Annales de la faculté des sciences de Toulouse

Nicolas Kryloff

Sur différents procédés d'intégration approchée en physique mathématique

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 17 (1925), p. 153-186
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1925_3_17__153_0>

SUR DIFFÉRENTS PROCÉDÉS D'INTÉGRATION APPROCHÉE

EN PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

Par Nicolas KRYLOFF

Membre de l'Académie des Sciences d'Ukraïne (à Kieff).

PRÉFACE

Dans le célèbre Mémoire : « *Ueber eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik* », l'illustre physicien suisse Walter Ritz a proposé pour l'intégration des équations différentielles de la physique mathématique une méthode, qui peut être résumée brièvement comme il suit : en profitant des conditions frontières, Ritz considère certaine intégrale correspondant au problème, de sorte que l'équation, dite d'Euler, obtenue en faisant varier cette intégrale (¹), est précisément l'équation différentielle donnée, laquelle peut être considérée ainsi comme la condition nécessaire pour rendre l'intégrale susdite « stationnaire ».

Dans la méthode de W. Ritz, ainsi qu'en général dans les méthodes basées sur le principe de minimum, on cherche l'intégrale de l'équation différentielle donnée sous la forme d'une série procédant suivant des fonctions aisément calculables (par ex., suivant des fonctions trigonométriques, des polynomes et en général suivant des fonctions dites « fondamentales » correspondant aux divers cas des vibrations des systèmes) et assujetties à certaines conditions restrictives et explicitées dans la suite; en général ces conditions sont les suivantes : les fonctions du système en question doivent vérifier les conditions frontières imposées à l'intégrale cherchée de l'équation différentielle donnée et en outre ces fonctions doivent être telles, que les fonctions dites « arbitraires » en Physique mathématique peuvent être développées en séries procédant suivant les fonctions du système choisi.

La méthode de W. Ritz, ayant, remarquons-le en passant, quelques points de

---

(¹) Cette intégrale, remarquons-le en passant, peut être formée quelquefois directement d'après les données du problème, comme il est bien connu dans la Mécanique appliquée; on pose ensuite le problème de minimum à propos de cette intégrale et on démontre que les fonctions minimantes tendent vers une fonction limite vérifiant l'équation différentielle correspondant au problème envisagé.

contact avec la méthode utilisée jadis par Lord Rayleigh [1], ramène en somme la question à un certain problème du calcul des variations; le point de départ de la méthode de W. Ritz est par conséquent identique à celui sur lequel repose le fameux « principe de Dirichlet » tel que Riemann l'a conçu.

Les considérations bien connues émises depuis lors par Weierstrass ont mis en discrédit le principe lui-même, ainsi que les démonstrations sur lui fondées.

Les recherches ultérieures de Arzela [2], M. Hilbert [3], M. Zaremba [4] M. Hadamard, M. Lebesgue, M. Fubini et d'autres géomètres contemporains ont été consacrées à la « réhabilitation » du principe de Dirichlet. Or la partie essentielle et le mérite principal des mémoires de W. Ritz consiste non seulement dans le choix de la suite minimante, que l'illustre auteur a su trouver par la voie, qui lui est propre, mais aussi dans la démonstration dans certains cas au moyen du calcul effectif de l'existence pour le problème du minimum posé, de la solution vérifiant en effet l'équation différentielle donnée. Les expressions approximatives formées dans la méthode de W. Ritz pour l'intégrale cherchée se présentent sous la forme des séries terminées (procédant suivant les fonctions du système choisi), dont les coefficients se déterminent par les règles usuelles du calcul différentiel; ainsi pour les équations différentielles linéaires on aboutit au système des équations linéaires toujours résolubles par rapport aux coefficients cherchés dans les cas considérés par Ritz lui-même.

Par une analyse profonde et élégante W. Ritz démontre rigoureusement la possibilité du passage à la limite en établissant la convergence uniforme des approximations obtenues vers une fonction continue, dérivable et vérifiant en effet l'équation différentielle donnée.

Dans ce travail nous exposerons aussi une autre démonstration [5], différente de celle de Ritz, qui permet non seulement d'établir la convergence du procédé, mais donne aussi le moyen d'estimer l'ordre de l'erreur qu'on commet en s'arrêtant à la m^{me} approximation; ceci présente, à notre avis, un complément essentiel à la méthode de W. Ritz et peut être généralisé pour des systèmes d'équations différentielles [6], d'équations aux dérivées partielles, etc...

---

(1) « Philosophical Magaz. », vol. 22, série 6.

(2) « Rendiconti della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna », 1896-97.

(3) « Mathem. Annalen », t. 59.

(4) « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », 1906-07.

(5) N. Kryloff : « Sur l'estimation de l'erreur commise dans l'application de la méthode de W. Ritz pour l'intégration approchée des équations différentielles ». *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. 180, p. 1316.

(6) N. Kryloff : « Sur une méthode permettant d'estimer l'ordre de l'erreur commise quand on applique le procédé de W. Ritz aux systèmes des équations différentielles de la physique mathématique ». *Bulletin de la Classe des Sciences de l'Académie de l'Ukraïne*, t. I, fasc. 4.

Pour estimer la méthode de W. Ritz à sa juste valeur il n'y a qu'à se rapporter aux mémorables paroles de H. Poincaré, citées dans la préface aux « Œuvres complètes de W. Ritz(¹) »; les voici *in extracto :*

« Les problèmes de Physique mathématique se ramènent presque tous à un type commun. » « C'est le mérite de Freedholm d'avoir trouvé une méthode générale et rigoureuse qui leur est applicable à tous. » « La solution se présente ainsi comme le quotient de deux expressions analogues à des déterminants. Ces déterminants se présentent eux-mêmes sous la forme de séries. » « Bien que les séries soient extrêmement convergentes, bien que la loi de formation des termes soit élégante et simple, il en résulte pour le calcul numérique des difficultés presque insurmontables. »

« Ainsi la méthode de Freedholm, excellente pour démontrer rigoureusement la possibilité du problème, » ... « n'a pas encore été employée pour le calcul numérique et ne paraît pas devoir l'être sous la forme actuelle. » « La méthode de Ritz se prête mieux au calcul numérique » ... « C'est une méthode d'ingénieur. » ... « Les mêmes procédés de démonstrations seraient-ils applicables à tous les problèmes analogues et, par exemple, aux problèmes de Fourier? Ritz le croyait, je le crois aussi, mais le temps lui a manqué pour le vérifier. »

Cette opinion émise par l'un des plus grands géomètres contemporains prouve suffisamment toute l'importance des recherches de W. Ritz et met en relief certains problèmes à examiner, qui en découlent. Les recherches dans la direction tracée par W. Ritz paraissent d'autant plus nécessaires, que justement dans ce dernier temps les savants éminents tels que MM. S. Timochenko, Karman, Pöschl (pour les diverses questions de la science d'ingénieur) et M. Love (pour certains problèmes de la Mécanique céleste) en appliquant l'algorithme variationnel de Ritz ont été unanimes à déclarer ses avantages incontestables au point de vue du calcul effectif de la solution. Certains des travaux de ces auteurs contenaient les calculs numériques sans se préoccuper de la convergence des approximations en appliquant sans étude théorique préalable le procédé de Ritz au cas important, où la forme quadratique sous le signe de l'intégrale à varier n'était pas, par exemple, définie positive, c'est-à-dire où n'est pas réalisée la condition qui était essentielle dans le raisonnement de Ritz. Le problème qui en surgit méritait donc une attention toute particulière, d'autant plus qu'il est lié à la question du calcul effectif des valeurs « singulières » du paramètre (ainsi que des solutions singulières) en Physique mathématique et que les paroles, ci-dessus mentionnées de H. Poincaré, contenaient une allusion à ce sujet.

La remarque correspondant au cas où le développement de l'intégrale cherchée procède suivant les fonctions singulières correspondant au problème a été faite dans mes notes (²) antérieures; les coefficients des approximations obtenues par l'algo-

(¹) G. Villars, 1911.

(²) N. Kryloff, « Sur l'application de la méthode de W. Ritz au problème des oscillations rithme de Ritz se déterminent individuellement en ce cas-là et leurs expressions sont identiques à celles que l'on reçoit par l'application de la méthode fondamentale de la Physique mathématique développée par les recherches de Schwartz, H. Poincaré, E. Picard, V. Stekloff, S. Zaremba; cette remarque sera aussi utilisée dans la suite de ce travail.

Le cas des équations différentielles qui échappe à la méthode de W. Ritz a été considéré dans une série d'articles (¹) par une méthode qui se distingue essentiellement de celle de Ritz et qu'on aurait pu surnommer « la méthode des déterminants infinis »; ces considérations basées sur les recherches de Helge von Koch trouveront une large application au cours du présent mémoire.

Un de nos articles antérieurs (²) contient l'extension de la méthode de W. Ritz aux systèmes de deux équations adjointes à elles-mêmes; la généralisation au cas de n équations s'impose et se trouve développée ici avec les compléments nécessaires.

Le travail présent contient donc un essai d'une généralisation systématique de la méthode de W. Ritz dans les diverses directions; entre autres, sont traités ainsi dans la suite quelques cas d'équations intégrodifférentielles et aussi les équations intégrales de première et de deuxième espèce.

Enfin l'auteur, en se basant sur ses recherches récentes (³), donne la démonstration de la convergence de la méthode des moindres carrés non seulement pour le cas d'une seule équation différentielle, mais aussi pour le cas des systèmes des équations; cette méthode de moindres carrés ainsi que les généralisations indiquées (⁴) prendront, nous en sommes persuadés, leurs places légitimes parmi les autres méthodes d'intégration approchée des équations de la Physique mathématique.

