ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

A. BUHL

Sur les formules fondamentales de l'électromagnétisme et de la gravifique

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 18 (1926), p. 1-39
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1926_3_18__1_0>

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

SUR LES FORMULES FONDAMENTALES

DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME ET DE LA GRAVIFIQUE

PAR M. A. BUHL

CINQUIÈME MÉMOIRE

Ce Mémoire se divise en deux Chapitres qu'on peut étudier indépendamment l'un de l'autre. Dans le premier, je rattache, à l'identité (1), la courbure de Riemann et l'identité de Bianchi, par une voie qui a peut-être quelque originalité, bien que ce soit refaire ce qui a été fait, en ces dernières années, par divers géomètres et, tout récemment, par M. T. Levi-Civita en son excellent *Calcolo differenziale assoluto* (A. Stock, Rome, 1925). Il ne faut même pas oublier qu'en ces matières, Félix Klein, dans son *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* (Zweiter Band, Dritte Auflage, J. Springer, Berlin, 1925), montre aussi, dans le Calcul de Grassmann, un procédé générateur des propriétés géométriques les plus élémentaires.

Les idées qui ne s'imposaient peut-être pas du temps de Grassmann semblent avoir gagné beaucoup de terrain depuis. Et s'appuyer sur des transformations d'intégrales doubles ou multiples, sur des formules stokiennes, c'est toujours recourir, plus ou moins explicitement, au Calcul de Grassmann (1).

(1) Cf. E. JAHNKE : *La science extensive de Grassmann* (L'Enseignement mathématique, 1909, pp. 417-426). Cet article, d'un caractère historique, contient de nombreuses références bibliographiques.

Dans le second Chapitre, il s'agit de passer à la Mécanique classique, à la Relativité restreinte, à la Relativité généralisée et je le fais en empruntant presque tous mes matériaux à un grand et fort élégant Mémoire, de M. Cartan, *Sur les Variétés à connexion affine et la Théorie de la Relativité généralisée* (Annales de l'École Normale, 1923 et 1924 ; 185 pages). Pour l'instant, je ne reviens que sur la Première partie de ce travail (jusqu'au paragraphe 86). Ce qui, je l'espère, m'autorise à reprendre certains fragments d'un exposé déjà si bien fait par un éminent Collègue, c'est, outre le fait d'avoir publié ici quatre Mémoires sur le sujet, de pouvoir ranger les choses dans un ordre différent et non sans quelque intérêt supplémentaire.

M. Cartan a d'abord en vue la Mécanique selon Galilée, Newton, Lorentz, Einstein ; ce n'est qu'ensuite, au paragraphe 80 de son grand travail, qu'il passe à l'Électromagnétisme. Pour moi, l'Électromagnétisme apparaît en premier lieu. Il est tout de suite derrière l'identité (1) de mon Chapitre II, les équations à la Maxwell-Lorentz précédant les équations classiques du mouvement des milieux continus. Je vois en la Théorie d'Einstein « une Géométrie électromagnétique dans laquelle la partie métrique correspond à la Gravitation ».

Et, une fois qu'on possède les symétries stokiennes ou électromagnétiques, on peut les retrouver partout. Ce point de vue me paraît avoir été aussi celui de M. Th. De Donder dans sa *Théorie du Champ électromagnétique de Maxwell-Lorentz et du Champ gravifique d'Einstein* (Gauthier-Villars et C^ie, Paris, 1920).

Évidemment, nous sommes ici en plein dans la construction phénoménale à partir de principes mathématiques. M. Émile Picard a écrit (1) que « si certains tiennent à ce qu'une théorie fournisse des images ou des modèles de la réalité qu'ils puissent en quelque sorte toucher, d'autres jugent que la partie essentielle d'une théorie est le moule analytique dans lequel elle cherche à enfermer les choses ». Certes, MM. De Donder, Cartan et moi sommes dans la seconde catégorie.

Puisque je viens de citer M. Émile Picard, je ne dois pas oublier d'autres passages, dus également à mon illustre Maître, où il recommande la plus grande prudence à ceux qui pourraient se laisser trop influencer par la séduction des théories einsteiniennes.

Mais ces théories ont un si puissant et si étrange pouvoir de synthèse que, dans les nombreux cas où l'on n'en peut pratiquement rien tirer à cause des effroyables difficultés analytiques qui se présentent dès le premier abord, il est possible de revenir aux méthodes classiques sans cesser d'être einsteinien. C'est ainsi que les équations ordinaires du mouvement des milieux continus s'insèrent tout naturellement dans les combinaisons d'intégrales multiples qui peuvent servir à bâtir la Gravi-

---

(1) *Revue des Deux-Mondes*, 1er juin 1924. — Introduction aux tomes XIV et XV de l'*Histoire de la Nation française* de M. Gabriel Hanotaux. — *Mélanges de Mathématiques et de Physique*, p. 354 (Gauthier-Villars, Paris, 1924).

fique. Vis-à-vis de cette dépendance des théories classiques, M. Cartan paraît encore plus affirmatif que moi; il écrit notamment (*loc. cit.*, § 78) : « On voit clairement « que la théorie d'Einstein, tout en se rattachant plus étroitement qu'on ne serait « tenté de le croire à la Mécanique newtonienne, s'en distingue par une plus grande « richesse de contenu physique. Les lois de la gravitation newtonienne sont for- « mées, en quelque sorte, des débris des lois de la gravitation einsteinienne, quand « on y suppose c infini. »

* * *

Ces généralités me portent à dire encore quelques mots, d'un caractère très actuel, sur la Relativité restreinte. M. Cartan rappelle que c'est une théorie analogue à celle du mouvement des milieux continus quoique déjà notablement plus compliquée. Or, d'innombrables brochures prouvent que bien des gens s'imaginent connaître cette théorie quand ils possèdent ce petit rien qu'on a appelé la transformation de Lorentz en unissant ainsi l'un des plus grands noms de la Science à une chose fort minime. Cette transformation n'est, en effet, que la rotation d'axes rectangulaires :

$$\begin{aligned} x' &= x \cos\theta + l \sin\theta \\ l' &= -x \sin\theta + l \cos\theta \end{aligned}$$

pour

$$c \tang\theta = iv, \qquad l = ict, \qquad l' = ict'.$$

Ce qui est extraordinaire, c'est qu'avec si peu on ait mis d'accord la forme complètement négative de l'expérience de Michelson et l'expérience de Fizeau. Mais si l'expérience de Michelson cessait d'être complètement négative, s'il fallait interpréter dans ce sens les franges récemment obtenues par Miller (¹) au Mont Wilson, que faudrait-il conclure?

Pour ma part, je ne conclurais rien contre les généralités relativistes; c'est la transformation dite de Lorentz que je déclarerais insuffisante quant à la résolution d'un problème aussi compliqué que celui du mouvement de la Terre par rapport à l'éther. Et ceci est tout ce qu'il y a de plus naturel.

Que penserait-on d'un personnage qui déclarerait sérieusement que, rien qu'avec une rotation d'axes rectangulaires, il se fait fort de résoudre des problèmes mécaniques et physiques très compliqués?

D'ailleurs de telles critiques ont déjà été faites. M. Painlevé (²) écrit : « Est-il

(¹) Cf. A. DUFOUR, *Sur l'expérience de Michelson* (Comptes rendus, 5 octobre 1925).
(²) *Les Axiomes de la Mécanique*, p. 95 (Gauthier-Villars, Paris, 1922).

« vraisemblable que les relations entre la matière et l'éther répondent à des concep- « tions simplistes? Est-ce que le mouvement d'un fleuve, est-ce que le mouvement « d'un solide dans un fluide ne prêtent pas aux plus singulières complications? » Je ne saurais mieux dire.

Et cependant, en vertu du caractère si étrangement, si plastiquement synthétique des théories relativistes, caractère auquel j'ai déjà fait allusion plus haut, il semble qu'un point de ces théories, même contredit par une expérience, ne puisse être complètement anéanti pour cela.

Ainsi, admettons que les récentes expériences du Mont Wilson contredisent certaines conséquences de la transformation de Lorentz. Considérons, d'autre part, un physicien, non relativiste, attaché aux théories ondulatoires. Ce physicien ne peut guère méconnaître l'équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0.$$

Or celle-ci admet la transformation de Lorentz! On ne peut l'éliminer, la passer sous silence. D'aucuns demanderont toujours ce qu'elle vient faire là. Objectera-t-on qu'une équation, correspondant à des considérations physiques, peut cependant avoir des propriétés analytiques dépourvues de toute signification physique? Mais comment affirmer cela avec certitude pour une propriété déterminée?

Tout ceci nous conduit, très modestement, à nous reconnaître encore beaucoup d'ignorance. On a longuement épilogué sur la transformation de Lorentz, mais a-t-on autant étudié les transformations *les plus générales* qui changent l'équation précédente en elle-même? Il ne me le semble pas. Dans l'ensemble de ces transformations, dût-on même faire un certain tri, on aurait sans doute à moissonner des résultats physiques qui éclaireraient bien des choses.

*
* *

Puisque nous avons rappelé, en les lignes qui précèdent, écrites à la fin de 1925, le nom de Lorentz, marquons la date du 11 décembre 1925 qui est, pour l'illustre savant, le Cinquantenaire de la Thèse présentée par lui à l'Université de Leiden : Sur la Théorie de la réflexion et de la réfraction de la lumière.

Ce Cinquantenaire a été célébré solennellement à Leiden ; il est aussi l'occasion d'une souscription internationale qui permettra à Hendrik Antoon Lorentz de continuer ses travaux et son enseignement. Qu'il nous soit permis d'associer à tant de gloire l'humble tribut d'une très respectueuse admiration.

CHAPITRE PREMIER

La Courbure de Riemann et les Identités de Bianchi.

[**1**] Je me propose d'abord d'aller, aussi directement que possible, de l'identité fondamentale

$$(1) \qquad \int_C X\,dY = \int\int_A dX\,dY$$

à la notion de courbure riemannienne. Je néglige donc intentionnellement tous les rameaux qui ne demandent qu'à se greffer sur cette souche éminemment prolifique. Nous y viendrons ensuite. Dans tous les Mémoires qui ont précédé celui-ci, j'ai toujours indiqué, en l'identité (1) et en ses généralisations à un nombre quelconque de variables, l'origine des formules fondamentales de la Physique mathématique. Nous allons voir qu'on peut arriver à une conclusion analogue en Géométrie.

Tout d'abord, des changements de variables et des combinaisons linéaires d'identités (1) transformées conduisent à la formule de Stokes

$$(2) \qquad \int_C P_i\,dx_i = \frac{1}{2}\int\int_A \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_m} & \dfrac{\partial}{\partial x_n} \\ P_m & P_n \end{vmatrix} dx_m\,dx_n.$$

Il est entendu, une fois pour toutes, que tout indice figurant deux fois dans un terme monome est indice de sommation; c'est là l'un des principes du Calcul différentiel absolu. Sous l'intégrale double de (2), $dx_m\,dx_n$ change de signe quand on intervertit m et n et il en est évidemment de même pour le déterminant. Le terme en n, m est supposé écrit aussi bien que celui en m, n; il le double et ceci explique le facteur $1:2$.

