ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

A. BUHL

Sur les formules fondamentales de l'électromagnétisme et de la gravifique

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 19 (1927), p. 1-38
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1927_3_19__1_0>

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

SUR LES FORMULES FONDAMENTALES

DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME ET DE LA GRAVIFIQUE

PAR M. A. BUHL

SIXIÈME MÉMOIRE

Ce Sixième Mémoire est consacré à une étude, à coup sûr fort partielle, des analogies existant entre les Théories physico-géométriques de Riemann-Einstein et la Théorie des groupes de Lie qui, refondue par des savants comme MM. Goursat, Cartan, Vessiot,... tient aux mêmes Principes analytiques.

J'ajoute sur les épreuves du présent écrit, en avril 1927, que si tout le monde est d'accord sur la possibilité du rapprochement en question, la chose vient d'être confirmée de manière particulièrement éclatante par un Mémoire de M. Élie Cartan sur *La Géométrie des groupes de transformations* (Journal de Mathématiques, publié par Henri Villat; 1927, fasc. I). Le présent travail, terminé en juin 1926, n'a évidemment pu en profiter. Mais, avec un peu d'attention, on pourrait faire d'intéressants rapprochements, ce qui ne m'empêche pas de reconnaître, avec empressement, que les développements de M. Cartan ont une étendue matérielle triple de l'étendue des miens.

Les propriétés des formules stokiennes sont toutes dans la multiplication extérieure des formes de Pfaff et ces formes sont les éléments naturels des groupes finis ou infinis.

Partout les synthèses ont le même cachet de simplicité; les théories géométriques de Darboux, en particulier la théorie du trièdre mobile, ont même base que les équations de Maxwell-Lorentz. Le plus intéressant de ce qui est ici tant soit peu développé concerne le glissement, sur une surface S, d'un trièdre dont la position dépend non seulement de coordonnées curvilignes u, v mais d'une variable auxiliaire t.

Alors le ds^2 de S est

$$ds^2 = \left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\, d\sigma\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial t}\, d\sigma\right)^2,$$

où $d\sigma$ est une représentation sphérique de ds. Les lignes asymptotiques et les lignes de courbure de S sont respectivement représentées par les équations

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\, d\sigma = 0.$$

On pensera peut-être que ceci n'a rien à faire avec les grandes voies de la Gravifique. Je ne l'ai pas trouvé, en effet, sur une grande voie mais dans un petit sentier latéral; cela m'ayant semblé une très jolie chose, je l'en ai rapportée. Puis, dans le même paysage en t, j'ai revu les géodésiques, la courbure, la formule d'Ossian Bonnet,... Dès lors le grand chemin était retrouvé!

CHAPITRE PREMIER

Groupes et Systèmes de Maurer.

[**1**] *Premier système fondamental de Lie.* — Soient des variables x_i, en nombre n, des paramètres a_k, en nombre r et également susceptibles de varier. Considérons les formules de transformation

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; \quad a_1, a_2, \dots, a_r). \tag{1}$$

Leur itération donne

$$x''_i = f_i(x'_1, x'_2, \dots, x'_n; \quad b_1, b_2, \dots, b_r) \tag{2}$$

ou bien, si ces formules donnent naissance à un *groupe*,

$$x''_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; \quad c_1, c_2, \dots, c_r). \tag{3}$$

Montrons d'abord qu'il existe de certaines fonctions F, des x' et des a, restant constantes, c'est-à-dire donnant $d\mathrm{F} = 0$ ou bien(¹)

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial a_k} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x'_i}\frac{\partial x'_i}{\partial a_k} = 0$$

en vertu d'équations différentielles à former.

Soient $\alpha_{jk}(a_1, a_2, \dots, a_r)$ ou, plus brièvement, $\alpha_{jk}(a)$ des fonctions, en nombre r^2, formant un déterminant

$$\alpha = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1r} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \dots & \alpha_{rr} \end{vmatrix}.$$

(¹) Dans toutes les formules du Mémoire, tout indice figurant deux fois dans un terme monome est *indice de sommation*.

On voit que les α_{jk} sont analogues aux g_{jk} des ds^2 de Riemann-Einstein à cela près que, tout au moins pour l'instant, nous ne supposons aucune relation entre α_{jk} et α_{kj}. Formons

$$\alpha_{jk}\frac{\partial F}{\partial a_k} + \alpha_{jk}\frac{\partial x'_i}{\partial a_k}\frac{\partial F}{\partial x'_i} = 0,$$

ce que l'on conviendra d'écrire

$$(4) \qquad Y_j(F) = A_j(F) + X'_j(F) = 0$$

en posant

$$(5) \qquad A_j(F) = \alpha_{jk}\frac{\partial F}{\partial a_k}, \qquad X'_j(F) = \xi_{ji}(x')\frac{\partial F}{\partial x'_i}$$

avec

$$(6) \qquad \xi_{ji}(x') = \alpha_{jk}\frac{\partial x'_i}{\partial a_k}.$$

Le système d'équations (6) peut être résolu sous la forme

$$(7) \qquad \frac{\partial x'_i}{\partial a_l} = \alpha^{jl}\xi_{ji}(x').$$

On voit que, conformément à l'habitude, α^{jl} est le quotient par α du mineur algébrique de α_{jl} dans le déterminant α.

Le système (7) est le *premier système fondamental de Lie*; il est de ceux qui s'intègrent, quand la chose est possible, avec des *constantes arbitraires*, ici $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

En (5) apparaissent déjà deux systèmes de *transformations infinitésimales*; les X'_j appartiennent au groupe que l'on se propose de construire et dont les propriétés s'expriment à l'aide des x et x' des équations (1), (2), (3); les A_j appartiennent au *groupe paramétrique* du précédent.

[**2**] *La structure, d'après Lie.* — Les équations (4), étant supposées vérifiables, doivent former un *système complet.* C'est dire que

$$(8) \qquad (Y_j, Y_k) = Y_jY_k - Y_kY_j = c^s_{jk}Y_s.$$

Si, conformément aux notations (5), les X' ne dépendent que des x', de même que les A ne dépendent que des a, les équations (8) doivent se scinder en

$$(8^*) \qquad (A_j, A_k) = c^s_{jk}A_s, \qquad (X'_j, X'_k) = c^s_{jk}X'_s,$$

les c^s_{jk} ne dépendant pas des x' dans la première de ces relations et ne dépendant pas des a dans la seconde. Il s'ensuit que ces c^s_{jk} ne peuvent être que de simples constantes numériques dites *constantes de structure*. On a évidemment

$$c^s_{jk} + c^s_{kj} = 0. \tag{9}$$

L'identité de Jacobi

$$\begin{vmatrix} X_i & X_j & X_k \\ X_i & X_j & X_k \\ X_i & X_j & X_k \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{donne} \qquad \begin{vmatrix} c^\tau_{si} & c^\tau_{sj} & c^\tau_{sk} \\ c^s_{i\omega} & c^s_{j\omega} & c^s_{k\omega} \\ i & j & k \end{vmatrix} = 0. \tag{10}$$

Pour obtenir ce résultat il n'y a qu'à développer le premier déterminant (10) en écrivant

$$X_j X_k - X_k X_j = (X_j, X_k) = c^s_{jk} X_s$$

pour mineur du X_i de la première ligne; on continue de même pour les X_j et X_k de cette même première ligne. La seconde relation (10), développée en tenant compte de (9), est celle que l'on écrit ordinairement

$$c^\tau_{si} c^s_{jk} + c^\tau_{sj} c^s_{ki} + c^\tau_{sk} c^s_{ij} = 0, \tag{11}$$

du moins avec des indices supérieurs, tels que τ et s, déjà employés par Schur[1].

Ici nous préférerons plutôt, à (11), la seconde équation (10) avec ses *indices de substitution* ω dont le jeu, immédiatement saisissable, a d'ailleurs été expliqué maintes fois dans les Mémoires précédents. Nous verrons plus loin que cette symétrie de (10_2) se conserve, au moins partiellement, dans des questions plus complexes relevant de la Théorie des groupes *infinis* de M. E. Cartan.

Enfin les indices supérieurs ont encore l'avantage, de par l'opposition qu'ils offrent ainsi avec des indices inférieurs de même nom, de se prêter, d'une manière tout à fait canonique, aux combinaisons du Calcul différentiel absolu.

[3] *Rôle du premier système fondamental de Lie.* — Aux $\alpha_{ik}(a)$ adjoignons des $\alpha_{ik}(b)$ et des $\alpha_{ik}(c)$. Le système

$$\alpha_{i\lambda}(b)\frac{\partial \Phi}{\partial b_\lambda} + \alpha_{i\lambda}(c)\frac{\partial \Phi}{\partial c_\lambda} = 0 \tag{12}$$

---

(1) F. SCHUR. *Neue Begründung der Theorie der endlichen Transformationsgruppen.* Mathematische Annalen. Band XXXV, 1890.

est encore *complet* d'après la première équation (8*). Multipliant par $\alpha^{ik}(b)$, on a, en tenant compte de

$$\alpha^{ik}(b)\,\alpha_{i\lambda}(b) = \alpha^k_\lambda = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = \lambda \\ 0 & \text{si} \quad k \neq \lambda \end{cases}, \tag{13}$$

l'équation

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b_k} + \alpha^{ik}(b)\,\alpha_{i\lambda}(c)\frac{\partial \Phi}{\partial c_\lambda} = 0$$

d'où

$$\frac{\partial c_\lambda}{\partial b_k} = \alpha^{ik}(b)\,\alpha_{i\lambda}(c). \tag{14}$$

C'est là un système du type (7). Il peut être intégré par des formules telles que

$$\begin{cases} c_i = c_i(a_1, a_2, \ldots, a_r; \quad b_1, b_2, \ldots, b_r), \\ a_i = c_i(a_1, a_2, \ldots, a_r; \quad a^0_1, a^0_2, \ldots, a^0_r). \end{cases}$$

Enfin, avec (13),

$$\frac{\partial x''_i}{\partial b_k} = \frac{\partial x''_i}{\partial c_\lambda}\frac{\partial c_\lambda}{\partial b_k} = \alpha^{t\lambda}(c)\,\xi_{ti}(x'')\,\alpha^{jk}(b)\,\alpha_{j\lambda}(c) = \alpha^{jk}(b)\,\xi_{ji}(x'').$$

Ceci est encore un système fondamental du type (7) correspondant, cette fois, à l'équation (2). Cette dernière doit bien contenir les x' puisque, pour $b_k = a^0_k$ d'où $c_i = a_i$, on doit trouver $x'' = x'$ d'après (1) et (3).

On peut déjà conclure que la coexistence des formules (1), (2), (3) est assurée par celle des formules (7) et (8*).

En (8*) on a, en X', les *relations de structure* du groupe dont originellement on s'est proposé la construction; on a aussi, en A, les *relations de structure* du *groupe paramétrique*. Ces deux groupes ont visiblement mêmes structures; ils sont *holoèdriquement isomorphes*.

Remarquons encore qu'on pourrait reprendre les raisonnements de ce paragraphe en multipliant (12) par $\alpha^{ik}(c)$. On obtiendrait ainsi un second groupe paramétrique qui toutefois ne se distinguerait du précédent que par l'échange des b et des c.

En l'exposé maintenant fait, nous avons déjà les trois théorèmes fondamentaux de Lie qu'on peut résumer en ceci : *existence du système* (7), *des relations* (8*), *des conditions* (9) *et* (11).

[4] *Système de Maurer et formes de Pfaff.* — Le groupe paramétrique a quelque chose de plus simple, de plus symétrique que le groupe originel. Dans la première relation (8*), comme dans la première (5), les indices j et k varient tous deux de 1 à r, ce qui n'est pas le cas dans (8^*_2) et (5_2). A cette remarque correspond le caractère *simplement transitif* du groupe paramétrique. Si l'on sait construire de tels groupes, la construction des autres suit, de manière relativement simple, par un grand nombre de procédés dont les plus élémentaires ont déjà été exposés par Lie(1).

