ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

ANDRÉ BLOCH

Les théorèmes de M. Valiron sur les fonctions entières et la théorie de l'uniformisation

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 17 (1925), p. 1-22

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1925_3_17__1_0>

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

LES THÉORÈMES DE M. VALIRON SUR LES FONCTIONS ENTIÈRES

ET LA THÉORIE DE L'UNIFORMISATION

Par M. André BLOCH.

I. — Introduction et résumé.

Le présent Mémoire est le développement de deux notes publiées aux Comptes Rendus le 12 mai et le 16 juin 1924; il a pour base, comme ces notes, les travaux fondamentaux de M. G. Valiron sur les fonctions entières.

Rappelons d'abord sommairement ceux-ci.

Dans deux Mémoires insérés aux tomes XXXVII et XLI des *Acta Mathematica*, M. Wiman obtenait d'importants résultats relatifs aux fonctions entières les plus générales. Or en 1896, M. Hadamard avait indiqué une méthode très sûre pour l'étude de la croissance de ces fonctions [1]. M. Valiron perfectionna encore cette méthode, et, par son emploi, réussit à préciser et à généraliser considérablement les théorèmes obtenus par M. Wiman. En même temps, il édifiait, pour la première fois, une théorie générale vraiment cohérente et satisfaisante des fonctions entières, comprenant un grand nombre de propriétés nouvelles.

Les résultats de M. Valiron, publiés dans trois Mémoires insérés aux Annales de l'Ecole Normale en 1920-21-22, ont été exposés par lui dans des leçons professées à l'Université du Pays de Galles et rassemblés finalement dans son ouvrage : *Lectures*

---

[1] *Sur les fonctions entières* (Bull. de la Soc. Math., t. XXIV).

on the general theory of integral functions (Toulouse, 1923), que terminent de nombreux renseignements bibliographiques. Nous prendrons pour base du Mémoire actuel le chapitre IV de cet ouvrage.

Voici deux de ces résultats :

Le domaine riemannien à une infinité de feuillets correspondant à une fonction entière contient des cercles à un seul feuillet aussi grands que l'on veut.

Soient $M(r)$ *le maximum de la valeur absolue d'une fonction entière* $f(z)$ *pour* $|z| = r$*;* $A(r)$ *et* $B(r)$ *le maximum des valeurs positives et le maximum des valeurs négatives de la partie réelle de* $f(z)$ *dans les mêmes conditions. Sauf peut-être dans une infinité dénombrable de couronnes où la variation totale de* $\log r$ *est finie (et d'ailleurs aussi petite que l'on veut), les quantités* $M(r)$, $A(r)$, $B(r)$ *sont asymptotiquement équivalentes lorsque* r *croît indéfiniment.*

M. Valiron a appliqué les théorèmes précédents à la démonstration directe du théorème de M. Picard sur les valeurs exceptionnelles des fonctions à point essentiel isolé.

L'un des objets du présent Mémoire est de les appliquer à la démonstration directe du théorème de M. Picard sur la non-uniformisabilité des courbes algébriques de genre supérieur à un par des fonctions à point essentiel isolé. Un autre objet de ce Mémoire est de transformer les théorèmes relatifs aux fonctions entières en théorèmes relatifs aux fonctions holomorphes dans un cercle, ce qui conduit en particulier à des démonstrations des théorèmes de MM. Landau et Schottky sur les fonctions à deux valeurs exceptionnelles. La combinaison de ces deux ordres d'idées fournit la démonstration d'une proposition plus récente de M. Picard (Rendiconti del Circolo Mathematico di Palermo, 1912).

La théorie des fonctions holomorphes dans un cercle à laquelle on est ainsi conduit donne des propositions qui ne sont peut-être pas toutes nouvelles. Elle a un caractère systématique et paraît de nature à répondre à la plupart des questions que l'on peut se poser sur ces fonctions. Nous nous occupons surtout ici des propositions correspondant aux deux derniers théorèmes dus à M. Valiron énoncés plus haut sur les fonctions entières. D'autre part la méthode employée ici dérive essentiellement du point de vue de Weierstrass-Méray, c'est-à-dire des développements en séries entières. Il y aurait un certain intérêt théorique à trouver une méthode parallèle s'appuyant sur l'intégrale de Cauchy.

Dans la section II du présent Mémoire, les théorèmes fondamentaux de M. Valiron sont rappelés et précisés de la manière qui convient à notre objet; on remarque que les constantes qui s'introduisent dans les énoncés sont indépendantes de la suite des coefficients de la fonction ou de la série entière.

Dans la section III sont établis d'abord quelques théorèmes accessoires relatifs au cas particulier d'une série convergente dans un cercle où le rang du terme maximum ne dépasse pas un nombre donné. En les combinant avec les précédents, on obtient des théorèmes complètement généraux et très simples : G et H relatifs au domaine riemannien correspondant à une série entière, I à la croissance d'une telle série.

Dans la section IV sont établis, comme conséquence des théorèmes précédents, et de deux manières, les théorèmes de MM. Landau et Schottky; quelques questions voisines sont sommairement étudiées.

La section V, basée sur le théorème G, a pour but la démonstration et l'étude, sans le secours des fonctions automorphes, de théorèmes de M. Picard relatifs à la théorie de l'uniformisation, principalement du théorème publié en 1912 dans les Rendiconti di Palermo, et qui ressemble à celui di M. Landau; une formule simple est établie à ce sujet (théorème K). Ensuite les théorèmes de M. Picard sont étendus par la même voie au cas d'un « type » arbitraire, ce mot étant pris au sens des travaux de Poincaré.

En définitive, l'objet de la première partie du Mémoire (sections II et III) est de parvenir aux théorèmes G, H, I; ces théorèmes sont seuls utilisés dans la seconde partie (sections IV et V).

II. — Les théorèmes de M. Valiron.

La proposition suivante est la base de la théorie de M. Valiron.

Désignons par $\mathcal{F}(u)$ une série entière de la variable réelle u, à coefficients positifs croissants, non bornés, dont le rayon de convergence est l'unité

$$\mathcal{F}(u) = \sum_{0} e^{\mathcal{H}(n)} u^n.$$

Alors le quotient par n de $\mathcal{H}(n)$ tend nécessairement vers zéro. Nous supposerons de plus que la fonction $\mathcal{H}(x)$ admet une dérivée décroissante, qui évidemment tend vers zéro.

Nous appelons rang d'un terme de la série son degré en u; il est égal à $0, 1, 2, \ldots$.

Alors (chap. IV de l'ouvrage cité : *General theory of integral functions*, p. 95).

Théorème A. — *Étant données une fonction entière quelconque $f(z)$ et une série entière $\mathcal{F}(u)$ de la forme susdite, on peut faire correspondre, en général, à une valeur r deux nombres k et l tels que, pour cette valeur de r, les deux fonctions $f(z)$ et $k\mathcal{F}\left(\frac{r}{l}\right)$ aient leurs termes maxima égaux et de même rang et que la première de ces fonctions soit majorée par la seconde. Les valeurs de r comprises entre 0 et R pour lesquelles la propriété n'a pas lieu peuvent être enfermées dans des intervalles* *dont le nombre est au plus égal au rang* N(R) *du terme maximum de* $f(z)$ *pour* $|z| = R$ *et dans lesquelles la variation totale de* $\log r$ *est, quel que soit* R, *inférieure au nombre fixe* $\mathcal{H}(1) - \mathcal{H}(0)$.