La formule stokienne (2) subsiste si l'on y remplace les ∂ par des D tels que

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{D}{Dx_m} & \dfrac{D}{Dx_n} \\ P_m & P_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_m} & \dfrac{\partial}{\partial x_n} \\ P_m & P_n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \Gamma^{\alpha}_{m\omega} & \Gamma^{\alpha}_{n\omega} \\ {}_mP_{\alpha} & {}_nP_{\alpha} \end{vmatrix}.$$

On conçoit, en effet, que le dernier déterminant se développe en

$$\Gamma^{\alpha}_{mn} P_{\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{nm} P_{\alpha},$$

ce qui est identiquement nul si, hypothèse qui sera toujours faite,

$$\Gamma^\alpha_{mn} = \Gamma^\alpha_{nm}.$$

Ceci n'empêche pas qu'en développant les trois déterminants de (3), l'identification de termes homologues donne des *dérivées en* D du type

$$\frac{\mathrm{DP}_j}{\mathrm{D}x_i} = \frac{\partial \mathrm{P}_j}{\partial x_i} - \Gamma^\alpha_{ij}\mathrm{P}_\alpha. \tag{4}$$

Ceci étant rappelé, considérons l'intégrale de contour fermé

$$\int_{\mathrm{C}} \frac{\mathrm{DP}_j}{\mathrm{D}x_i} dx_i = \int_{\mathrm{C}} d\mathrm{P}_j - \frac{1}{2}\int\int_{\mathrm{A}} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_m} & \dfrac{\partial}{\partial x_n} \\ \Gamma^\alpha_{mj}\mathrm{P}_\alpha & \Gamma^\alpha_{nj}\mathrm{P}_\alpha \end{vmatrix} dx_m dx_n. \tag{5}$$

On voit que le dernier terme provient d'un nouveau recours à la formule stokienne (2). Si l'on développe les calculs dans le dernier déterminant ainsi introduit, la formule (5) peut s'écrire

$$\int_{\mathrm{C}} \frac{\mathrm{DP}_j}{\mathrm{D}x_i} dx_i - \frac{1}{2}\int\int_{\mathrm{A}} \begin{vmatrix} \Gamma^\alpha_{mj} & \Gamma^\alpha_{nj} \\ \dfrac{\mathrm{DP}_\alpha}{\mathrm{D}x_m} & \dfrac{\mathrm{DP}_\alpha}{\mathrm{D}x_n} \end{vmatrix} dx_m dx_n = \int_{\mathrm{C}} d\mathrm{P}_j - \frac{1}{2}\int\int_{\mathrm{A}} \mathrm{P}_\alpha \mathrm{B}^\alpha_{jmn} dx_m dx_n \tag{6}$$

en posant

$$\mathrm{B}^\alpha_{jmn} = \frac{\partial}{\partial x_m}\Gamma^\alpha_{nj} - \frac{\partial}{\partial x_n}\Gamma^\alpha_{mj} + \Gamma^\beta_{nj}\Gamma^\alpha_{m\beta} - \Gamma^\beta_{mj}\Gamma^\alpha_{n\beta}. \tag{7}$$

On voit déjà apparaître, en (7), l'une des formes des symboles à quatre indices de Riemann et il importe de remarquer combien ces symboles sont proches des principes mêmes de l'Analyse représentés ici par l'identité (1).

[2] *Parallélisme selon Levi-Civita et Eddington.* — Imaginons maintenant que les P_j soient des composantes pour un vecteur variablé (P) de l'hyperespace. On peut imaginer aussi que (P) se transporte, en variant, le long d'une ligne, par exemple le long du contour C, et ce conformément aux équations, déduites de (4),

$$\frac{\mathrm{DP}_j}{\mathrm{D}x_i} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \mathrm{P}_j}{\partial x_i} - \Gamma^\alpha_{ij}\mathrm{P}_\alpha = 0 \tag{8}$$

ou encore

$$d\mathrm{P}_j - \Gamma^\alpha_{ij}\mathrm{P}_\alpha dx_i = 0. \tag{9}$$

En effet, les Γ sont fonctions des x et, le long d'une courbe, les x sont fonctions d'un paramètre unique s. Donc, il y a, en (9), un système d'équations linéaires qui détermine un (P), en s, à partir d'un (P_0). Le (P) subit alors un *déplacement parallèle* généralisé, qui est le déplacement parallèle ordinaire quand les Γ sont nuls.

Essayons maintenant de transporter l'hypothèse (8) dans (6). *Ceci n'a de sens certain que si l'aire* A *est infiniment petite* car si les équations (8) ou (9) ont un sens sur le contour C il n'en est pas de même hors de cette ligne et notamment à son intérieur si elle est fermée. Donc, *pour une aire* A *infiniment petite*, sur le contour C de laquelle (P) est transporté par parallélisme généralisé, la formule (6) se réduit à

$$\delta P_j = \int_C dP_i = \frac{1}{2}\int\int_A P_\alpha B^\alpha_{jmn} dx_m dx_n. \tag{10}$$

Ici les δP_j définissent évidemment la variation totale de (P) quand ce vecteur parcourt C. Dans l'intégrale qui suit, dP_j n'est évidemment pas à considérer comme une différentielle exacte mais comme une expression définie en (9). *L'espace sur lequel on raisonne présentement n'est pas holonome*; il le deviendrait si tous les B à quatre indices étaient nuls.

Admettons maintenant que l'aire infiniment petite A, ou plutôt δA, soit un parallélogramme à côtés consécutifs $d_1 s$, $d_2 s$ faisant entre eux un angle θ. Soit, de plus,

$$dx_m = \xi^m d_1 s, \qquad dx_n = \eta^n d_2 s.$$

La formule (10) va devenir

$$\sin\theta \; \delta P_j = P_\alpha B^\alpha_{jmn} \xi^m \eta^n \delta A. \tag{11}$$

Ce résultat et tous ceux obtenus jusqu'ici sont *amétriques* en ce sens qu'il faut bien se représenter l'aire A, ou δA, et son contour C comme situés sur une variété à deux dimensions mais sans qu'aucune forme ait été imposée à l'élément linéaire *ds* de cette variété.

On ne peut aller plus loin sans introduire une métrique mais il est extrêmement remarquable que la formule (11) donne déjà, pour le rapport de δP_j à δA, une expression dont la forme est très voisine de celle de la courbure riemannienne.

[3] *Formule de M. J. Pérès.* — La métrique qu'il nous faut maintenant introduire est celle en vertu de laquelle deux vecteurs ont un produit scalaire

$$PQ \cos V = P_j Q^j = P^j Q_j$$

avec

$$P_j = g_{jk} P^k, \qquad P^j = g^{jk} P_k. \tag{12}$$

Si les deux vecteurs se confondent en un seul, on a, par exemple,

$$P^2 = P_j P^j = g_{jk} P^j P^k$$

d'où, en particulier,

$$ds^2 = g_{jk} dx_j dx_k. \tag{13}$$

Aux directions $d_1 s$, $d_2 s$, (P), déjà introduites, adjoignons une nouvelle direction de repère, *fixe*, (Q), et imaginons que (P) et (Q) soient de longueur unité en faisant un angle α. On aura

$$\cos \alpha = P_j Q^j = P^j Q_j$$

d'où

$$- \sin \alpha \delta\alpha = Q^j \delta P_j = Q_j \delta P^j.$$

De même que, dans (11), les δP_j sont les variations des composantes de (P), ici $\delta\alpha$ est la variation de direction correspondante quand (P) décrit le contour C.

Ceci étant posé, la formule (11), multipliée par Q^j, devient

$$- \sin \alpha \sin \theta \delta\alpha = Q^j P_\alpha B^\alpha_{\ jmn} \xi^m \eta^n \delta A = Q^j g_{\alpha i} P^i B^\alpha_{\ jmn} \xi^m \eta^n \delta A.$$

En posant

$$B_{jmni} = g_{\alpha i} B^\alpha_{\ jmn} \tag{14}$$

et en se rappelant que ces nouveaux symboles riemanniens, à quatre indices inférieurs, changent de signe quand on intervertit i et j, ou m et n, on a enfin la formule de M. J. Pérès

$$\sin \alpha \sin \theta \delta\alpha = P^i Q^j B_{imnj} \xi^m \eta^n \delta A. \tag{15}$$

Dans cette formule les P^i peuvent être considérés comme invariables car ils ne peuvent varier qu'infiniment peu le long de C et toute variation infiniment petite adjointe à ces P^i disparaît, comme d'ordre supérieur, lorsqu'elle est multipliée par δA.

Particularisons la formule (15) en supposant

$$(P) \equiv (\xi) \equiv (u), \qquad (Q) \equiv (\eta) \equiv (v);$$

nous aurons pour la courbure riemannienne

$$K = - \frac{\delta\alpha}{\delta A} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} B_{inmj} u^i v^j u^m v^n. \tag{16}$$

Comme on a

$$(g_{im}g_{jn} - g_{in}g_{jm}) u^i v^j u^m v^n = 1 - u_n v^n v_m u^m = 1 - \cos^2 \alpha,$$

on peut écrire encore

$$K = \frac{B_{inmj} u^i v^j u^m v^n}{(g_{im}g_{jn} - g_{in}g_{jm}) u^i v^j u^m v^n}$$

ou, si l'on s'astreint à toujours avoir $i < j$, $m < n$

$$K = \frac{B_{inmj} \begin{vmatrix} u^i & v^i \\ u^j & v^j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u^m & v^m \\ u^n & v^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{im} & g_{in} \\ g_{jm} & g_{jn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u^i & v^i \\ u^j & v^j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u^m & v^m \\ u^n & v^n \end{vmatrix}}.$$

Telle est la formule des *Lezioni di Geometria differenziale* de L. Bianchi (terza edizione, vol. II, parte II, p. 431).

On voit que la courbure K dépend d'une orientation à deux dimensions, d'une *giacitura*, définie par les deux vecteurs (u) et (v), du moins en général. Sur les surfaces ordinaires cette dépendance disparaît car il n'y a qu'un seul symbole B et un seul déterminant en g. Alors les u et les v disparaissent dans K.

[**4**] *Compléments métriques.* — Le calcul de K ne se présente peut-être pas encore de manière complètement explicite dans l'exposé que nous venons de faire car K dépend des B_{inmj} qui, par (14), dépendent des B^{α}_{jmn} incomplètement définis en (7) puisque les Γ à trois indices paraissent être encore indéterminés. Les mémoires qui ont précédé celui-ci montrent suffisamment quels compléments il convient d'apporter (*Cf.* 3ᵉ mém.). Rappelons cependant l'essentiel, ce qui sera plus commode pour ce que nous voulons faire ensuite.

A la formule (4) il convient d'adjoindre

$$\frac{DP^j}{Dx_i} = \frac{\partial P^j}{\partial x_i} + \Gamma^j_{i\alpha} P^\alpha, \tag{17}$$

de manière à obtenir

$$P^j \frac{DP_j}{Dx_i} + P_j \frac{DP^j}{Dx_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(P_j P^j) \tag{18}$$

ou bien

$$d(P^j P_j) = P^j \frac{DP_j}{Dx_i} dx_i + P_j \frac{DP^j}{Dx_i} dx_i. \tag{19}$$

Les P^j et les P_j doivent être liés par les relations (12). Le déplacement parallèle, associé à la métrique définie au début du paragraphe précédent, se précise en ce qu'il correspond au cas où l'égalité (19) est satisfaite en posant

$$(20) \qquad P_j P^j = \text{const}^e, \qquad \frac{DP_j}{Dx_i} dx_i = 0, \qquad \frac{DP^j}{Dx_i} dx_i = 0,$$

les deux dernières relations (20) n'en devant faire qu'une. Prenons ces relations sous les formes respectives

$$dP_j - \Gamma^\alpha_{\ ij} P_\alpha dx_i = 0, \qquad dP^j + \Gamma^j_{\ i\alpha} P^\alpha dx_i = 0$$

et écrivons qu'elles s'équivalent au moyen des équations (12) différentiées. On trouve

$$(21) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{Dg^{ij}}{Dx_l} &= \frac{\partial g^{ij}}{\partial x_l} + \Gamma^i_{\ \alpha l} g^{\alpha j} + \Gamma^j_{\ \alpha l} g^{i\alpha} = 0, \\ \frac{Dg_{ij}}{Dx_l} &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} - \Gamma^\alpha_{\ il} g_{\alpha j} - \Gamma^\alpha_{\ jl} g_{i\alpha} = 0. \end{aligned} \right.$$

Ce sont les équations (17) du Troisième Mémoire. Pour l'instant ce qui importe est la dernière équation (21) qui, avec le symbolisme bien connu, peut s'écrire

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} = \begin{bmatrix} il \\ j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} jl \\ i \end{bmatrix},$$

résultat d'où l'on tire

$$2\begin{bmatrix} li \\ j \end{bmatrix} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{li}}{\partial x_j}.$$

On a donc définitivement un moyen de former les Γ en partant du ds^2 formé en (13).