Aussi les disciples et continuateurs de Lie se sont-ils surtout attachés à la construction préliminaire du groupe paramétrique ou des groupes simplement transitifs. Les résultats les plus immédiatement saisissables et les plus élégants se trouvent dans cette voie dont nous ne nous écarterons guère.

La première équation (8*) développée se scinde en les relations

$$\alpha_{jm}\frac{\partial\alpha_{kn}}{\partial a_m}-\alpha_{km}\frac{\partial\alpha_{jn}}{\partial a_m}=c^s_{jk}\alpha_{sn}.$$

Multipliant par α^{tn} et tenant compte de (13), on peut écrire

$$\alpha_{jm}\alpha_{kn}\left(\frac{\partial\alpha^{tm}}{\partial a_n}-\frac{\partial\alpha^{tn}}{\partial a_m}\right)=c^t_{jk}.$$

Multipliant encore par $\alpha^{k\mu}\alpha^{j\nu}$, il vient

$$\frac{\partial\alpha^{t\nu}}{\partial a_\mu}-\frac{\partial\alpha^{t\mu}}{\partial a_\nu}=c^t_{jk}\alpha^{k\mu}\alpha^{j\nu}. \tag{15}$$

Telles sont les *équations de Maurer*.

La formule de Stokes, prise sous la forme

$$\int_C \alpha^{t\lambda}\,da_\lambda=\frac{1}{2}\int\int_S\left(\frac{\partial\alpha^{t\nu}}{\partial a_\mu}-\frac{\partial\alpha^{t\mu}}{\partial a_\nu}\right)da_\mu da_\nu, \tag{16}$$

les transforme en

$$\int_C \alpha^{t\lambda}\,da_\lambda=\frac{1}{2}c^t_{jk}\int\int_S \alpha^{k\mu}\alpha^{j\nu}\,da_\mu da_\nu. \tag{17}$$

En somme il n'y a plus, en (17), qu'une seule espèce d'expressions analytiques, savoir les *r formes de Pfaff*

$$\omega^t=\alpha^{t\lambda}\,da_\lambda. \tag{18}$$

(1) S. LIE. *Theorie der Transformationsgruppen* (Leipzig). Band I, 1888; Kap. 22.

Le *covariant bilinéaire* de ces formes est ce qui est écrit dans le second membre de la formule stokienne (16); en le désignant par $(\omega^t)'$, les équations de Maurer (15) prennent la forme

$$(19) \qquad (\omega^t)' = c^t_{jk}[\omega^k \omega^j].$$

La notation du second membre, déjà employée d'ailleurs dans le Mémoire précédent, est celle du *produit extérieur* de formes différentielles telles que (18). On a

$$[\omega^j \omega^k] = -[\omega^k \omega^j].$$

Les équations (19) sont, pour ainsi dire, les équations essentielles de la théorie des groupes continus. Comme on l'a encore vu dans le Mémoire précédent, elles avoisinent les *relations de structure* des espaces affines établies par M. E. Cartan. Il est aisé, par l'adjonction de nouvelles formes de Pfaff, d'imaginer des généralisations de ces équations ce qui conduit alors aux études sur les *groupes infinis* dues toujours à M. Cartan. Évidemment la voie ainsi prise est la voie féconde. Ajoutons encore ici que cette voie est aussi celle qui conduit aux *espaces de groupes* introduits par M. Cartan dans le grand Mémoire cité au début de celui-ci.

[**5**] *Les deux théories structurales.* — Reprenons le système de Maurer (15). Il conduit, de toute évidence, à l'équation (9). De plus l'identité

$$(20) \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial a_i} & \dfrac{\partial}{\partial a_j} & \dfrac{\partial}{\partial a_k} \\ \dfrac{\partial}{\partial a_i} & \dfrac{\partial}{\partial a_j} & \dfrac{\partial}{\partial a_k} \\ \alpha^{ti} & \alpha^{tj} & \alpha^{tk} \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{donne} \qquad \begin{vmatrix} c^t_{si} & c^t_{sj} & c^t_{sk} \\ c^s_{i\omega} & c^s_{j\omega} & c^s_{k\omega} \\ i & j & k \end{vmatrix} = 0.$$

Nous n'insistons pas sur le détail du calcul simple et déjà publié(¹) plusieurs fois. La simple comparaison, à première vue, des formules (10) et (20), révèle les deux théories de la structure des groupes continus. Les conditions d'intégrabilité du système (15) sont exactement celles trouvées d'abord avec l'identité de Jacobi et la théorie paraît, de plus en plus, se condenser dans l'étude de ce système (15). On voit aussi, à nouveau, qu'il y a bien davantage à espérer de la seconde théorie structurale que de la première.

(¹) F. SCHUR. *Zur Theorie der endlichen Transformationsgruppen.* Mathematische Annalen. Band XXXVIII, 1891, p. 268.

E. CARTAN. *Sur la structure des groupes infinis.* Annales de l'École Normale, (3), XXI, 1904, p. 186.

Certes l'identité de Jacobi est importante; elle est la base de la théorie des systèmes *jacobiens* et des systèmes *complets*, elle est aussi apparentée étroitement au théorème de Poisson, c'est-à-dire aux équations canoniques de la Dynamique classique.

Mais, en (20), nous retrouvons, dans le cas de nullité, les mineurs du fameux déterminant

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F}{\partial x_2} & \dfrac{\partial F}{\partial x_3} & \dfrac{\partial F}{\partial x_4} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \dfrac{\partial}{\partial x_4} \\ M_{1\ldots} & M_{2\ldots} & M_{3\ldots} & M_{4\ldots} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

qui contient les équations électromagnétiques de Maxwell-Lorentz puis, par substitution des D aux ∂, les développements fondamentaux du Calcul différentiel absolu et de la Gravifique d'Einstein. Préférer la seconde théorie de la structure à la première c'est, en somme, suivre l'évolution d'idées qui, au delà de la Mécanique classique, a conduit à la Gravifique et qui a également conduit des groupes *finis* aux groupes *infinis*.

[**6**] *Invariance des équations de Maurer.* — Les équations (15) sont invariantes lorsqu'on substitue, aux a_ϱ, des b_ϱ en nombre égal ou surabondant. On a alors

$$\frac{\partial A^{s\nu}}{\partial b_\mu} - \frac{\partial A^{s\mu}}{\partial b_\nu} = c^s_{jk} A^{k\mu} A^{j\nu}, \qquad A^{\kappa\tau} = \alpha^{\kappa\rho} \frac{\partial a_\varrho}{\partial b_\tau}. \tag{21}$$

L'assertion est évidente si l'on prend le système (15) sous la forme (17) ou (19) car les formes ω^t ne peuvent se changer qu'en formes linéaires analogues.

Le calcul vérifie aussi la chose très simplement. De la dernière équation (21), on tire

$$\frac{\partial A^{s\nu}}{\partial b_\mu} = \frac{\partial \alpha^{s\rho}}{\partial b_\mu} \frac{\partial a_\varrho}{\partial b_\nu} + \alpha^{s\rho} \frac{\partial^2 a_\varrho}{\partial b_\nu \partial b_\mu},$$

$$\frac{\partial A^{s\mu}}{\partial b_\nu} = \frac{\partial \alpha^{s\rho}}{\partial b_\nu} \frac{\partial a_\varrho}{\partial b_\mu} + \alpha^{s\rho} \frac{\partial^2 a_\varrho}{\partial b_\mu \partial b_\nu}.$$

Observant que

$$\frac{\partial \alpha^{s\rho}}{\partial b_\mu} = \frac{\partial \alpha^{s\rho}}{\partial a_\tau} \frac{\partial a_\tau}{\partial b_\mu}, \qquad \frac{\partial \alpha^{s\rho}}{\partial b_\nu} = \frac{\partial \alpha^{s\rho}}{\partial a_\tau} \frac{\partial a_\tau}{\partial b_\nu},$$

on a, après quelques permutations d'indices de sommation,

$$\frac{\partial A^{s\nu}}{\partial b_\mu} - \frac{\partial A^{s\mu}}{\partial b_\nu} = \left(\frac{\partial \alpha^{s\rho}}{\partial a_\tau} - \frac{\partial \alpha^{s\tau}}{\partial a_\rho}\right)\frac{\partial a_\tau}{\partial b_\mu}\frac{\partial a_\rho}{\partial b_\nu}$$

et (21) s'écrit

$$\left(\frac{\partial \alpha^{s\rho}}{\partial a_\tau} - \frac{\partial \alpha^{s\tau}}{\partial a_\rho} - c^s_{jk}\alpha^{k\tau}\alpha^{j\rho}\right)\frac{\partial a_\tau}{\partial b_\mu}\frac{\partial a_\rho}{\partial b_\nu} = 0.$$

Comme ceci doit avoir lieu quelles que soient les fonctions a_τ, la nullité de la parenthèse est obligatoire et l'on retrouve le système (15) dont la forme a été conservée en (21).

Appliquons ceci au cas où $a_\rho = \lambda_\rho t$. Les λ_ρ correspondent, si l'on veut, aux a_ρ et t est une variable surabondante. Les $A^{s\tau}$ de la seconde équation (21) sont ici

$$(22) \qquad \theta^{s\rho} = t\alpha^{s\rho}, \qquad \lambda^s = \lambda_\rho \alpha^{s\rho}$$

et les transformées de (15), type (21), qui contiennent t, sont

$$(23) \qquad \frac{\partial \theta^{s\rho}}{\partial t} - \frac{\partial \lambda^s}{\partial \lambda_\rho} = c^s_{kj}\lambda^j\theta^{k\rho}.$$

C'est là une équation fort importante qui jouera un rôle essentiel dans tout ce qui suit. Multipliée par λ_ρ, elle donne, d'après (22),

$$\frac{\partial}{\partial t}(t\lambda^s) - \lambda_\rho\frac{\partial \lambda^s}{\partial \lambda_\rho} = c^s_{kj}\lambda^j\lambda^k.$$

Or, k et j variant tous deux de 1 à r, le second membre finalement obtenu est identiquement nul d'après (9). Donc

$$\frac{\partial}{\partial t}(t\lambda^s) = \lambda_\rho\frac{\partial \lambda^s}{\partial \lambda_\rho}.$$

Si l'on considère ceci comme une équation aux dérivées partielles à fonction inconnue λ^s et en variables λ_ρ et t, on en a immédiatement l'intégrale générale que l'on peut mettre sous la forme

$$(24) \qquad \lambda^s = \lambda_p f^{sp}(t\lambda_1, t\lambda_2, \ldots),$$

les f^{sp} étant r^2 fonctions arbitraires. Cette formule (24) n'est que la seconde (22) où

$$\alpha^{sp}(a_1, a_2, \ldots, a_r)$$

serait considéré comme une fonction arbitraire des a_ϱ en laquelle on remplacerait a_ϱ par $t\lambda_\varrho$. *On est donc conduit à étudier le système* (23) *en lequel les* $\alpha^{s\rho}$ *de* (22_2) *sont considérés comme fonctions arbitraires de* $a_\varrho = t\lambda_\varrho$.

Pour abréger le langage, nous dirons que le système (23), considéré comme il vient d'être expliqué, est le *système* S.

Remarquons que si l'on forme véritablement les équations de Maurer (15) ou (21) en vue de l'obtention du groupe paramétrique, ce que nous avons supposé jusqu'ici, l'indice t, ou s, varie, comme μ ou ν, de 1 à r. Mais on voit aisément qu'on peut considérer des systèmes plus généraux, que nous appellerons toujours « sytèmes de Maurer », en lesquels t ou s peuvent varier de 1 à un nombre plus grand ou plus petit que r.

Cette hypothèse plus large ne change rien d'essentiel aux raisonnements précédents.

[7] *Conséquences de l'intégrabilité du système* S. — Dans le système S, il n'y a plus qu'une seule variable qui est t. Les λ_ϱ sont des paramètres. Les $\theta^{s\rho}$ sont les inconnues.