Le nombre obtenu par M. Valiron (*loc. cit.*) est $\mathcal{H}'(0)$; or, lorsque l'on fixe les $\mathcal{H}(n)$, ce nombre dépend de la fonction $\mathcal{H}(x)$ choisie, et peut même être infini; pour passer de $\mathcal{H}'(0)$ à $\mathcal{H}(1) - \mathcal{H}(0)$, il suffit d'observer que la fonction $\mathcal{H}(x)$ peut être prise dans l'intervalle $(0, 1)$ aussi voisine qu'on veut d'une fonction linéaire.

Les valeurs de r pour lesquelles la propriété de l'énoncé a lieu sont dites ordinaires (par rapport à la fonction de comparaison $\mathcal{F}(u)$.

La fonction de comparaison adoptée est : $\mathcal{F}(u) = \sum_0^\infty e^{n^\alpha} u^n$, $\qquad (0 < \alpha < 1)$.

Les valeurs ordinaires correspondantes sont dites « d'indice α ».

Théorème B. — *Soit une fonction entière* $f(z)$; *posons :*

$$f(z) = \left(\frac{z}{z_0}\right)^n \left[f(z_0) + \frac{z - z_0}{z_0} g(z_0) + \left(\frac{z - z_0}{z_0}\right)^2 \chi(z, z_0)\right]$$

où $g(z) = zf'(z) - nf(z)$.

Soit R *une valeur ordinaire d'indice* α *et* $n = N(R) > 0$; supposons :

$$|z_0| = R; \quad \left|\frac{z - z_0}{z_0}\right| < h N^{\frac{\alpha}{2} - 1}.$$

Alors on a :

$$g(z_0) < KM(R)\, N^{\frac{3}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)}; \quad \chi(z, z_0) < KM(R)\, N^{3\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)},$$

K *étant une constante dépendant uniquement de* α *et de* h.

Le fait que la valeur ordinaire R peut être quelconque et la propriété énoncée pour K résultent aisément de la démonstration de l'ouvrage cité, p. 97 : il suffit dans $\sum_1^\infty p^q (1 + v)^p e^{(N+p)^\alpha - N^\alpha} u^p$, de remplacer u par le nombre plus grand $e^{-\alpha(N+1)^{\alpha - 1}}$, et de poursuivre le raisonnement sur cette série. On obtient bien ainsi pour N assez grand l'expression majorante $A_q N^{(q+1)\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)}$; et ceci subsiste évidemment pour N positif quelconque.

On pourrait trouver des inégalités s'appliquant même au cas où $N(R) = 0$; mais cela ne nous serait d'aucune utilité. Au contraire, il ne serait pas sans intérêt pour une étude plus approfondie d'observer que pour $N(R) > 0$, la variation totale de $\log R$ dans des intervalles exceptionnels est au plus $\mathcal{H}(2) - \mathcal{H}(1) = 2^{\alpha} - 1$, et tend vers 0 avec α.

Prenons désormais avec M. Valiron $\alpha = \frac{11}{12}$; on a alors le théorème suivant (*op. cit.*, p. 101).

THÉORÈME C. — *Soient* R *une valeur ordinaire d'indice* $\frac{11}{12}$ *pour laquelle* $N(R) > 0$; z_0 *un point de module* R *tel que* $|f(z_0)| = M(R)$, *et* D_{z_0} *la région circulaire définie par l'inégalité* $\left|\frac{z - z_0}{z}\right| < N^{-\frac{15}{16}}$.

On a pour tout point z *intérieur à* D_{z_0} :

$$f(z) = \left(\frac{z}{z_0}\right)^N f(z_0))1 + \eta), \qquad \eta < KN^{-\frac{1}{8}}$$

où K *est une quantité purement numérique que l'on pourrait calculer.*

Cette proposition C est une conséquence presque immédiate de B. Tout d'abord, B s'applique, puisque $N^{-\frac{15}{16}} < N^{\frac{11}{24} - 1}$.

Or en écrivant :

$$f(z) = \left(\frac{z}{z_0}\right)^N f(z_0) \left[1 + \frac{z - z_0}{z_0} \frac{g(z_0)}{f(z_0)} + \left(\frac{z - z_0}{z_0}\right)^2 \frac{\chi(z, z_0)}{f(z_0)}\right],$$

les deux termes complémentaires de la parenthèse sont inférieurs respectivement à $KN^{-\frac{1}{8}}$ et $KN^{-\frac{1}{4}}$, d'après B; en doublant la constante K, on obtient l'énoncé C.

Nous allons déduire de ce théorème C deux propositions D et E, dans deux ordres d'idées différents.

Intercalons d'abord ici la remarque suivante : nous avons raisonné jusqu'à présent sur des fonctions entières; mais les raisonnements précédents et les théorèmes A, B, C s'appliquent à des séries entières dans leur cercle de convergence.

Considérons la région circulaire $\frac{z - z_0}{z_0} = \frac{\pi}{4N} t$, où $|t| \leqslant 1$: le théorème C s'y applique, et l'on a dans cette région :

$$\frac{f(z)}{f(z_0)} = \left(1 + \frac{\pi t}{4N}\right)^N (1 + \eta), \qquad \eta < KN^{-\frac{1}{8}}.$$

Donc, lorsque N croît indéfiniment, $\frac{f(z)}{f(z_0)} = \frac{f\left(z_0 + z_0 \frac{\pi t}{4N}\right)}{f(z_0)}$ tend uniformé ment, t étant fixe, vers $e^{\frac{\pi}{4}t}$. Or pour $|t| \leqslant 1$, $e^{\frac{\pi}{4}t}$ décrit une certaine aire à contour simple. Pour $|t| = 1$, $\dfrac{f\left(z_0 + z_0\frac{\pi t}{4N}\right)}{f(z_0)}$ décrit un circuit qui tend uniformément vers le contour de cette aire; le point correspondant au point t tendant vers le point $e^{\frac{\pi}{4}t}$. Il résulte de là que lorsque N croît indéfiniment, le domaine riemannien que $\dfrac{f(z)}{f(z_0)}$ fait correspondre à la région circulaire $\left|\dfrac{z - z_0}{z_0}\right| \leqslant \dfrac{\pi}{4N}$ finit par contenir une fois et une seule tout cercle intérieur à l'aire décrite, pour $|t| < 1$, par le point $e^{\frac{\pi}{4}t}$.

Dans ce qui précède, la valeur absolue R de z_0 est supposée ordinaire. Or entre deux nombres positifs dont le rapport est 3 existe toujours une telle valeur, puisque $\log 3 > \mathcal{H}(1) - \mathcal{H}(0) = 1$. Nous obtenons alors le résultat suivant, où il n'est plus question de valeurs ordinaires :

Soit $f(z)$ une série entière convergeant dans le cercle-unité. Si $N(1/3)$ dépasse une certaine constante absolue, au cercle-unité correspond par $Z = f(z)$ un domaine riemannien contenant un cercle à un seul feuillet de rayon égal au produit de $M(1/3)$ par une certaine constante absolue.