Diverses circonstances extérieures, qu'il est inutile d'énumérer ici, n'ont pas permis de développer certaines parties de ce travail avec toute l'ampleur correspon-

---

contraintes », *Communications de la Soc. Math. de Kharkoff*, 1914. — N. Kryloff, « Sur les méthodes de W. Ritz et de M. Boussinesq », *Annales de l'École sup. des Mines de Pétrograd*, 1915.

(¹) N. Kryloff, « Sur les généralisations de la méthode de W. Ritz », *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 1917. — N. Kryloff et J. Tamarkine, « Sur la méthode de W. Ritz pour la solution approchée des problèmes de la Physique mathématique », *Bulletin de l'Académie des Sciences de Pétrograd*, 1918.

(²) N. Kryloff : « The application of the method of W. Ritz to a system of differential equations », *Bull. de l'Acad. des Sciences de Pétrograd*, 1917.

(³) N. Kryloff, « Sur une méthode basée sur le principe de minimum pour l'intégration approchée des équations différentielles », *Comptes rendus de l'Acad. des Sciences de Paris*, t. 181, 1925. — N. Kryloff, « Sur l'extension de la méthode des moindres carrés pour l'intégration approchée des systèmes des équations différentielles », *Bull. de la Classe des Sciences de l'Académie de l'Ukraine*, t. I, fasc. 3.

(⁴) N. Kryloff, « Sur une méthode d'intégration approchée contenant comme cas particuliers la méthode de W. Ritz ainsi que celle des moindres carrés ». *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. 182, p. 676.

dant à l'importance du sujet. Pour les mêmes raisons certaines parties de ce travail destinées à paraître ailleurs sont publiées à présent, presque avec huit ans de retard; quelques-uns des résultats obtenus ont été cependant communiqués dans mes Notes déjà mentionnées. L'index placé ci-après donne une idée nette du contenu du mémoire; la fin du travail est accompagnée d'une liste de travaux relatifs au sujet.

CHAPITRE PREMIER

§ 1. Les équations intégro-différentielles, rencontrées(1) jadis par Duhamel dans l'étude de certains problèmes thermo-mécaniques, ont été récemment l'objet des profondes recherches de M. Vito Volterra(2) et de ses successeurs; ces travaux ont attiré l'attention des géomètres sur le rôle de toute première importance, joué par les dites équations dans les divers problèmes de la Physique mathématique, notamment dans ceux où entrent en jeu les phénomènes « d'hérédité ».

Au point de vue du « problème de minimum » l'étude de ces équations a été reprise par M. Guido Fubini; or la méthode du savant géomètre de Turin, exposée dans son Mémoire(3), se borne seulement à la démonstration de l'existence de la solution et par conséquent ne donne pas le moyen de la calculer effectivement. Le pro-

---

(1) *Journal de l'Ecole Polytechnique*, t. XV.

(2) Voir les nombreux travaux de cet auteur dans les *Rendiconti dell'Accad. dei Lincei*, *Acta Matematica*, etc., résumés partiellement dans ses : « Leçons sur les équations intégro-différentielles » et « Leçons sur les fonctions de lignes ». Paris, G. Villars, 1913.

(3) « Alcuni nuovi problemi di calcolo delle variazioni », *Annali di Matematica*, série 3, vol. 20.

blème se pose donc de chercher cette solution dans la direction des idées de Ritz, ce qui fera l'objet de ce premier paragraphe.

Visant le but de créer un nouveau chapitre du calcul fonctionnel « alla construzione del quale », selon l'expression de M. Fubini, « tanti sforzi sono ora dirette » dans le Mémoire ci-dessus mentionné, cet auteur considère l'équation intégro-différentielle aux dérivées ordinaires, comme l'équation d'Euler, obtenue en faisant varier une certaine intégrale double.

Soient x, X deux variables; en dénotant par les grandes lettres de l'alphabet le résultat de l'échange entre x et X, considérons l'intégrale double de M. Fubini :

$$(1)\quad I = \int_0^1\int_0^1 \varphi(x, X)\,dx\,dX = \int_0^1\int_0^1 [ay^2 + 2byy' + cy'^2 + 2eyY' + 2\lambda yY + 2\mu y'Y' + AY^2 + 2BYY' + CY'^2 + 2EYy']\,dx\,dX,$$

où dans la forme quadratique placée sous le signe intégral les a, b, c, e sont les fonctions de x et de X, lesquelles en vertu de la convention admise se dénoteront par A, B, C, E quand on échange x et X entre eux; λ et μ selon la supposition sont symétriques par rapport à x et X et tous les coefficients a, b, c, e possèdent les dérivées premières bornées.

Cela étant, changeons le problème posé par M. Fubini et formulé de la manière que voici : on cherche une telle fonction $y(x)$ finie et continue avec sa première dérivée qui sur les frontières $x = 0$, $x = 1$ prend les valeurs données d'avance M et N et annule la première variation de l'intégrale I.

A cet effet supposons la forme quadratique sous le signe de l'intégrale I définie et positive et effectuons le changement de variables

$$y = x(N - M) + M + u(x); \qquad Y = X(N - M) + M + U(X)$$

à l'aide duquel les conditions frontières seront

$$(2)\quad \begin{cases} u(0) = 0, & u(1) = 0, \\ U(0) = 0, & U(1) = 0. \end{cases}$$

L'intégrale double en question se présentera sous la forme

$$(3)\quad I = \int_0^1\int_0^1 [au^2 + 2buu' + cu'^2 + 2euU' + 2\lambda uU + 2\mu u'U' + AU^2 + 2BUU' + CU'^2 + 2EUu' + Fu + HU]\,dx\,dX + \text{const.},$$

où F et H ont des significations bien déterminées.

Pour trouver la fonction qui rend l'intégrale I « stationnaire » procédons conformément aux idées de W. Ritz convenablement adaptées au cas actuel.

Soit

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \psi_3(x),\ \ldots,\ \psi_n(x),\ \ldots$$

un système infini de fonctions d'une variable réelle, vérifiant les conditions, dont on a parlé dans la Préface, et soit

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

une suite des nombres à déterminer d'après les conditions du problème de minimum.

En posant

$$(4) \qquad u_m = \sum_1^m a_i \psi_i(x), \qquad U_m = \sum_1^m a_i \Psi_i(X),$$

dénotons par I_m le résultat de la substitution dans I, au lieu de $u(x)$ et $U(X)$, des séries terminées (4); en déterminant alors les coefficients inconnus a_i par les règles usuelles du Calcul différentiel on aboutit au système suivant d'équations linéaires :

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{\partial I_m}{\partial a_n} = \int_0^1\!\!\int_0^1 \Big\{ & 2a u_m \psi_n + 2b\left[u_m \frac{d\psi_n}{dx} + u'_m \psi_n\right] + 2e\left[\psi_n U'_m + u_m \frac{d\Psi_n}{dX}\right] \\ & + 2\lambda\,[u_m \Psi_m + U_m \psi_n] + 2\mu\left[u'_m \frac{d\Psi_n}{dX} + U_m \frac{d\psi_n}{dx}\right] + 2A\,U_m \Psi_n \\ & + 2B\left[U_m \frac{d\Psi_n}{dX} + \Psi_n U'_m\right] + 2C U'_m \frac{d\Psi_n}{dx} + 2E\left[U_m \frac{d\psi_n}{dx} + u'_m \Psi_n\right] \\ & + F\psi_n + H\Psi_n \Big\}\, dx\, dX = 0. \end{aligned}$$

Puisque la partie quadratique de I_m est définie positive (d'après la supposition admise), on s'assure aisément que les équations (5) sont résolubles et donnent pour les coefficients cherchés a_i un système de valeurs uniquement déterminées, car le déterminant du système (5) est différent de zéro comme discriminant d'une forme quadratique définie positive.

Le système (5) peut revêtir une autre forme, utile pour la suite. A cet effet, en désignant par $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ des nombres arbitraires, posons :

$$w_m = \sum_{i=1}^{m} A_i \psi_i; \qquad W_m = \sum_{i=1}^{i=m} A_i \Psi_i.$$

En multipliant chacune des équations du système (5) respectivement par un A_i correspondant et faisant la somme, on obtient :

$$(6)\quad \int_0^1\int_0^1 \Big\{ 2au_m w_m + 2b\left[u_m\frac{dw_m}{dx} + u'_m w_m\right] + 2cu'_m\frac{dw_m}{dx} + 2e\left[w_m U'_m + u_m\frac{dW_m}{dX}\right]$$
$$+ 2\lambda[u_m W_m + w_m U_m] + 2\mu\left[u'_m\frac{dW_m}{dX} + U'_m\frac{dw_m}{dx}\right] + 2AU_m W_m$$
$$+ 2B\left[U_m\frac{dW_m}{dX} + W_m U'_m\right] + 2CU'_m\frac{dW_m}{dX} + 2E\left[U_m\frac{dw_m}{dx} + u'_m W_m\right]$$
$$+ Fw_m + HW_m\Big\}dx\,dX = 0.$$