Il s'agit donc d'un système linéaire toujours *intégrable*, au sens analytique le plus général du mot. Cependant, comme nous allons le voir, il semble avoir la condition d'existence

$$\frac{\partial^2\lambda^s}{\partial\lambda_\varrho\,\partial\lambda_\tau} = \frac{\partial^2\lambda^s}{\partial\lambda_\tau\,\partial\lambda_\varrho} \tag{25}$$

qui ne paraît pas réalisée de manière immédiatement évidente.

Il faut évidemment conclure de là que, si la prétendue condition (25) conduit à quelque nouveau système différentiel T, celui-ci sera satisfait *nécessairement*, c'est-à-dire intégré, dès qu'il en sera ainsi du système S. Or, comme nous allons le voir encore, le système T est un nouveau *système de Maurer*, ne différant de (15) que par les notations. *Ce système sera donc intégré par intégration préliminaire d'un système linéaire* S et c'est sur un tel système que les considérations théoriques précédentes font reposer toute la génération des groupes continus.

Développons tout ceci. Le système (23) peut d'abord s'écrire

$$\frac{\partial\lambda^s}{\partial\lambda_\varrho} = \frac{\partial\theta^{s\rho}}{\partial t} + c^s_{jk}\lambda^j\theta^{k\rho}.$$

On tire de là

$$\frac{\partial\lambda^s}{\partial\lambda_\varrho\,\partial\lambda_\tau} = \frac{\partial^2\theta^{s\rho}}{\partial t\,\partial\lambda_\tau} + c^s_{jk}\lambda^j\frac{\partial\theta^{k\rho}}{\partial\lambda_\tau} + c^s_{jk}\theta^{k\rho}\left(\frac{\partial\theta^{j\tau}}{\partial t} + c^j_{mn}\lambda^m\theta^{n\tau}\right),$$

$$\frac{\partial\lambda^s}{\partial\lambda_\tau\,\partial\lambda_\varrho} = \frac{\partial^2\theta^{s\tau}}{\partial t\,\partial\lambda_\varrho} + c^s_{jk}\lambda^j\frac{\partial\theta^{k\tau}}{\partial\lambda_\varrho} + c^s_{jk}\theta^{k\tau}\left(\frac{\partial\theta^{j\rho}}{\partial t} + c^j_{mn}\lambda^m\theta^{n\rho}\right).$$

De ces deux équations il s'agit de retrancher la seconde de la première. Observons d'abord que la différence des troisièmes termes des seconds membres (termes formés avec le premier des parenthèses) peut s'écrire, d'après (9) et avec une interversion d'indices j, k,

$$c_{jk}^s \theta^{k\rho} \frac{\partial \theta^{j\sigma}}{\partial t} + c_{jk}^s \theta^{j\sigma} \frac{\partial \theta^{k\rho}}{\partial t} = c_{jk}^s \frac{\partial}{\partial t} (\theta^{k\rho} \theta^{j\sigma}).$$

Ensuite, si l'on pose

$$V^{s\rho\sigma} = \frac{\partial \theta^{s\rho}}{\partial \lambda_\sigma} - \frac{\partial \theta^{s\sigma}}{\partial \lambda_\rho} - c_{kj}^s \theta^{j\sigma} \theta^{k\rho},$$

la différence cherchée prend la forme

$$\frac{\partial}{\partial t} V^{s\rho\sigma} = c_{kj}^s \lambda^j V^{k\rho\sigma}, \tag{26}$$

abstraction faite de termes qui se détruisent identiquement d'après la seconde égalité (10) ou (20). Comme on a eu déjà recours à (9), on voit que, pour obtenir (26), il faut faire intervenir les deux identités structurales fondamentales.

Imaginons maintenant le système (23), ou système S, *intégré de telle manière que l'on ait toujours* $\theta^{s\rho} = 0$ *pour* $t = 0$.

D'abord on aura, pour les inconnues, des séries entières en t, telles que

$$\theta^{sk} = \left(\frac{\partial \lambda^s}{\partial \lambda_k} \right)_0 t + \ldots,$$

l'indice zéro accolé à une parenthèse indiquant la valeur de celle-ci pour $t = 0$. Soit aussi

$$\lambda^s = \Lambda_0^s + \Lambda_1^s t + \ldots;$$

alors

$$\frac{\partial \theta^{s\alpha}}{\partial \lambda_\beta} = \frac{\partial}{\partial \lambda_\beta} \left(\frac{\partial \lambda^s}{\partial \lambda_\alpha} \right)_0 t + \ldots = \frac{\partial^2 \Lambda_0^s}{\partial \lambda_\beta \partial \lambda_\alpha} t + \ldots$$

$$\frac{\partial \theta^{s\beta}}{\partial \lambda_\alpha} = \frac{\partial}{\partial \lambda_\alpha} \left(\frac{\partial \lambda^s}{\partial \lambda_\beta} \right)_0 t + \ldots = \frac{\partial^2 \Lambda_0^s}{\partial \lambda_\alpha \partial \lambda_\beta} t + \ldots;$$

donc l'expression

$$\frac{\partial \theta^{s\rho}}{\partial \lambda_\sigma} - \frac{\partial \theta^{s\sigma}}{\partial \lambda_\rho},$$

développée suivant les puissances croissantes de t, commence par un terme en t^2.

Il en sera de même pour $V^{s\rho\tau}$, puisque les $\theta^{j\tau}$, $\theta^{k\rho}$ commencent par des termes en t. Donc les deux membres de l'équation (26) s'annulent pour $t = 0$.

Si l'on dérive cette équation, par rapport à t, un nombre quelconque de fois, on voit que toutes les dérivées

$$\frac{\partial^i}{\partial t^i} V^{s\rho\tau}$$

s'annulent, quel que soit i, pour $t = 0$. Donc $V^{s\rho\tau}$ est identiquement nul, quel que soit t, et *l'on a*

$$\frac{\partial \theta^{s\rho}}{\partial \lambda_\tau} - \frac{\partial \theta^{s\tau}}{\partial \lambda_\rho} = c^s_{kj}\theta^{j\tau}\theta^{k\rho} \tag{27}$$

avec toutes les fonctions $\theta^{s\rho}$ qui satisfont au système (23) *et qui s'annulent pour* $t = 0$.

Donc le système de Maurer (15) ou (27) est intégré par l'intégration préliminaire du système S ou système (23) quand, dans les $\lambda^s = \lambda_\rho \alpha^{s\rho}$ de celui-ci, on considère les $\alpha^{s\rho}(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ comme des fonctions arbitraires des $a_i = \lambda_i t$.

C'est là, en somme, un résultat(1) d'apparence élémentaire, analogue à celui d'après lequel l'équation

$$X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

est considérée comme intégrée dès qu'il en est ainsi du système

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}.$$

Sophus Lie a toujours considéré des résultats de ce genre comme un idéal qu'il atteignit enfin mais après de longs détours. C'est ainsi qu'après avoir constaté que sa théorie primordiale conduisait à des équations fonctionnelles à peine accessibles à des méthodes de résolution ordinaire, il ajoute(2) : « Es war daher eine überras- « chende Entdeckung, als ich seinerzeit fand, dass die Erledigung dieser Functional- « gleichungen sich auf die Integration von *gewöhnlichen* Differentialgleichungen « zurückführen lässt. »

---

(1) A. BUHL. *Sur les groupes continus et l'intégration des équations de Maurer*. Comptes rendus, 19 avril 1926.

(2) S. LIE. *Bestimmung aller r- gliedrigen transitiven Transformationsgruppen durch ausführbare Operationen*. Berichte der Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Band 42, 1890, S. 478.

[8] *Cas particuliers du système* S. — Après la construction des groupes par opérations « exécutables », devait venir la question de leur construction par opérations *algébriques*. Ici la particularisation apparaît de manière extrêmement simple.

Reprenons le système (23) avec les λ^s de (24) et, dans les fonctions arbitraires f^{sp} de ces λ^s, n'introduisons que les *rapports des quantités* $t\lambda_i$ *prises deux à deux.*

Alors (23) devient un système *à coefficients constants* et l'intégration algébrique apparaît.

Celle-ci devient celle de Schur(1) quand les f^{sp} sont réduites à des constantes nulles pour $s \neq p$ et égales à l'unité pour $s = p$. Le système (23) s'écrit alors

$$\frac{\partial \theta^{s\rho}}{\partial t} = \varepsilon_{s\rho} + c^s_{kj}\lambda_j\theta^{k\rho},$$

en désignant précisément par $\varepsilon_{s\rho}$ une constante nulle pour $s \neq \rho$ et égale à l'unité pour $s = \rho$. La méthode de Schur revient donc à remplacer le déterminant général des r^2 éléments f^{sp} par

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

C'est quelque chose comme la particularisation qui permet de passer d'un ds^2 de Riemann absolument quelconque à un ds^2 euclidien. Cette méthode a été reproduite exactement par Lie(2) puis par Bianchi(3) et c'est elle que nous nous sommes proposé de généraliser en en conservant l'esprit somme toute assez élémentaire. Mais, comme nous l'indiquerons rapidement plus loin, les travaux de M. Cartan, où interviennent directement les formes de Pfaff, permettraient d'atteindre tous les buts précédents d'une manière plus brève.

Remarquons que dans le cas d'intégration algébrique correspondant aux f^{sp} homogènes et d'ordre zéro en λ_i, on cherche, en réalité, les solutions communes du système

$$(28) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \lambda_\rho \theta^{s\rho} = \lambda^s, \\ & \frac{\partial \theta^{s\rho}}{\partial \lambda_\sigma} - \frac{\partial \theta^{s\sigma}}{\partial \lambda_\rho} = c^s_{jk}\theta^{j\sigma}\theta^{k\rho}, \end{aligned} \right.$$

en lequel λ^s peut être considéré comme une fonction *homogène et d'ordre un,* d'ailleurs arbitrairement choisie, des variables λ_i.

---

(1) ENGEL. *Kleinere Beiträge zur Gruppentheorie.* Berichte der Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Band 43, 1891, S. 208.

(2) S. LIE. *Theorie der Transformationsgruppen.* Band III, 1893, S. 794.

(3) L. BIANCHI. *Lezioni sulla Teoria dei gruppi continui finiti di Trasformazioni.* Pise, 1918, p. 111.

[**9**] *Séries de fonctions homogènes.* — Le système (28) se prête à l'expression des fonctions $\theta^{s\rho}$ par des séries de fonctions homogènes, séries déjà considérées par Schur, dans son Mémoire cité ici au paragraphe 5, quand λ^s se réduit à λ_s.

De la première équation (28), on tire

$$\lambda_\rho \frac{\partial \theta^{s\rho}}{\partial \lambda_\tau} + \theta^{s\tau} = \frac{\partial \lambda^s}{\partial \lambda_\tau}.$$

La seconde, multipliée par λ_ρ, peut alors s'écrire

$$\theta^{s\tau} + \lambda_\rho \frac{\partial \theta^{s\tau}}{\partial \lambda_\rho} + C^s_j \theta^{j\tau} = \frac{\partial \lambda^s}{\partial \lambda_\tau}, \tag{29}$$

en posant

$$C^s_j = c^s_{jk} \lambda^k.$$

En désignant maintenant par $U^{s\tau}_m$ une fonction homogène, d'ordre m, des λ_i, écrivons

$$\begin{aligned}
\theta^{s\tau} &= \frac{1}{1!} U^{s\tau}_0 + \frac{1}{2!} U^{s\tau}_1 + \frac{1}{3!} U^{s\tau}_2 + \frac{1}{4!} U^{s\tau}_3 + \ldots \\
\lambda_\rho \frac{\partial \theta^{s\tau}}{\partial \lambda_\rho} &= \qquad\quad\;\; + \frac{1}{2!} U^{s\tau}_1 + \frac{2}{3!} U^{s\tau}_2 + \frac{3}{4!} U^{s\tau}_3 + \ldots \\
C^s_j \theta^{j\tau} &= \qquad\quad\;\; \frac{1}{1!} C^s_j U^{j\tau}_0 + \frac{1}{2!} C^s_j U^{j\tau}_1 + \frac{1}{3!} C^s_j U^{j\tau}_2 + \ldots
\end{aligned}$$

Le développement indiqué pour $\theta^{s\tau}$ vérifie visiblement l'équation (29), si l'on a

$$\left\{\begin{aligned}
U^{s\tau}_0 &= \frac{\partial \lambda^s}{\partial \lambda_\tau}, \\
U^{s\tau}_1 + C^s_j U^{j\tau}_0 &= 0, \\
U^{s\tau}_2 + C^s_j U^{j\tau}_1 &= 0, \\
U^{s\tau}_3 + C^s_j U^{j\tau}_2 &= 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
U^{s\tau}_m + C^s_j U^{j\tau}_{m-1} &= 0.
\end{aligned}\right. \tag{30}$$

En multipliant ces diverses équations par λ_τ, on a

$$\lambda_\tau U^{s\tau}_0 = \lambda^s,$$

$$\lambda_\tau U^{s\tau}_1 + c^s_{kj} \lambda^k \lambda^j = 0,$$

d'où évidemment, d'après (9),

$$\lambda_\tau U_1^{s\tau} = 0 .$$

De même, en général,

$$\lambda_\tau U_m^{s\tau} = 0 .$$

Avec ces divers résultats, on vérifie immédiatement que le développement en série adopté pour $\theta^{s\tau}$ satisfait à la première équation (28) si, bien entendu, les équations (30) ont lieu.