Une analyse un peu plus précise montre que l'on peut remplacer $1/3$ par un nombre quelconque inférieur à un. Nous admettrons, pour abréger, ce point, dont nous ne nous servirons pas, mais qui donnera à l'énoncé intermédiaire D la généralité dont il est susceptible :

THÉORÈME D. — *Soit une fonction holomorphe dans le cercle-unité; au cercle de rayon* $\rho < 1$ *correspondant* $M(\rho)$ *et* $N(\rho)$; *alors si* $N(\rho)$ *est au moins égal à un certain nombre* A, *le cercle-unité donne un domaine riemannien comprenant des cercles à un seul feuillet de rayon supérieur à* $KM(\rho)$. A *et* K *dépendent uniquement de* ρ(¹).

Voyons maintenant une autre conséquence du théorème C.

Supposons z sur le cercle de rayon R : $z = Re^{i\varphi}$. On a :

$$f(Re^{i\varphi}) = e^{i(\varphi - \varphi_0)N} f(z_0)(1 + \eta), \qquad |\eta| < KN^{-\frac{1}{16}}$$

sous la condition : $|\varphi - \varphi_0| < N^{-\frac{15}{16}}$; car alors $\left|\dfrac{z - z_0}{z_0}\right| = \left|2 \sin \dfrac{\varphi - \varphi_0}{2}\right| < N^{-\frac{15}{16}}$.

Alors, dans l'intervalle $\varphi_0 - \dfrac{2\pi}{N} < \varphi < \varphi_0 + \dfrac{2\pi}{N}$, $f(z)$ prend pour N assez grand un argument quelconque donné à l'avance, le module étant $M(R)(1 + \eta)\,|\eta| < KN^{-1/16}$; en particulier l'argument 0; par conséquent :

(¹) Il y aurait lieu d'examiner, à l'aide des considérations de la section suivante, si l'on peut prendre pour A le nombre 1, quel que soit $\rho < 1$.

THÉORÈME E. — *A tout nombre positif* ε *donné à l'avance, on peut faire correspondre un nombre dépendant uniquement de* ε, *tel que pour toutes les valeurs ordinaires* R *d'indice* $\frac{11}{12}$ *pour lesquelles* N(R) *dépasse ce nombre, on ait :*

$$1 - \varepsilon < \frac{A(R)}{M(R)} < 1.$$

Il s'agit toujours, bien entendu, d'une série entière quelconque, à rayon de convergence fini ou infini.

III. — Complément à la théorie de M. Valiron; quelques propriétés générales des séries entières.

Nous avons étudié jusqu'à présent des fonctions entières, ou tout au moins des séries entières pour lesquelles le rang du terme maximum pouvait prendre de grandes valeurs. Nous allons maintenant considérer des séries convergentes dans un cercle où le rang du terme maximum demeure borné; nous les comparerons à la série $\frac{1}{1-z}$. En combinant les deux catégories de résultats, nous obtiendrons des propositions relatives aux fonctions holomorphes dans un cercle, indépendantes de la considération du terme maximum.

THÉORÈME F. — *Soit* $f(z)$ *une série entière convergente dans un cercle de rayon quelconque où le rang du terme maximum* $m(z)$ *ne dépasse pas un nombre* N; ε *positif étant donné à l'avance, on a :*

$$f(z) = m(z)(1 + \lambda\varepsilon), \qquad |\lambda| < 1$$

sauf peut-être dans des couronnes en nombre $N+1$ *au plus, où la variation totale de* $\log r$ *est finie et est bornée supérieurement par une fonction de* N *et* ε *seuls.*

Nous pouvons, par un changement de variable, supposer que le cercle de l'énoncé est le cercle unité.

Construisons le polygone de Newton relatif à la série $f(z)$; il est déterminé, comme on sait, par les points de coordonnées $x_n = n$; $y_n = -\log C_n$, C_n étant la valeur absolue du coefficient de z^n; les valeurs de n correspondant aux sommets du polygone sont les indices principaux; appelons valeurs critiques de r celles pour lesquelles $\log r$ égale la pente d'un côté. N est un indice principal; la parallèle menée à l'axe des x par le sommet correspondant laisse le polygone au-dessus d'elle; elle peut toutefois porter un côté du polygone, s'il y a plus d'un coefficient maximum; dans ce cas, ce côté se termine, dans le sens des x positifs, à $x = N$.

Soit alors à réaliser l'égalité à $1+\lambda\varepsilon$ près de $f(z)$ et $m(z)$. Tout d'abord, nous pouvons évidemment trouver un nombre inférieur à 1, tel qu'à l'intérieur du cercle ayant ce nombre pour rayon la somme des valeurs absolues des termes de rang supérieur à N soit aussi petite qu'on veut par rapport au terme maximum, quel que soit le rang de ce dernier. Nous pouvons donc nous borner à envisager le polynôme de degré N, à condition de commencer par exclure la couronne comprise entre les deux cercles.

Soit donc ce polynôme de degré N, le polygone de Newton correspondant se termine à $x=N$, le côté aboutissant à cette droite ayant une pente négative ou nulle. Menons par un point les parallèles aux différents côtés de ce polygone.

Encadrons chacune de ces droites de deux droites de coefficients angulaires égaux au sien augmenté ou diminué de a. Nous obtenons ainsi un nombre inférieur ou égal à N d'angles que nous excluons. Soit r tel que $\log r$ ne soit pas dans les angles exclus; menons au polygone la tangente de coefficient $\log r$: nous obtenons ainsi le terme maximum, de valeur absolue $m(r)$; les deux termes voisins sont plus petits que $e^{-a}m(r)$; les deux termes suivants, que $e^{-2a}m(r)$, etc. Pour a assez grand, le polynôme est, à l'extérieur des intervalles exclus, aussi comparable que l'on veut à $m(z)$.

Ce théorème F va nous permettre d'établir des propositions indépendantes de la considération du terme maximum. Soit $f(z)=z+\ldots$ une série entière convergente dans le cercle unité; si sur un cercle de rayon $\rho<1$ (¹), le rang du terme maximum dépasse un certain nombre (dépendant uniquement de ρ), nous savons, d'après le théorème D, que le rayon d'un cercle à un seul feuillet du domaine riemannien correspondant au cercle unité a une borne inférieure non nulle; on a en effet : $M(\rho)\geqslant\rho$.

Nous allons montrer que *ceci subsiste lorsque le rang du terme maximum est au contraire borné supérieurement;* et ceci même en nous bornant à considérer le domaine riemannien correspondant au cercle de rayons ρ; nous pouvons alors, par un changement de variable, remplacer ρ par 1.