Cela étant, posons

$$u = u_{m+n} - u_m;\qquad U = U_{m+n} - U_m$$

et formons la différence de deux valeurs non minimées de I :

$$(7)\quad I_{m+n} - I_m = \int_0^1\int_0^1 \Big\{ a(u+u_m)^2 + 2b(u+u_m)(u'+u'_m) + c(u'+u'_m)^2$$
$$+ 2e(u+u_m)(U'+U'_m) + 2\lambda(u+u_m)(U+U_m)$$
$$+ 2\mu(u'+u'_m)(U'+U'_m) + A(U+U_m)^2 + 2B(U'+U'_m)(U+U_m)$$
$$+ C(U'+U'_m)^2 + 2E(U+U_m)(u'+u'_m) + F(a+u_m) + H(U_m+U)$$
$$- au_m^2 - 2bu_m u'_m - cu'^2_m - 2eu_m U'_m - 2\lambda u_m U_m - 2\mu u'_m U'_m - AU^2_m$$
$$- 2BU'_m U_m - CU'^2_m - 2EU_m u'_m - Fu_m - HU_m\Big\}dx\,dX;$$

or pour la valeur de l'indice égale à $(m+n)$ le système (6) s'écrit comme suit :

$$\int_0^1\int_0^1 \Big\{ 2a(u+u_m)w_{m+n} + 2b\left[(u+u_m)\frac{dw_{m+n}}{dx} + (u'+u'_m)w_{m+n}\right]$$
$$+ 2c(u'+u'_m)\frac{dw_{m+n}}{dx} + 2e\left[w_{m+n}(U'+U'_m) + (u+u_m)\frac{dW_{m+n}}{dX}\right]$$
$$+ 2\lambda[(u+u_m)W_{m+n} + w_{m+n}(U+U_m)] + 2\mu\left[(u'+u'_m)\frac{dW_{m+n}}{dX} + (U'+U'_m)\frac{dw_{m+n}}{dx}\right]$$
$$+ 2A(U+U_m)w_{m+n} + 2B\left[(U+U_m)\frac{dW_{m+n}}{dX} + W_{m+n}(U'+U'_m)\right]$$
$$+ 2C(U'+U'_m)\frac{dW_{m+n}}{dX} + 2E\left[(U+U_m)\frac{dw_{m+n}}{dx} + (u'+u'_m)W_{m+n}\right]$$
$$+ Fw_{m+n} + HW_{m+n}\Big\}dx\,dX = 0$$

et, vu que les coefficients A_i sont arbitraires, on peut y poser :

$$u = w_{m+n};\qquad U = W_{m+n}.$$

En faisant cette substitution et en combinant le résultat obtenu avec l'expression pour la différence $I_{m+n} - I_m$, on s'assure aisément que :

$$(8) \quad \begin{aligned} I^0_{m+n} - I^0_m = -\int_0^1\int_0^1 \Big\{ & a(u_{m+n} - u_m)^2 + 2b(u_{m+n} - u_m)(u'_{m+n} - u'_m) \\ & + c(u'_{m+n} - u'_m)^2 + 2e(u_{m+n} - u_m)(U'_{m+n} - U'_m) \\ & + 2\lambda(u_{m+n} - u_m)(U_{m+n} - U_m) + 2\mu(u'_{m+n} - u'_m)(U'_{m+n} - U'_m) \\ & + A(U_{m+n} - U_m)^2 + 2B(U_{m+n} - U_m)(U'_{m+n} - U'_m) + C(U'_{m+n} - U'_m)^2 \\ & + 2E(U_{m+n} - U_m)(u'_{m+n} - u'_m) \Big\} \, dx\, dX, \end{aligned}$$

égalité en laquelle l'indice zéro signifie que les conditions de minimum sont déjà prises en considération.

Vu la supposition faite à propos de la forme quadratique sous le signe de l'intégrale, toutes les intégrales I^0_i sont bornées inférieurement et puisque, en vertu de la relation (8), elles diminuent à mesure que leur indice augmente, on peut affirmer qu'elles tendent vers une limite déterminée; donc pour toute valeur n et pour m suffisamment grand :

$$(9) \qquad |I^0_{m+n} - I^0_m| < \varepsilon,$$

où ε est un nombre arbitrairement petit.

En se souvenant que φ, selon l'hypothèse, est une forme définie positive, nous ferons la supposition plus générale que φ est positive et différente de zéro quand l'une au moins des quantités u', U' est différente de zéro; cette propriété aura lieu évidemment après la soustraction de c et C d'une quantité positive α, suffisamment petite, c'est-à-dire :

$$(10) \qquad \varphi > \alpha(u'^2 + U'^2).$$

Cela posé, la combinaison des relations (8), (9), (10) donne l'inégalité évidente :

$$(11) \qquad \int_0^1\int_0^1 \left\{ (u'_{m+n} - u'_m)^2 + (U'_{m+n} - U'_m)^2 \right\} dx\, dX < \eta,$$

où $\eta = \dfrac{\varepsilon}{\alpha}$.

En remarquant que les u_i dépendent seulement de x et les U_i de X, on tire de (11) les inégalités suivantes :

$$(12) \qquad \int_0^1 \left[\frac{du_{m+n}}{dx} - \frac{du_m}{dx}\right]^2 dx < \eta; \qquad \int_0^1 \left[\frac{dU_{m+n}}{dX} - \frac{dU_m}{dX}\right]^2 dX < \eta,$$

d'où, au moyen de l'inégalité bien connue de Bouniakowsky-Schwarz, on obtient aisément grâce aux conditions frontières vérifiées par u_i et U_i :

$$(13) \qquad |u_{m+n} - u_m| < \sqrt{\eta}; \qquad |U_{m+n} - U_m| < \sqrt{\eta},$$

et ceci prouve la convergence uniforme de $u_m(x)$ vers une fonction continue $u(x)$ et par conséquent de $U_m(X)$ vers $U(X)$.

Pour trancher la question de l'existence des dérivées de cette fonction limite $u(x)$ et pour former l'équation intégro-différentielle vérifiée par $u(x)$ partons du système (6), d'où au moyen d'intégration par parties, on obtient après quelques réductions et en utilisant les conditions frontières la relation suivante :

$$(14) \quad \int_0^1\int_0^1 \frac{dw_m}{dx}\Big[-2\int_0^x au_m\,dx + 2\int_0^x b'_x u_m\,dx + 2cu'_m + 2U_m\int_0^x e'_X\,dx$$
$$+ 2EU_m - 2U_m\int_0^x \lambda\,dx - 2U_m\mu'_X - \int_0^x F\,dx\Big]\,dx\,dX$$
$$+\int_0^1\int_0^1 \frac{dW_m}{dX}\Big[-2\int_0^X AU_m\,dX + 2\int_0^X B'_X U_m\,dX + 2CU'_m + 2u_m\int_0^X E'_x\,dX$$
$$+ 2eu_m - 2u_m\int_0^X \lambda\,dX - 2u_m\mu'_x - \int_0^X H\,dX\Big]\,dx\,dX = 0.$$

Or, en vertu d'une propriété de l'intégrale, dont le champ d'intégration est un carré, on peut en échangeant les variables x et X représenter la seconde intégrale de (14) sous la forme :

$$(15) \quad \int_0^1\int_0^1 \frac{dw_m}{dx}\Big[-2\int_0^x au_m\,dx + 2\int_0^x b'_x u_m\,dx + 2cu'_m + 2U_m\int_0^x e'_X\,dx$$
$$+ 2EU_m - 2U_m\int_0^x \lambda\,dx - 2U_m\mu'_X - \int_0^x \lambda\,dx\Big]\,dx\,dX.$$

En introduisant donc la condition supplémentaire pour les $\psi_i(x)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, et exprimant que non seulement (2), mais encore les conditions frontières :

$$(16) \qquad \frac{d\psi_i(x)}{dx} = 0 \quad (\text{pour} \quad x = 0; \quad x = 1),$$

sont réalisées, on tire aisément de (14) au moyen de l'intégration par parties et en prenant en considération (15) :

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{d^2w_m}{dx^2}\Big\{-2\int_0^x\int_0^x au_m dx^2+2\int_0^x\int_0^x b'_x u_m dx^2+2cu_m$$
$$-2\int_0^x c'_x u_m dx+2\mathrm{U}_m\int_0^x\int_0^x e'_x dx^2+2\mathrm{U}_m\int_0^x \mathrm{F}dx-2\mathrm{U}_m\int_0^x\int_0^x \lambda\, dx^2$$
$$-2\mathrm{U}_m\int_0^x \mu'_x dx-\frac{1}{2}\int_0^x\int_0^x(\mathrm{F}+h)\,dx^2\Big\}\,dx\,d\mathrm{X}=0.$$

En effectuant la première intégration par rapport à X on tire de là :

$$(17)\quad \int_0^1\frac{d^2w_m}{dx^2}\Big\{-2\int_0^x\int_0^x u_m\Big[\int_0^1 a d\mathrm{X}\Big]dx^2+2\int_0^x u_m\Big[\int_0^1 b'_x d\mathrm{X}\Big]dx$$
$$+2u_m\Big[\int_0^1 cd\mathrm{X}\Big]-2\int_0^x u_m\Big[\int_0^1 c'_x d\mathrm{X}\Big]dx+2\int_0^x\int_0^x\Big[\int_0^1 e'_x\mathrm{U}_m d\mathrm{X}\Big]dx^2$$
$$+2\int_0^x\Big[\int_0^1 \mathrm{E}\mathrm{U}_m d\mathrm{X}\Big]dx-2\int_0^x\int_0^x\Big[\int_0^1 \mathrm{U}_m\lambda d\mathrm{X}\Big]dx^2$$
$$-\int_0^x\Big[\int_0^1 \mathrm{U}_m\mu'_x d\mathrm{X}\Big]dx-\int_0^x\int_0^x\Big[\int_0^1\frac{\mathrm{F}+h}{2}d\mathrm{X}\Big]dx^2\Big\}dx=0.$$

Dans cette expression, on peut évidemment passer à la limite sous le signe intégral, car d'après ce qu'on a démontré plus haut les u_m convergent uniformément vers une fonction limite et, les coefficients A_i étant arbitraires, on peut les choisir de sorte que :

$$\lim_{m\to\infty} w_m=w;\qquad \lim_{m\to\infty}\frac{dw_m}{dx}=\frac{dw}{dx};\qquad \lim_{m\to\infty}\frac{d^2w_m}{dx}=\frac{d^2w}{dx},$$

où w, tout en restant arbitraire, est pourtant deux fois dérivable. La seconde dérivée est finie et continue et doit s'annuler avec sa première dérivée aux points frontières.