[**10**] *Développement de Schur.* — Il est aisé de vérifier que les résultats qui viennent d'être obtenus donnent le développement bien connu de Schur, où interviennent les nombres de Bernouilli, développement donné par l'auteur en question dans son Mémoire déjà cité ici au paragraphe 5. Alors le second membre de la première équation (28) se réduit à l'unique variable λ_s. Les formules (30) donnent

$$U_0^{s\tau} = \varepsilon_{s\tau} ,$$

$$U_1^{s\tau} = c_{jk}^s \lambda^k \varepsilon_{j\tau} = c_{\tau k}^s \lambda^k ,$$

$$U_2^{s\tau} = c_{jk}^s \lambda^k U_1^{j\tau} = U_1^{sj} U_1^{j\tau} ,$$

$$U_3^{s\tau} = U_1^{sj} U_1^{jk} U_1^{k\tau} ,$$

$$U_4^{s\tau} = U_1^{sj} U_1^{jk} U_1^{kl} U_1^{l\tau} ,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$U_{m+n}^{ac} = U_m^{ab} U_n^{bc} .$$

Dans ces conditions, en vertu de

$$\theta^{s\tau} \theta_{s\rho} = \varepsilon_{\tau\rho} ,$$

la détermination des coefficients μ_i, dans le second des développements

$$\theta^{s\tau} = \frac{1}{1!} U_0^{s\tau} + \frac{1}{2!} U_1^{s\tau} + \frac{1}{3!} U_2^{s\tau} + \dots ,$$

$$\theta_{s\rho} = \mu_0 U_0^{\rho s} + \mu_1 U_1^{\rho s} + \mu_2 U_2^{\rho s} + \dots ,$$

se présente exactement comme pour

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{1!} + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots ,$$

$$\frac{x}{e^x - 1} = \mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 x^2 + \dots .$$

C'est ainsi que, grâce à Schur, les nombres de Bernouilli, d'une manière indéniablement élégante et quelque peu inattendue, se sont introduits dans la théorie des groupes. Mais on voit qu'ils ne se rapportent qu'à des solutions extrêmement particulières du système (28).

[**11**] *Extension du système* (28). — Prenons maintenant[1] le cas où le système (28) est remplacé par

$$(31)\qquad \left\{\begin{aligned} &\lambda_\rho \theta^{s\rho} = \lambda_1^s + \lambda_2^s, \\ &\frac{\partial \theta^{s\rho}}{\partial \lambda_\tau} - \frac{\partial \theta^{s\tau}}{\partial \lambda_\rho} = c_{kj}^s \theta^{j\tau} \theta^{k\rho}. \end{aligned}\right.$$

Ici λ_1^s, λ_2^s sont des fonctions *homogènes* respectivement du premier et du second ordre.

Raisonnant comme pour obtenir (29) à partir de (28), on a

$$(32)\qquad \theta^{s\tau} + \lambda_\rho \frac{\partial \theta^{s\tau}}{\partial \lambda_\rho} + c_{kj}^s(\lambda_1^k + \lambda_2^k)\,\theta^{j\tau} = \frac{\partial \lambda_1^s}{\partial \lambda_\tau} + \frac{\partial \lambda_2^s}{\partial \lambda_\tau}$$

et ceci redonne bien (29) si les λ_2^s disparaissent.

Posant encore

$$(33)\qquad \theta^{s\tau} = \frac{1}{1!}U_0^{s\tau} + \frac{1}{2!}U_1^{s\tau} + \frac{1}{3!}U_2^{s\tau} + \ldots,$$

on a

$$\theta^{s\tau} + \lambda_\rho \frac{\partial \theta^{s\tau}}{\partial \lambda_\rho} = U_0^{s\tau} + \frac{1}{1!}U_1^{s\tau} + \frac{1}{2!}U_2^{s\tau} + \ldots.$$

Si l'on transporte ce résultat dans (32), des identifications immédiates donnent

$$(34)\qquad \left\{\begin{aligned} &U_0^{s\tau} = \frac{\partial \lambda_1^s}{\partial \lambda_\tau}, \\ &U_1^{s\tau} + c_{kj}^s \lambda_1^k U_0^{j\tau} = \frac{\partial \lambda_2^s}{\partial \lambda_\tau}, \\ &U_2^{s\tau} + c_{kj}^s \lambda_1^k U_1^{j\tau} + 2c_{kj}^s \lambda_2^k U_0^{j\tau} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

et il est clair qu'une telle succession de formules détermine, l'un après l'autre, tous

---

(1) Cf. F. Schur. *Ueber den analytischen Charakter der eine endliche continuirliche Transformationsgruppe darstellenden Functionen*. Mathematische Annalen. Band XLI, 1893.

les termes de la série (33). Vérifions que les $\theta^{s\tau}$ ainsi obtenus satisfont à la première équation (31). On a

$$\lambda_\tau U_0^{s\tau} = \lambda_1^s,$$

$$\lambda_\tau U_1^{s\tau} + c_{kj}^s \lambda_1^k \lambda_1^j = 2\lambda_2^s, \quad \text{d'où} \quad \lambda_\tau U_1^{s\tau} = 2\lambda_2^s,$$

car le terme qui contient c_{kj}^s est nul d'après (9). On a ensuite

$$\lambda_\tau U_2^{s\tau} + c_{kj}^s \lambda_1^k \,.\, 2\lambda_2^j + 2c_{kj}^s \lambda_2^k \lambda_1^j = 0, \quad \text{d'où} \quad \lambda_\tau U_2^{s\tau} = 0$$

après une interversion des indices j, k. Et ainsi du reste.

[**12**] *Cas général.* — Après les systèmes (28) et (31), il est indiqué de chercher à étudier le système(¹)

$$(35) \qquad \begin{cases} \lambda_\rho \theta^{s\rho} = \lambda_1^s + \lambda_2^s + \lambda_3^s + \dots \\ \dfrac{\partial \theta^{s\rho}}{\partial \lambda_\tau} - \dfrac{\partial \theta^{s\tau}}{\partial \lambda_\rho} = c_{kj}^s \theta^{j\tau} \theta^{k\rho} \end{cases}$$

et ce par les méthodes qu'il nous a semblé plus clair d'exposer d'abord sur des cas particuliers. Le second membre de la première équation (35) est une série indéfinie de fonctions homogènes, λ_i^s étant d'ordre i; on observera que ces *fonctions homogènes* peuvent être tout autre chose que des *polynomes*.

On se propose toujours de satisfaire à (35) en posant

$$(33) \qquad \theta^{s\tau} = \frac{1}{1!} U_0^{s\tau} + \frac{1}{2!} U_1^{s\tau} + \frac{1}{3!} U_2^{s\tau} + \dots,$$

les $U_m^{s\tau}$ étant des fonctions homogènes d'ordre m qui, là encore, ne seront pas forcément des polynomes. Alors l'équation (32) est à remplacer par

$$(36) \qquad \theta^{s\tau} + \lambda_\rho \frac{\partial \theta^{s\tau}}{\partial \lambda_\rho} + c_{kj}^s \theta^{j\tau} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^k = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial \lambda_i^s}{\partial \lambda_\tau}.$$

On voit qu'ici nous employons des sigmas pour représenter des sommes d'une infinité de termes, l'indice de sommation i étant d'ailleurs unique dans un même monome; ceci n'empêche pas que la formule contient des sommations, d'une autre

(¹) A. BUHL. *Sur l'intégration des équations de Maurer par des séries de fonctions homogènes.* Comptes rendus, 21 juin 1926.

nature, relatives aux indices ρ, k, j qui varient de 1 à r et figurent deux fois dans un même monôme.

En raisonnant toujours comme au paragraphe précédent, notre dernière formule peut s'écrire

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} U_i^{s\tau} + c_{kj}^s \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^k \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(i+1)!} U_i^{j\tau} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial \lambda_i^s}{\partial \lambda_\tau}$$

et elle entraîne les identifications

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} U_0^{s\tau} &= \frac{\partial \lambda_1^s}{\partial \lambda_\tau} \\ \frac{1}{1!} U_1^{s\tau} + c_{kj}^s \lambda_1^k \frac{1}{1!} U_0^{j\tau} &= \frac{\partial \lambda_2^s}{\partial \lambda_\tau} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{1}{m!} U_m^{s\tau} + c_{kj}^s \sum_{p=0}^{m-1} \frac{1}{(p+1)!} \lambda_{m-p}^k U_p^{j\tau} &= \frac{\partial \lambda_{m+1}^s}{\partial \lambda_\tau}. \end{aligned} \right.$$

Ces formules redonnent (30) et (34) comme cas particuliers. Il est clair qu'elles déterminent les $U_m^{s\tau}$ par voie récurrente et que ces fonctions homogènes ne sont pas, en général, des polynomes. Il n'en serait ainsi que si toutes les λ_i^s étaient des polynomes.

Si l'on multiplie toutes les équations (37) par λ_τ, on vérifie sans peine que la première équation (35) est satisfaite. Les développements (33), dont les termes sont déterminés en (37), satisfont-ils bien à la seconde équation (35) c'est-à-dire aux équations de Maurer? La chose n'est peut-être pas absolument évidente car les équations qui sont d'abord sûrement vérifiées sont les équations (36) qui sont du type

$$\lambda_\rho V^{s\rho\tau} = 0,$$

le symbole $V^{s\rho\tau}$ ayant été défini au paragraphe 7. Mais ces équations ne peuvent avoir lieu, quels que soient s et τ, que si les $V^{s\rho\tau}$ sont identiquement nuls.

Une vérification partielle intéressante des résultats précédents correspond au cas où les constantes de structure c_{kj}^s sont toutes nulles. Alors l'addition des formules (37), respectivement multiplées par

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{m+1}$$

donne

$$\theta^{s\tau} = \frac{\partial \Lambda^s}{\partial \lambda_\tau}$$

si

$$\Lambda^s = \frac{\lambda_1^s}{1} + \frac{\lambda_2^s}{2} + \ldots + \frac{\lambda_{m+1}^s}{m+1} + \ldots.$$

La forme ainsi obtenue pour $\theta^{s\tau}$ satisfait évidemment au système de Maurer à c_{kj}^s nuls et cette solution est la plus générale qui corresponde au cas particulier envisagé. Il est alors permis de penser que la solution (33), avec les formules (37) prises au complet, est aussi la solution la plus générale du système de Maurer (35_2) pris au complet. Cette manière de voir paraît pouvoir se confirmer. En somme, dans le cas général, on n'a fait qu'une seule hypothèse essentielle, celle d'après laquelle, par la formule (33), $\theta^{s\tau}$ est développable en série de fonctions homogènes; cela ne restreint pas plus la généralité analytique que de supposer $\theta^{s\tau}$ développable en série de Taylor ou en séries de polynomes. Dans ces conditions, $\lambda_\rho \theta^{s\rho}$ est développable comme (33) et commence tout naturellement par un terme du premier ordre; en considérant ensuite, comme nous l'avons fait, que les λ_i^s sont arbitraires, on n'introduit encore aucune restriction.

