons maintenant les itérés successifs de $H(st)$. Il vient

$$H^{(2)}(st) = \int H(su) H(ut) du = \frac{1}{[i \cotg V]^2} [\Phi(s) \bar{\Phi}(t) [\Phi \cdot \bar{\Phi}] + \Phi(t) \bar{\Phi}(s) [\Phi \cdot \bar{\Phi}]]$$

ou

$$H^{(2)}(st) = \Re \left[\frac{2^2 \Phi(s) \bar{\Phi}(t)}{[i \cotg V]^2} \right]$$

et de même

$$H^{(n)}(st) = \Re \left[\frac{2^n \Phi(s) \bar{\Phi}(t)}{[i \cotg V]^n} \right]$$

puis pour le noyau résolvant de $H(st)$

$$\Lambda(st, \lambda) = \Re \left[\frac{2 \Phi(s) \bar{\Phi}(t)}{i \cotg V - 2\lambda} \right] \quad (\lambda \text{ réel})$$

enfin pour $\lambda = \frac{1}{2}$, il vient pour le noyau d'une rotation du premier ordre

$$K(st) = \Re[-2i \sin V e^{-iV} \Phi(s) \bar{\Phi}(t)] = -2i \sin V [e^{-iV} \Phi(s) \bar{\Phi}(t) - e^{iV} \bar{\Phi}(t) \Phi(s)].$$

Nous représenterons à l'avenir une telle expression par le symbole

$$K(st) = \{V | \Phi\}$$

en étant convenu que Φ est une fonction isotrope vérifiant la condition

$$[\Phi, \bar{\Phi}] = 2.$$

Remarquons que l'on a

$$K(ts) = \{V | \bar{\Phi}\} = \{-V | \Phi\}$$

et que

$$K(st) = \{+V | \Phi\} = \{-V | \bar{\Phi}\}.$$

Ces propriétés nous seront utiles.

Le Calcul que nous venons de faire s'applique sans modification aux noyaux d'ordre plus élevé.

Un noyau d'ordre p a p angles de rotation

$$V_1; V_2; \dots V_p$$

que nous supposons différents et compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$; il correspond à

$$n = 2p + 2.$$

Le noyau symétrique gauche correspondant a $2p$ valeurs singulières distinctes 2 à 2 conjuguées

$$\pm \frac{i}{2} \cotg V_1; \quad \pm \frac{i}{2} \cotg V_2; \quad \dots \quad \pm \frac{i}{2} \cotg V_p$$

et $2p$ fonctions fondamentales correspondantes 2 à 2 conjuguées

$$\Phi_1 \text{ et } \bar{\Phi}_1; \quad \Phi_2 \text{ et } \bar{\Phi}_2; \quad \dots \quad \Phi_p \text{ et } \bar{\Phi}_p.$$

Ces fonctions sont isotropes

$$[\Phi_k^2] = [\bar{\Phi}_k^2] = 0$$

et

$$[\Phi_k \cdot \bar{\Phi}_k] = 2.$$

En outre d'après la théorie classique des fonctions fondamentales les fonctions d'indices différents sont deux à deux orthogonales

$$[\Phi_k \cdot \Phi_l] = [\Phi_k \cdot \bar{\Phi}_l] = [\bar{\Phi}_k \cdot \Phi_l] = [\bar{\Phi}_k \cdot \bar{\Phi}_l] = 0 \quad (k \neq l).$$

Il y a $2p$ variétés linéaires unidimensionnelles invariantes d'équation

$$\begin{aligned} f(s) &= \rho \Phi_k \\ f(s) &= \rho \bar{\Phi}_k \end{aligned} \quad k = 1, 2, \dots, p$$

qui glissent sur elles-mêmes pendant la rotation.

Ces variétés sont isotropes et deux variétés d'indice différent sont rectangulaires. Il y a p variétés linéaires bidimensionnelles invariantes d'équation

$$f(s) = \alpha \Phi_k + \beta \bar{\Phi}_k$$

la variété d'indice k , tournant sur elle-même de l'angle $2V_k$ autour de l'origine.

Ces variétés sont deux à deux complètement orthogonales, c'est-à-dire que toute droite de l'une est orthogonale à toute droite de l'autre.