En passant donc à la limite dans (17) et en se rappelant un lemme, établi par M. Hilbert([1]) et déjà utilisé par W. Ritz dans ses recherches, on obtient aisément

$$-2\int_0^x\int_0^x u\Big[\int_0^1 a d\mathrm{X}\Big]dx^2+2\int_0^x u\Big[\int_0^1 b'_x d\mathrm{X}\Big]dx+2u\Big[\int_0^1 cd\mathrm{X}\Big]$$
$$-2\int_0^x u\Big[\int_0^1 c'_x d\mathrm{X}\Big]dx+2\int_0^x\int_0^x\Big[\int_0^1 e'_x\mathrm{U}d\mathrm{X}\Big]dx^2$$
$$+2\int_0^x\Big[\int_0^1\mathrm{EU}d\mathrm{X}\Big]dx-2\int_0^x\int_0^x\Big[\int_0^1\mathrm{U}\lambda d\mathrm{X}\Big]dx^2-\int_0^x\Big[\int_0^1\mathrm{U}\mu'_x d\mathrm{X}\Big]dx$$
$$-\int_0^x\int_0^x\Big[\int_0^1\frac{\mathrm{F}+h}{2}d\mathrm{X}\Big]dx^2=\mathrm{A}+\mathrm{B}x.$$

([1]) HILBERT, « Ueber das Dirichletsche Prinzip ». *Math. Annalen*, t. LIX.

Ensuite, par un raisonnement bien simple, on s'assure que $u(x)$ vérifie l'équation intégro-différentielle suivante :

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du(x)}{dx}\right] + q(x)u(x) + \int_0^1 \mathrm{K}(x, \mathrm{X})\,\mathrm{U}(\mathrm{X})\,d\mathrm{X} = f(x), \tag{18}$$

où l'on a posé :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{F}+h}{2}\,d\mathrm{X} = f(x); \qquad 2[e'_{\mathrm{X}} - \lambda - \mu''_{x,\mathrm{X}} + \mathrm{E}'_x] = \mathrm{K}(x, \mathrm{X});$$

$$2\int_0^1 c\,d\mathrm{X} = p(x); \qquad -2\left[\int_0^1 a\,d\mathrm{X} + \int_0^1 b'_x\,d\mathrm{X}\right] = q(x).$$

Remarquons en passant que c'est aux équations intégro-différentielles du type (18) que se réduit le problème de l'intégration de l'équation intégro-différentielle aux dérivées partielles :

$$\int_0^1 \mathrm{K}(x, \mathrm{X})\frac{\partial^2 w(\mathrm{X}, t)}{\partial t^2}\,d\mathrm{X} + q(x)\,w(x, t) + \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial w(x, t)}{\partial x}\right] = \mathrm{F}(x, t)$$

quand on y applique la méthode de séparation des variables.

Ainsi, par exemple, dans le cas où :

$$\mathrm{F}(x, t) = \mathrm{B}(x)\sin m(t+a),$$

il suffit de poser :

$$w(x, t) = u(x)\sin m(t+a).$$

En résumant le contenu de ce paragraphe, on peut dire que le problème de la minimisation de l'intégrale double (1) conduit à la suite minimisante u_m, qui converge (pour $m \to \infty$) uniformément vers une fonction limite u possédant deux premières dérivées et vérifiant l'équation intégro-différentielle (18).

Or, en réalité, c'est le problème pour ainsi dire inverse, le problème de l'intégration d'une équation intégro-différentielle donnée, qui a une importance bien plus considérable et nous le traiterons dans la suite à l'aide des autres méthodes.

§ 2. Dans leurs Mémoires, M. Fubini(1) et M. L. Lichtenstein(2) se sont occupés du système intégro-différentiel suivant :

---

(1) « Alcuni nuovi problemi di calcolo delle variazioni ». *Annali di Matematica*, série 3, vol. 20.

(2) Lichtenstein, « Ueber eine Integro-Differentialgleichung und die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach deren Eigenfunktionen. Festschrift Schwarz, Springer 1914 ».

$$(19)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left[p(x)\dfrac{du(x)}{dx}\right] + q(x)\,u(x) + \displaystyle\int_0^1 K(x,y)\,u(y)\,dy = L(u) = f(x), \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

au point de vue de l'existence de la solution.

Proposons-nous de développer ici pour le système (19) la méthode de l'intégration approchée, basée sur la minimisation du carré moyen de l'erreur, c'est-à-dire sur le problème de minimum posé pour l'intégrale :

$$(20)\qquad \int_0^1 [L(u) - f(x)]^2\,dx.$$

La méthode, ci-après exposée, présuppose bien entendu certaines conditions restrictives imposées aux données du problème et explicitées dans la suite.

Prenons la suite minimisante sous la forme des séries terminées

$$u_m = \sum_{i=1}^{m} a_i^{(m)} \psi_i(x),$$

procédant suivant les fonctions $\psi_i(x)$ aisément calculables et vérifiant les conditions frontières de (19); on peut prendre pour $\psi_i(x)$, dans le cas actuel, par exemple les sinus.

Pour la détermination des coefficients inconnus $a_i^{(m)}$ on aura, d'après les règles usuelles du Calcul différentiel, le système suivant d'équations linéaires :

$$(21)\qquad \int_0^1 [L(u_m) - f]\,L(\psi_i)\,dx = 0; \qquad (\text{où}\quad i \leqslant m)$$

évidemment résolubles par rapport aux $a_i^{(m)}$ dans le cas actuel.

D'autre part, en supposant le théorème d'existence de l'intégrale de (19) préalablement démontré (ce qu'on a le droit dans le cas considéré d'autant plus qu'il s'agit d'élaborer une méthode de l'intégration approchée et non un théorème de l'existence de la solution), on aura aussi :

$$\int_0^1 [L(u) - f]\,L(\psi_i)\,dx = 0.$$

Donc

$$(22)\qquad \int_0^1 [L(u - u_m)]\,L(\psi_i)\,dx = 0; \qquad (i \leqslant m)$$

en multipliant les équations du système (22) respectivement par $A_i^{(m)} - a_i^{(m)}$ et en faisant la somme par rapport à l'indice i, on tire aisément de (22)

$$\int_0^1 [L(u-u_m)]\, L(U_m - u_m)\, dx = 0, \tag{23}$$

en dénotant par $U_m = \sum_1^m A_i^{(m)} \psi_i(x)$, la somme d'ordre m de M. L. Féjèr (ou celle de M. D. Jackson), obtenue en appliquant au développement de l'intégrale de (19) le procédé de sommation de M. L. Féjèr (ou de M. D. Jackson). On peut prendre aussi pour U_m la somme de Fourier d'ordre m.

Cela étant remarquons que

$$U_m - u_m = u - u_m + U_m - u.$$

Donc de (23) on tire :

$$\int_0^1 [L(u-u_m)]^2\, dx = \int_0^1 L(u-u_m)\, L(U_m - u)\, dx.$$

Ensuite, en vertu de l'inégalité bien connue de Bouniakowsky-Schwarz, on obtient aisément :

$$\int_0^1 [L(u-u_m)]^2\, dx < \varepsilon_m, \tag{24}$$

où $\lim_{m\to\infty} \varepsilon_m = 0$ et l'ordre de ε_m peut être fixé en correspondance avec les restrictions imposées aux coefficients de l'équation intégro-différentielle donnée (19); ainsi par exemple si $p(x)$, $q(x)$, $K(x, y)$, $f(x)$ vérifient par rapport à x la condition de Lipschitz d'ordre un, l'ordre de ε_m, comme il est facile de s'en assurer, sera égal à $1 : m$, d'après les théorèmes connus sur l'approximation des fonctions.

Pour cela remarquons, que si $f(x)$ est dérivable et vérifie les conditions frontières susdites, alors (voir par exemple Stekloff : « Problèmes fondamentaux de la Physique mathématique » [en russe]; Pétersbourg, t. I, p. 233, 1922) :

$$S_n(f) < \frac{M^2}{\tau_0 n^2} \quad \text{où} \quad M^2 = \int_0^1 [f'(x)]^2\, dx \quad \text{et} \quad \tau_0 = \text{const. positive indépendante de } n.$$

Si $f(0) \neq 0$; $f(1) \neq 0$ prenons les fonctions $F(x) = \alpha x^2$ et $F_1(x) = \alpha_1(1-x)^2$ où α et α_1 sont déterminés respectivement d'après les conditions

$$F(\varepsilon) = f(\varepsilon) \quad \text{et} \quad F_1(1-\varepsilon) = f(1-\varepsilon),$$

(ε est un nombre positif donné d'avance) et introduisons la fonction $\varphi(x)$ de celle de M. Stekloff au moyen des conditions :

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \mathrm{F}(x) \text{ pour } & 0 \leqslant x \leqslant \varepsilon;\\
\varphi(x) &= f(x) \quad \text{»} & \varepsilon \leqslant x \leqslant 1-\varepsilon;\\
\varphi(x) &= \mathrm{F}_1(x) \quad \text{»} & 1-\varepsilon \leqslant x \leqslant 1;
\end{aligned}$$

de sorte que $\varphi(x)$ est dérivable et vérifie les conditions frontières. Il suffit alors en s'appuyant sur la formule

$$\mathrm{S}_n(f) < 2\mathrm{S}_n(\varphi) + 2\int_0^1 [f(x) - \varphi(x)]^2\, dx$$

de répéter textuellement les raisonnements de M. Stekloff (voir *ibid.* § 16 et § 17 du Chapitre X) en prenant aussi $\varepsilon = \frac{1}{n}$, pour s'assurer que

$$\mathrm{S}_n(f) < \frac{k^2}{n}, \quad k^2 = \text{const.},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Au moyen de l'intégration par parties on a :

$$(25)\quad \int_0^1 \mathrm{L}(u-u_m)[u_m - u]\, dx = \int_0^1 \left\{ p(x)\left[\frac{d(u-u_m)}{dx}\right]^2 - q(x)[u-u_m]^2 \right\} dx$$
$$- \int_0^1\int_0^1 \mathrm{K}(x,y)\,[u(x) - u_m(x) \times [u(y) - u_m(y)]\, dx\, dy.$$

Donc si $p(x) \geqslant p_1 > 0$; $q(x) \leqslant 0$ et si le noyau $\mathrm{K}(x, y)$ est défini négatif d'après la terminologie de la théorie des équations intégrales, on tire de (25)

$$\int_0^1 p(x)\left[\frac{d(u-u_m)}{dx}\right]^2 dx < \sqrt{\varepsilon_m}\,|u-u_m|$$

d'où

$$(26)\qquad |u-u_m| < \frac{\sqrt{\varepsilon_m}}{p_1}.$$

Ceci prouve la convergence du procédé et donne en même temps le moyen d'estimer l'ordre de l'erreur commise, quand on s'arrête en m^{me} approximation.