Supposons pour fixer les idées que la borne supérieure du rang du terme maximum soit égale à 2. Le raisonnement est le même pour un nombre quelconque. Nous avons alors : $f(z)=z+a_2z^2+\ldots$, avec $|a_2|\geqslant 1$. D'après le théorème F, le cercle $|z|<1$ se divise en un cercle concentrique où $f(z)$ est comparable à z; une couronne exceptionnelle; une couronne où $f(z)$ est comparable à a_2z^2; enfin une seconde couronne exceptionnelle; cela pour ε donné. Dès que l'on a $\varepsilon<1$, le domaine riemannien correspondant au cercle concentrique couvre une seule fois l'origine; celui correspondant à la couronne tourne deux fois autour de l'origine; d'ailleurs, si ε tend vers zéro, les courbes limites tendent à devenir semblables à des cercles; nous pouvons prendre pas exemple et conserver $\varepsilon=\frac{1}{10}$; à ce nombre cor-

(¹) Il suffit d'ailleurs à notre objet de prendre $\rho=1/3$.

respond un certain maximum, 2 par exemple, pour la variation totale de $\log r$ dans les deux couronnes exceptionnelles. Alors, de deux choses l'une : si le rayon du cercle correspondant à z est supposé supérieur par exemple à $\frac{1}{10000}$, le domaine riemannien correspondant comprend des cercles à un seul feuillet de rayon borné inférieurement; si au contraire il est supposé inférieur à $\frac{1}{10000}$, on peut affirmer que la couronne correspondant à $a_2 z^2$ couvre la couronne de rayons $\frac{1}{e^2}$ et $\frac{1}{1000}$; le domaine riemannien correspondant contient donc des cercles à un seul feuillet de rayon borné inférieurement.

Combinant ce résultat avec le théorème D, nous parvenons à la proposition suivante :

Théorème G. — *Soit $f(z) = z + \ldots$ une fonction holomorphe dans le cercle-unité; le domaine riemannien correspondant contient des cercles à un seul feuillet de rayon supérieur à une certaine constante absolue δ.*

De ce théorème résulte un critère de famille normale, au sens des travaux bien connus de M. Montel.

Théorème H. — *Les fonctions holomorphes dans un domaine et pour lesquelles le domaine riemannien correspondant n'a que des cercles à un feuillet de rayon borné supérieurement pour l'ensemble des fonctions forment une famille normale.*

En effet, la dérivée est bornée dans tout domaine intérieur fixe; la différence des valeurs de la fonction en deux points quelconques d'un tel domaine est donc bornée. Soit alors une suite de la famille; extrayons en une suite convergeant en un point intérieur déterminé vers une limite finie ou infinie; de cette suite on peut extraire une suite convergeant uniformément dans le domaine vers une fonction holomorphe ou vers l'infini.

Au sujet du théorème G, remarquons que le nombre δ exact (le plus petit que l'on puisse prendre) est certainement *a priori* au plus égal à 1; mais on peut trouver une limite supérieure plus petite.

Prenons en effet $f(z) = \frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z} = z + \frac{z^3}{3} + \ldots$; le cercle $|z| < 1$ se trouve représenté conformément sur la bande comprise entre les droites $y = -\frac{\pi}{4}$ et $y = +\frac{\pi}{4}$. Le nombre exact est donc au plus égal à $\frac{\pi}{4}$ (1).

(1) On peut d'ailleurs élargir le problème dont il s'agit. Au lieu du coefficient de x, considérer par exemple $f(x) - f(x_0)$; ou bien le coefficient de x^n; ou encore l'ensemble des coefficients de certaines puissances de x. Ces questions se posent d'ailleurs pour toute famille normale.

Nous avons déduit le théorème G du théorème F et du théorème D. Nous allons maintenant, au moyen du théorème F et du théorème E, obtenir un théorème I.

Un corollaire immédiat de F est en effet la proposition suivante :

Soit $a_0 + a'z + \ldots$ *une série qui converge dans un cercle où le rayon du terme maximum ne dépasse pas* N. *Considérons la couronne de ce cercle extérieure au cercle de rayon* $\left|\frac{a_0}{a_1}\right|$. *Si* ε *est un nombre positif donné à l'avance, le rapport* $\frac{A(r)}{M(r)}$ *demeure compris dans cette couronne entre* $1-\varepsilon$ *et* 1, *sauf peut-être dans des couronnes en nombre* $N+1$ *au plus, où la variation totale de* $\log r$ *est limitée supérieurement par une fonction de* N *et* ε *seuls.*

Combinant cette proposition avec E, nous obtenons :

Théorème I. — *Soit* $a_0 + a_1 z + \ldots$ *une série convergente dans un cercle de rayon fini ou infini. Dans la couronne de ce cercle extérieure au cercle de rayon* $\left|\frac{a_0}{a_1}\right|$, *le rapport* $\frac{A(r)}{M(r)}$ *demeure compris entre* $1-\varepsilon$ *et* 1, *sauf peut-être dans des couronnes en infinité dénombrable au plus, où la variation totale de* $\log r$ *est finie et admet une limite supérieure dépendant uniquement de* ε *positif donné.*

Terminons cette section en remarquant que la théorie de M. Valiron pourrait conduire par notre méthode à d'autres théorèmes dans l'énoncé desquels figureraient seulement les deux premiers coefficients de la série, ou le premier, ou les p premiers, et à d'autres critères de familles normales ou quasi-normales (1).

IV. — Les théorèmes de MM. Landau et Schottky.

Dans la note précitée aux Comptes rendus, nous avions appliqué les théorèmes de M. Valiron à la démonstration du théorème de M. Picard sur les valeurs exceptionnelles des fonctions à point essentiel isolé. Nous allons ici appliquer les résultats de la précédente section à la démonstration des propositions classiques de MM. Landau et Schottky.

Nous nous placerons successivement dans l'ordre d'idées du théorème G et dans celui du théorème I.

Soit une aire simplement convexe où une fonction holomorphe $f(x)$ ne prend pas les valeurs 0 et 1. Considérons la fonction :

$$\log\left(\sqrt{\log f - 2\pi i} - \sqrt{\log f}\right).$$

(1) Cf. P. Montel, *Sur les familles quasi-normales de fonctions holomorphes* (Bruxelles, 1922).

Elle est holomorphe et ne prend pas les valeurs $\log(\sqrt{\log m - 1} - \sqrt{m}) + 2n\pi i$. Celles-ci couvrent le plan de telle sorte que tout cercle de rayon 1000 contient au au moins l'une d'elles.

Appliquons ceci à une fonction $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots$, holomorphe dans le cercle de rayon R. Nous avons à considérer la fonction :

$$\log(\sqrt{\log f - 2\pi i} - \sqrt{\log f}) = \log \sqrt{\log a_0 - 2\pi i} - \sqrt{\log a_0}) - \frac{a_1}{2a_0\sqrt{\log a_0(\log a_0 - 2\pi i)}} x + \ldots .$$

Nous avons donc, d'après le théorème G (sans faire intervenir d'ailleurs le fait que le cercle peut être à un feuillet) :

$$R < \frac{2000}{\delta |a_1|} \left| a_0 \sqrt{\log a_0(\log a_0 - 2\pi i)} \right| .$$

Nous obtenons ainsi le théorème de M. Landau, avec une formule qui peut être utile, que l'on pourrait d'ailleurs varier et préciser, en remplaçant par exemple l'emploi des racines carrées par celui de nouveaux logarithmes.