Le calcul du noyau de rotation se fait exactement comme plus haut; on trouve sans difficulté pour le symétrique gauche

$$H(st) = \sum_{k=1}^p \Re \left[\frac{2 \Phi_k(s) \bar{\Phi}_k(t)}{i \cotg V_k} \right]$$

puis successivement, à cause des relations d'orthogonalité entre les Φ , pour ses itérés

$$H^{(n)}(st) = \sum_{k=1}^p \Re \left[\frac{2^n \Phi_k(s) \bar{\Phi}_k(t)}{(i \cotg V_k)^n} \right]$$

et enfin pour le noyau de rotation

$$\mathbf{k}(st) = \sum_{k_1}^p \Re[-2i \sin V_k e^{-iV_k} \Phi_k(s) \bar{\Phi}_k(t)]$$

que nous représenterons symboliquement par

$$\mathbf{K}(st) = \{V_1, V_2, \dots, V_p \mid \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_p\}$$

ce noyau ne changeant pas si l'on change simultanément le signe de tous les angles, et si l'on remplace chaque fonction Φ par sa conjuguée.

Si l'on ne fait qu'une seule de ces opérations, on obtient le noyau de la rotation inverse.

Remarque. — Nous avons dans ce qui précède supposé les angles V distincts de 0 et $\frac{\pi}{2}$. Voyons ce qui se passe dans ces cas limites.

Quand $V_k \rightarrow 0$ la partie correspondante du noyau \mathbf{K} s'évanouit et l'ordre de \mathbf{K} diminue simplement d'une unité. Il n'y a donc pas de difficulté dans ce cas. En particulier un noyau du premier ordre dont l'angle est nul se réduit identiquement à zéro, et la rotation correspondante se réduit à l'identité. Supposons maintenant que $V_k \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Plaçons-nous d'abord dans le cas du noyau du premier ordre. $\cotg V_k$ devient nulle, le calcul précédent n'a plus de sens, cependant la formule qui donne $\mathbf{K}(st)$ a encore un sens et devient ici

$$\mathbf{K}(st) = \Re[-2\Phi(s)\bar{\Phi}(t)] = -[\Phi(s)\bar{\Phi}(t) + \bar{\Phi}(s)\Phi(t)].$$

Ce noyau est encore de rotation; on a en effet

$$\begin{aligned} \int \mathbf{K}(su) \mathbf{K}(tu) du &= \Phi(s)\Phi(t)[\bar{\Phi}^2] + \Phi(s)\bar{\Phi}(t)[\Phi \cdot \bar{\Phi}] \\ &\quad + \Phi(t)\bar{\Phi}(s)[\Phi \cdot \bar{\Phi}] + \bar{\Phi}(s)\bar{\Phi}(t)[\Phi^2] \\ &= 2[\Phi(s)\bar{\Phi}(t) + \bar{\Phi}(s)\Phi(t)] = -\mathbf{K}(st) - \mathbf{K}(ts). \end{aligned}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que \mathbf{K} soit de rotation est donc remplie. Voyons l'effet d'une telle rotation sur une fonction $\varphi(s)$ du plan $(\Phi\bar{\Phi})$:

$$\varphi(s) = \alpha\Phi + \beta\bar{\Phi}$$

on a

$$\begin{aligned} K[\Phi] = & \alpha\Phi + \zeta\bar{\Phi} - \alpha\Phi(s)[\Phi \cdot \bar{\Phi}] - \alpha\bar{\Phi}(s)[\Phi^2] \\ & - \beta\Phi(s)[\bar{\Phi}^2] - \beta\bar{\Phi}(s)[\Phi \cdot \bar{\Phi}] \end{aligned}$$

ou

$$K[\varphi] = -\varphi$$

par suite le plan $(\Phi\bar{\Phi})$ est invariant et tourne sur lui-même de l'angle π , et les fonctions de ce plan sont transformées en leurs symétriques par rapport à l'origine.

Toutes les fonctions de ce plan sont fondamentales et toutes les droites de ce plan passant par l'origine sont des \mathbb{A}_1 invariantes.

Nous donnerons à une telle rotation fonctionnelle le nom de transposition du premier ordre. Remarquons que l'on a ici

$$K_{(s)}[\varphi] = \varphi$$

quel que soit la fonction φ et que $K_{(s)}(st)$ est identiquement nulle.