[**5**] *Dérivées en* D. *Cas général.* — Les formule (4), (17), (21) font déjà pressentir l'existence de dérivations en D s'effectuant suivant le schème

$$\frac{D}{Dx_i} A^{***}_{****} = \frac{\partial}{\partial x_i} A^{***}_{****} \begin{array}{l} - \Gamma^\alpha_{\ \mu i} A^{***}_{*\alpha**} \quad \text{pour chaque} \quad A^{***}_{*\mu**} \\ + \Gamma^\mu_{\ \alpha i} A^{*\alpha*}_{****} \quad \text{pour chaque} \quad A^{*\mu*}_{****} \end{array}.$$

Des *produits* tels que $P^j P_j$ dans (19), tels que $N^{ij} M_{ij}$, que $N^i_{\ j} M^j_{\ i}$, etc., qui contiennent toujours un même indice supérieurement et inférieurement sont dits *saturés*. Ils se dérivent en D comme un produit ordinaire se dérive en ∂. On a l'exemple le plus simple en (18). On vérifierait qu'il en est de même pour $N^{ij}M_{ij}$, etc. L'assertion s'étend aux produits *non saturés* en leur adjoignant des *facteurs de saturation* qui ensuite disparaissent d'eux-mêmes. Nous n'avons pas à développer ces points; ce serait reprendre exactement les démonstratious de M. Levi-Civita (*Calcolo*, pp. 171-173).

Les dérivées en D *ne sont pas permutables*. Ainsi

$$(22)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{D}{Dx_m} & \dfrac{D}{Dx_n} \\ \dfrac{DP_j}{Dx_m} & \dfrac{DP_j}{Dx_n} \end{vmatrix} = P_\alpha B^\alpha{}_{jnm}, \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{D}{Dx_m} & \dfrac{D}{Dx_n} \\ \dfrac{DP^j}{Dx_m} & \dfrac{DP^j}{Dx_n} \end{vmatrix} = P^\alpha B^j{}_{\alpha mn}$$

et c'est là une autre manière d'obtenir les B à quatre indices rencontrés déjà en (6).

Aussi allons-nous essayer de généraliser à la fois (6) et (22). Nous verrons que la comparaison de ces généralisations conduit aux identités de Bianchi.

[6] *Extension du déplacement parallèle.* — Soit un *tenseur du second ordre*, c'est-à-dire un ensemble de M_{jk} à deux indices. On a, d'après le schème général de dérivation,

$$\frac{DM_{jk}}{Dx_i} = \frac{\partial M_{jk}}{\partial x_i} - \Gamma^\alpha{}_{ik}M_{j\alpha} - \Gamma^\alpha{}_{ij}M_{\alpha k}.$$

Si l'on multiplie par dx_i, si l'on intègre le long du contour C d'une aire A, si l'on transforme par la formule de Stokes les intégrales contenant les Γ, on a, toutes réductions faites, une égalité entre

$$\int_C \frac{DM_{jk}}{Dx_i}dx_i - \frac{1}{2}\int\int_A \begin{vmatrix} \Gamma^\alpha{}_{mk} & \Gamma^\alpha{}_{nk} \\ \dfrac{DM_{j\alpha}}{Dx_m} & \dfrac{DM_{j\alpha}}{Dx_n} \end{vmatrix} dx_m dx_n - \frac{1}{2}\int\int_A \begin{vmatrix} \Gamma^\alpha{}_{mj} & \Gamma^\alpha{}_{nj} \\ \dfrac{DM_{\alpha k}}{Dx_m} & \dfrac{DM_{\alpha k}}{Dx_n} \end{vmatrix} dx_m dx_n$$

et

$$(23)\qquad \int_C dM_{jk} - \frac{1}{2}\int\int_A (M_{j\alpha}B^\alpha{}_{kmn} + M_{\alpha k}B^\alpha{}_{jmn})\, dx_m dx_n.$$

Cette égalité de (23) et de l'expression précédente généralise évidemment l'équation (6) et l'on pourrait tirer de cette généralisation des résultats géométriques analogues à ceux du paragraphe 2. Mais ce n'est pas ce qui nous occupera pour l'instant. Remarquons plutôt que sous la dernière intégrale double de (6) on retrouve, au signe près, le second membre de la première égalité (22). Il est alors tout naturel de se demander si la parenthèse qui figure sous l'intégrale double de (23) n'a pas une expression analogue au premier membre de la première égalité (22). Or la correspondance ainsi pressentie existe bien et se traduit par l'égalité

$$(24)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{D}{Dx_n} & \dfrac{D}{Dx_m} \\ \dfrac{DM_{jk}}{Dx_n} & \dfrac{DM_{jk}}{Dx_m} \end{vmatrix} = M_{j\alpha}B^{\alpha}{}_{kmn} + M_{\alpha k}B^{\alpha}{}_{jmn}.$$

Cette formule est d'ailleurs facile à vérifier en développant le premier membre, les dérivations en D de la première ligne du déterminant s'appliquant aux termes de la seconde ligne qui sont alors à considérer comme des A_{***} se dérivant suivant le schème général du paragraphe 5.

La formule (24) va maintenant nous livrer presque immédiatement les identités de Bianchi.

[7] *Identités de Bianchi.* — Nous avons ici à utiliser la règle de dérivation des produits sommairement rappelée au paragraphe 5. Ainsi, avec un vecteur aux composantes A_*

$$(25)\qquad (B^{\alpha}{}_{jkm}A_{\alpha})_n = (B^{\alpha}{}_{jkm})_n A_{\alpha} + B^{\alpha}{}_{jkm}A_{\alpha n}.$$

L'indice n, on le voit, indique une dérivation en D par rapport à x_n.

Soit maintenant l'identité évidente

$$\begin{aligned}(A_{jkmn} - A_{jknm}) &+ (A_{jmnk} - A_{jmkn}) + (A_{jnkm} - A_{jnmk}) \\ &= (A_{jkm} - A_{jmk})_n + (A_{jmn} - A_{jnm})_k + (A_{jnk} - A_{jkn})_m\end{aligned}$$

où tous les indices adjoints à A_* indiquent toujours des dérivations en D.

Modifions les parenthèses de la première ligne conformément à (24) et les parenthèses de la seconde conformément à la première formule (22); si alors on effectue les dérivations conformément à (25), il vient

$$(B^{\alpha}{}_{kmn} + B^{\alpha}{}_{mnk} + B^{\alpha}{}_{nkm})A_{j\alpha} = [(B^{\alpha}{}_{jkm})_n + (B^{\alpha}{}_{jmn})_k + (B^{\alpha}{}_{jnk})_m]A_{\alpha}.$$

Or la parenthèse du premier membre est identiquement nulle. Donc

$$(26)\qquad (B^{\alpha}{}_{jkm})_n + (B^{\alpha}{}_{jmn})_k + (B^{\alpha}{}_{jnk})_m = 0.$$

Telle est l'identité de Bianchi pour les B à quatre indices dont trois inférieurs.

On peut l'écrire plus symétriquement encore

$$\begin{vmatrix} \frac{D}{Dx_k} & \frac{D}{Dx_m} & \frac{D}{Dx_n} \\ B^{\alpha}{}_{jk\omega} & B^{\alpha}{}_{jm\omega} & B^{\alpha}{}_{jn\omega} \\ k & m & n \end{vmatrix} = 0.$$

On peut dire que c'est la forme *amétrique* de l'identité de Bianchi. Les g_{jk} du ds^2 rappelé en (13) n'y interviennent pas forcément. Au contraire, introduisons-les en multipliant (26) par $g_{\alpha i}$. Ces $g_{\alpha i}$ pourront entrer dans les parenthèses de (26) car leurs dérivées en D sont nulles comme on l'a vu en (21). Alors, d'après (14),

$$(B_{jkmi})_n + (B_{jmni})_k + (B_{jnki})_m = 0,$$

ce que l'on peut encore écrire

$$\begin{vmatrix} \frac{D}{Dx_k} & \frac{D}{Dx_m} & \frac{D}{Dx_n} \\ B_{jk\omega i} & B_{jm\omega i} & B_{jn\omega i} \\ k & m & n \end{vmatrix} = 0.$$

C'est la seconde forme, ou forme *métrique*, de l'identité de Bianchi.

[8] *Théorème de Schur.* — En un point d'une variété à ds^2 donné, la courbure K peut-elle être indépendante de l'orientation bivectorielle, de la *giacitura* dont il a été question à la fin du paragraphe 3? Si oui, on doit avoir

$$B_{inmj} = K(g_{im}g_{jn} - g_{in}g_{jm})$$

et, d'après la forme métrique de l'identité de Bianchi,

$$(B_{inmj})_k + (B_{iknj})_m + (B_{imkj})_n = \begin{vmatrix} K_k & K_m & K_n \\ g_{ik} & g_{im} & g_{in} \\ g_{jk} & g_{jm} & g_{jn} \end{vmatrix} = 0.$$

Nous sommes ici dans un problème métrique ; les dérivations en D, quand elles portent sur des g_{ij}, donnent des résultats nuls. De plus K est un *invariant*, un cas particulier des expressions à indices saturés, puisqu'il n'a ni indice supérieur ni indice inférieur. Dans ces conditions K se dérive en D comme en ∂. Le déterminant de notre dernière égalité, celle-ci en donnant plusieurs pour des i, j différents, ne peut être nul, en général que si K_k, K_m, K_n sont nuls et ceci équivaut à

$$\frac{\partial K}{\partial x_k} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial x_m} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial x_n} = 0.$$

Donc K, qui ne devait pas dépendre des u et des v, ne dépend pas non plus des x. *La variété est partout à courbure constante.*

Pour plus de détail, renvoyons encore au texte de M. Levi-Civita (*Calcolo*, p. 245).

[9] *Identité fondamentale de la gravifique d'Einstein.* — Revenons à la forme amétrique de l'identité de Bianchi et contractons-la en faisant $n = \alpha$. Il vient

$$(B^\alpha_{\ jkm})_\alpha + G_{jmk} - G_{jkm} = 0, \tag{27}$$

en posant

$$G_{ij} = B^\alpha_{\ ij\alpha}.$$

On a maintenant, d'après les symétries bien connues des B à quatre indices inférieurs, symétries exposées d'ailleurs dans les Mémoires précédents,

$$\begin{aligned} g^{jk}(B^\alpha_{\ jkm})_\alpha &= (g^{jk}B^\alpha_{\ jkm})_\alpha = (g^{jk}g^{\alpha\beta}B_{jkm\beta})_\alpha \\ &= (g^{\alpha\beta}g^{jk}B_{\beta mkj})_\alpha = (g^{\alpha\beta}B^k_{\ \beta mk})_\alpha = (g^{\alpha\beta}G_{\beta m})_\alpha = G^\alpha_{\ m\alpha}. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} g^{jk}G_{jmk} &= (g^{jk}G_{jm})_k = G^k_{\ mk}, \\ g^{jk}G_{jkm} &= (g^{jk}G_{jk})_m = G_m. \end{aligned}$$

On voit que l'égalité (27), multipliée par g^{jk}, donne enfin

$$2G^\alpha_{\ m\alpha} = G_m = \frac{\partial G}{\partial x_m}. \tag{28}$$

C'est l'identité fondamentale de la Mécanique einsteinienne.

[10] *Conclusion.* — Le théorème de Schur et l'identité fondamentale (28) de la Gravifique d'Einstein sont deux conséquences de l'identité de Bianchi donnée depuis longtemps par le célèbre géomètre en ses *Lezioni di Geometria differenziale*.