En utilisant les inégalités (24) et (26) on peut aisément, à l'aide de (25), fixer l'ordre de

$$\int_0^1 [r'_m(x)]^2\, dx \quad \text{et} \quad \int_0^1 [r''_m(x)]^2\, dx$$

où l'on a posé :

$$r'_m(x) = \frac{du(x)}{dx} - \frac{du_m(x)}{dx}; \qquad r''_m(x) = \frac{d^2u(x)}{dx^2} - \frac{d^2u_m(x)}{dx^2}.$$

Il suffit alors d'utiliser l'identité évidente :

$$[r'_m(\xi)]^2 = [r'_m(x)]^2 - 2\int_\xi^x r'_m(x)\, r''_m(x)\, dx,$$

(où x et ξ sont deux points quelconques de $(0, 1)$) pour obtenir au moyen de l'inégalité de Bouniakowsky-Schwarz :

$$[r'_m(\xi)]^2 < \int_0^1 [r'_m(x)]^2\, dx + 2\sqrt{\int_0^1 [r'_m(x)]^2\, dx \int_0^1 [r''_m(x)]^2\, dx}\,.$$

De là on conclut, d'un coup, non seulement la convergence de la première dérivée des suites minimisantes vers la dérivée de l'intégrale de l'équation intégro-différentielle donnée, mais en même temps on peut aussi fixer l'ordre de $\dfrac{du}{dx} - \dfrac{du_m}{dx}$.

Les restrictions imposées aux données du problème dépendent essentiellement du mode de la démonstration et peuvent être levées dans une certaine mesure; — nous nous étendrons plus longuement sur ce sujet dans la suite, en nous bornant d'énoncer, d'après ce qui vient d'être dit, le théorème suivant : *Si* $p(x) \geqslant p_1 > 0$; $q(x) \leqslant 0$, *avec* $K(x, y)$ *définie négative, on peut, pour l'intégration approchée du système intégro-différentiel* (19), *appliquer la méthode basée sur la minimisation de l'intégrale* (20) *et cette méthode, qu'il est légitime de dénommer « des moindres carrés », donne non seulement le procédé convergent, mais permet aussi dans bien des cas d'estimer l'ordre de l'erreur commise, dans l'évaluation de l'intégrale et de sa dérivée, quand on s'arrête en* m^{me} *approximation.*

Cette méthode donne lieu à différentes généralisations et se prête bien aux calculs numériques, comme il est facile de s'en assurer. C'est pourquoi la méthode des moindres carrés prendra, ce nous semble, sa place légitime parmi les autres méthodes pour l'intégration approchée des équations différentielles et intégro-différentielles de la Physique mathématique.

§ 3. Dans son Mémoire fondamental, déjà mentionné, W. Ritz traite les équations différentielles aux dérivées ordinaires, provenant de l'annulation de la première variation de l'intégrale, sous le signe de laquelle se trouve la forme quadratique définie et positive, donnée à l'avance. Par l'application de son procédé Ritz démontre que les fonctions de la suite « minimante » par lui formée, convergent vers une fonction continue, dérivable et vérifiant en effet une certaine équation différentielle du second ordre, dont les coefficients dépendent évidemment de la forme quadratique, placée sous le signe de l'intégrale à varier.

Or à côté de ce problème, conformément à ce qui a été dit dans la Préface, une importance toute particulière appartient au problème de l'intégration de l'équation différentielle donnée à l'avance. Nous croyons donc être utile au lecteur en esquissant en peu de mots ici (sauf à de légers changements près) la démonstration de la convergence du procédé, telle que son célèbre auteur l'a conçue, car cela fera mieux ressortir la portée des changements et des généralisations exposées dans les paragraphes suivants.

En nous bornant pour la brièveté d'exposition, comme partout dans la suite, aux cas les plus simples, considérons l'équation différentielle du second ordre[1], adjointe à elle-même avec les conditions frontières les plus simples aussi, c'est-à-dire le système différentiel :

$$(27)\qquad \begin{cases} C(x)\dfrac{d^2y}{dx^2} + B(x)\dfrac{dx}{dy} + A(x)y = f(x); \quad \text{où}\quad C'(x) = B(x); \quad C(x) > 0; \quad A(x) \leqslant 0, \\ y(a) = y(b) = 0. \end{cases}$$

Au moyen de l'intégration par parties, on s'assure immédiatement que l'intégrale à minimer dans le cas actuel est :

$$(28)\qquad I = \int_a^b \left[\frac{C(x)}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{A(x)}{2}y^2 + f(x)\,y\right] dx.$$

Les coefficients inconnus de la suite minimante

$$y_m = \sum_{i=1}^{m} a_i^{(m)} \psi_i(x),$$

(où $[\psi_i(x)]$ est un système orthogonal, normal et fermé de fonctions aisément calculables vérifiant les conditions frontières (27), comme par exemple les sinus) se

(1) Au moyen de la multiplication par un facteur convenable toute équation du second ordre sous des hypothèses assez larges peut être rendue adjointe à elle-même.

déterminent, pour chaque valeur de m, par un système d'équations linéaires par rapport aux $a_i^{(m)}$:

$$(29) \quad \frac{\partial I_m}{\partial a_n^{(m)}} = \int_a^b \left[C(x) \frac{dy_m}{dx} \frac{d\psi_n}{dx} - A(x) y_m \psi_n + f(x) \psi_n \right] dx = 0, \quad (n \leqslant m)$$

où $I_m = I(y_m)$; le déterminant du système (29) est différent de zéro comme le discriminant d'une forme quadratique, définie et positive d'après les suppositions faites; donc le système (29) est résoluble et la solution est unique.

En posant alors

$$\eta_m = \sum_{i=1}^{m} A_i^{(m)} \psi_i(x),$$

où $A_i^{(m)}$ sont des coefficients arbitraires, on tire de (29) :

$$(30) \qquad \int_a^b \left[C(x) \frac{dy_m}{dx} \cdot \frac{d\eta_m}{dx} - A(x) y_m \eta_m + f(x) \eta_m \right] dx = 0$$

d'où en posant $\eta_{m+n} = Y = y_{m+n} - y_m$:

$$(31) \qquad \int_a^b \left[C(x) \frac{d(y_m + Y)}{dx} \frac{dY}{dx} - A(x)(y_m + Y) Y + f(x) Y \right] dx = 0.$$

En formant alors la différence de deux valeurs de I de l'indice $m+n$ et m, on a

$$(32) \quad 2[I^0_{m+n} - I^0_m] = -\int_a^b \left\{ C(x) \left[\frac{d(y_{m+n} - y_m)}{dx} \right]^2 - A(x) [y_{m+n} - y_m]^2 \right\} dx,$$

où l'indice zéro signifie que les conditions de minimum sont déjà prises en considération.

De (32) on voit que les I^0_i diminuent avec l'augmentation de l'indice i, donc si on démontre l'existence de la borne inférieure de I, on conclut alors de (32) la possibilité de trouver un nombre M assez grand afin que pour $m > M$ et pour toute valeur de n

$$(33) \qquad |I^0_{m+n} - I^0_m| < \varepsilon,$$

d'où, vu le signe de $C(x)$, l'inégalité de Bouniakowsky-Schwarz et les conditions frontières imposées aux $\psi_n(x)$, on tire

$$|y_{m+n} - y_m| = \left| \int_a^x \frac{d(y_{m+n} - y_m)}{dx} dx \right| \leqslant \sqrt{b-a} \cdot \sqrt{\int_a^b \left[\frac{d(y_{m+n} - y_m)}{dx} \right]^2 dx} < \sqrt{b-a} \cdot \eta; \quad \lim_{m \to \infty} \eta = 0$$

ce qui prouve la convergence uniforme de y_m pour $m \to \infty$ vers une fonction continue.

L'existence de la borne inférieure de I peut être démontrée par la voie indiquée par W. Ritz lui-même, en partant de l'intégrale de (27), vérifiant les conditions de Cauchy et toujours existante; or il est plus simple au moyen de l'intégration par parties de s'assurer que le problème de minimum en question est identique à celui de rendre stationnaire l'intégrale :

$$(34) \qquad \int_a^b \left\{ \left[\sqrt{C(x)}\,\frac{dy}{dx} + \frac{\int_d^x f(x)\,dx}{\sqrt{C(x)}} \right]^2 - A(x)\,y^2 \right\} dx,$$

où la fonction sous le signe intégral est positive.