Les résultats précédents sont donc encore valables ici, mais il fallait faire pour ce cas particulier une démonstration spéciale. On pourra donc supposer dans un noyau du $p^{\text{ème}}$ ordre qu'un des angles est égal à $\frac{\pi}{2}$, sans rien changer à la forme ni aux propriétés d'un tel noyau.

Il en est encore de même si l'on suppose que tous les angles sont égaux à $\frac{\pi}{2}$.

Un tel noyau à la forme suivante

$$K(st) = \sum_{k_1}^p \Re[-2\Phi_{k_1}(s)\bar{\Phi}_{k_1}(t)]$$

où on suppose comme d'habitude que

$$\begin{aligned} [\Phi_k \cdot \Phi_l] &= [\bar{\Phi}_k \cdot \bar{\Phi}_l] = 0 && \text{quels que soient } k \text{ et } l \\ [\Phi_k \cdot \bar{\Phi}_l] &= [\bar{\Phi}_k \cdot \Phi_l] = 0 && \text{pour } k \neq l \\ [\Phi_k \cdot \bar{\Phi}_k] &= 2. \end{aligned}$$

On voit aisément, moyennant ces relations, qu'un tel noyau est encore de rotation, que toute fonction de la \mathbb{A}_{2p} définie par les $\Phi_k, \bar{\Phi}_k$,

$$\varphi = \alpha\Phi_1 + \zeta\bar{\Phi}_1 + \gamma\Phi_2 + \delta\bar{\Phi}_2 + \dots + \lambda\bar{\Phi}_p$$

est transformée en

$$K[\varphi] = -\varphi$$

et que l'on a identiquement

$$K_{(s)}(st) = 0.$$

Nous donnerons à une telle rotation le nom de transposition du $p^{\text{ème}}$ ordre.

Ajoutons enfin que le noyau $K(st)$ ne change pas si on y remplace les $\Phi, \bar{\Phi}$ par des fonctions $\Psi, \bar{\Psi}$, vérifiant

$$\begin{aligned} [\Psi_k \cdot \Psi_l] &= [\bar{\Psi}_k \cdot \bar{\Psi}_l] = 0 && \text{quels que soient } k \text{ et } l \\ [\Psi_k \cdot \bar{\Psi}_l] &= [\bar{\Psi}_k \cdot \Psi_l] = 0 && \text{pour } k \neq l \\ [\Psi_k \cdot \bar{\Psi}_k] &= 2 \end{aligned}$$

pourvu que les Ψ soient des combinaisons linéaires et homogènes à coefficients constants des Φ .

Voyons maintenant l'effet d'une rotation finie sur une fonction $\varphi(s)$ réelle quelconque.

Soit $K(st)$ un noyau de rotation d'ordre p :

$$K(st) = \sum_{k=1}^p \Re \left[-2i \sin V_k e^{-iV_k} \Phi_k(s) \bar{\Phi}_k(t) \right]$$

et $\varphi(s)$ une fonction quelconque réelle.

Posons

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p \left[\Phi_k(s) [\varphi \cdot \bar{\Phi}_k] + \bar{\Phi}_k(s) [\varphi \cdot \Phi_k] \right] + \theta(s) \\ &= \rho(s) + \theta(s) \end{aligned}$$

alors quel que soit l'indice k on a

$$[\theta \cdot \Phi_k] = [\theta \cdot \bar{\Phi}_k] = 0$$

puis

$$K[\theta] = \theta + \sum_{k=1}^p \Re \left[-2i \sin V_k e^{-iV_k} \Phi_k(s) [\bar{\Phi}_k \cdot \theta] \right] = \theta(s).$$

Cette conclusion subsiste encore d'ailleurs si θ n'est pas réelle car alors

$$K[\theta] = \theta(s) + \sum_{k_1}^p \left[-i \sin V_k e^{-iV_k} \Phi_k(s) [\bar{\Phi}_k \cdot \theta] + i \sin V_k e^{iV_k} \bar{\Phi}_k(s) [\Phi_k \cdot \theta] \right] = \theta(s).$$

La fonction $\rho(s)$

$$\rho(s) = \frac{1}{2} \sum_{k_1}^p \left[\Phi_k(s) [\varphi \cdot \bar{\Phi}_k] + \bar{\Phi}_k(s) [\varphi \cdot \Phi_k] \right]$$

qu'on peut écrire, quand θ, ρ, φ sont réelles

$$\rho(s) = \sum_{k_1}^p \Re \left[\Phi_k(s) [\varphi \cdot \bar{\Phi}_k] \right]$$

appartient à la variété linéaire à $2p$ dimensions définies par les Φ_k et les $\bar{\Phi}_k$.