La troisième édition contient ce résultat (vol. II, parte II, pp. 438-440) ; les éditions précédentes le contenaient aussi, sous forme plus ou moins implicite, dès qu'il s'agissait de démontrer le théorème de Schur. On voit donc que lorsqu'on examine de près les fondements des théories d'Einstein, on n'y trouve guère qu'un matériel analytico-géométrique qui a précédé nettement les applications qui en furent faites par l'illustre savant. Ceci, à notre avis, ne peut que tourner à l'avantage desdites théories ; elles sont venues à leur heure, en se greffant sur l'œuvre de devanciers faciles à repérer et ce d'une manière parfaitement continue. L'opinion, d'après laquelle elles seraient en contradiction avec le classicisme habituel, est de plus en plus insoutenable.

M. E. Cartan fait d'ailleurs remonter les identités de Bianchi ou « dites de Bianchi » à G. Ricci et même à A. Voss (1880). Pour plus de détails, voir le fascicule IX, publié par M. Cartan, dans le « Mémorial des Sciences mathématiques ».

CHAPITRE II

Le Mémoire de M. E. Cartan.

Ce Chapitre n'est guère autre chose qu'une analyse du Mémoire de M. E. Cartan *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la Relativité généralisée*, ce que nous avons déjà dit dans l'introduction du présent travail. Il n'y aura donc pas lieu de s'étonner si nous sommes amené à reproduire certaines formules dues à l'éminent auteur. Nous commençons par des comparaisons entre la génération des équations classiques régissant le mouvement des milieux continus et celle des équations électromagnétiques de Maxwell-Lorentz-Einstein.

[**1**] *Identité fondamentale. Électromagnétisme. Mécanique classique.* — Comme nous l'avons expliqué, à plusieurs reprises, dans les Mémoires précédents, nous partons toujours de l'identité fondamentale

$$\int\int_S X\,dY\,dZ = \int\int\int_V dX\,dY\,dZ. \tag{1}$$

Celle-ci, par changements de variables et combinaisons linéaires des résultats obtenus, donne la formule stokienne

$$\int\int_S M_{ij}\,dx_i\,dx_j = \int\int\int_V \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} & \frac{\partial F}{\partial x_3} & \frac{\partial F}{\partial x_4} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} \\ M_{1\omega} & M_{2\omega} & M_{3\omega} & M_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \frac{dx_1\,dx_2\,dx_3}{\frac{\partial F}{\partial x_4}}. \tag{2}$$

On suppose cette formule bien connue; rappelons simplement que la variété V, dans (2), a trois dimensions dans l'espace à quatre et que cette V a pour équation

$$F = 0.$$

Il faut observer aussi que le second membre de (2) peut avoir un signe selon la *face* de la variété V qui intervient dans l'intégration; c'est ainsi que, dans notre

Premier Mémoire (1920), l'intégrale triple de (2) était précédée du signe *moins*. Mais, pour l'instant et pour la suite du présent travail, ceci est de peu d'importance.

Les équations électromagnétiques générales correspondent à des circonstances spatiales quadridimensionnelles pour lesquelles la formule (2), qui, comme transformée de (1), n'est qu'une identité, s'évanouit en l'identité par excellence $0 = 0$.

Ceci peut arriver de deux manières; nous avons d'abord à insister beaucoup sur la première qui donne le premier groupe des équations électromagnétiques.

Imaginons, en premier lieu, que le déterminant sous l'intégrale triple soit identiquement égal à zéro, la fonction F devant être déterminée par l'équation aux dérivées partielles ainsi obtenue. Si $2A_1$, $2A_2$, $2A_3$, $2A_4$ sont les mineurs algébriques des termes de la première ligne du déterminant, l'équation aux dérivées partielles en F admet pour système caractéristique :

$$\frac{dx_1}{2A_1} = \frac{dx_2}{2A_2} = \frac{dx_3}{2A_3} = \frac{dx_4}{2A_4}. \tag{3}$$

C'est déjà là un premier groupe d'équations électromagnétiques. En posant

$$\frac{dx_1}{dx_4} = u_1, \qquad \frac{dx_2}{dx_4} = u_2, \qquad \frac{dx_3}{dx_4} = u_3, \tag{4}$$

on peut l'écrire

$$\frac{u_1}{A_1} = \frac{u_2}{A_2} = \frac{u_3}{A_3} = \frac{1}{A_4} = -\frac{1}{\rho\sigma} \tag{5}$$

en désignant par $\rho\sigma$ un coefficient de proportionnalité décomposé en deux facteurs pour la commodité ultérieure. Avec les formes qu'on peut ainsi attribuer aux A_i, le second membre de (2) nous livre maintenant une intégrale du type

$$\iiint \rho\sigma\left(u_1\frac{\partial F}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial F}{\partial x_2} + u_3\frac{\partial F}{\partial x_3} + \frac{\partial F}{\partial x_4}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial x_4}\right)^{-1} dx_1\,dx_2\,dx_3.$$

Si la variété d'intégration est V, cette nouvelle intégrale est encore identiquement nulle car, dans la première parenthèse, elle contient dF ce qui est partout nul sur V d'équation $F = 0$.

Interrompons-nous un instant pour prendre les notations de M. Cartan qui sont d'ailleurs celles de la Mécanique des milieux continus. Notre dernière intégrale peut s'écrire

$$\iiint \rho\sigma(-u_1\,dx_4\,dx_2\,dx_3 - u_2\,dx_1\,dx_4\,dx_3 - u_3\,dx_1\,dx_2\,dx_4 + dx_1\,dx_2\,dx_3).$$

Remplaçant

$$(6) \qquad x_1, x_2, x_3, x_4; \qquad u_1, u_2, u_3$$

respectivement par

$$(7) \qquad x, y, z, t; \qquad u, v, w,$$

on a l'expression plus maniable

$$(8) \qquad \int\int\int \rho\sigma(dx\,dy\,dz - u\,dy\,dz\,dt - v\,dz\,dx\,dt - w\,dx\,dy\,dt).$$

Il est entendu que l'interversion, sous les signes sommatoires, de deux éléments différentiels, tels que dx, dy, équivaut à un changement de signe du monome contenant de tels facteurs.

Reprenons maintenant le raisonnement interrompu.

La variété, à trois dimensions, V, coupée par l'hyperplan $t = \text{const}^e$, donne une variété à deux dimensions qui doit être une surface fermée, de l'espace ordinaire, contenant la quantité totale d'électricité en jeu ou toute la masse fluide en mouvement telle qu'elle est à l'instant t. Comme chaque particule fluide engendre, dans l'espace-temps, un *tube d'Univers*, la variété V est celle qui enserre l'ensemble, le faisceau de ces tubes. Entre les hyperplans $t = t_1$, $t = t_2$ et la V est une étendue W quadrimensionnelle fermée. L'intégrale (8), dont tous les éléments sont nuls sur V, n'a aucune raison d'être nulle sur les faces $t = t_1$, $t = t_2$ de W et alors, étendue à la variété fermée qui limite W elle est transformable, par la formule de Green, en une intégrale quadruple étendue à W, savoir

$$(9) \qquad \int\int\int\int \left[\frac{\partial(\rho\sigma)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\sigma u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\sigma v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\sigma w)}{\partial z}\right] dx\,dy\,dz\,dt.$$

C'est ici que va s'introduire le langage de la Mécanique ordinaire. D'abord, en donnant à σ les valeurs successives $1, u, v, w$, on tirera de (9) *quatre* intégrales distinctes.

On les identifiera avec un vecteur d'Univers dont les *quatre* composantes seront *zéro*, pour la composante temps, et

$$(10) \qquad \int\int\int\int_W (X, Y, Z)\, dx\,dy\,dz\,dt$$

pour les composantes d'espace. On a ainsi quatre équations dont les trois dernières peuvent se simplifier à l'aide de la première et qui prennent alors la forme

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \dfrac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \dfrac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0, \\ \rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) = X, \\ \rho\left(\dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + w\dfrac{\partial v}{\partial z}\right) = Y, \\ \rho\left(\dfrac{\partial w}{\partial t} + u\dfrac{\partial w}{\partial x} + v\dfrac{\partial w}{\partial y} + w\dfrac{\partial w}{\partial z}\right) = Z. \end{cases}$$

Ce sont déjà les équations du mouvement d'un milieu continu supposé affranchi de *pressions* et de *tensions* ; toute particule se meut environnée d'autres particules mais sans gêner celles-ci ni être gênée par elles. C'est-à-dire qu'il doit y avoir en (11) les équations du mouvement d'une particule libre. En effet, avec les nouvelles notations

$$u = \frac{dx}{dt}, \qquad v = \frac{dy}{dt}, \qquad w = \frac{dz}{dt}$$

les trois dernières équations (11) deviennent

$$\rho\frac{du}{dt} = X, \qquad \rho\frac{dv}{dt} = Y, \qquad \rho\frac{dw}{dt} = Z$$

ou bien

$$(12)\qquad \rho\frac{d^2x}{dt^2} = X, \qquad \rho\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \qquad \rho\frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

Ici, remarquons, avec M. Cartan, que X, Y, Z se rapportent à l'unité de volume, ce qui est évident d'après (10). Si l'on multiplie les équations (12) par l'élément de volume $d\tau = dx\,dy\,dz$ et que l'on considère ρ comme une *densité*, alors $\rho\,d\tau$ est la *masse* m de $d\tau$ et $X\,d\tau$, $Y\,d\tau$, $Z\,d\tau$ se rapportent à cette masse de volume infiniment petit ou *point matériel*. Si l'on convient de désigner ces trois dernières composantes simplement par X, Y, Z, les équations (12) prennent la forme tout à fait habituelle

$$(13)\qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

[**2**] *Pressions et tensions*. — Reprenons l'intégrale triple (8) qui, comme nous l'avons vu, en condense quatre dont les trois dernières s'obtiennent en donnant à σ les valeurs u, v, w.

Ainsi, en ce qui précède, nous avons introduit le tableau

$$
\begin{array}{ccc}
\rho u^2 & \rho uv & \rho uw \\
\rho vu & \rho v^2 & \rho vw \\
\rho wu & \rho wv & \rho w^2
\end{array}
$$

qui est symétrique par rapport à sa diagonale principale. Si, *sans altérer cette symétrie*, nous complétons ce tableau comme suit

$$
\begin{array}{ccc}
\rho u^2 + p_{xx} & \rho uv + p_{xy} & \rho uw + p_{xz} \\
\rho vu + p_{yx} & \rho v^2 + p_{yy} & \rho vw + p_{yz} \\
\rho wu + p_{zx} & \rho wv + p_{zy} & \rho w^2 + p_{zz}
\end{array}
$$

le raisonnement qui a conduit au système (11) peut être recommencé sans la moindre difficulté nouvelle et ce système (11) est alors à remplacer par

$$
(14) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0, \\
&\rho \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} = X, \\
&\rho \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial z} = Y, \\
&\rho \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} = Z.
\end{aligned}
\right.
$$

En changeant les notations d'une manière absolument claire en soi et en convenant que X, Y, Z se rapportent à l'unité de masse et non plus à l'unité de volume, le système (14) peut aussi s'écrire

$$
(15) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0, \\
&\rho(X - J_x) = \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z}, \\
&\rho(Y - J_y) = \frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z}, \\
&\rho(Z - J_z) = \frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z}.
\end{aligned}
\right.
$$

Les trois dernières équations sont bien les équations ordinaires que l'on trouvera notamment dans le *Traité de Mécanique rationnelle* de M. P. Appell (t. III; 2[e] édition,

p. 130; 3e édition, p. 139). La première équation (14) ou (15) est l'équation de continuité qui, d'une manière ou d'une autre, est toujours étudiée avec les trois suivantes, mais il est remarquable que la méthode précédente lie les quatre équations (15) d'une manière particulièrement étroite. Leur ensemble est absolument comparable à celui des quatre premières équations électromagnétiques.