Contrairement à ce que l'on aurait pu croire, l'adjonction de (35_1) à (35_2) ne diminue point la généralité et l'on peut prétendre que le système de Maurer (35_2) est intégré de manière aussi générale que possible, du moins par des séries du type (33). La méthode introduit des fonctions arbitraires, par les différents seconds membres de (35_1) qui correspondent à la variation de l'indice s.

Ajoutons une remarque absolument analogue à celle qui termine le paragraphe 6.

La méthode d'intégration par séries de fonctions homogènes s'applique aussi bien aux systèmes de Maurer pour lesquels s, au lieu de varier de 1 à r comme lors de la construction du groupe paramétrique, varie de 1 à un entier quelconque. La théorie du trièdre mobile, nous le rappellerons au Chapitre suivant, mène à la considération d'un système de Maurer de ce genre.

CHAPITRE II

Trièdre mobile Analogies diverses.

[**1**] *Le trièdre mobile. Symboles de Christoffel et de Riemann.* — On voit immédiatement que les équations de Maurer donnent, comme cas particuliers, les deux systèmes différentiels fondamentaux de la théorie du trièdre mobile([1]). Cette remarque si simple n'en a pas moins engendré d'importants développements dûs surtout à MM. Cartan([2]), Cotton([3]), Vessiot([4]).

Récrivons les équations de Maurer

$$\frac{\partial \alpha^{si}}{\partial \tau_k} - \frac{\partial \alpha^{sk}}{\partial \tau_i} = c^s_{mn} \alpha^{mi} \alpha^{nk} = c^s_{mn}(\alpha^{mi}\alpha^{nk} - \alpha^{mk}\alpha^{ni}) \tag{1}$$

en convenant que l'emploi du troisième membre supposera toujours $m < n$. On peut alors tirer de (1)

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial \alpha^{1i}}{\partial \tau_k} - \frac{\partial \alpha^{1k}}{\partial \tau_i} &= c^1_{23}(\alpha^{2i}\alpha^{3k} - \alpha^{2k}\alpha^{3i}), \\
\frac{\partial \alpha^{2i}}{\partial \tau_k} - \frac{\partial \alpha^{2k}}{\partial \tau_i} &= c^2_{31}(\alpha^{3i}\alpha^{1k} - \alpha^{3k}\alpha^{1i}), \\
\frac{\partial \alpha^{3i}}{\partial \tau_k} - \frac{\partial \alpha^{3k}}{\partial \tau_i} &= c^3_{12}(\alpha^{1i}\alpha^{2k} - \alpha^{1k}\alpha^{2i}).
\end{aligned}\right. \tag{2}$$

Dans le second membre de la seconde équation (2) on a d'abord écrit les indices 13 pour mn, mais on a changé c^2_{13} en $-c^2_{31}$. Tous les autres c^s_{mn} sont considérés comme nuls.

---

(1) G. Darboux. *Théorie des surfaces.* T. I et II.

(2) E. Cartan. *La structure des groupes continus et la théorie du trièdre mobile* (Bulletin des Sciences mathématiques, t. 34, 1910, p. 250).

(3) E. Cotton. *Généralisation de la théorie du trièdre mobile* (Bulletin de la Société mathématique, t. 33, 1905, p. 42).

(4) E. Vessiot. *Sur l'intégration des systèmes différentiels qui admettent des groupes continus* (Acta Mathematica, t. 28, 1904, p. 307). Ce Mémoire de M. Vessiot peut sembler, par son titre, se rapporter un peu moins étroitement que les deux précédents au sujet en litige. En fait, il jette un jour très vif sur des systèmes automorphes (p. 335) à conditions d'intégrabilité analogues à celles de la théorie du trièdre.

On peut continuer de même par la formation du système

$$
(3)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial \alpha^{4i}}{\partial \tau_k} - \dfrac{\partial \alpha^{4k}}{\partial \tau_i} = c_{26}^4(\alpha^{2i}\alpha^{6k} - \alpha^{2k}\alpha^{6i}) + c_{35}^4(\alpha^{3i}\alpha^{5k} - \alpha^{3k}\alpha^{5i}), \\
\dfrac{\partial \alpha^{5i}}{\partial \tau_k} - \dfrac{\partial \alpha^{5k}}{\partial \tau_i} = c_{34}^5(\alpha^{3i}\alpha^{4k} - \alpha^{3k}\alpha^{4i}) + c_{16}^5(\alpha^{1i}\alpha^{6k} - \alpha^{1k}\alpha^{6i}), \\
\dfrac{\partial \alpha^{6i}}{\partial \tau_k} - \dfrac{\partial \alpha^{6k}}{\partial \tau_i} = c_{15}^6(\alpha^{1i}\alpha^{5k} - \alpha^{1k}\alpha^{5i}) + c_{24}^6(\alpha^{2i}\alpha^{4k} - \alpha^{2k}\alpha^{4i}).
\end{cases}
$$

Là encore tous les c_{mn}^s non écrits sont nuls; si tous ceux qui sont écrits, en (2) et (3), sont pris égaux à l'unité, changée de signe pour la dernière colonne de (3), si, de plus, on remplace les α pourvus de leur premier indice par une seule lettre, conformément au tableau

$$
(4)\quad \begin{cases}
\alpha^1, & \alpha^2, & \alpha^3; & \alpha^4; & \alpha^5, & \alpha^6; \\
p, & q, & r; & \xi, & \eta, & \zeta;
\end{cases}
$$

les systèmes (2) et (3) deviennent respectivement

$$
(2^*)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial p^i}{\partial \tau_k} - \dfrac{\partial p^k}{\partial \tau_i} = q^i r^k - q^k r^i, \\
\dfrac{\partial q^i}{\partial \tau_k} - \dfrac{\partial q^k}{\partial \tau_i} = r^i p^k - r^k p^i, \\
\dfrac{\partial r^i}{\partial \tau_k} - \dfrac{\partial r^k}{\partial \tau_i} = p^i q^k - p^k q^i;
\end{cases}
$$

$$
(3^*)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial \xi^i}{\partial \tau_k} - \dfrac{\partial \xi^k}{\partial \tau_i} = q^i \zeta^k - q^k \zeta^i - r^i \eta^k + r^k \eta^i, \\
\dfrac{\partial \eta^i}{\partial \tau_k} - \dfrac{\partial \eta^k}{\partial \tau_i} = r^i \xi^k - r^k \xi^i - p^i \zeta^k + p^k \zeta^i, \\
\dfrac{\partial \zeta^i}{\partial \tau_k} - \dfrac{\partial \zeta^k}{\partial \tau_i} = p^i \eta^k - p^k \eta^i - q^i \xi^k + q^k \xi^i.
\end{cases}
$$

Ce sont bien les systèmes fondamentaux de G. Darboux (*loc. cit.*, pp. 67, 71).

Une autre particularisation des équations de Maurer est peut-être encore plus frappante. Au lieu de la correspondance donnée par le tableau (4), considérons celle du tableau

$$
(5)\quad \begin{cases}
\alpha^1, & \alpha^2, & \alpha^3; \\
\Gamma_j^\alpha, & \Gamma_\beta^\alpha, & \Gamma_j^\beta.
\end{cases}
$$

Alors la première équation (2), toujours avec $c_{23}^1 = 1$, devient

$$B_{jki}^{\alpha} = \frac{\partial}{\partial \tau_k} \Gamma_{ji}^{\alpha} - \frac{\partial}{\partial \tau_i} \Gamma_{jk}^{\alpha} + \Gamma_{\beta k}^{\alpha} \Gamma_{ji}^{\beta} - \Gamma_{\beta i}^{\alpha} \Gamma_{jk}^{\beta} = 0. \tag{6}$$

On aurait un résultat analogue avec la seconde équation (2), à condition, dans le tableau (5), de pousser d'un rang vers la droite les termes de la seconde ligne pour mettre ensuite le dernier terme à la place du premier. De même avec la troisième équation (2).

Les expressions (6) sont les symboles à quatre indices, de Riemann-Einstein, rencontrés bien souvent dans les Mémoires précédents. On voit que ces symboles sont, comme les relations fondamentales de la théorie du trièdre mobile, unis aux équations de Maurer par des liens des plus étroits.

Remarquons que, dans les formules (6), il a fallu utiliser comme indices *inférieurs* des indices i, k *supérieurs* dans (2). Cette transposition inadmissible, en général, sur des composantes *tensorielles*, n'a ici rien de choquant justement parce que les Γ à trois indices ne définissent pas un *tenseur*.

[**2**] *Retour sur le système de Maurer.* — L'analyse fondamentale relative au trièdre mobile repose sur des conditions d'intégrabilité exprimées par des interversions de dérivations partielles ordinaires. De même, les symboles de Riemann (6), naissent de la permutation de dérivées en D. Rappelons que Lie donne une origine analogue aux équations de Maurer. On a d'abord, avec le premier système fondamental (7), Chapitre I,

$$\frac{\partial x'_i}{\partial c_\gamma} = \frac{\partial x'_i}{\partial a_l} \frac{\partial a_l}{\partial c_\gamma} = \frac{\partial a_l}{\partial c_\gamma} \alpha^{jl} \xi_{ji}(x'),$$

$$\frac{\partial F'}{\partial c_\gamma} = \frac{\partial F'}{\partial x'_i} \frac{\partial x'_i}{\partial c_\gamma} = A^{j\gamma} X'_j(F'); \qquad A^{j\gamma} = \alpha^{jl} \frac{\partial a_l}{\partial c_\gamma}.$$

On conclut de là

$$\frac{\partial^2 F'}{\partial c_\gamma \partial c_\beta} = X'_j(F') \frac{\partial A^{j\gamma}}{\partial c_\beta} + A^{j\gamma} A^{n\beta} X'_n X'_j(F'),$$

$$\frac{\partial^2 F'}{\partial c_\beta \partial c_\gamma} = X'_j(F') \frac{\partial A^{j\beta}}{\partial c_\gamma} + A^{j\gamma} A^{n\beta} X'_j X'_n(F'),$$

d'où, en retranchant,

$$\left(\frac{\partial A^{j\gamma}}{\partial c_\beta} - \frac{\partial A^{j\beta}}{\partial c_\gamma} \right) X'_j(F') + A^{j\gamma} A^{n\beta} c_{nj}^s X'_s(F') = 0$$

et enfin[1]

$$\frac{\partial A^{s\gamma}}{\partial c_\beta} - \frac{\partial A^{s\beta}}{\partial c_\gamma} = c^s_{jn} A^{n\beta} A^{j\gamma}.$$

[**3**] *Rotations et translations.* — Gaston Darboux (*loc. cit.*, p. 72) a insisté sur une méthode originale, inspirée des travaux d'Olinde Rodrigues, qui permet d'obtenir les systèmes (2*) et (3*) à l'aide d'un même raisonnement. On part du système

$$(7) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial \tau_k} + \xi_k + zq_k - yr_k = 0, \\ &\frac{\partial y}{\partial \tau_k} + \eta_k + xr_k - zp_k = 0, \\ &\frac{\partial z}{\partial \tau_k} + \zeta_k + yp_k - xq_k = 0, \end{aligned}\right.$$

en lequel x, y, z sont les coordonnées d'un point quelconque de l'espace par rapport au trièdre mobile (T). En écrivant que

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau_i \partial \tau_k}(x, y, z) = \frac{\partial^2}{\partial \tau_k \partial \tau_i}(x, y, z),$$

ces conditions d'intégrabilité se scindent sans peine en (2*) et (3*).

Mais il y a mieux. Les équations (7) sont, par rapport à (2*) et (3*), ce que les équations (23) du Chapitre précédent sont par rapport aux équations de Maurer.