Ses coordonnées rapportées aux droites isotropes des multiplicités bidimensionnelles $(\Phi_k \bar{\Phi}_k)$ deux à deux complètement rectangulaires, sont

$$[\Phi_k \cdot \varphi]; \quad [\bar{\Phi}_k \cdot \varphi].$$

Enfin on a

$$K[\varphi] = K[\theta] + K[\rho] = \theta + K[\rho]$$

la transformée $K[\rho]$ se trouve d'après ce que nous avons vu plus haut dans cette même variété à $2p$ dimensions et s'obtient de la manière suivante.

Pour avoir les p projections de la transformée sur les $p \mathcal{M}_2$ canoniques de la rotation, il suffit de prendre les p projections sur les mêmes plans de la fonction ρ et de les faire tourner, chacune dans le plan correspondant autour de l'origine, respectivement des angles $2V_1, 2V_2, \dots, 2V_p$ dans un sens qui est déterminé dès qu'on a dans chacune de ces \mathcal{M}_2 distingué Φ_k de $\bar{\Phi}_k$. Autrement dit, $K[\rho]$ s'obtient en faisant subir à ρ une transformation fonctionnelle *topologiquement équivalente* à une rotation euclidienne ordinaire dans l'espace à $2p$ dimensions. Rotation dont les p plans canoniques sont les p plans $(\Phi_k \bar{\Phi}_k)$, les angles $2V_1, 2V_2, \dots, 2V_p$.

Pour avoir la transformée de φ il faut se placer dans la multiplicité linéaire $2p + 1$ fois étendue déterminée par la \mathcal{M}_{2p} précédente et par la fonction φ (ou θ), et le point φ subit topologiquement une rotation de l'espace à $2p + 1$ dimensions. Rota-

tion dont l'axe est la droite (0 θ) et qui correspond à la rotation à $2p$ dimensions définie plus haut.

Il y a donc identité complète entre les rotations fonctionnelles finies et les rotations euclidiennes dans les espaces à n dimensions. On obtient une transformation fonctionnelle topologiquement identique à une rotation dans l' E_{2p} en faisant subir une rotation finie d'ordre p à une fonction appartenant à la \mathcal{A}_{2p} définie par les $2p \mathcal{A}_1$ invariants de cette rotation finie, et on a une transformation fonctionnelle topologiquement équivalente à une rotation dans l' E_{2p+1} en faisant subir cette même rotation finie d'ordre p à une fonction n'appartenant pas à la \mathcal{A}_{2p} canonique de cette rotation finie.

Nous nous contenterons ici de ce rapide aperçu de la théorie et des propriétés des rotations finies. Dans un prochain Mémoire nous étudierons leur composition et les groupes finis les plus simples qu'on peut former avec ces rotations.

RÉSUMÉ

Étude d'un groupe de transformations linéaires fonctionnelles du type de Fredholm, généralisant les rotations des espaces euclidiens dans l'espace fonctionnel.

Le noyau de ces transformations est la valeur prise par le noyau résolvant d'un noyau symétrique gauche, quand on y fait $\lambda = +\frac{1}{2}$; les rotations laissent invariants les distances et les angles, transforment un système de fonctions orthogonales complet en un système de même nature. Si ce système est de plus également ou normalement dense, il en est de même du transformé.

Pour que deux systèmes orthogonaux et complets puissent se déduire l'un de l'autre par une rotation fonctionnelle, il faut et il suffit qu'ils soient *semblablement ordonnés*, c'est-à-dire que la série

$$\sum_i \left[1 - \int_a^b \varphi_i(s) \psi_i(s) ds \right]$$

converge. [φ_i et ψ_i sont les fonctions courantes des deux systèmes se correspondant]. De plus pour deux tels systèmes le tableau des quantités

$$A_{ij} = \int_a^b \varphi_i(s) \psi_j(s) ds$$

forme un déterminant infini orthogonal dans les deux sens convergeant normalement, au sens de M. Von Koch, vers une valeur qui ne dépend que de la rotation faisant passer d'un système à l'autre.

Enfin, deux systèmes semblablement ordonnés sont asymptotiquement identiques.