Pour prouver que la limite des suites minimantes ainsi formées, c'est-à-dire $\lim\limits_{m\to\infty} y_m = y$ vérifie l'équation différentielle donnée (27) il suffit d'intégrer par parties dans la relation (30), en choisissant les nombres arbitraires A_i de sorte que

$$(35) \qquad \begin{gathered} \lim_{n\to\infty} \eta_{1n} = \eta_1; \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{d\eta_{1n}}{dx} = \frac{d\eta_1}{dx}; \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{d^2\eta_{1n}}{dx^2} = \frac{d^2\eta_1}{dx^2}; \\ \eta_1(a) = \eta_1(b) = \frac{d\eta_1(x)}{dx}_{x=a} = \frac{d\eta_1(x)}{dx}_{x=b} = 0. \end{gathered}$$

En passant alors à la limite sous le signe de l'intégrale, ce qui est permis vu la relation (35), on obtient aisément :

$$\int_a^b \frac{d^2\eta_1}{dx^2} \left\{ -C(x)\,y + \int_c^x y\frac{dC(x)}{dx}\,dx + \int_d^x \int_e^x [f(x) - A(x)\,y]\,dx^2 \right\} dx = 0,$$

d'où en vertu d'un lemme du Calcul de variations déjà précédemment utilisé on trouve :

$$(36) \qquad C(x)\,y = \int_c^x y\frac{dC(x)}{dx}\,dx + \int_d^x \int_e^x [f(x) - A(x)\,y]\,dx^2 + C_1 + C_2 x,$$

où C_1 et C_2 sont des constantes; or la partie droite de (36) possède une dérivée, donc $y(x)$ est dérivable; en différentiant une seconde fois on s'assure que y existe et que l'équation différentielle (27) donnée se trouve vérifiée, c. q. f. d.

Chemin faisant il n'est pas inutile de remarquer que, si les fonctions $\psi_n(x)$ suivant lesquelles on développe la solution cherchée sont les fonctions « fondamentales » (« singulières ») correspondant au problème, les coefficients des développements de Ritz se détermineront individuellement et l'expression générale de ces coefficients, comme je l'ai démontré en mon article cité dans la Préface, sera identique à celle qu'on obtient par l'application de la méthode fondamentale de la physique mathé-mathématique créée par les travaux de A. Schwarz, E. Picard, H. Poincaré, V. Stekloff, S. Zaremba; d'ici découle que la démonstration séparée de la convergence du procédé de W. Ritz en ce cas là est superflue.

§ 4. Il n'est pas dénué d'intérêt, ce nous semble, de présenter autrement la méthode de W. Ritz en s'inspirant des recherches de M. G. Fubini, ce que nous ferons encore en peu de mots.

En introduisant la notation :

$$\mathrm{II}(u, v) = \int_a^b \left[\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} - \mathrm{A}(x)\,uv + fv\right] dx$$

il suffit de considérer la relation évidente

$$\mathrm{I}(u + kv) = \mathrm{I}(u) + 2k\,\mathrm{II}(u, v) + k^2\mathrm{I}_1(v),$$

où

$$\mathrm{I}(u) = \int_a^b \left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - \mathrm{A}(x)\,u^2 + 2fu\right] dx; \qquad \mathrm{I}_1(v) = \int_a^b \left[\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 - \mathrm{A}(x)\,v^2\right] dx,$$

pour s'assurer que

$$(37) \qquad |\mathrm{II}(u, v)| \leqslant \sqrt{\mathrm{I}_1(v)}\,.\,\sqrt{\mathrm{I}(u) - d}$$

si

$$\mathrm{I}(u + kv) \geqslant d.$$

En faisant alors successivement $u = y_{m+n}$, $u = y_m$ on obtient aisément :

$$\int_a^b \left\{ \frac{d(y_{m+n} - y_m)}{dx}\,.\,\frac{dv}{dx} - \mathrm{A}(x)\,[y_{m+n} - y_m]\,v \right\} dx \,| \leqslant \sqrt{\mathrm{I}_1(v)}\,.\,\left[\sqrt{\mathrm{I}(y_{m+n}) - d} + \sqrt{\mathrm{I}(y_m) - d}\right];$$

pour $v = y_{m+n} - y_m$ on en tire :

$$(38) \qquad \sqrt{\mathrm{I}_1(y_{m+n} - y_m)} \leqslant \left[\sqrt{\mathrm{I}(y_{m+n}) - d} + \sqrt{\mathrm{I}(y_m) - d}\right].$$

Or si les coefficients inconnus $a_i^{(m)}$ de y_m sont déterminés d'après les conditions de minimum et si $\mathrm{I}(y_m) = d_m$, il est clair que les d_m ne peuvent augmenter avec l'augmentation de leur indice; d'autre part d'après (34) la suite $[d_m]$ est bornée inférieurement, donc les d_m pour $m \to \infty$ tendent vers une limite d et il est facile de voir que d est en même temps la borne inférieur de I, car il est aisé de se convaincre que la supposition du contraire conduit à une contradiction : en effet si

$$z(x) = \sum_{1}^{\infty} a_i \psi_i(x)$$

d'après la supposition est telle que $I(z) < d$, alors vu la convergence uniforme de la série on peut prendre n assez grand pour que

$$I(z_n) < d \leqslant d_n, \qquad \left[z_n = \sum_{1}^{n} a_i \psi_i(x) \right].$$

La contradiction est manifeste.

Par conséquent on obtient de (38) :

$$I_1(y_{m+n} - y_m) < \varepsilon_m, \qquad \lim_{m \to \infty} \varepsilon_m = 0,$$

d'où par le raisonnement détaillé au paragraphe précédent on s'assure que $\lim\limits_{m \to \infty} y_m = y$.

Cette manière de présenter la convergence du procédé de W. Ritz est basée sur les recherches[1] antérieures à celles de Ritz et présente ses avantages, vu la généralité qu'elle comporte au point de vue du choix des suites minimantes.

§ 5. Malgré son incontestable importance la méthode de W. Ritz tant appliquée ces derniers temps aux divers problèmes de la Physique mathématique et de la science de l'ingénieur ne donne pas néanmoins un moyen d'apprécier le degré d'exactitude obtenu quand on s'arrête à une approximation comptant un nombre donné des termes. Ainsi pour juger de la valeur pratique de la méthode, on l'applique même quelquefois à l'étude des problèmes déjà résolus autrement et on compare les résultats[2].

Pour parer à ce défaut (qui présente un réel inconvénient) de la méthode de W. Ritz, l'étude du degré effectif d'approximation s'impose et nous l'abordons ici, en suivant le mode d'exposition adopté dans notre Note des *Comptes Rendus*, citée dans la Préface et en traitant pour la brièveté le cas du système différentiel (27), car

---

(1) Fubini, *Ibid.*

(2) M. Paschoud, « Sur l'application de la méthode de W. Ritz à l'étude de l'équilibre élastique d'une plaque carrée mince (Thèse) ». Paris, G. Villars, 1914, p. 33.

il va de soi que les considérations ci-dessous développées, à de légers changements près, s'appliquent immédiatement aux cas plus généraux.

Soient : $y(x)$ l'intégrale du système (27), dont l'existence est assurée d'après la méthode usuelle de la Physique mathématique, $y_m(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i^{(m)} \psi_i(x)$ les suites minimantes de la méthode de W. Ritz ; $Y_m(x) = \sum_{i=1}^{m} A_i^{(m)} \psi_i(x)$ les sommes d'ordre m de Fourier ou celles formées à l'aide des méthodes de sommation connues (par exemple celle de M. Féjèr ou celle de M. D. Jackson) avec les fonctions $\psi_i(x)$ aisément calculables (par exemple les sinus) pour l'approximation de l'intégrale susdite $y(x)$, de sorte qu'on peut assigner l'ordre non seulement de $|y - Y_m|$, mais encore de $\int_0^1 \left[\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{d^2 Y_m}{dx^2}\right]^2 dx$, quand $\frac{d^2 y}{dx^2}$ vérifie certaines conditions restrictives supplémentaires (par exemple celle de Lipschitz) et ceci sûrement aura lieu, si les coefficients du système différentiel donné vérifient ces conditions.

Cela étant, présentons au moyen de l'intégration par parties les conditions de minimum dans la méthode de W. Ritz sous la forme :

$$\int_a^b \left\{ \frac{d}{dx}\left[C(x)\frac{d(y-y_m)}{dx}\right] + A(x)(y-y_m) \right\} \psi_n(x)\, dx = 0, \quad \text{où} \quad n \leqslant m,$$

Donc en multipliant par $a_n^{(m)} - A_n^{(m)}$ et en faisant la somme des expressions ainsi obtenues pour $n = 1, 2, 3, \ldots, m$, on en tire :

$$\int_a^b \left\{ \frac{d}{dx}\left[C(x)\frac{d(y-y_m)}{dx}\right] + A(x)(y-y_m) \right\} (Y_m - y_m)\, dx = 0.$$

Or $Y_m - y_m = Y_m - y + y - y_m$; donc en intégrant par parties on obtient aisément moyennant les conditions frontières imposées à $\psi_i(x)$:

$$\int_a^b \left\{ C(x)\left[\frac{d(y-y_m)}{dx}\right]^2 - A(x)(y-y_m)^2 \right\} dx = \int_a^b \left\{ \frac{d}{dx}\left[C(x)\frac{d(Y_m - y)}{dx}\right] + A(x)(Y_m - y) \right\} (y_m - y)\, dx.$$

De là, vu le signe de $A(x)$, l'inégalité de Bouniakowsky-Schwarz et la remarque faite plus haut au sujet de l'approximation de y et de $\frac{d^2 y}{dx^2}$ respectivement au moyen de Y_m et de $\frac{d^2 Y_m}{dx^2}$, on obtient immédiatement

$$|y - y_m| < K\varepsilon_m,$$

où K est une constante numérique. On a $\lim\limits_{m \to \infty} \varepsilon_m = 0$ et de plus l'ordre de ε_m peut être fixé en correspondance avec les conditions restrictives imposées à $f(x)$, $A(x)$, $C(x)$; ainsi, par exemple, si la condition de Lipschitz entre en jeu, l'ordre de ε_n est égale(1) à $1 : n$.