D'autre part, on pourrait déduire de la formule précédente une formule purement algébrique. Mais on peut en obtenir une directement comme il suit :

Considérons la courbe de genre 1 : $X^2 + Y^3 - 1 = 0$; si nous posons $X^2 = f(x)$, comme $f(x)$ est holomorphe dans le cercle de rayon R et n'y prend pas les valeurs 0 et 1, nous sommes assuré que X et Y demeurent holomorphes. Considérons alors l'intégrale de première espèce $U = \int_a \frac{dX}{Y^2}$, a étant un point déterminé de la courbe ; c'est une fonction holomorphe de x qui ne prend pas certaines valeurs, en particulier la valeur $\int_a^\infty \frac{dX}{Y^2}$ (ni les valeurs équivalentes à des multiples des périodes près), ∞ désignant l'unique point à l'infini de la courbe.

Or l'intégrale $U = \int_a \frac{dX}{(1-X^2)^{\frac{2}{3}}}$ fait correspondre au plan X ponctué en -1, $+1$ et ∞ un plan U ponctué aux sommets d'un réseau de triangles équilatéraux ; sur trois sommets voisins du réseau, l'un correspond à $X = \infty$. Nous avons donc encore un plan criblé de points exceptionnels pour la fonction $U(x)$; le rayon maximum d'un cercle ne couvrant aucun de ces points est égal au côté d'un triangle du réseau.

Ce côté est égal à $2\int_0^1 \frac{dX}{(1-X^2)^{\frac{2}{3}}}$; il est donc plus petit que $2\int_0^1 \frac{dX}{(1-X)^{\frac{2}{3}}}$, c'est-à-dire que 6.

Nous avons $U'(x) = \frac{X'(x)}{(1-X^2)^{\frac{2}{3}}}$; d'ailleurs $X = a_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} a_0^{-\frac{1}{2}} a_1 x + \ldots$.

Donc : $U'(o) = \dfrac{a_1}{2a_0^{\frac{1}{2}}(1-a_0)^{\frac{2}{3}}}$.

Donc, d'après le théorème C :

$$R < \frac{12}{\delta |a_1|} |a_0|^{\frac{1}{2}} |a_0 - 1|^{\frac{2}{3}}.$$

On sait que la fonction modulaire avait donné à Hurwitz en 1904 :

$$R < \frac{16}{|a_1|} |a_0|^{\frac{1}{2}} |a_0 - 1|^{\frac{2}{3}}.$$

Il y aurait lieu de rechercher quel est le plus petit coefficient que l'on peut adopter. Il conviendrait d'abord de voir quel est le nombre obtenu en utilisant le δ exact du théorème C qu'il faudrait déterminer), et la valeur exacte de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dX}{(1-X^2)^{\frac{2}{3}}}$.

De la première des deux formules obtenues (celle contenant des logarithmes) résulte par intégration le théorème de M. Schottky, d'après lequel la valeur absolue d'une fonction holomorphe dans un domaine où elle ne prend pas les valeurs o et 1 est bornée dans un domaine intérieur dès qu'elle y est bornée en un point. Il suffit de remplacer a_0 par $f(x)$, a_1 par $f'(x)$ et d'intégrer l'inéquation différentielle à laquelle on est conduit.

De ce théorème on déduit comme on sait que la famille des fonctions holomorphes dans un domaine où elles ne prennent pas les valeurs o et 1 est une famille normale. On peut aussi suivre une marche inverse, qui se prête à l'utilisation de l'intégrale elliptique. Pour voir que les fonctions $f(x)$ holomorphes dans un cercle où elles ne prennent pas les valeurs o et 1 forment une famille normale, considérons encore, en posant $X^2 = f(x)$, la courbe $X^2 + Y^3 - 1 = 0$, et son intégrale de première espèce; si nous prenons pour cette dernière la détermination qui pour $x = 0$ se trouve dans un certain parallélogramme des périodes, nous voyons, d'après le théorème H, que la famille des intégrales de première espèce est normale (sans convergence vers l'infini); ce qui suffit.

De la proposition obtenue on déduit le théorème de M. Schottky [1].

De la formule d'Hurwitz, retrouvée plus haut à un coefficient numérique près, on déduit aisément le théorème de M. Picard sur les valeurs exceptionnelles en un point essentiel donné.

---

[1] Voir par exemple G. Julia, *Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé*, p. 65.

Soit en effet $f(x)$ une fonction qui à l'extérieur d'un cercle de rayon R ayant l'origine pour centre est holomorphe, sauf peut-être à l'infini, et ne prend pas les valeurs 0 et 1. Le rayon du cercle obtenu en remplaçant dans la formule a_0 et a_1 par $f(x)$ et $f'(x)$ est supérieur à $|x| - R$. Par conséquent, l'expression

$$\frac{x^6 f'^6(x)}{f^3(x)(f(x)-1)^2}$$

est bornée à l'infini; elle y est donc holomorphe. De même pour l'expression

$$\frac{x^6 f'^6(x)}{(f(x)-1)^3 f^2(x)}.$$

Le quotient de ces deux expressions est donc holomorphe, et par suite $f(x)$ l'est aussi.

Le théorème d'après lequel les fonctions méromorphes dans un domaine et y admettant trois valeurs lacunaires constituant une famille normale, peut-être généralisé de la manière suivante, peut être déjà remarqué :

Théorème J. — Les fonctions méromorphes dans un domaine et qui sont telles que chacune y admette trois valeurs lacunaires, les distances sphériques mutuelles de ces trois valeurs étant bornées inférieurement pour l'ensemble des fonctions, constituent une famille normale (les distances sphériques se mesurent naturellement sur la sphère complexe).

Ce théorème J résulte du cas particulier où les trois valeurs lacunaires sont fixes, par le moyen d'une substitution homographique qui, à cause de l'hypothèse sur les distances sphériques, ne dégénère pas.

De ce théorème J résulte immédiatement le théorème G dans l'énoncé duquel on supprimerait les mots « à un seul feuillet ». Cette dernière proposition a été établie par M. Landau en 1922 dans les Rendic. del Circ. Math. di Pal; elle généralisait à un certain point de vue une proposition de M. Koebe sur les fonctions univalentes. Nous avons eu connaissance de ces travaux après avoir établi le théorème G.

Passons maintenant à l'ordre d'idées du théorème I.

Observons d'abord que dans l'énoncé du théorème I, l'on peut remplacer $M(r)$ par $B(r)$. On a alors un théorème relatif au rapport $\frac{A(r)}{B(r)}$. Soit $\varepsilon = \frac{1}{10}$; à cette valeur de ε correspond une constante numérique K, limite supérieure de la variation totale de $\log r$ dans les couronnes où $\frac{A(r)}{B(r)}$ peut n'être pas compris entre $\frac{9}{10}$ et $\frac{11}{10}$.

Soit u' une série entière $a_0 + a_1 x + \ldots$ convergente dans un cercle où elle ne prend pas les valeurs o et 1. Appliquons ce théorème aux trois fonctions $v' = \log u$; $v'' = \log (u - 1)$; $v''' = \log u(u - 1)$. Nous ne considérons que ce qui se passe à l'extérieur du plus grand des cercles de rayon $\frac{a'_0}{a'_1}$, $\frac{a''_0}{a''_1}$, $\frac{a'''_0}{a'''_1}$; soit dans cette région une couronne où la variation de $\log r$ dépasse $3K$; il y a des points où les trois quantités $\frac{A'(r)}{B'(r)}$, $\frac{A''(r)}{B''(r)}$, $\frac{A'''(r)}{B'''(r)}$ sont comprises entre $\frac{9}{10}$ et $\frac{11}{10}$. Or, si les valeurs des $A(r)$ et $B(r)$ sur le cercle intérieur de la couronne deviennent assez grandes, on reconnaît que cela devient impossible; cela tient à ce que les petites valeurs de $u(u - 1)$ sont comparables aux petites valeurs de u ou $(u - 1)$ et ses grandes valeurs au carré des grandes valeurs de u.