[**3**] *Origine électromagnétique des phénomènes mécaniques.* — Presque tout le raisonnement qui précède est dû à M. E. Cartan. L'éminent géomètre le commence avec les trois expressions de l'intégrale (8) pour σ successivement égal à u, v, w. C'est ainsi qu'au paragraphe 8 de son Mémoire, il introduit la notion de *quantité de mouvement-masse*.

On voit qu'on peut faire précéder ceci d'une remarque fondamentale : *les intégrales* (8) *ont leur origine dans les formules fondamentales de l'électromagnétisme.*

Quand nous arrivons aux équations (11), (12) ou (13) de la Mécanique classique et que notamment les notions de *masse* ou de *densité* s'imposent à nous, nous sommes tout naturellement avec les théoriciens qui veulent que ces notions soient d'origine électromagnétique. Sans doute une telle assertion n'est appuyée ici que sur des raisons *analytiques* mais la prodigieuse puissance de synthèse de celles-ci mérite bien d'être signalée. Cela ne fait pas oublier que d'autres théoriciens de la Physique veulent au contraire bâtir les phénomènes électromagnétiques à partir des principes de la Mécanique mais il semble bien, pour l'heure actuelle, que ce soit la théorie électromagnétique qui détienne le record de la logique et de la simplicité, en attendant, peut-être, que les mécanistes ne battent celui-ci par quelque découverte retentissante. Sur de tels points, rien de plus philosophique que l'expectative.

Si, pour le moment, l'Électromagnétisme initial est si séduisant, c'est qu'il repose sur l'identité (1) de ce Chapitre, de même que la Géométrie peut reposer sur l'identité (1) du Chapitre précédent. Pour les constructeurs de théories à partir de principes de plus en plus simples, il sera sans doute difficile de trouver mieux que ces identités.

M. Cartan exprime d'ailleurs des idées analogues à celles-ci dans un langage un peu différent. Il écrit notamment : « Au fond les lois de la Dynamique des milieux continus et celles de l'Électromagnétisme s'expriment par des équations analogues à la formule de Stokes ou à cette formule généralisée » (*loc. cit.*, p. 329). Or toutes les formules stokiennes peuvent naître d'identités telles que (1). Personnellement, plutôt que de dire : « les lois de la Dynamique des milieux continus et celles de l'Électromagnétisme », je préférerais : « les lois de l'Électromagnétisme et celles de la Dynamique ».

Voici d'ailleurs, sur ces points, quelques éclaircissements d'importance notable.

Il semble qu'à partir des équations (3) *la forme* des mineurs $2A_i$ n'ait rien à faire dans le raisonnement. Le second membre de (2) pourrait être aussi bien remplacé par une intégrale telle que

$$(16)\qquad 2\int\int\int_{V}\left(A_1\frac{\partial F}{\partial x_1}+A_2\frac{\partial F}{\partial x_2}+A_3\frac{\partial F}{\partial x_3}+A_4\frac{\partial F}{\partial x_4}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial x_4}\right)^{-1}dx_1dx_2dx_3$$

avec des A_i quelconques.

Il importe d'abord de bien préciser la différence existant entre les deux intégrales ainsi comparées. L'intégrale (16) prend la forme du second membre de (2) quand on a

$$\frac{\partial A_1}{\partial x_1}+\frac{\partial A_2}{\partial x_2}+\frac{\partial A_3}{\partial x_3}+\frac{\partial A_4}{\partial x_4}=0$$

et elle ne dépend alors que de la frontière S *de la variété* V. C'est précisément là qu'il faut voir un postulat essentiel sans lequel on n'aurait ni la formule (2) ni, par suite, la possibilité de remonter toute la théorie jusqu'à l'identité (1). De plus cette théorie, telle qu'elle a été exposée jusqu'ici, n'est pas complète ; nous n'avons que le premier groupe des équations électromagnétiques. Pour avoir le second groupe il faut obligatoirement recourir à (2) et écrire la nullité du déterminant du second membre par une seconde méthode, celle qui consiste à annuler séparément les mineurs des termes de la première ligne. Pour plus de détails, à ce sujet, renvoyons à notre Premier Mémoire.

Ajoutons encore que la dépendance de l'électromagnétisme et des phénomènes mécaniques est incluse, par nature, dans les idées de Grassmann si bien développées et renouvelées aujourd'hui par MM. Goursat et Cartan. Toute théorie géométrique ou mécanique qui s'appuie sur des formules stokiennes ou, ce qui revient au même, sur la notion de « multiplication extérieure » est forcément électromagnétique.

La forme différentielle la plus simple pour laquelle on peut parler de multiplication et de dérivation extérieures est $P_i dx_i$; ensuite vient immédiatement $M_{ij}dx_i dx_j$ c'est-à-dire la forme génératrice des équations de Maxwell. Pour vraiment se débarrasser de ces dernières équations, comme semblent le conseiller de temps à autre certains auteurs, il faudrait une Physique mathématique n'ayant plus aucune accointance avec les formes différentielles précédentes. On conviendra que les grands travaux modernes ne marchent guère dans ce sens et que les imperfections, parfois très réelles, des équations de Maxwell, appellent des compléments et non une proscription [1]. Enfin il faut encore remarquer que l'étroite parenté que nous venons de rap-

---

[1] Comme grand traité moderne où les équations de Maxwell sont mises en œuvre avec toute la généralité qui leur est conférée par l'équation (2), mentionnons :

Th. De Donder. *Théorie mathématique de l'Électricité*, 1925 (Gauthier-Villars et Cie, Paris). Il y a là un très grand et très profond ouvrage qui semble assurer pour longtemps encore peler, entre les équations de Maxwell et les équations (15) de la dynamique des milieux continus, fait qu'en abandonnant les premières, on risque de nuire gravement aux secondes.

De même les théories *élastiques* des phénomènes électriques, théories construites à partir de (15) ne peuvent guère être *opposées* à celles qui correspondent aux équations de Maxwell; les deux analyses sont par trop voisines.

[**4**] *Sur la formule de Green.* — Pour obtenir l'intégrale quadruple (9) nous nous sommes servi de la formule de Green. N'est-ce pas introduire dans le raisonnement un chaînon n'ayant point la même nature que les autres et au sujet duquel on pourrait dire que tout ne découle pas véritablement d'identités telles que (1). M. Cartan répond implicitement à cette objection (*loc. cit.*, p. 329) en invoquant toutes les formes de transformations qui font passer d'une intégrale étendue à une variété fermée à une autre étendue à l'espace enfermé; la formule de Green est évidemment parmi de telles formules.

D'une manière particulièrement précise, dans mon Troisième Mémoire *Sur les transformations et extensions de la formule de Stokes* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1914, p. 126), j'ai donné le théorème suivant : *La transformation*

$$X_i = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

en laquelle $X_2, \ldots, X_n$ *sont* $n-1$ *intégrales distinctes de*

$$\Phi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \Phi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \Phi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

et où X_1 *satisfait à*

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\Phi_1}{X_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\Phi_2}{X_1}\right) + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\Phi_n}{X_1}\right) = 0,$$

change l'identité

$$\int \ldots \int_{E_{n-1}} X_1 dX_2 \ldots dX_n = \int\int \ldots \int_{E_n} dX_1 dX_2 \ldots dX_n$$

---

la suprématie de la théorie de Maxwell. Comme œuvres de moindre étendue, pour lesquelles je ne suis pas partout d'accord avec les auteurs, je puis cependant citer ces deux intéressantes tentatives de complément :

CHARLES L. R. E. MENGES. *Nouvelles vues Faraday-Maxwelliennes*, 1924 (Gauthier-Villars et C^ie, Paris).

R. FERRIER. *Les nouveaux Axiomes de l'Électronique*, 1925 (Revue Générale de l'Électricité, Paris).

en la formule de Green

$$(17)\qquad \int\cdots\int_{E_{n-1}} (\alpha_1\Phi_1 + \ldots + \alpha_n\Phi_n)\,d\sigma = \int\int\cdots\int_{E_n}\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial\Phi_n}{\partial x_n}\right)d\tau.$$

On voit que cette formule se rapporte à l'espace général E_n ou, plus exactement, à une portion de cet espace incluse dans une variété fermée E_{n-1}. Cette dernière variété ayant pour équation $F = 0$, on a

$$\alpha_i\Delta = \frac{\partial F}{\partial x_i}, \qquad \alpha_1 d\sigma = dx_2 \ldots dx_n, \qquad d\tau = dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

$$\Delta^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)^2.$$

Dans le même ordre d'idées il faut citer une Note de M. P. Appell sur *Le théorème du dernier multiplicateur de Jacobi rattaché à la formule de Green* (Comptes rendus, 4 novembre 1912) et une Note de M. Th. De Donder *Sur un théorème de Jacobi* (Comptes rendus, 10 février 1913).

Ici la formule de Green qui donne (9) est (17) pour $n = 4$, ce qui correspond à l'identité

$$(18)\qquad \int\int\int_{E_3} X_1\,dX_2\,dX_3\,dX_4 = \int\int\int\int_{E_4} dX_1\,dX_2\,dX_3\,dX_4.$$

Si on le voulait, on pourrait voir, en celle-ci, l'origine de l'égalité entre (8) et (9) c'est-à-dire l'origine de la Mécanique classique des milieux continus.

On descendrait ensuite à (1), cas particulier de (18), pour construire l'électromagnétisme.

Cette manière de procéder constitue la Théorie de Mie, ce que j'ai déjà indiqué avec plus de détails dans mon Second Mémoire (Annales de Toulouse, 1921). Mais l'exposition s'alourdit visiblement quand on ne commence pas par l'électromagnétisme.

[5] *Théorie abrégée.* — Il n'a pas été mauvais, à coup sûr, de reprendre la théorie précédente avec quelque détail. De plus nous tenions beaucoup à ne pas perdre de vue les notations de M. Cartan. Mais supposons maintenant que l'on veuille faire un résumé aussi bref que possible, en profitant de l'extrême esprit de condensation du Calcul différentiel absolu. Alors tout peut tenir en quelques lignes.

L'équation aux dérivées partielles en F obtenue en égalant à zéro le déterminant de (2) aura un système de caractéristiques que nous écrirons

$$\frac{dx_1}{A_1} = \frac{dx_2}{A_2} = \frac{dx_3}{A_3} = \frac{dx_4}{A_4} = \frac{d\xi}{\rho\sigma}$$

d'où

$$A_i = \rho\sigma \frac{dx_i}{d\xi} = \rho\sigma u_i.$$

Avec ces A_i, l'intégrale triple de (2) prend la forme

$$\int\int\int \rho\sigma\left(u_i \frac{\partial F}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial x_4}\right)^{-1} dx_1\, dx_2\, dx_3 = \int\int\int \rho\sigma(\alpha_i u_i)\, d\tau.$$

Ceci est nul sur V mais, d'après la formule de Green, est égal à l'intégrale

$$\int\int\int\int_W \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\sigma u_i)\, d\tau$$

si V est complétée en une variété fermée limitant W. La Mécanique classique naît alors de l'Électromagnétisme quand on imagine que, pour $\sigma = 1, u_1, u_2, u_3$, l'élément différentiel en $d\tau$ prend une forme vectorielle aux composantes

$$(19) \qquad 0, \quad X_1 d\tau, \quad X_2 d\tau, \quad X_3 d\tau.$$

On a ainsi

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_k u_i) = X_k$$

ou bien

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0, \qquad \rho u_i \frac{\partial u_k}{\partial x_i} = X_k.$$

En prenant $d\xi = dx_4$ d'où $u_4 = 1$, on a bien retrouvé ainsi les équations (11).

[6] *Condensations et affinité.* — Passons maintenant aux condensations obtenues par M. Cartan pour les équations générales de la Dynamique des milieux continus. Nous adoptons, sans explication nouvelle, toutes les notations de son Mémoire, notations très claires d'ailleurs.

Nous supposons également connues, pour les formes différentielles, les règles de la multiplication et de la dérivation *extérieures* (*Cf.* E. CARTAN, Leçons sur les Invariants intégraux, 1922, J. Hermann, Paris).