Ces équations (23) peuvent s'écrire

$$\frac{\partial \lambda^s}{\partial \lambda_k} - \frac{\partial \theta^{sk}}{\partial t} + c^s_{ij}(\lambda^j \theta^{ik} - \lambda^i \theta^{jk}) = 0, \qquad (i < j)$$

---

[1] Signalons une bizarrerie, doublée peut-être d'une faute d'impression non évidente, qui se trouve dans le tome III des *Transformationsgruppen* de Lie Engel. Page 793, partant de

$$x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_r), \qquad a_i = \lambda_i t,$$

le texte, au lieu de

$$\frac{\partial x'_i}{\partial t} = \frac{\partial x'_i}{\partial a_l}\frac{\partial a_l}{\partial t} = \psi_{jl}\xi_{ji}(x').\lambda_l, \quad \text{donne} \quad \frac{\partial x'_i}{\partial t} = \lambda_j \xi_{ji}(x').$$

Ceci est exact car il est précisément établi, p. 797, éq. (60), que

$$\lambda_j = \lambda_l \psi_{jl},$$

cette équation correspondant à la seconde (22) de notre présent Chapitre I.

Mais à la page 793 précitée rien ne semble indiquer ce résultat subséquent.

ce qui redonne bien le système (7) si les correspondances ont lieu d'après le tableau

$$\begin{array}{cccccc} \lambda^1, & \lambda^2, & \lambda^3; & \theta^1, & \theta^2, & \theta^3, \\ x, & y, & z; & p, & q, & r, \end{array}$$

si

$$c^1_{23} = c^2_{31} = c^3_{12} = 1$$

et si, de plus,

$$\frac{\partial \theta^{sk}}{\partial t} = -\theta^{(s+3)k}$$

avec la correspondance

$$\begin{array}{ccc} \theta^4, & \theta^5, & \theta^6, \\ \xi, & \eta, & \zeta. \end{array}$$

Le fait que les indices à comparer sont tantôt supérieurs, tantôt inférieurs, est présentement sans importance; il provient de ce que l'ouvrage de Darboux n'a pas toujours des notations d'accord avec celles que l'on s'imposerait aujourd'hui en ayant recours au Calcul différentiel absolu.

Tout ceci donne, en résumé, le résultat suivant : *Le système* (3*) *provient du système* (2*) *dérivé partiellement par rapport à une variable auxiliaire* t *si l'on pose*

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \xi, \qquad \frac{\partial q}{\partial t} = \eta, \qquad \frac{\partial r}{\partial t} = \zeta.$$

Montrons maintenant, chose presque évidente, que les formules stokiennes fondamentales et notamment celle rappelée en (2), Ch. II, dans le Cinquième Mémoire (formule dont le déterminant fondamental est d'ailleurs reproduit ici au paragraphe 5 du Chapitre précédent) donnent les formules fondamentales de la théorie du trièdre mobile, tout comme elles donnent les équations de Maxwell-Lorentz, par de simples raisons de symétrie analytique(¹). La formule stokienne en litige contient l'intégrale double

$$\int\int_S M_{ij}\, dx_i\, dx_j$$

qui, dans l'espace à trois dimensions, peut s'écrire

$$\int\int_S \begin{vmatrix} dx_2\, dx_3 & dx_3\, dx_1 & dx_1\, dx_2 \\ M_{1\omega} & M_{2\omega} & M_{3\omega} \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

(¹) Ce point a été développé dans une Communication *Sur les origines stokiennes de la Cinématique* présentée au Congrès international de Mécanique tenu à Zürich en septembre 1926.

Ceci est d'ailleurs, si l'on veut, l'intégrale double de la formule de Green ordinaire.

Le simple jeu de l'analyse y fait apparaître des mineurs qui ont la symétrie de *moments* et peuvent d'ailleurs être particularisés en des moments véritables. Ainsi, à un facteur infiniment petit près, le déterminant de l'intégrale double précédente peut devenir

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}.$$

De même qu'une double nullité de déterminant du quatrième ordre conduit aux équations de l'électromagnétisme, la nullité de celui que nous venons d'obtenir conduit au système caractéristique

$$\frac{dx}{yZ - zY} = \frac{dy}{zX - xZ} = \frac{dz}{xY - yX} = dt$$

où t est une variable auxiliaire qu'on peut introduire après coup dans X, Y, Z.

Telle est l'origine logique du système initial de Darboux

$$\frac{d\alpha}{\beta r - \gamma q} = \frac{d\beta}{\gamma p - \alpha r} = \frac{d\gamma}{\alpha q - \beta p} = dt.$$

Celui-ci conduit immédiatement, dans le cas de plusieurs variables, au système de même forme

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial \alpha}{\partial t_i} & \frac{\partial \beta}{\partial t_i} & \frac{\partial \gamma}{\partial t_i} \\ \hline\hline \alpha & \beta & \gamma \\ p_i & q_i & r_i \end{array}.$$

Cette notation, employée pour les équations de l'Électromagnétisme dès notre Premier Mémoire, signifie toujours qu'on égale les termes de la première ligne à ce qui serait leurs mineurs algébriques si le tableau était un déterminant. Elle est ici absolument à sa place et rapproche précisément la théorie du trièdre de la théorie électromagnétique. Si, pour le système finalement obtenu, on écrit les conditions d'intégrabilité

$$\frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_k}(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\partial^2}{\partial t_k \partial t_i}(\alpha, \beta, \gamma),$$

on obtient le système (2*) et celui-ci, dérivé par rapport à une variable auxiliaire, comme nous l'avons expliqué au cours de ce paragraphe, donne le système (3*).

Ainsi les équations fondamentales de la théorie du trièdre mobile naissent immédiatement d'une formule stokienne qui naît elle-même de l'identité

$$\int\int_S X\,dY\,dZ = \int\int\int_V dX\,dY\,dZ.$$

Quant au fait qui met les équations de structure du groupe des déplacements dans la dépendance, par dérivation, des équations structurales relatives aux seules rotations, il semble qu'on puisse en donner des explications géométriques intimes de diverses natures. Voici une idée particulièrement originale qui m'a été communiquée par M. E. Cartan. Les six coordonnées plückériennes de droites quelconques peuvent être considérées comme *imaginaires* ou *complexes* de par l'emploi d'une unité imaginaire appropriée ε; avec ce symbolisme(¹) les seules droites *réelles* sont celles qui passent toutes par un point pris pour origine et on passe aux autres comme on passe des points d'un axe aux points d'un plan avec les imaginaires ordinaires. Ainsi l'espace réglé ou l'espace des mouvements hélicoïdaux sont de simples prolongements de l'espace à symétrie sphérique ce qui met bien tous les déplacements dans la dépendance de rotations préliminaires.

[**4**] *Trièdre mobile à variable auxiliaire.* — Nous supposons le lecteur familiarisé avec le Chapitre I du Livre V de la *Théorie des Surfaces* de G. Darboux (T. II; 1^{re} édition, p. 347; 2^e édition, p. 359). Pour la théorie du trièdre mobile T à plan Mxy tangent en M à une surface, le célèbre géomètre a donné les huit équations

$$(A)\quad\left\{\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial p}{\partial v}-\dfrac{\partial p_1}{\partial u}=qr_1-rq_1, & \dfrac{\partial \xi}{\partial v}-\dfrac{\partial \xi_1}{\partial u}=\eta r_1-r\eta_1,\\[2ex]
\dfrac{\partial q}{\partial v}-\dfrac{\partial q_1}{\partial u}=rp_1-pr_1, & \dfrac{\partial \eta}{\partial v}-\dfrac{\partial \eta_1}{\partial u}=r\xi_1-\xi r_1,\\[2ex]
\dfrac{\partial r}{\partial v}-\dfrac{\partial r_1}{\partial u}=pq_1-qp_1, & p\eta_1+\xi q_1=p_1\eta+\xi_1 q,\\[2ex]
\zeta=0, & \zeta_1=0.
\end{array}\right.$$

(¹) Ch. Cailler. *Introduction géométrique à la Mécanique rationnelle.* Ouvrage publié par H. Fehr et R. Wavre, de Genève; 1924. Voir particulièrement p. 187 et suivantes.

Si un point a pour coordonnées x, y, z, par rapport à T, les projections de son déplacement sur les axes de T sont

$$(\mathrm{B})\qquad \begin{cases} D_x = dx + \xi du + \xi_1 dv + (q du + q_1 dv) z - (r du + r_1 dv) y, \\ D_y = dy + \eta du + \eta_1 dv + (r du + r_1 dv) x - (p du + p_1 dv) z, \\ D_z = dz \qquad\qquad\qquad + (p du + p_1 dv) y - (q du + q_1 dv) x, \end{cases}$$

quand u et v varient de du et dv.

Soit un autre triédre T_1, *d'origine fixe*, aux axes parallèles à ceux de T. Pour un point x, y, z, de T_1, les formules (B) se réduisent évidemment à

$$(\mathrm{B}')\qquad \begin{cases} D_x = dx + (q du + q_1 dv) z - (r du + r_1 dv) y, \\ D_y = dy + (r du + r_1 dv) x - (p du + p_1 dv) z, \\ D_z = dz + (p du + p_1 dv) y - (q du + q_1 dv) x. \end{cases}$$

Ceci étant rappelé, nous allons nous proposer de reprendre la théorie en partant seulement du système, se rapportant aux rotations,

$$(\mathrm{a})\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial v} - \dfrac{\partial p_1}{\partial u} = q r_1 - r q_1, \\ \dfrac{\partial q}{\partial v} - \dfrac{\partial q_1}{\partial u} = r p_1 - p r_1, \\ \dfrac{\partial r}{\partial v} - \dfrac{\partial r_1}{\partial u} = p q_1 - q p_1, \end{cases}$$

les fonctions p, q, r; p_1, q_1, r_1 étant considérées comme dépendant non seulement de u et v mais encore d'un *paramètre auxiliaire*, soit t. Nous savons, d'après le paragraphe précédent, qu'une dérivation en t adjoindra au système (a) ce que nous pourrons précisément appeler le *système dérivé*, système qui se rapportera aux translations de T.

Pour retrouver exactement (A) il faut, en dérivant (a) par rapport à t, tenir compte de

$$(\mathrm{b})\qquad \frac{\partial r}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial r_1}{\partial t} = 0.$$

Ainsi la première théorie, celle de Darboux, repose sur les *huit* équations (A) auxquelles il convient peut-être d'ajouter la *neuvième* équation $t = 1$ qui indique le non emploi de t; la seconde théorie, celle que nous allons exposer maintenant, ne repose que sur *cinq* équations, (a) et (b).

Quant à intégrer (a) avec une constante arbitraire t, c'est une opération pour laquelle on n'aura que l'embarras du choix puisque (a) est un système de Maurer qui, en général, peut être intégré non seulement avec des constantes mais avec des fonctions arbitraires. Au point de vue géométrique le caractère très général des translations possibles correspond précisément à tout ce qu'il y a d'indéterminé dans le choix de t.

Arrivons précisément aux développements géométriques.