Une inégalité de M. Hadamard donnait en général :

$$r|a_1| + 2\Re a_0 < 4A(r);$$

on peut donc déterminer en fonction des deux premiers coefficients de la série u le rayon d'un cercle à l'intérieur duquel la série devient égale à o ou 1, ou cesse de converger. Ce qui précède permettrait d'exprimer ce rayon par une formule, où figurerait la constante numérique K, qu'il faudrait déterminer.

Il y a intérêt à comparer cette démonstration du théorème de M. Landau (pour le théorème de M. Picard la démonstration analogue a été donnée dans la note aux Comptes rendus du 12 mai 1924) avec les travaux de MM. Borel, Landau et Schottky.

On sait que la base de ces travaux réside, non dans l'équivalence asymptotique (sauf dans des couronnes exceptionnelles) de $A(r)$ et $M(r)$, mais dans celle, plus aisée à démontrer, de $\log A(r)$ et $\log M(r)$. Mais ce n'est pas la seule différence que nous pouvons constater.

En premier lieu, notre démonstration, aux Comptes rendus du théorème de M. Picard, est certainement complètement parallèle à celle donnée par M. Borel à la page 389 de son Mémoire classique *Sur les zéros des fractions entières* (Act. Math., t. XX). Au contraire, la démonstration actuelle du théorème de M. Landau n'est pas parfaitement parallèle à celle de MM. Landau et Schottky.

En effet, après avoir donné à la page 389 de son Mémoire une démonstration du théorème de M. Picard, M. Borel s'exprime ainsi : « Avec les notions précises que nous avons acquises sur les ordres de grandeur, ce raisonnement est parfaitement rigoureux; mais, n'ayant pas alors ces notions précises, j'ai dû, pour le rendre rigoureux, lui donner une forme synthétique que je vais maintenant exposer. »

Mais en fait ce n'est pas ainsi qu'opère M. Borel, et qu'opèrent à sa suite MM. Landau et Schottky[1]. En développant complètement le raisonnement de la

[1] Voir par exemple E. Goursat, *Cours d'analyse*, 3e édition, 1919, Note.

page 389, on obtiendrait une démonstration du théorème de M. Picard, et de celui de M. Landau, parallèle à notre actuelle démonstration de ce dernier. Ce n'est pas celle-là qu'édifie M. Borel. Il intervertit l'ordre des opérations successives. Au lieu d'intégrer les inégalités fondamentales, considérées comme équations aux différences finies (ce qui donne le théorème sur l'équivalence asymptotique de $A(r)$ et $M(r)$, puis de combiner les résultats de cette intégration, il combine tout d'abord les inégalités fondamentales et effectue ensuite seulement l'intégration. De la sorte, il n'y a plus à s'occuper des ordres de grandeur, des couronnes exceptionnelles de la variation totale de $\log r$. Les avantages de cette manière d'opérer sont mis nettement en évidence dans la démonstration précédemment citée de M. Schottky.

Que faudrait-il donc faire pour obtenir, dans notre ordre d'idées, une démonstration parallèle à cette dernière? Il faudrait manifestement obtenir de nouvelles inégalités fondamentales, d'où pourrait se déduire par intégration l'équivalence asymptotique de $A(r)$ et $M(r)$ (ou du moins de $A(r)$ et $B(r)$) et non plus seulement de leurs logarithmes. Ces inégalités seraient des équations aux différences non plus du premier, mais du second ordre, et rentreraient, non plus dans la proposition connue sous le nom de lemme de Schwarz, mais dans une proposition analogue, du second ordre. Les travaux modernes sur les fonctions harmoniques sont peut-être susceptibles de fournir ces inégalités. En combinant de manière convenable ces équations aux différences du second ordre, on obtiendrait d'autres équations, toujours du second ordre, et finalement une équation du second ordre d'où se déduirait, à la manière de M. Schottky, la limitation de la valeur absolue de la fonction quand on fixe sa valeur en un point. Cette démonstration serait un peu longue à édifier, mais intéressante; elle aurait pour base, comme celle de M. Schottky, l'intégrale de Cauchy.

Les démonstrations des théorèmes de MM. Picard, Landau et Schottky par les inégalités de M. Borel (correspondant à l'équivalence asymptotique de $\log A(r)$ et $\log B(r)$) sont peut-être en définitive plus courtes que celles développées ou signalées ici, se rattachant à l'équivalence asymptotique de $A(r)$ et $B(r)$. Mais ces dernières mettent en évidence le fait suivant : les théorèmes en question sont indépendants de la considération des cycles de la sphère à trois points exclus. Les démonstration dont nous venons de parler, celle par la fonction modulaire, celles données plus haut comme conséquence du théorème G, pouvaient faire supposer le contraire. Or c'est un fait qui présente peut-être quelque intérêt.

V. — Les théorèmes de M. Picard sur l'uniformisation; cas des types les plus généraux.

Dans la note du 12 mai 1924 aux Comptes rendus, nous avons remarqué que *le domaine riemannien engendré par une intégrale abélienne de première espèce attachée à une courbe de genre supérieur à un ne contient que des cercles à un seul feuillet de rayon borné.* Rapprochant ce fait de la propriété d'une fonction uniforme et holomorphe dans le voisinage d'un point essentiel isolé d'engendrer un domaine riemannien, contenant des cercles à un seul feuillet de rayon aussi grand qu'on veut, nous avons obtenu, moyennant un lemme très simple, le théorème suivant, dû à M. Picard (*Act. Math.*, t. XI).

Si deux fonctions uniformes dans le voisinage d'un point essentiel isolé commun sont liées par une relation algébrique, le genre de cette relation ne peut dépasser l'unité.

Le principe qui vient d'être rappelé va nous permettre de déduire du théorème G une proposition établie par le même auteur dans les *Rendic. del Circ. Mat. di Palermo,* en 1912. On obtient immédiatement, en effet :

Théorème K. — *Soit une courbe algébrique $f(x, y)=0$, de genre supérieur à l'unité. Soit $\int \frac{Q(x,y)}{f'y}dx$ une intégrale de première espèce attachée à cette courbe; M le maximum du rayon d'un cercle à un seul feuillet du domaine riemannien engendré par cette intégrale. Soient deux fonctions $x(t)$, $y(t)$, satisfaisant à l'équation de la courbe, et telles que dans le voisinage de $t=0$ on ait :*

$$x(t)=a_0+a_1 t+\ldots; \qquad y(t)=b_0+b_1 t+\ldots.$$

Ces deux fonctions ne peuvent être toutes deux méromorphes à l'intérieur du cercle :

$$|t| \leqslant \frac{M}{\delta}\frac{f'_y(a_0, b_0)}{a_1 Q(a_0, b_0)}.$$

Nous avons ainsi une formule algébrique simple pour le rayon du cercle. En intégrant, nous obtenons la proposition suivante :

Théorème L. — *Soit une courbe algébrique $f(x, y)=0$ de genre supérieur à l'unité. Soit M le maximum du rayon d'un cercle à un seul feuillet du domaine rie-*

mannien engendré par une certaine intégrale de première espèce attachée à la courbe. Soient deux fonctions $x(t)$, $y(t)$, satisfaisant a l'équation de la courbe et méromorphes dans un certain cercle. Alors la différence des valeurs de l'intégrale de première espèce en deux points t_1 et t_2 est inférieure au produit par $\frac{M}{\delta}$ de la distance non-euclidienne de t_1 et t_2 par rapport au cercle.