Nous appellerons Π_0, Π_1, Π_2, Π_3 les formes sous l'intégrale triple (8) quand on y fait respectivement σ égal à $1, u, v, w$ et, pour la symétrie des formules, nous utiliserons plutôt les notations (6) que les notations (7). Conformément à l'une des règles fondamentales du Calcul différentiel absolu, tout terme monome contenant deux fois le même indice admet celui-ci comme indice de sommation. Enfin x_4, ou t, pourra être appelé x_0.

Ceci étant rappelé, l'équation générale, condensée, de M. Cartan, est

$$\mathbf{G}' = [dt\mathbf{F}],$$

en posant, avec $i = 0, 1, 2, 3$,

$$\mathbf{G} = [\mathbf{me}_i]\,\Pi_i, \qquad \mathbf{F} = [\mathbf{me}_i]\,X_i dx_1 dx_2 dx_3, \qquad d\mathbf{m} = \mathbf{e}_i dx_i.$$

En développant $\mathbf{F}$ on se rappellera que X_0 est identiquement nul, comme en (19). Alors on calcule aisément $\mathbf{G}'$, expression que M. Cartan développe complètement mais que nous reproduirons sous la forme condensée

$$\mathbf{G}' = [\mathbf{me}_i]\,\Pi'_i + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}^0 & \mathbf{e}^1 & \mathbf{e}^2 & \mathbf{e}^3 \\ \mathbf{e}^0 & \mathbf{e}^1 & \mathbf{e}^2 & \mathbf{e}^3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} dx_0 & dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ \Pi_0 & \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Le tableau de 16 éléments qui termine cette formule se calcule comme un déterminant du quatrième ordre quand on multiplie, dans l'ordre convenable, les mineurs extraits des deux premières lignes par ceux extraits des deux dernières. C'est le second procédé de développement indiqué dans le Premier Mémoire (§ 8), procédé qui n'est qu'un cas particulier des considérations générales bien connues sur le développement des déterminants au moyen de leurs mineurs d'ordre quelconque. On remarquera aussi que dans le déterminant de $\mathbf{G}'$ on a écrit des $\mathbf{e}^i$ et non des $\mathbf{e}_i$; il faut entendre par là, qu'une fois les mineurs en $\mathbf{e}^i$ formés, il faudra remplacer

$$[\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j] \quad \text{par} \quad [\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l] \tag{21}$$

avec k, l toujours différents de i, j. On se rappellera aussi que

$$[\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l] = -[\mathbf{e}_l\mathbf{e}_k].$$

C'est justement ce qui fait que les mineurs en $\mathbf{e}$ ne sont pas nuls, comme cela aurait lieu dans un déterminant ordinaire, mais, au contraire, pourvus du coefficient 2 qu'on détruit alors par le diviseur 2 placé devant le déterminant.

Finalement le déterminant de $\mathbf{G}'$ donne six groupes de termes; ceux qui contiennent $\mathbf{e}_0$ sont identiquement nuls comme on le vérifie immédiatement et comme l'indique M. Cartan (p. 346); les autres se rapportent à la symétrie conservée, sans altération, lors de la construction du second tableau du paragraphe 2.

Quant au jeu d'indices qui lie les deux expressions (21), il a été déjà largement employé dans des questions du même genre, notamment par M. Th. De Donder dans sa *Théorie du champ électromagnétique de Maxwell-Lorentz et du champ gravifique d'Einstein* ainsi que dans sa *Gravifique einsteinienne.*

Soit maintenant, plus généralement,

$$d\mathbf{e}_i = \omega^j{}_i \mathbf{e}_j, \qquad d\mathbf{m} = \omega^j \mathbf{e}_j,$$
$$\mathbf{G} = [\mathbf{m}\mathbf{e}_i]\,\Pi_i, \qquad \mathbf{F} = [\mathbf{m}\mathbf{e}_i]\,X_i \omega^1 \omega^2 \omega^3.$$

Les ω sont des formes différentielles linéaires et on a un exemple de définition d'un espace *affine* en le mode de variation du vecteur $\mathbf{e}$ défini par la première relation.

On calculera encore très facilement

$$(22) \qquad \mathbf{G}' = [\mathbf{m}\mathbf{e}_i]\,\Pi'_i + [\mathbf{m}\mathbf{e}_i]\,[\omega^i{}_j \Pi_j] + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \mathbf{e}^0 & \mathbf{e}^1 & \mathbf{e}^2 & \mathbf{e}^3 \\ \mathbf{e}^0 & \mathbf{e}^1 & \mathbf{e}^2 & \mathbf{e}^3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega^0 & \omega^1 & \omega^2 & \omega^3 \\ \Pi_0 & \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3 \end{bmatrix}.$$

Dans les sommations du second terme, i ne prend pas la valeur zéro mais j la prend.

Abordons maintenant l'un des points fondamentaux du Mémoire de M. Cartan.

On peut supprimer les *forces*, en tant qu'entités mécaniques, et conserver cependant les phénomènes mécaniques les plus généraux en modifiant la connexion affine de l'espace; ainsi la Mécanique rentre dans la Géométrie. Dans cet ordre d'idées, l'équation $\mathbf{G}' = 0$ doit pouvoir équivaloir aux équations dynamiques les plus générales.

Ainsi soient tous les ω, à un ou deux indices, nuls, à l'exception de

$$(23) \qquad \omega^i{}_0 = -X_i\,dt, \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Il viendra (*Cf.* E. CARTAN, *loc. cit.*, p. 348)

$$\mathbf{G}' = [\mathbf{m}\mathbf{e}_i]\,\Pi'_i - [\mathbf{m}\mathbf{e}_i]\,[X_i\,dt\,\Pi_0]$$

d'où, si $\mathbf{G}' = 0$,

$$\Pi'_i = X_i\,[dt\,\Pi_0]; \qquad (i = 0, 1, 2, 3); \qquad X_0 = 0.$$

Ce sont des équations analogues à (11).

Plus généralement, toute modification de la connexion affine de l'espace, c'est-à-dire toute modification des $\omega^j{}_i$, se traduit, dans $\mathbf{G}'$, par l'adjonction de termes

$$[\mathbf{m}\mathbf{e}_i]\,[\varpi^i{}_j \Pi_j], \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Or, il est possible d'annuler les trois formes en ϖ ainsi construites sans que tous ces ϖ soient identiquement nuls. *On peut donc concevoir les mêmes phénomènes mécaniques avec des connexions spatiales différentes.*

C'est là un des points fondamentaux et des plus intéressants du Mémoire de M. Cartan.

Vraisemblablement cette affirmation doit équivaloir, sous d'autres espèces, à celle émise par Henri Poincaré et suivant laquelle *si un phénomène comporte une explication mécanique complète, il en comportera une infinité d'autres qui rendront également bien compte de toutes les particularités révélées par l'expérience* (Électricité et Optique, 1901, p. VIII; Gauthier-Villars et Cie, Paris).

Mais l'extension ainsi envisagée ne provient que des variations possibles du second groupe de termes, aux indices i et j, dans la formule (22). Et le déterminant qui figure dans (20) et (22)? N'a-t-il pas aussi quelque suggestive propriété? Nous verrons que de tels déterminants se rapprochent, au point de vue de la structure, de certains invariants intégraux formés aussi par M. Cartan. On pourrait même les comparer tout de suite avec le déterminant de la formule stokienne (2). Ainsi le champ électromagnétique continue à manifester ses symétries dans la théorie dynamique.

Enfin remarquons que des formules telles que (20) et (22), sans même qu'on analyse exactement leur contenu, ont un air de famille qui les rapproche immédiatement de la formule électromagnétique (2). On pourra en dire autant pour la formule (26).

[**7**] *Relativité restreinte.* — Dans ce cas la connexion spatiale affine est définie par

$$d\mathbf{e}_i = \omega^j{}_i \mathbf{e}_j$$

avec i et j prenant les valeurs 0, 1, 2, 3. Mais la théorie « restreinte », en litige, exige que

$$(\mathbf{e}_0)^2 = c^2, \qquad (\mathbf{e}_i)^2 = -1, \qquad \mathbf{e}_0\mathbf{e}_i = 0, \qquad \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = 0.$$

En différentiant ces relations, on trouve que

$$(24) \qquad \omega^0{}_0 = 0, \qquad \omega^i{}_0 = c^2\omega^0{}_i, \qquad \omega^j{}_i + \omega^i{}_j = 0.$$

Là encore nous ne pouvons reproduire tout le texte de M. Cartan. Indiquons seulement ce qui est essentiel en vue des comparaisons à faire ultérieurement.

La notion de « quantité de mouvement-masse » est conservée conformément à la relation

$$m\mathbf{e}_i\frac{dx_i}{dt} = \mu\mathbf{e}_i\frac{dx_i}{d\tau}.$$

Donc

$$m d\tau = \mu dt.$$

Comme, d'après la transformation de Lorentz, on a

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\, dt,$$

on a aussi

$$\mu = m\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

avec μ désignant la masse au repos. D'après la contraction de Lorentz, il vient, avec le volume W_0 au repos,

$$W = W_0\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

d'où, si ρ_0 est la densité au repos,

$$\rho_0 = \frac{\mu}{W_0} = \rho\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = \rho\left(1 - \frac{u^2 + v^2 + w^2}{c^2}\right).$$

Ceci suppose qu'il n'y ait, dans la matière en mouvement, ni pressions ni tensions de nature mécanique. Dans le cas contraire, il faut compléter la formule selon le schème indiqué au début du paragraphe 2, ce qui donne

$$\rho_0 = \rho\left(1 - \frac{u^2 + v^2 + w^2}{c^2}\right) - \frac{1}{c^2}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}),$$

d'où

$$(25) \qquad \rho_0[dt\,dx\,dy\,dz] = [dt\,\Pi_0] - \frac{1}{c^2}[dx\,\Pi_1] - \frac{1}{c^2}[dy\,\Pi_2] - \frac{1}{c^2}[dz\,\Pi_3],$$

en posant toujours

$$\left\{\begin{array}{ll|l|l|l} \Pi_0 = & \rho\,dx\,dy\,dz - \rho u & dy\,dz\,dt - \rho v & dz\,dx\,dt - \rho w & dx\,dy\,dt \\ \Pi_1 = & u\Pi \quad - p_{xx} & - p_{xy} & - p_{xz} & \\ \Pi_2 = & v\Pi \quad - p_{yx} & - p_{yy} & - p_{yz} & \\ \Pi_3 = & w\Pi \quad - p_{zx} & - p_{zy} & - p_{zz} & \end{array}\right.$$

et

$$\mathbf{G} = [\mathbf{me}_i]\,\Pi_i.$$

On a alors

$$(26)\qquad \mathbf{G}' = [\mathbf{me}_i][\Pi'_i + \omega^i{}_j \Pi_j] + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \mathbf{e}^0 & \mathbf{e}^1 & \mathbf{e}^2 & \mathbf{e}^3 \\ \mathbf{e}^0 & \mathbf{e}^1 & \mathbf{e}^2 & \mathbf{e}^3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega^0 & \omega^1 & \omega^2 & \omega^3 \\ \Pi_0 & \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3 \end{bmatrix}.$$

Dans les sommations en i et j, ces indices prennent les valeurs o, 1, 2, 3 mais on ne doit pas oublier les restrictions indiquées en (24).