L'origine M du trièdre T parcourt une surface S à laquelle le plan Mxy reste tangent; M décrivant ds sur S et ds faisant l'angle ω avec Mx, on a

$$ds \cos\omega = \xi du + \xi_1 dv, \qquad ds \sin\omega = \eta du + \eta_1 dv$$

ou, dans la théorie en t,

$$ds \cos\omega = \frac{\partial}{\partial t}(p du + p_1 dv), \qquad ds \sin\omega = \frac{\partial}{\partial t}(q du + q_1 dv). \tag{8}$$

Considérons le trièdre T_1 et, sur son axe Oz le point m à distance 1 de O; ce point m décrit $d\sigma$, représentation sphérique de ds, et, si cet élément $d\sigma$ fait l'angle θ avec Ox, on a

$$d\sigma \cos\theta = q du + q_1 dv, \qquad -d\sigma \sin\theta = p du + p_1 dv, \tag{9}$$

par application immédiate des formules (B'). Par comparaison de (8) et (9), on a

$$-ds \cos\omega = \frac{\partial}{\partial t}(d\sigma \sin\theta), \qquad ds \sin\omega = \frac{\partial}{\partial t}(d\sigma \cos\theta). \tag{10}$$

Effectuant les dérivations en t, ces formules (10) donnent

$$ds^2 = \left[\frac{\partial\theta}{\partial t} d\sigma\right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial t}(d\sigma)\right]^2. \tag{11}$$

Les termes enfermés entre crochets, en (11), ont une signification remarquable. D'après (8) et (9) on a

$$2ds\, d\sigma \sin(\omega - \theta) = \frac{\partial}{\partial t}\left[(q du + q_1 dv)^2 + (p du + p_1 dv)^2\right] = \frac{\partial}{\partial t}(d\sigma)^2$$

d'où

$$ds \sin(\omega - \theta) = \frac{\partial}{\partial t}(d\sigma). \tag{12}$$

De même, toujours d'après (8) et (9),

$$(13)\quad ds\,d\sigma\cos(\omega-\theta)=(q\,du+q_1dv)\frac{\partial}{\partial t}(p\,du+p_1dv)-(p\,du+p_1dv)\frac{\partial}{\partial t}(q\,du+q_1dv).$$

Divisant par

$$d\sigma^2=(q\,du+q_1dv)^2+(p\,du+p_1dv)^2,$$

il vient

$$\frac{ds}{d\sigma}\cos(\omega-\theta)=\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{arc\,tang}\frac{p\,du+p_1dv}{q\,du+q_1dv}=\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{arc\,tang}(-\operatorname{tang}\theta)$$

d'où

$$(14)\qquad -ds\cos(\omega-\theta)=\frac{\partial\theta}{\partial t}d\sigma.$$

Visiblement (12) et (14) peuvent redonner (11).

Venons maintenant aux *directions conjuguées* en M sur la surface S. La direction conjuguée de ds est la caractéristique du plan Mxy; c'est le lieu des points de ce plan dont la vitesse est dans le plan, lieu qui, d'après la dernière équation (B), est

$$(p\,du+p_1dv)\,y-(q\,du+q_1dv)\,x=0.$$

Soit ω' l'angle de cette droite avec Mx; soit aussi δs l'élément d'arc dans cette direction. On aura

$$\delta s\cos\omega'=\frac{\partial}{\partial t}(p\,\delta u+p_1\delta v),\qquad \delta s\sin\omega'=\frac{\partial}{\partial t}(q\,\delta u+q_1\delta v)$$

d'où, d'après l'équation précédente,

$$(15)\qquad (p\,du+p_1dv)\frac{\partial}{\partial t}(q\,\delta u+q_1\delta v)-(q\,du+q_1dv)\frac{\partial}{\partial t}(p\,\delta u+p_1\delta v)=0.$$

Observons que l'on a identiquement

$$(16)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\left[(p\,du+p_1dv)(q\,\delta u+q_1\delta v)-(q\,du+q_1dv)(p\,\delta u+p_1\delta v)\right]=0.$$

Le premier membre de cette relation se réduit, en effet, à

$$(du\,\delta v-dv\,\delta u)\frac{\partial}{\partial t}(pq_1-qp_1)$$

ce qui est nul d'après (b) et la dernière équation (a).

Dès lors (15) peut aussi bien s'écrire

$$(17) \qquad (q\delta u + q_1\delta v)\frac{\partial}{\partial t}(p\,du + p_1\,dv) - (p\delta u + p_1\delta v)\frac{\partial}{\partial t}(q\,du + q_1\,dv) = 0$$

et même, dans la théorie en t, on pourrait définir les directions conjuguées, à un point de vue purement analytique, comme celles pour lesquelles l'identité (16) est scindée en les relations (15) et (17). Enfin (15) peut encore s'écrire

$$d\sigma \sin\theta \,.\, ds \sin\omega' + d\sigma \cos\theta \,.\, ds \cos\omega' = 0$$

ou bien

$$\cos(\omega' - \theta) = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \omega' - \theta = \pm\frac{\pi}{2}.$$

Les *lignes asymptotiques* sont celles pour lesquelles les d et les δ se confondent. Comparant (15) et (13), tenant compte de (14) et (11), on voit que, le long de ces lignes, on a

$$(18) \qquad \cos(\omega - \theta) = 0, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial t} = 0, \qquad ds = \frac{\partial}{\partial t}(d\sigma).$$

La première de ces trois équations exprime que le ds de l'asymptotique fait un angle droit avec le $d\sigma$ correspondant de la représentation sphérique. La troisième, d'après (12), exprime la même chose.

Pour les *lignes de courbure* la normale Mz doit porter un point de cote ρ dont le lieu est tangent à Mz. D'après les deux premières équations (B), on a alors

$$(19) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}(p\,du + p_1\,dv) + \rho(q\,du + q_1\,dv) = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial t}(q\,du + q_1\,dv) - \rho(p\,du + p_1\,dv) = 0. \end{aligned}\right.$$

D'après (8) et (9), ces équations (19) donnent

$$ds \cos\omega + \rho\,d\sigma \cos\theta = 0, \qquad ds \sin\omega + \rho\,d\sigma \sin\theta = 0$$

d'où, avec (11),

$$(20) \qquad \omega = \theta, \qquad ds = \rho\,d\sigma, \qquad \left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial t}\log d\sigma\right)^2 = \rho^2.$$

Ici le ds de la ligne de courbure est parallèle au $d\sigma$ de la représentation sphérique. Il est intéressant de comparer les trois formules (18) aux trois formules (20).

L'équation aux rayons de courbure principaux se formera, comme à l'ordinaire, en éliminant du, dv entre les équations (19); ce sera

$$\rho^2(pq_1 - qp_1) + \rho\left(q\frac{\partial q_1}{\partial t} - q_1\frac{\partial q}{\partial t} - p_1\frac{\partial p}{\partial t} + p\frac{\partial p_1}{\partial t}\right) + \frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial q_1}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial p_1}{\partial t} = 0.$$

Celle-ci, pour la courbure totale, donne la formule

$$\frac{1}{\rho_1\rho_2}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial q_1}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial p_1}{\partial t}\right) = pq_1 - qp_1. \tag{21}$$

Remarquons encore l'équation des surfaces minima

$$p\frac{\partial p_1}{\partial t} + q\frac{\partial q_1}{\partial t} = p_1\frac{\partial p}{\partial t} + q_1\frac{\partial q}{\partial t}.$$

Reprenons, avec une courbe quelconque, les questions successivement examinées par G. Darboux.

Par O, origine de T_1, menons un vecteur unitaire parallèle à ds. La vitesse de l'extrémité ε de ce vecteur est $1 : \rho$ et est parallèle à la normale principale en ds.

D'après (B') on a, pour les composantes de la vitesse de ε

$$\left\{\begin{aligned} \frac{ds}{\rho}\cos\xi' &= d\cos\omega - (r\,du + r_1\,dv)\sin\omega,\\ \frac{ds}{\rho}\cos\eta' &= d\sin\omega + (r\,du + r_1\,dv)\cos\omega,\\ \frac{ds}{\rho}\cos\zeta' &= (p\,du + p_1\,dv)\sin\omega - (q\,du + q_1\,dv)\cos\omega. \end{aligned}\right. \tag{22}$$

Évidemment ξ', η', ζ' sont les angles de la normale principale en ds avec les axes Mx, My, Mz. Comme cette normale est perpendiculaire à ds, on a

$$\cos\xi'\cos\omega + \cos\eta'\sin\omega = 0,$$

d'où

$$-\frac{\cos\xi'}{\sin\omega} = \frac{\cos\eta'}{\cos\omega} = \sin\zeta' = \sin\varpi. \tag{23}$$

Alors les trois formules (22) se réduisent à deux

$$\left\{\begin{aligned} \frac{ds\cos\varpi}{\rho} &= (p\,du + p_1\,dv)\sin\omega - (q\,du + q_1\,dv)\cos\omega,\\ \frac{ds\sin\varpi}{\rho} &= d\omega + r\,du + r_1\,dv. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

Prenons la première formule (24). En la multipliant par ds, utilisant (8) et raisonnant comme pour (13), on obtient

$$\left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^2 \frac{\cos \varpi}{\rho} = -\frac{ds}{d\sigma}\cos(\omega-\theta) = \frac{\partial\theta}{\partial t}.$$

On sait que le dernier membre obtenu est nul le long d'une ligne asymptotique; il en est alors de même des deux cosinus.

On voit encore que $\dfrac{\cos\varpi}{\rho}$ est le même pour toutes les courbes ayant même tangente ou même ds en M. Ceci donne immédiatement le théorème de Meusnier.

Par un calcul que nous ne reproduirons pas et qui est d'ailleurs très simple, G. Darboux (*loc. cit.*, 2ème édit., p. 368) établit que

$$\frac{1}{2} ds \frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\cos\varpi}{\rho}\right) = \cos\omega(p\,du + p_1\,dv) + \sin\omega(q\,du + q_1\,dv). \tag{25}$$

Multipliant encore par ds, tenant compte de (8) et raisonnant comme pour établir (12), cette formule (25) s'écrira

$$ds^2 \frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\cos\varpi}{\rho}\right) = \frac{\partial}{\partial t} d\sigma^2. \tag{26}$$

Le long d'une ligne de courbure les deux membres de (25) sont nuls; donc on a aussi le long de ces lignes

$$\frac{\partial}{\partial t} d\sigma^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial}{\partial t} d\sigma = 0. \tag{27}$$

Cette formule si simple permet de simplifier encore la dernière (20) qui montre alors que l'on a, toujours le long d'une ligne de courbure,

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \rho. \tag{28}$$

Alors d'après (28) et la seconde (27), l'équation (11) redonne la seconde formule (20) c'est-à-dire $ds = \rho\, d\sigma$. On voit que, dans cette théorie en t, tout continue à s'agencer avec une facilité des plus remarquables.

Toujours en suivant G. Darboux, imaginons maintenant en M non seulement la tangente Mt et la normale principale Mn mais aussi la binormale Mb à ds. Alors les cosinus de Ob, ou de Mb, sont donnés par le tableau

$\cos\lambda'$	$\cos\mu'$	$\cos\nu'$
$\cos\omega$	$\sin\omega$	0
$\cos\xi'$	$\cos\eta'$	$\cos\zeta'$

La vitesse de b', si Ob' est équipollent à Nb considéré comme vecteur unité, est proportionnelle à $-ds : \tau$ et, cette vitesse $b'n'$ étant parallèle à Mn, a pour projections sur les axes mobiles, d'après (23),

$$\frac{\sin\omega \sin\varpi}{\tau}, \qquad -\frac{\cos\omega \sin\varpi}{\tau}, \qquad -\frac{\cos\varpi}{\tau}.$$

Alors la dernière formule (B') donne, après suppression du facteur $\cos\varpi$,

$$\left(\frac{1}{\tau} + \frac{d\varpi}{ds}\right) ds = (p\,du + p_1 dv)\cos\omega + (q\,du + q_1 dv)\sin\omega.$$

On voit que l'on retrouve encore le second membre de (25). Alors, tenant compte de (26) et de (12), on peut compléter les formules de Darboux en écrivant

$$2\left(\frac{1}{\tau} + \frac{d\varpi}{ds}\right) ds^2 = ds^2 \frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\cos\varpi}{\rho}\right) = 2ds\,d\tau \sin(\omega - \theta) = \frac{\partial}{\partial t} d\sigma^2.$$

Passons maintenant à la seconde formule (24). En désignant par ρ_g le *rayon de courbure géodésique*, tel que $\rho = \rho_g \sin\varpi$, cette formule s'écrit

$$\frac{ds}{\rho_g} = d\omega + r\,du + r_1 dv$$

et la plus belle application que l'on puisse en faire est de sauter tout de suite au tome III de Darboux et d'établir la formule d'Ossian Bonnet. En intégrant le long d'un contour fermé C, cloisonné par S, on a

$$\int_C \frac{ds}{\rho_g} = \int_C d\omega + \int\int_S \left(\frac{\partial r_1}{\partial u} - \frac{\partial r}{\partial v}\right) du\,dv.$$

D'après (21) et la troisième formule (a),

$$\int_C d\omega - \int_C \frac{ds}{\rho_g} = \int\int_S \left(\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial q_1}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial p_1}{\partial t}\right)\frac{du\,dv}{\rho_1\rho_2}.$$

Or, cette dernière intégrale double provient, par multiplication extérieure, de

$$\frac{1}{\rho_1\rho_2}\frac{\partial}{\partial t}(p\,du + p_1 dv)\frac{\partial}{\partial t}(q\,du + q_1 dv) = \frac{dx\,dy}{\rho_1\rho_2}.$$

Donc

$$\int_C d\omega - \int_C \frac{ds}{\rho_g} = \int\int_S \frac{d\sigma}{\rho_1\rho_2}.$$

On voit que la « théorie en t » redonne aisément tout le bagage classique; elle y introduit de plus des termes en t, notamment des dérivées partielles en t, qui jouent un rôle d'une simplicité extrême et bien remarquable.