De là résulte que les fonctions $x(t)$ méromorphes dans un cercle et telles que l'équation $f(x, y) = 0$, de genre supérieur à un, admette pour racine une fonction de $y(t)$ méromorphe dans le même cercle, forment une famille normale.

Le théorème de M. Picard, des *Act. Math.*, t. XI, déjà établi dans la note précitée, peut être déduit de la formule précédente. Soient $x(t)$, $y(t)$ deux fonctions satisfaisant à la relation $f(x, y) = 0$ de genre supérieur à un, et méromorphes, sauf peut-être à l'infini, à l'extérieur d'un cercle $|t| = R$. On a :

$$\left|\frac{Mf'_y(x, y)}{\delta x'_t Q_1(x, y)}\right| > |t| - R.$$

L'expression $\frac{tx'_t Q_1(x, y)}{f'_y(x, y)}$ est donc bornée à l'infini, et par suite holomorphe; même résultat en remplaçant Q_1 par un polynôme analogue Q_2. Le quotient $\frac{Q_1}{Q_2}$ a donc une limite à l'infini; le point (x, y) tend vers l'un ou l'autre de $2p - 2$ points déterminés, p étant le genre de la courbe; les fonctions $x(t)$, $y(t)$ sont donc méromorphes à l'infini.

On peut faire la remarque suivante au sujet des théorèmes K et L, en les comparant aux théorèmes analogues relatifs à la sphère à trois points exclus. Le théorème K est entièrement analogue à celui de M. Landau : le cercle étant donné à l'intérieur duquel il y a mérophormie, le déplacement infinitésimal sur la courbe est limité en fonction du déplacement infinitésimal à l'intérieur du cercle. Considérons maintenant le théorème L. Au centre du cercle où il y a méromorphie est supposé correspondre un point déterminé de la courbe. A un petit cercle concentrique correspond une région de la surface de Riemann située dans une petite région autour du point; lorsqu'on fait croître le rayon du cercle intérieur, cette petite région s'agrandit et finit par recouvrir toute la surface ; on peut du moins observer, sans avoir recours à la représentation conforme, que c'est ce qui se produit dans des exemples simples. Au contraire, sur la sphère à trois points exclus, il restait toujours autour de ces points des régions non atteintes. Ainsi les cycles jouent ici un rôle plus important. Les fractions rationnelles ne peuvent plus suffire. Il est nécessaire de faire intervenir des fonctions transcendantes, dont les plus simples sont les intégrales abéliennes. On pourrait, à vrai dire, avoir recours à des fonctions algébriques uniformes en chaque point de la surface, non sur la surface complète;

mais il faudrait les prendre de plus en plus compliquées à mesure que le point variable s'approcherait davantage de la circonférence.

Comme nous l'avons fait pour la sphère à trois points exclus, il y aurait intérêt à rattacher les théorèmes sur la courbe de genre égal ou supérieur à deux à l'équivalence asymptotique de $M(r), A(r), B(r)$. Cela se ferait au moyen des intégrales abéliennes. En prenant pour fixer les idées une courbe de genre deux, il faudrait vraisemblablement considérer la courbe de genre trois obtenue en doublant la surface de Riemann par itération le long d'une coupure.

Une analyse encore plus approfondie et un emploi plus large des cycles de la courbe permettrait peut-être d'édifier une démonstration analogue à celle de M. Borel, utilisant uniquement l'équivalence asymptotique de $\log M(r)$ et $\log A(r)$ et reposant par suite directement sur l'intégrale de Cauchy.

Passons à l'extension des théorèmes précédents au cas des types les plus généraux. On sait ce que Poincaré, dans son Mémoire *Sur les groupes des équations linéaires* (¹), appelle *type d'équation linéaire normale du second ordre*. C'est une courbe (une surface de Riemann) de genre q sur laquelle sont marqués p points affectés chacun d'un coefficient α_i égal à l'inverse d'un entier : $2, \ldots \infty$. Il appelle déficit angulaire du type l'expression

$$2q + p - 2 - \Sigma\alpha_i.$$

Il distingue les types rationnels pour lesquels le déficit angulaire est négatif, les types elliptiques pour lesquels il est nul, les types fuchsiens pour lesquels il est positif. Il énumère les types rationnels et elliptiques qui sont d'ailleurs bien connus.

Le Mémoire actuel étant indépendant de la théorie des fonctions automorphes, quelles qu'elles puissent être, nous appellerons *arbitraires* les types que Poincaré appelle *fuchsiens*; un type pris au hasard rentre en effet dans ce cas.

Notre objet est l'établissement pour les types arbitraires, par les méthodes directes dont nous faisons usage, des théorèmes qui pour la sphère à trois points exclus se réduisent au théorème de M. Landau et au théorème de M. Picard pour le point essentiel isolé.

Soit un type arbitraire de genre zéro, c'est-à-dire dont la surface de Riemann se réduit à une sphère, sur laquelle sont marqués des points A_i représentant des nombres complexes, chaque point étant affecté d'un coefficient α_i. Considérons une fonction d'une variable, définie et méromorphe dans une certaine région. Il lui correspond sur la sphère du type un certain domaine riemannien. Supposons que ce domaine n'ait au point A_i, affecté du coefficient $\alpha_i = \frac{1}{n_i}$, que des points de ramification, et qu'en chacun de ces points de ramification placés en A_i se réunissent des

(¹) Poincaré, *Œuvres*, tome II, p. 300.

feuillets en nombre égal à n_i ou multiple de n_i. Nous dirons alors que le type arbitraire de genre zéro contient la fonction considérée.

Nous définissons de manière analogue un système de deux fonctions d'une variable contenu dans un type arbitraire de genre un ou de genre supérieur à un.

Ceci posé, on a le théorème suivant, généralisant celui de M. Landau :

Théorème M. — *Soit* $f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots$ *une fonction méromorphe à l'intérieur du cercle* $|t| < R$, *appartenant dans ce cercle à un type arbitraire donné de genre zéro. On peut alors assigner à* $|a_1 R|$ *une limite supérieure dépendant uniquement de* a_0 *(et du type donné) nullement des autres coefficients de la série* $f(t)$.

Soient deux fonctions $f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots$; $g(t) = b_0 + b_1 t + \ldots$ *méromorphes à l'intérieur du cercle* $|t| < R$, *appartenant dans ce cercle à un type arbitraire donné de genre un ou supérieur à un. On peut alors assigner à* $|a_1 R|$ *une limite supérieure dépendant uniquement de* $a_0 b_0$ *(et du type donné), nullement des autres coefficients des séries* $f(t)$ *et* $g(t)$.

(De plus, on peut trouver pour ces limites supérieures des expressions algébriques.)