Nous allons avoir maintenant une conclusion analogue à celle indiquée au paragraphe précédent pour la Mécanique ordinaire. Modifions la connexion de l'espace-temps de telle sorte que $\omega^i{}_j$ varie de $\varpi^i{}_j$; alors G' varie de telle sorte que si les quatre expressions

$$(27)\qquad [\varpi^i{}_j \Pi_j]$$

sont nulles sans que les $\varpi^i{}_j$ le soient, il pourra y avoir différentes connexions de l'espace-temps compatibles avec un même phénomène. En (27) il faut, bien entendu, admettre que

$$\varpi^j{}_i + \varpi^i{}_j = 0, \qquad \varpi^i{}_i = 0.$$

Quant au déterminant qui figure dans $\mathbf{G}'$, il porte toujours à penser qu'une théorie « restreinte », développée dans un espace suffisamment général, prend l'aspect des généralités de l'Électromagnétisme. L'espace général est beaucoup plus d'accord avec l'Électromagnétisme qu'avec les propriétés des solides qui servent de base à la Géométrie d'Euclide. Les équations $\mathbf{G}' = 0$, avec les formes que nous indiquons ici, sont manifestement analogues à la formule stokienne (2).

[**8**] *Généralités sur l'espace affine.* — Ces généralités sont ici résumées, toujours à l'aide de notations abrégées, non pas avec toute l'étendue de l'exposé de M. Cartan, mais seulement en vue des comparaisons mécaniques et électromagnétiques par lesquelles nous terminerons.

Soit donc, d'une manière générale,

$$(28)\qquad d\mathbf{m} = \omega^i \mathbf{e}_i, \qquad d\mathbf{e}_i = \omega^j{}_i \mathbf{e}_j.$$

Dans un espace naturellement et partout *affine*, les intégrales des premiers membres, étendues à des contours fermés, doivent être nulles. En transformant ces intégrales de lignes en intégrales de variétés à deux dimensions et en tenant compte des relations (1), on trouve les relations de *structure* de l'espace affine

$$(\omega^i)' = [\omega^j \omega^i{}_j], \qquad (\omega^j{}_i)' = [\omega^k{}_i \omega^j{}_k].$$

Il y a maintenant des variétés à connexion affine sur lesquelles on retrouve le caractère de l'espace affine pour des déplacements infiniment petits qu'on peut d'ailleurs poursuivre de proche en proche. On a alors, pour un contour infiniment petit tracé sur la variété,

$$\int d\mathbf{m} = \int\int [(\omega^i)' - \omega^j \omega^i_j]\, \mathbf{e}_i = \int\int \Omega^i \mathbf{e}_i,$$

ce que l'on peut écrire

$$(d\mathbf{m})' = \Omega^i \mathbf{e}_i, \qquad \Omega^i = (\omega^i)' - [\omega^j \omega^i_j].$$

Le vecteur $\Omega^i \mathbf{e}_i$ est la torsion de la variété.

On a de même

$$\int d\mathbf{e}_i = \int\int [(\omega^j_i)' - \omega^k_i \omega^j_k]\, \mathbf{e}_j = \int\int \Omega^j_i \mathbf{e}_j$$

ou bien

$$(d\mathbf{e}_i)' = \Omega^j_i \mathbf{e}_j, \qquad \Omega^j_i = (\omega^j_i)' - [\omega^k_i \omega^j_k].$$

On voit que, même sur les variétés à torsion nulle, ce qui est le cas einsteinien, l'intégration d'une *direction*, le long d'un contour fermé infiniment petit, ne donnera pas, en général, un résultat nul. Ce fait trahit la *courbure*. Ici les considérations de M. Cartan englobent la théorie du *déplacement parallèle* de Levi-Civita, Weyl, Eddington.

Si l'on considère les relations

$$(\omega^i)' = [\omega^k \omega^i_k] + \Omega_i, \qquad (\omega^j_i)' = [\omega^k_i \omega^j_k] + \Omega^j_i$$

et que l'on écrive la nullité de la dérivée extérieure seconde des ω^i et des ω^j_i, on trouve que les Ω satisfont à des identités remarquables

$$(\Omega^i)' + [\Omega^k \omega^i_k] - [\omega^k \Omega^i_k] = 0,$$
$$(\Omega^j_i)' + [\Omega^k_i \omega^j_k] - [\omega^k_i \Omega^j_k] = 0.$$

Celles-ci sont encore dues à M. Cartan qui a également étudié leur signification géométrique (*loc. cit.*, pp. 373-375). Quant à la nullité de la dérivée extérieure seconde, c'est un théorème fondamental que l'on trouvera dans les *Invariants intégraux* de M. Cartan (p. 71).

On a souvent manié ce théorème, dans les présents Mémoires, sous un aspect un peu différent; ainsi, à propos de la formule (2), il revient à observer que le déterminant de cette formule est nul quand la première ligne devient identique à la seconde.

Dans le fascicule IX du « Mémorial des Sciences mathématiques » sur *La Géométrie des Espaces de Riemann*, M. E. Cartan est revenu sur les deux dernières identités dont il vient d'être question; il montre qu'elles constituent une forme générale des Identités de Bianchi.

[**9**] *Variétés à connexion métrique.* — Ici les notations de M. Cartan ne sont pas toujours réductibles à celles du Calcul différentiel absolu. Ainsi on a encore

$$d\mathbf{m} = \omega^j \mathbf{e}_j, \qquad d\mathbf{e}_i = \omega^j{}_i \mathbf{e}_j$$

mais avec

$$(\mathbf{e}_i)^2 = g_{ii}, \qquad \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = 0 \tag{29}$$

et la *constante* g_{ii} ne comporte aucune idée de sommation.

Comme

$$\frac{(\mathbf{e}_1)^2}{g_{11}} = \frac{(\mathbf{e}_2)^2}{g_{22}} = \ldots = \frac{(\mathbf{e}_n)^2}{g_{nn}},$$

on aura, en différentiant ces relations et la seconde (29),

$$g_{ii}\omega^i{}_j + g_{jj}\omega^j{}_i = 0, \qquad \omega^i{}_i = \text{const}^e = \omega.$$

Pas de sommation dans ces formules.

On posera maintenant, par définition, toujours sans sommations,

$$\xi_i = g_{ii}\xi^i, \qquad \Omega_i = g_{ii}\Omega^i, \qquad \omega_i = g_{ii}\omega^i,$$
$$\omega_{ij} = d\mathbf{e}_i \,.\, \mathbf{e}_j = g_{jj}\omega^j{}_i, \qquad \omega_{ji} = d\mathbf{e}_j \,.\, \mathbf{e}_i = g_{ii}\omega^i{}_j,$$

d'où

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0.$$

De même

$$\Omega_{ij} = g_{jj}\Omega^j{}_i = (d\mathbf{e}_i)' \,\mathbf{e}_j, \qquad \Omega_{ji} = g_{ii}\Omega^i{}_j = (d\mathbf{e}_j)' \,\mathbf{e}_i$$
$$\Omega_{ij} + \Omega_{ji} = 0.$$

[**10**] *Invariants intégraux de variétés quadridimensionnelles à torsion nulle.* — L'un des grands mérites du Mémoire de M. Cartan est d'avoir formé des listes étendues et complètes d'invariants intégraux, attachés aux variétés affines et métriques, sans aucune considération préliminaire de leur utilisation physique. On ne voit que mieux, ensuite, ce que la Physique emprunte à l'Analyse. Ici, toujours en vue des

comparaisons à faire, nous ne retiendrons que les invariants du type « stokien » ou « électromagnétique ». Le premier sera

$$\frac{1}{4}\begin{array}{c}\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \end{bmatrix} \\ \begin{vmatrix} \Omega_{1\omega} & \Omega_{2\omega} & \Omega_{3\omega} & \Omega_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}\end{array}.$$

On a, pour le mineur aux indices 1 et 2,

$$[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2] - [\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1] = 2[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]$$

et, pour le mineur aux indices 3 et 4 qui le multiplie

$$\Omega_{34} - \Omega_{43} = 2\Omega_{34}.$$

Des remarques analogues sont à faire pour tous les mineurs du second ordre à extraire des deux premières lignes ou des deux dernières. Aussi le déterminant est-il finalement divisé par 4 pour faire disparaître tout facteur numérique inutile.

Le second invariant intégral que nous reproduirons est

$$(30)\qquad \frac{1}{2}\begin{array}{c}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \end{vmatrix} \\ \begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ \Omega_{1\omega} & \Omega_{2\omega} & \Omega_{3\omega} & \Omega_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}\end{array}.$$

C'est celui que M. Cartan représente (p. 401) par

$$\sum (ijkl)\,\mathbf{e}_i\,[\omega_j\Omega_{kl} + \omega_k\Omega_{lj} + \omega_l\Omega_{jk}],$$

en admettant que le symbole $(ijkl)$ soit égal à 1 ou à -1, suivant le schème

$$(ijkl) = -(jkli) = (klij) = -(lijk).$$

Enfin le troisième invariant intégral sera

$$(31)\qquad \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ \Omega_{1\omega} & \Omega_{2\omega} & \Omega_{3\omega} & \Omega_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ces trois invariants se rapportent à des variétés *sans torsion;* ils sont évidemment à rapprocher très étroitement du déterminant de la formule stokienne fondamentale (2) ainsi que de ceux qui se sont introduits dans les G' des théories mécaniques résumées précédemment.

[**11**] *Théorie de Newton.* — Nous avons vu, en (23), qu'on pouvait retrouver les équations de la Mécanique newtonienne avec

$$\omega^1{}_0 = -\mathrm{X}\,dt, \qquad \omega^2{}_0 = -\mathrm{Y}\,dt, \qquad \omega^3{}_0 = -\mathrm{Z}\,dt$$

et tous les autres $\omega^i{}_j$ nuls. Si l'on adjoint, à ces équations,

$$\omega^0 = dt, \qquad \omega^1 = dx, \qquad \omega^2 = dy, \qquad \omega^3 = dz,$$

on définit un espace affine à torsion nulle. Cet espace sera d'ailleurs métrique; on peut y supposer tous les g_{ii} égaux à l'unité. On calcule immédiatement que, pour un tel espace,

$$\Omega^1{}_0 = -[d\mathrm{X}\,dt], \qquad \Omega^2{}_0 = -[d\mathrm{Y}\,dt], \qquad \Omega^3{}_0 = -[d\mathrm{Z}\,dt],$$
$$(32) \qquad \Omega_{23} = \Omega_{31} = \Omega_{12} = 0.$$

Nous voulons démontrer aussi que, toujours pour le même espace, *tous les mineurs qui sont contenus dans la matrice*

$$(33) \qquad \begin{bmatrix} \omega_0 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \Omega_{0\omega} & \Omega_{1\omega} & \Omega_{2\omega} & \Omega_{3\omega} \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

sont identiquement nuls. Cette matrice est formée des trois dernières lignes de (30), ou de (31), à cela près que l'on écrit maintenant 0, 1, 2, 3 pour 1, 2, 3, 4.

Prenons, par exemple, le mineur

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \omega_0 & \omega_2 & \omega_3 \\ \Omega_{0\omega} & \Omega_{2\omega} & \Omega_{3\omega} \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} = [\omega_0\Omega_{23}] - [\omega_2\Omega_{03}] + [\omega_3\Omega_{02}].$$

Le premier terme du second membre est nul, d'après (32). Reste alors à démontrer que l'on a

$$[\omega_2\Omega_{03}] = [\omega_3\Omega_{02}],$$
$$[\omega^2\Omega^3{}_0] = [\omega^3\Omega^2{}_0],$$
$$[dy\,d\mathrm{Z}\,dt] = [dz\,d\mathrm{Y}\,dt],$$
$$dy\left(\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial x}dx + \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial z}dz\right) = dz\left(\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x}dx + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y}dy\right),$$
$$dy\,dz\left(\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial z}\right) = \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x}dy\,dz + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x}dz\,dx + \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial x}dx\,dy.$$

Rétablissant les intégrations, pour une surface fermée S enfermant le volume V, et appliquant la formule de Green, il vient

$$\int\int_S div\,(X, Y, Z)\, dy\, dz = \int\int\int_V \frac{\partial}{\partial x}\, div\,(X, Y, Z)\, dx\, dy\, dz,$$

ce qui est bien une identité. On démontrerait de même que tous les autres mineurs de (33) sont nuls.