[5] *Analogies structurales.* — Il s'agit des analogies entre la Théorie des groupes et les théories de Riemann-Einstein, analogies déjà signalées dans deux publications(¹) et qui jouent également un très grand rôle dans le travail de M. Cartan sur lequel nous sommes revenu au Chapitre II de notre Cinquième Mémoire.

Quand les équations (19) du Chapitre précédent sont réduites aux équations (2*) de la théorie du trièdre mobile, on peut les écrire, avec M. Cartan(²),

$$(29)\qquad \begin{cases} (\omega^1)' = [\omega^2\omega^3], \\ (\omega^2)' = [\omega^3\omega^1], \\ (\omega^3)' = [\omega^1\omega^2] \end{cases}$$

et ce sont ces équations, issues d'une identité de Calcul intégral, qui, si l'on veut, sont généralisées en (19), Ch. I. On peut considérer, par exemple, des formes de Pfaff telles que $\Gamma^\alpha_{j\beta}\,dx_\beta$ et écrire des équations du type

$$(30)\qquad \int_C \Gamma^\alpha_{j\beta}\,dx_\beta - \int\!\!\int_S \Gamma^\beta_{jk}\,dx_k . \Gamma^\alpha_{\beta i}\,dx_i = \int\!\!\int_S B^\alpha_{jki}\,dx_k\,dx_i$$

en convenant qu'elles définiront les B^α_{jki} et seront ainsi *identiquement* vérifiées.

En appliquant la formule de Stokes à l'intégrale de ligne et la multiplication extérieure à l'intégrale double qui suit, le premier membre de (9) devient

$$\int\!\!\int_S \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\Gamma^\alpha_{ji} - \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma^\alpha_{jk} + \Gamma^\beta_{ji}\Gamma^\alpha_{\beta k} - \Gamma^\beta_{jk}\Gamma^\alpha_{\beta i}\right) dx_k\,dx_i$$

et l'on voit que B^α_{jki} est alors le symbole de Riemann ordinairement désigné par cette notation. C'est la relation (30) que M. Cartan remplace par(³)

$$(31)\qquad (\omega^\alpha_j)' = [\omega^\beta_j\,\omega^\alpha_\beta] + \Omega^\alpha_j, \qquad \Omega^\alpha_j = B^\alpha_{jki}[\omega^k\omega^i].$$

(¹) A. Buhl. *La Pédagogie des Théories d'Einstein* (L'Enseignement mathématique, 1924-25); *Formules Stokiennes* (Mémorial des Sciences math., fasc. XVI).

(²) E. Cartan. *La structure des groupes et le trièdre mobile* (Bull. des Sc. math., 1910, p. 266).

(³) E. Cartan. *La Géométrie des Espaces de Riemann* (Mémorial des Sciences mathématiques, fasc. IX; p. 23).

De même, avec de nouvelles formes de Pfaff $\Gamma_{\mu\tau\beta}\, dx_\beta = \Gamma_{\beta\tau\mu}\, dx_\beta$,

$$\int_C \Gamma_{\mu\tau\beta}\, dx_\beta + \int\int_S \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\, dx_\nu \,.\, \Gamma_{\tau\alpha\sigma}\, dx_\sigma = \int\int_S \mathrm{B}_{\mu\nu\sigma\tau}\, dx_\nu\, dx_\sigma, \tag{32}$$

on a

$$\mathrm{B}_{\mu\nu\sigma\tau} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \Gamma_{\mu\tau\sigma} - \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \Gamma_{\mu\tau\nu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \Gamma_{\sigma\alpha\tau} - \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} \Gamma_{\nu\alpha\tau},$$

ce qui est l'autre symbole de Riemann. Avec la notation des formes extérieures, l'équation (32) peut aussi s'écrire

$$(\omega_{\mu\tau})' = \left[\omega_{\tau\alpha}\, \omega^\alpha_\mu\right] + \Omega_{\mu\tau}, \qquad \Omega_{\mu\tau} = \mathrm{B}_{\mu\nu\sigma\tau}\, [\omega^\nu \omega^\sigma]. \tag{33}$$

En disant, comme M. Cartan, que (31) et (33) sont des *relations de structure* pour variétés ou espaces *affines* on voit, en effet, l'analogie avec les équations (19) du Chapitre précédent qui définissent la structure des groupes finis et continus.

Les *identités de Bianchi*. sous forme *amétrique* et *métrique*,

$$\begin{gathered}\left(\mathrm{B}^\alpha_{jkm}\right)_n + \left(\mathrm{B}^\alpha_{jmn}\right)_k + \left(\mathrm{B}^\alpha_{jnk}\right)_m = 0, \\ \left(\mathrm{B}_{jkmi}\right)_n + \left(\mathrm{B}_{jmni}\right)_k + \left(\mathrm{B}_{jnki}\right)_m = 0,\end{gathered}$$

sont manifestement comparables avec (11), Ch. I.

Enfin ne pourrait-on avoir des relations de structure, en géométrie affine, plus simples que (31) et (33) en ce sens que certaines formes à deux indices telles que $\omega^\alpha{}_j$, $\omega_{\mu\tau}$ y seraient remplacées par des formes à un seul indice? M. Cartan a encore répondu à cette question en faisant correspondre de telles relations structurales à la *torsion* de l'espace affine. Ainsi cette torsion qui est toujours nulle dans les Théories d'Einstein pourrait fort bien intervenir dans une théorie plus complète et avec une complexité plutôt moindre que celle provenant de la courbure.

[**6**] *Groupes infinis*. — Après les équations (19), Ch. I, équations à deux termes, nous avons placé les équations à trois termes (31) et (33). Dans l'ordre de simplicité ces dernières seraient peut-être à mentionner en premier lieu car ce ne sont que des identités forcément vérifiées par le choix des $\Omega^\alpha{}_j$ et des $\Omega_{\mu\tau}$. Quoiqu'il en soit, après ces types préliminaires, il est naturel de placer le type, cette fois beaucoup plus compliqué,

$$(\omega^k)' = c^k_{ij}\, [\omega^i \omega^j] + a^k_{i\rho}\, [\omega^i \varpi^\rho]. \tag{34}$$

Il s'agit ici de véritables équations qui ne peuvent exister qu'avec des relations structurales convenables concernant les c_{ij}^k et les $a_{i\rho}^k$; elles servent de base à la Théorie des *groupes infinis*(¹). Jusqu'ici nous n'avons rien d'essentiel à ajouter aux grands travaux de M. E. Cartan sur ce sujet. Notons seulement certaines symétries qui appartenant à la structure des groupes finis et aux identités de Bianchi se conservent partiellement dans la structure des groupes infinis.

Bornons-nous au cas du groupe infini *transitif* pour lequel les $a_{i\rho}^k$ et les c_{ij}^k sont des *constantes*, les premières formant un système *involutif*; pour l'explication de ce dernier mot, nous renverrons au texte de M. Cartan. Calculant le covariant trilinéaire de $(\omega^k)'$, en tenant compte de (34), on obtient l'expression

$$(35)\qquad \left\{\begin{aligned} &- a_{\lambda\rho}^k \omega^\lambda (\varpi^\rho)' + \left(a_{\lambda\rho}^i a_{i\sigma}^k - a_{\lambda\sigma}^i a_{i\rho}^k\right) \omega^\lambda \varpi^\rho \varpi^\sigma \\ &+ \left(c_{i\lambda}^k a_{\mu\rho}^i - c_{i\mu}^k a_{\lambda\rho}^i + a_{i\rho}^k c_{\lambda\mu}^i\right) \omega^\lambda \omega^\mu \varpi^\rho \\ &+ \left(c_{i\lambda}^k c_{\mu\nu}^i + c_{i\mu}^k c_{\nu\lambda}^i + c_{i\nu}^k c_{\lambda\mu}^i\right) \omega^\lambda \omega^\mu \omega^\nu \end{aligned}\right. .$$

Dans celle-ci, due à M. Cartan, nous avons simplement arrangé les indices de manière à faire ressortir les symétries suivantes. Tout d'abord, la dernière parenthèse de (35) peut encore être tirée du tableau

$$(36)\qquad \left\{\begin{matrix} c_{i\lambda}^k & c_{i\mu}^k & c_{i\nu}^k \\ c_{\lambda\omega}^i & c_{\mu\omega}^i & c_{\nu\omega}^i \\ \lambda & \mu & \nu \end{matrix}\right. .$$

bien que celui-ci ne puisse pas être aussi complètement comparé à un déterminant qu'en (10_2) ou (20_2) du Chapitre précédent; la différence tient à ce qu'ici nous n'avons point de relation telle que (9), Ch. I. Ceci n'empêche pas toutefois, que si l'on numérote ainsi

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix}$$

les éléments du tableau (36), on obtient la dernière parenthèse de (35) en formant, dans (36), les produits 159, 267, 348, bref en appliquant à moitié la petite règle de Sarrus qui préside au développement d'un déterminant du troisième ordre.

Pour la seconde parenthèse de (35) les choses sont plus dissimulées mais analogues.

(¹) E. CARTAN. *Sur la structure des groupes infinis* (Annales de l'École Normale, 1904-05).

Il faut partir du tableau analogue à (36)

$$\begin{array}{ccc} \genfrac{}{}{0pt}{}{k}{i\lambda} & \genfrac{}{}{0pt}{}{k}{i\mu} & \genfrac{}{}{0pt}{}{k}{i\rho} \\ \genfrac{}{}{0pt}{}{i}{\lambda\omega} & \genfrac{}{}{0pt}{}{i}{\mu\omega} & \genfrac{}{}{0pt}{}{i}{\rho\omega} \\ \lambda & \mu & \rho \end{array}$$

et en tirer la combinaison linéaire de produits

$$159 - 249 + 348$$

le second terme étant négatif toujours conformément à la règle de Sarrus. On a, comme à l'ordinaire, en ω, un indice de substitution dont le rôle est parfaitement clair. Le développement est alors

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{k}{i\lambda}\cdot\genfrac{}{}{0pt}{}{i}{\mu\rho} - \genfrac{}{}{0pt}{}{k}{i\mu}\cdot\genfrac{}{}{0pt}{}{i}{\lambda\rho} + \genfrac{}{}{0pt}{}{k}{i\rho}\cdot\genfrac{}{}{0pt}{}{i}{\lambda\mu}$$

et donne bien la parenthèse en litige si l'on affecte les termes d'indices contenant ρ à la lettre a et les autres termes à la lettre c.

On voit que, dans cette théorie comme dans les développements plus modernes du Calcul différentiel absolu, on peut retrouver des symétries de déterminants sous les formules essentielles.

Enfin signalons que M. Cartan, dans une Note récente(¹), a montré que pour les systèmes

$$(\theta^s)' = c^s_{ij}\,[\theta^i\theta^j] + [\theta^\rho\omega^s_\rho],$$

généralisations manifestes des systèmes de Maurer, les ω^s_ρ étant des formes de Pfaff données, la méthode d'intégration indiquée dans ce Mémoire (Ch. I, § 6) était généralisable, très simplement d'ailleurs.

(¹) E. Cartan. *Sur certains systèmes différentiels dont les inconnues sont des formes de Pfaff* (Comptes rendus, 19 avril 1926).