Commençons par le cas du type de genre supérieur à un. La proposition demeure alors exacte, même en faisant abstraction des points A_i, et l'on a pour $|a_1 R|$ la limite supérieure $\dfrac{M}{\delta}\dfrac{F'_y(a_0, b_0)}{Q(a_0, b_0)}$.

Soit un type de genre un; le type est arbitraire dès qu'il contient au moins un point A_i; soit $\dfrac{1}{n}$ le coefficient attaché à ce dernier point. Nous pouvons supposer la surface de Riemann formée de deux feuillets avec quatre points de ramification; nous pouvons même supposer le point du type, à coefficient $\dfrac{1}{n}$, situé en un point de ramification; le type est alors identique, au point de vue de la question posée, à un type de genre zéro et de symbole $\left(\dfrac{1}{2} \times 3, \dfrac{1}{2n}\right)$, c'est-à-dire comprenant trois points à coefficient $\dfrac{1}{2}$ et un à coefficient $\dfrac{1}{2n}$; l'emploi d'une racine carrée transforme ce type en un type de genre zéro et de symbole $\left(\dfrac{1}{2} \times 2, \dfrac{1}{2n} \times 2\right)$; une racine d'ordre $2n$ transforme celui-ci en un type de genre zéro et de symbole $\left(\dfrac{1}{2} \times 4n\right)$. Ainsi la recherche de la limite supérieure de $|a_1 R|$ (et même de la limite exacte) est ramenée à la recherche analogue pour la courbe hyperelliptique $y^2 = \prod_{j=1}^{j=4n} (x - x_j)$.

Nous ne cherchons pas ici la limite exacte, mais notre formule nous donne une limite supérieure algébrique qu'il serait facile d'écrire.

Passons aux types arbitraires de genre zéro. On a pour eux :

$$p - 2 - \sum_{1}^{p} \frac{1}{n_i} > 0.$$

Or reportons-nous à la théorie des surfaces de Riemann régulières([1]). A tout type de genre zéro correspond un nombre fini ou infini de telles surfaces ayant pour points de ramification les points du type, et dont le genre g et le nombre des feuillets m sont liés par la formule :

$$m\left(p - 2 - \sum_{1}^{p} \frac{1}{n_i}\right) = 2g - 2.$$

Si le type est arbitraire, on a $g > 1$. D'ailleurs les méthodes modernes de démonstration du théorème d'existence de Riemann permettent de faire correspondre à cette surface de genre supérieur à l'unité une courbe algébrique, et cela par des moyens purement algébriques. Le théorème est donc démontré pour les types arbitraires de genre zéro; le maximum de $|a_1, R|$ est en effet le même pour le type donné et pour la surface de Riemann de genre supérieur à un obtenue; sans nous occuper de la limite exacte, nous avons encore une formule algébrique.

Il n'est pas sans intérêt d'observer que, pour un type arbitraire de genre zéro, on peut toujours se ramener soit au cas d'un tel type à trois points seulement, soit à des cas très simples. En effet, le déficit angulaire étant positif, les types arbitraires de genre zéro sont : 1° les types à trois points pour lesquels $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} < 1$; 2° les types à quatre points, à l'exclusion du type $\left(\frac{1}{2} \times 4\right)$; 3° tous les types à plus de quatre points.

Or, considérons d'abord deux cas particuliers : le type $\left(\frac{1}{2} \times 5\right)$ se ramène par une racine carrée au type $\left(\frac{1}{2} \times 6\right)$, qui se ramène à une courbe de genre deux $y^2 = P_6(x)$; le type $\left(\frac{1}{3} \times 4\right)$ se ramène encore à une courbe de genre deux :

$$y^3 = \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)}.$$

Considérons alors un type à quatre points; si tous sont différents, les trois plus grands des n_i donnent un type arbitraire à trois points. Supposons qu'il y ait deux

([1]) Voir par exemple P. Appell et E. Goursat, *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales*, p. 240.

coefficients $\frac{1}{2}$; on a $\left(\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{q}\frac{1}{m}\right)$ où q est quelconque et $m > 2$; l'irrationalité diédrique correspondant à $\left(\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{m}\right)$ transforme ce type en un type $\left(\frac{1}{q}\times 2m\right)$ où $m > 2$; ce type comprend lui-même soit le type $\left(\frac{1}{2}\times 5\right)$, soit le type $\left(\frac{1}{3}\times 4\right)$, soit le type $\left(\frac{1}{r}\times 3\right)$, où $r \geqslant 4$. Supposons maintenant qu'il y ait deux coefficients égaux à $\frac{1}{n}$, où $n > 2$; alors une racine n^e ramène aux cas précédents.

Enfin les types à plus de quatre points contiennent toujours des types rentrant dans les précédents.

On est donc ramené aux types arbitraires de genre zéro à trois points seulement. Pour ceux-ci, on peut naturellement obtenir comme plus haut une formule algébrique par la considération d'une surface de Riemann régulière associée au type. Il est possible que la théorie des fonctions de Schwarz permette d'obtenir plus simplement des formules algébriques.

Démontrons maintenant un théorème généralisant celui de M. Picard sur le point essentiel isolé.

Théorème N. — *Si une fonction admettant un point essentiel isolé est contenue dans le voisinage de ce point dans un type de genre zéro, celui-ci est elliptique ou rationnel.*

Si un système de deux fonctions admettant un point essentiel isolé commun est contenu dans le voisinage de ce point dans un certain type, celui-ci est elliptique ou rationnel.

Nous avons, dans ce qui précède, fait correspondre aux types arbitraires des courbes de genre supérieur à un; il suffit donc de démontrer la proposition suivante :

Soit $f(t)$ une fonction méromorphe à l'extérieur d'un cercle $|t| < R$, ayant un point essentiel à l'infini. Supposons qu'en la substituant à la place de x dans l'équation d'une courbe algébrique $F(x, y) = 0$, on obtienne pour une des racines de l'équation en y une fonction $g(t)$ méromorphe en tout point à distance finie extérieur au cercle $|t| < R$, mais pouvant ne pas demeurer uniforme par circulation autour de ce cercle. Alors la courbe est de genre 0 *ou* 1.

Montrons que si la courbe est de genre p supérieur à un, le point à l'infini ne peut être essentiel pour $f(t)$. On a encore l'inégalité :

$$\left|\frac{MF'_y(x,y)}{\delta x'_t Q_1(x,y)}\right| > |t| - R.$$

La fonction $\dfrac{tx'_t Q_1(x,y)}{F'y(x,y)}$ est donc bornée à l'infini. Or c'est une fonction algébroïde, racine d'une équation algébrique dont les coefficients sont des fonctions uniformes et holomorphes à distance finie à l'extérieur du cercle $|t| < R$ (elle n'a d'ailleurs pas de point de ramification à distance finie à l'extérieur de ce cercle, mais c'est sans importance ici); elle se comporte donc à l'infini comme une fonction algébrique et tend vers une limite déterminée. Même résultat en remplaçant Q_1 par Q_2. $\dfrac{Q_1}{Q_2}$ a donc une limite, le point (x, y) tend vers l'un ou l'autre de $2p - 2$ points déterminés, et le point à l'infini n'est pas essentiel pour $f(t)$.