Démontrons maintenant, avec M. Cartan, que *le fait que la gravitation newtonienne dépend d'un potentiel se traduit par l'égalité*

$$(34) \qquad [\omega_1 \Omega^1{}_0] + [\omega_2 \Omega^2{}_0] + [\omega_3 \Omega^3{}_0] = 0.$$

Ceci se réduit, en effet, à

$$[dx\, dX] + [dy\, dY] + [dz\, dZ] = 0,$$

$$dx\left(\frac{\partial X}{\partial y}\, dy + \frac{\partial X}{\partial z}\, dz\right) + dy\left(\frac{\partial Y}{\partial z}\, dz + \frac{\partial Y}{\partial x}\, dx\right) + dz\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial Z}{\partial y}\, dy\right) = 0$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\begin{vmatrix} dy\,dz & dz\,dx & dx\,dy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0.$$

Or, pour que ceci soit identiquement vérifié, quelle que soit la surface d'intégration, il faut que

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Enfin reprenons l'invariant (31) et considérons le mineur

$$(35) \qquad \begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \Omega_{10} & \Omega_{20} & \Omega_{30} \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \Omega^1{}_0 & \Omega^2{}_0 & \Omega^3{}_0 \end{bmatrix}.$$

Celui-ci peut s'écrire, toujours à un facteur numérique près,

$$[\omega^1 \omega^2 \Omega^3{}_0] + [\omega^2 \omega^3 \Omega^1{}_0] + [\omega^3 \omega^1 \Omega^2{}_0],$$

$$[dx\, dy\, dt\, dZ] + [dy\, dz\, dt\, dX] + [dz\, dx\, dt\, dY],$$

$$dx\, dy\, dt \frac{\partial Z}{\partial z}\, dz + dy\, dz\, dt \frac{\partial X}{\partial x}\, dx + dz\, dx\, dt \frac{\partial Y}{\partial y}\, dy$$

ou enfin

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz\,dt.$$

Donc, *à l'égalité* (34) *et à la nullité du mineur* (35) *correspond l'équation fondamentale du potentiel newtonien.*

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

On peut alors faire la théorie de l'attraction newtonienne et établir notamment qu'à l'intérieur des masses attirantes, le second membre de cette équation doit être remplacé par $-4\pi f \rho$.

[**12**] *Théorie d'Einstein.* — Par analogie avec le ds^2 de la Relativité restreinte, on écrit plus généralement

$$ds^2 = c^2(\omega^0)^2 - (\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 - (\omega^3)^2 = \omega_i \omega^i$$

d'où

$$\omega_0 = c^2 \omega^0, \qquad \omega_1 = -\omega^1, \qquad \omega_2 = -\omega^2, \qquad \omega_3 = -\omega^3,$$

$$g_{00} = c^2, \qquad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1.$$

Posons maintenant, avec un coefficient λ provisoirement indéterminé,

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} \omega_0 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega_0 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \Omega_{0\omega} & \Omega_{1\omega} & \Omega_{2\omega} & \Omega_{3\omega} \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \lambda \rho_0 [\omega_0 \omega_1 \omega_2 \omega_3] \tag{36}$$

et, par analogie avec la formule (25) établie dans le cas de la Relativité restreinte,

$$\rho_0[\omega^0 \omega^1 \omega^2 \omega^3] = [\omega^0 \Pi^0] - \frac{1}{c^2}[\omega^1 \Pi^1] - \frac{1}{c^2}[\omega^2 \Pi^2] - \frac{1}{c^2}[\omega^3 \Pi^3]$$

ou

$$-\rho_0[\omega_0 \omega_1 \omega_2 \omega_3] = [\omega_0 \Pi^0] + [\omega_1 \Pi^1] + [\omega_2 \Pi^2] + [\omega_3 \Pi^3]. \tag{37}$$

Dans ces conditions, (36) peut se scinder en les quatre équations

$$\begin{array}{cccc} -4\lambda \Pi^0 & -4\lambda \Pi^1 & -4\lambda \Pi^2 & -4\lambda \Pi^3 \\ \hline\hline \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} \omega_0 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \Omega_{0\omega} & \Omega_{1\omega} & \Omega_{2\omega} & \Omega_{3\omega} \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \tag{38}$$

Ce sont les équations (7), § 78, de M. Cartan. La notation ici employée indique que chaque terme situé au-dessus du double trait doit être égalé à ce qui serait son mineur algébrique si le tableau des seize éléments était un déterminant ordinaire. Le double trait lui-même tient, si l'on veut, la place des quatre signes $=$.

L'important, en tout ceci, *est qu'on ne s'est toujours écarté en rien des symétries et des formes électromagnétiques*. Le tableau (38) possède une forme déjà indiquée dans notre Premier Mémoire publié en 1920 (Chap. II).

D'ailleurs la *forme* qui domine exclusivement ici est toujours celle du déterminant de la formule fondamentale (2) et il est très remarquable qu'établie avec des déterminants ordinaires, elle se conserve pour les déterminants *à crochets*, c'est-à-dire pour ceux en lesquels les produits s'effectuent suivant les règles de la multiplication *extérieure*.

[**13**] *Courbure et densité*. — Les équations (38) complètement développées sont

$$\begin{aligned}
[\omega_1\Omega_{23}] + [\omega_2\Omega_{31}] + [\omega_3\Omega_{12}] &= -2\lambda\Pi^0,\\
[\omega_2\Omega_{30}] + [\omega_3\Omega_{02}] + [\omega_0\Omega_{23}] &= +2\lambda\Pi^1,\\
[\omega_3\Omega_{01}] + [\omega_0\Omega_{13}] + [\omega_1\Omega_{30}] &= -2\lambda\Pi^2,\\
[\omega_0\Omega_{12}] + [\omega_1\Omega_{20}] + [\omega_2\Omega_{01}] &= +2\lambda\Pi^3.
\end{aligned}$$

Dans l'Univers *newtonien* les Ω de la première équation sont nuls, ce qui conduit à admettre que λ est nul et ce qui réduit les autres équations à

$$\begin{aligned}
[\omega_0\Omega_{23}] &= [\omega_2\Omega_{03}] - [\omega_3\Omega_{02}],\\
[\omega_0\Omega_{31}] &= [\omega_3\Omega_{01}] - [\omega_1\Omega_{03}],\\
[\omega_0\Omega_{12}] &= [\omega_1\Omega_{02}] - [\omega_2\Omega_{01}].
\end{aligned}\tag{39}$$

Celles-ci n'expriment rien d'autre que la nullité déjà démontrée des mineurs de la matrice (33). Dans l'Univers *einsteinien*, ces relations (39) peuvent être considérées comme approchées.

Toujours d'une manière approchée, on peut les remplacer par

$$\begin{aligned}
c^2[dt\Omega_{23}] &= [dy\,dt\,dZ] - [dz\,dt\,dY],\\
c^2[dt\Omega_{31}] &= [dz\,dt\,dX] - [dx\,dt\,dZ],\\
c^2[dt\Omega_{12}] &= [dx\,dt\,dY] - [dy\,dt\,dX].
\end{aligned}$$

Supprimant dt, effectuant la multiplication extérieure, à gauche par $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, à droite par $-dx, -dy, -dz$, il vient

$$[\omega_1\Omega_{23}] + [\omega_2\Omega_{31}] + [\omega_3\Omega_{12}] = \frac{1}{c^2}\begin{bmatrix} dx & dy & dz \\ dx & dy & dz \\ dX & dY & dZ \end{bmatrix} = \frac{2}{c^2}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

ou bien

$$-2\lambda \Pi^0 = \frac{2}{c^2} \Delta V\, dx\,dy\,dz\,.$$

En première approximation ne prenons, dans (37), que le premier terme du second membre ; il viendra

$$\Pi^0 = -\rho_0[\omega_1\omega_2\omega_3] = \rho\, dx\,dy\,dz\,.$$

Avec le ΔV approximatif, $-4\pi f\rho$, de la théorie newtonienne, on aura d'abord

$$\lambda = \frac{4\pi f}{c^2}$$

et enfin

$$[\omega_1\Omega_{23}] + [\omega_2\Omega_{31}] + [\omega_3\Omega_{12}] = \frac{8\pi f}{c^2}\rho_0[\omega_1\omega_2\omega_3]\,.$$

Dans la théorie de l'attraction newtonienne, la vitesse c de la lumière n'intervient pas.

On a $\Omega_{23} = \Omega_{31} = \Omega_{12} = 0$ ce qui revient, on le voit, à considérer c comme infini.

Dans la théorie einsteinienne, le coefficient $8\pi f \rho_0 c^{-2}$ est de la nature d'une *courbure;* celle-ci augmente comme la densité matérielle mais est, en général, extrêmement petite. Cette courbure se rapporte évidemment à l'élément spatial $[\omega_1\omega_2\omega_3]$.

[**14**] *Symétries.* — Le développement des notions de symétrie est à peu près la seule raison d'être du présent Chapitre. Encore une fois, c'est toujours de la même symétrie qu'il s'agit, de celle de la formule (2), formule issue elle-même de l'identité (1).

Le tableau (38) représente la charpente essentielle de la théorie d'Einstein, d'après M. Cartan.

Non seulement ce tableau possède toujours les symétries analytiques des équations électromagnétiques mais on peut y lire, à première vue, des choses essentielles, telles que :

Dans le tableau (38), *les quatre mineurs à trois lignes, qu'on peut extraire du crochet, sont identiquement nuls dans la théorie newtonienne ; le mineur aux indices* 1, 2, 3 *exprime une courbure d'Univers dans la théorie einsteinienne.*

On rapproche ainsi aisément les deux théories et celle d'Einstein apparaît alors comme un édifice qui ne cesse pas d'être très savamment développé mais qui est bâti sur des fondements newtoniens.

Toujours à propos des mêmes symétries revenons encore, avec M. Cartan, à la « quantité de mouvement-masse » ; c'est la manifestation physique du vecteur

$$[\mathbf{me}_i]\,\Pi_i$$

qui, avec les notations précédentes, peut s'écrire

$$\begin{array}{c} [\,\mathbf{me}_0 \quad\quad \mathbf{me}_1 \quad\quad \mathbf{me}_2 \quad\quad \mathbf{me}_3\,] \\ -\dfrac{c^2}{16\pi f}\begin{bmatrix} \omega_0 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \Omega_{0\omega} & \Omega_{1\omega} & \Omega_{2\omega} & \Omega_{3\omega} \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}. \end{array}$$

D'autres rapprochements seraient encore possibles, toujours fondés sur l'idée de structure analytique. Ainsi, parmi les points les plus suggestifs du Mémoire de M. Cartan, il est bon de revenir encore sur la construction des G' reproduits ici sous les formes (20), (22), (26). On a vu que les équations $G' = 0$ donnaient une physionomie purement géométrique à la Mécanique ordinaire et à celle de la Relativité restreinte ; ceci tient à ce que l'on fait alors usage d'espaces modifiés, souvent même modifiables d'une infinité de manières, les modifications en question tenant lieu des *forces* et autres entités dynamiques. Or il y a des remarques analogues à faire en partant de la formule (2) qui donne une origine géométrique au champ électromagnétique et semble d'abord bien éloignée des problèmes gravitationnels. Ainsi cette formule (2) ne change pas quand on y remplace les ∂ par des D, les dérivées en D étant alors celles du Calcul différentiel absolu. Le fait est d'ailleurs le même que celui rappelé ici, au Chapitre I, en passant de (2) à (3). A ces D, qui sont des ∂ complétés, correspond une non-permutabilité de dérivées qui fait naître les symboles à quatre indices de Riemann, et, par suite, la Géométrie métrique ou le phénomène gravitationnel. On est encore passé du symbole analytique au concept géométrique et enfin au concept dynamique.

Pour plus de détails sur les dérivées en D, entendues comme il vient d'être indiqué, renvoyons à notre Troisième Mémoire ainsi qu'à deux articles sur *La Pédagogie des Théories d'Einstein* (L'Enseignement mathématique, 1923-1924).