Ce qui précède donne aussi une autre manière de démontrer la convergence du procédé de W. Ritz et peut être généralisé dans diverses directions.

§ 6. On peut indiquer un procédé, dont l'application permet d'étendre les méthodes de minimum aux équations non identiques à leur adjointe; à cet effet bornons-nous, pour la brièveté et pour montrer seulement la marche à suivre à l'équation du second ordre, réductible à l'équation adjointe à elle-même au moyen de la multiplication par un facteur convenable; le raisonnement reste le même pour les équations d'ordre supérieur et la méthode s'étend par conséquent au cas général.

Pour montrer comment l'expression différentielle non identique à sa propre adjointe peut être obtenue en considérant la variation d'une intégrale convenablement construite il suffit dans le cas de l'équation du second ordre :

$$L(u) = C(x)\frac{d^2u}{dx^2} + B(x)\frac{du}{dx} + A(x)\,u = 0.$$

de considérer la variation de l'intégrale :

$$S(u, v) = \int_a^b vL(u)\,dx = \int_a^b R(u, v)\,dx$$

sous l'hypothèse des conditions frontières

$$u(a) = u(b) = v(a) = v(b) = 0. \tag{39}$$

En intégrant alors par parties on s'assure que :

$$\delta S(u, v) = \int_a^b [\delta v L(u) + \delta u M(v)]\,dx$$

où $M(v)$ est l'expression différentielle adjointe à $L(u)$; les quantités δv et δu étant arbitraires, on tire immédiatement de l'égalité $\delta S(u, v) = 0$:

$$L(u) = 0; \qquad M(v) = 0. \tag{40}$$

(1) Remarquons en passant, que ce nombre peut être augmenté au moyen de certaines transformations comme nous le verrons dans la suite.

Pour montrer la liaison de ceci avec les problèmes de minimum plus généraux, prenons le cas simple en lequel, sous le signe de l'intégrale, se trouve une expression

$$T(u, v) = P(u) + Q(v) + \varepsilon Z(u, v),$$

où $P(u)$, $Q(v)$ sont des formes quadratiques, $Z(u, v)$ une forme bilinéaire en u, v et leurs dérivées. Pour ε suffisamment petit la forme $T(u, v)$ est définie positive, si les formes $P(u)$, $Q(v)$ le sont et en faisant varier l'intégrale $\int_a^b T(u, v)\,dx$ on arrive au système :

$$p(u) + \varepsilon L(u) = 0;$$
$$q(v) + \varepsilon M(v) = 0;$$

où $L(u)$ et $M(v)$ s'obtiennent respectivement de la variation des intégrales

$$\int_a^b P(u)\,dx, \qquad \int_a^b Q(v)\,dx.$$

En prenant alors la forme du second degré

$$T(u, v, u'v') = au^2 + 2buu' + cu'^2 + dv^2 + 2evv' + fv'^2 + 2guv + 2hu'v + 2iu'v' + 2kuv' + 2lu + 2mv,$$

toujours positive en correspondance avec les suppositions faites à propos de $P(u)$' $Q(v)$, ε, posons-nous le problème de trouver les fonctions u, v vérifiant les conditions frontières (39) et rendant $\int_a^b T(u, v, u', v')\,dx$ stationnaire. En mettant alors en jeu l'appareil analytique du paragraphe 1 convenablement adapté au cas actuel, on s'assure aisément que les limites des suites minimantes

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(n)}\psi_i(x); \qquad v_n = \sum_{i=1}^{n} b_i^{(n)}\psi_i(x)$$

vérifient le système d'équations différentielles qu'il est facile de former, en étendant de la sorte le champ d'application de la méthode de W. Ritz. Bornons-nous pour le moment à cette simple indication sous la réserve de revenir dans les Chapitres suivants au problème inverse, le problème de l'intégration du système des équations différentielles données.

§ 7. Vu l'importance de la question de l'intégration des équations différentielles non linéaires, un intérêt tout particulier s'attache au problème de leur intégration approchée.

Ainsi considérons, à titre d'exemple, l'équation différentielle non linéaire

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}f(x, y) = 0 \quad \text{où} \quad f(x, y) > A = \text{const.} \tag{41}$$

avec les conditions frontières :

$$y(a) = y(b) = 0. \tag{42}$$

L'intégration de l'équation (41) avec les conditions (42) au point de vue du problème de minimum posé pour l'intégrale

$$I(y) = \int_a^b \left[\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + f(x, y) \right] dx \tag{43}$$

a été l'objet des recherches de M. L. Lichtenstein(¹) et de M. L. Tonelli(²). Proposons-nous ici d'appliquer à l'intégration approchée du système différentiel en question la méthode de démonstration déjà utilisée dans le paragraphe 5 et qui permet d'estimer l'ordre de l'erreur commise en s'arrêtant en m^{me} approximation.

Les coefficients inconnus $a_i^{(m)}$ intervenant dans les expressions des suites minimantes se trouvent d'après les conditions usuelles qui rendent l'intégrale (43) stationnaire. On a le système :

$$\frac{\partial I(y_m)}{\partial a_n^{(m)}} = \int_a^b \left[2\frac{dy_m}{dx} \cdot \frac{d\psi_n}{dx} + \frac{\partial f(x, y_m)}{\partial x_m} \psi_n \right] dx = 0, \qquad n \leqslant m \tag{44}$$

non linéaire dans le cas actuel ; néanmoins vu la supposition faite à propos de $f(x, y)$, $I(y_m)$ pour toutes les valeurs réelles de $a_i^{(m)}$ possède une borne inférieure et cette dernière sera atteinte pour les valeurs finies de $a_i^{(m)} (i \leqslant m)$, car $I(y_m)$ devient infini positif même si l'une des quantités $a_i^{(m)}$ l'est. Par conséquent le système (44) possède une solution, dont la détermination approximative se fait par la voie algébrique usuelle. Pour la démonstration de l'unicité de la solution de (44) il est nécessaire, bien entendu, d'émettre les suppositions complémentaires convenables à propos de $f(x, y)$(³). En posant $Y = y_{m+n} - y_m$, présentons la différence de deux valeurs non minimées de I sous la forme :

(¹) Lichtenstein, « Ueber einige Existenzprobleme der Variationsrechnung ». *Journal de Crelle*, 1914.

(²) Tonelli, « Sulle soluzioni periodiche nel Calcolo delle Variazioni. » *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, 1915.

(³) Il est aisé de s'assurer, que la condition $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0$, c'est-à-dire la condition (49) est suffisante.

$$(45)\qquad I(y_{m+n}) - I(y_m) = \int_a^b \left\{ 2\frac{dY}{dx}\cdot\frac{dy_m}{dx} + \left[\frac{dY}{dx}\right]^2 \right.$$

$$\left. + Y\frac{\partial f}{\partial y_m} + \frac{1}{1.2}Y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y_m^2} + \frac{1}{1.2.3}Y^3\frac{\partial^3 f}{\partial y_m^3} + \ldots + \frac{Y^k}{k!}\frac{\partial^k f}{\partial y_m}[y_m + \theta(Y - y_m)] \right\} dx.$$

En multipliant chacune des équations du système (44) respectivement par les coefficients arbitraires $A_i^{(m)}$ on obtient après addition :

$$(46)\qquad \int_a^b \left[2\frac{dy_m}{dx}\cdot\frac{d\eta_m}{dx} + \frac{\partial f(x, y_m)}{\partial y_m}\eta_m \right] dx = 0,$$

où

$$\eta_m = \sum_{i=1}^{m} A_i^{(m)}\psi_i.$$

En prenant dans (46) l'indice égal à $(m+n)$ et, les coefficients $A_i^{(m)}$ étant arbitraires, $\eta_{m+n} = Y$, on en tire l'égalité,

$$\int_a^b \left\{ 2\frac{d[Y + y_m]}{dx}\cdot\frac{dY}{dx} + \frac{\partial f(x, Y + y_m)}{\partial(Y + y_m)}\cdot Y \right\} dx = 0,$$

dont la combinaison avec (45) donne par exemple pour $k = 5$ et $\dfrac{\partial^5 f}{\partial y^5} = 0$, c'est-à-dire si

$$(47)\qquad f(x, y) = A(x) + B(x)y + C(x)y^2 + D(x)y^3 + E(x)y^4,$$

l'expression suivante pour la différence $I(y_{m+n}) - I(y_m)$:

$$(48)\quad I^0(y_{m+n}) - I^0(y_m) = -\int_a^b \left\{ \left[\frac{dY}{dx}\right]^2 + \frac{Y^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y_m^2} + \frac{Y^3}{3}\frac{\partial^3 f}{\partial y_m^3} + \frac{Y^4}{8}\frac{\partial^4 f}{\partial y_m^4} \right\} dx,$$

où l'indice zéro indique que les conditions de minimum sont déjà prises en considération.

L'expression sous le signe de l'intégrale (48) sera positive, si par exemple, les conditions restrictives suivantes sont satisfaites :

$$(49)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0; \qquad \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - \frac{1}{9}\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} > 0$$

(la seconde de ces conditions est la conséquence de la première quand $f(x, y)$ est de la forme (47)). Cela étant, on s'assure aisément par un raisonnement analogue à celui qui a été déjà utilisé dans le paragraphe 3, que les suites minimantes $y_m(x)$ convergent uniformément vers une fonction continue $y(x)$ vérifiant l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0. \tag{50}$$

Il est évident que, dans la marche du raisonnement, la condition restrictive $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 0$ aurait pu être remplacée par une autre bien plus générale : $\frac{\partial^n f}{\partial y^n} = 0$, réalisée par exemple dans le cas où $f(x, y)$ serait un polynôme du degré $(n-1)$ par rapport à y; les conditions restrictives (49) se changent alors en correspondance.

Plaçons-nous à présent au point de vue du paragraphe 5 en cherchant à estimer l'ordre de $|y - y_m|$, où $y(x)$ est l'intégrale de (50) vérifiant les conditions frontières (42) et existant en vertu des recherches de M. L. Lichtenstein déjà mentionnées; $y_m(x)$ où $m = 1, 2, 3, \ldots$, sont les suites minimantes déterminées d'après les conditions propres à rendre l'intégrale (43) stationnaire, lesquelles peuvent revêtir, comme il est aisé de le voir, la forme suivante :

$$\int_a^b \left\{ \frac{d^2(y - y_m)}{dx^2} - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x, y_m)}{\partial y_m}\right] \right\} \psi_n\, dx = 0; \qquad n \leqslant m$$

c'est-à-dire

$$\int_a^b \left\{ \frac{d^2(y - y_m)}{dx^2} - \frac{1}{2}(y - y_m)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left[y_m + \theta(y - y_m)\right] \right\} \psi_n\, dx = 0.$$

En répétant alors l'analyse du paragraphe 5 on en tire, si $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0$ et d'autre part $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < A = \text{const.}$:

$$|y - y_m| = \int_a^x \frac{d(y - y_m)}{dx}\, dx \leqslant \int_a^x \left|\frac{d(y - y_m)}{dx}\right| dx \tag{51}$$

$$\leqslant \sqrt{(b-a)} \cdot \sqrt{\int_a^b \left[\frac{d(y - y_m)}{dx}\right]^2 dx} < \sqrt{(b-a)} \cdot \sqrt{|y - y_m|} \cdot \sqrt{\int_a^b \left\{ \left|\frac{d^2(Y_m - y)}{dx^2}\right| + A\,|Y_m - y| \right\} dx}$$

où les Y_m sont les sommes de M. L. Féjèr (ou de M. D. Jackson) d'ordre m formées pour le développement trigonométrique de l'intégrale de (50).

De (51) on tire immédiatement :

$$|y - y_m| < K \varepsilon_m,$$

où $K =$ const. et $\lim\limits_{m \to \infty} \varepsilon_m = 0$; l'ordre de ε_m peut être fixé en correspondance avec les restrictions imposées à $f(x, y)$; si la condition de Lipschitz entre en jeu l'ordre de ε_m sera $1 : m$.

Ceci présente une autre manière de demontrer la convergence de l'algorithme de W. Ritz pour les équations non linéaires du type (50). Il va de soi que par la même méthode on peut traiter dans bien des cas le problème simple du calcul des variations, en imposant, bien entendu, à la fonction sous le signe de l'intégrale à faire varier les conditions restrictives correspondantes.

§ 8. Revenons à présent à la méthode des moindres carrés telle qu'elle a été exposée dans le paragraphe 2 et proposons-nous de l'appliquer à l'équation générale du second ordre :

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right) + (q + \lambda k)y - f = L(y) - f = 0, \tag{52}$$

où p, q, k, f sont les fonctions réelles de x, sujettes aux conditions restrictives énumérées dans la suite, mais telles, que d'après les théories bien connues de la Physique mathématique il existe une intégrale de (52) vérifiant les conditions frontières

$$y(a) = y(b) = 0 \tag{53}$$

excepté pour une série des valeurs discrètes de λ, racines d'une certaine fonction entière (transcendante de Freedholm).

En dénotant comme auparavant par $y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{(n)} \psi_i$ les suites minimantes formées pour la minimisation de l'intégrale

$$\int_a^b [L(y) - f]^2 \, dx,$$

on s'assure aisément en répétant textuellement l'analyse utilisée dans le paragraphe 2, que

$$\int_a^b [L(y - y_n)]^2 \, dx < \varepsilon_n,$$

où l'ordre de ε_n peut être fixé en correspondance avec les conditions restrictives imposées aux coefficients de (52).

Cela étant, au moyen de l'intégration par parties, on obtient :

$$(54)\quad \int_a^b L(y-y_n)[y_n-y]\,dx = \int_a^b \left\{ p\left[\frac{d(y-y_n)}{dx}\right]^2 - (q+\lambda k)[y-y_n]^2 \right\} dx.$$

Donc si $p(x) \geqslant p_1 > 0$ et $q+\lambda k \leqslant 0$, on tire aisément de (54), que

$$|y-y_n| < K\sqrt{\varepsilon_n}, \qquad (\text{où } K = \text{const.})$$

et ceci prouve non seulement la convergence du procédé des moindres carrés mais donne aussi, ce qui est essentiel, *le moyen d'estimer l'ordre de l'erreur commise, quand on s'arrête en n^{me} approximation.* La même remarque que dans le paragraphe 2 peut être faite au sujet de la convergence de $\frac{dy_n}{dx}$ vers $\frac{dy}{dx}$ (pour $n \to \infty$) et à propos de la possibilité d'indiquer l'ordre de $\left|\frac{dy}{dx} - \frac{dy_n}{dx}\right|$.

L'ordre de l'erreur commise peut être élevé en imposant des conditions restrictives supplémentaires aux coefficients de (52), chose claire d'après ce qui précède.

Les restrictions imposées aux données du problème dépendent essentiellement du mode de la démonstration et peuvent être levées dans une certaine mesure; ainsi par exemple pour le cas : $|q+\lambda k| \leqslant \alpha$, on tire de (54) :

$$(55)\quad \int_a^b p\left[\frac{d(y-y_n)}{dx}\right]^2 dx < \int_a^b (q+\lambda k)[y-y_n]^2\,dx + \sqrt{\int_a^b [L(y-y_n)]^2\,dx \int_a^b [y-y_n]^2\,dx}$$

d'où l'on obtient aisément, si $p(x) \geqslant p_1 > 0$:

$$p_1 \int_a^b [y-y_n]^2\,dx < \alpha(b-a)\int_a^b [y-y_n]^2\,dx + (b-a)\sqrt{\int_a^b [L(y-y_n)]^2\,dx}\sqrt{\int_a^b [y-y_n]^2\,dx};$$

donc

$$\sqrt{\int_a^b [y-y_n]^2\,dx}\,\{p_1 - \alpha(b-a)\} < (b-a)\sqrt{\int_a^b [L(y-y_n)]^2\,dx}.$$

---

(1) C'est-à-dire plus petite que la première valeur singulière du paramètre, comme il est facile de s'en assurer.

Par conséquent, si la valeur du paramètre λ est telle que[1]

$$p_1 - \alpha(b-a) > 0,$$

la convergence du procédé sera assurée pourvu que $|q + \lambda k| \leqslant \alpha$.

Par cette voie on s'assure immédiatement que, dans le cas où

$$L(y) = \frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda A(x)\, y,$$

la convergence est assurée pour

$$\lambda < \frac{1}{(b-a)\displaystyle\int_a^b |A(x)|\, dx}.$$

Avant de passer à l'étude du cas général, nous ferons une remarque concernant l'amélioration de la convergence de y_n vers la solution cherchée y de l'équation différentielle donnée. A cet effet notons, que la méthode de moindres carrés, telle qu'elle a été exposée ci-dessus, représente, en fin de compte, une méthode de sommation spéciale, appliquée au développement de y en série de sinus et aboutissant à un procédé convergent; il est donc possible pour améliorer la convergence et atteindre aussi à la convergence des secondes dérivées d'appliquer à y_n d'autres procédés de sommation déjà connus, par exemple celui de Riemann, revenant à l'étude de

$$\frac{1}{4\eta^2} \int_{x+\eta}^{x+\eta} \int_{x+\eta}^{x+\eta} y_n\, dx^2,$$

celui de la moyenne, c'est-à-dire $\displaystyle\frac{1}{2\eta}\int_{x+\eta}^{x+\eta} y_n\, dx$, celui de M. L. Féjèr, de M. D. Jackson. etc.[1].

Pour traiter le cas général, c'est-à-dire le cas où la condition $q + \lambda k \leqslant 0$ n'est pas réalisée, on peut procéder de bien des manières. En regardant de près la formule (55), sur laquelle est basée la démonstration de la convergence, on s'assure que tout revient à la limitation de

$$\int_a^b (q + \lambda k)\, [y - y_n]^2\, dx$$

---

(1) Ceci fera l'objet d'un article détaillé de mon ami Prof. Dr M. Krawtchouk, à qui j'ai communiqué en manuscrit le travail actuel. Dans son travail l'ordre de ε_m sera apprécié au moyen des considérations élémentaires n'empruntant rien à la théorie de fermeture.

et pour atteindre ce but on peut partir, par exemple, de l'identité évidente :

$$(56)\qquad \int_a^b \{(\lambda_m-\lambda)k[y-y_n]+\mathrm{L}(y-y_n)\}\varphi_m\,dx=0;\quad m=1,2,3,\ldots,\infty,$$

où λ_m et φ_m sont respectivement les valeurs et les fonctions fondamentales relatives à l'équation (52), donc λ_m et φ_m sont telles que

$$\frac{d}{dx}\left[p\frac{d\varphi_m}{dx}\right]+(q+\lambda_m k)\varphi_m=0.$$

Or pour la valeur déterminée de n, $y-y_n$ est une fonction dérivable s'annulant aux frontières a et b, donc en multipliant les équations (56) respectivement par A_m $\left(\text{où } y-y_n=\sum_1^\infty \mathrm{A}_m\varphi_m\right)$ et en faisant la somme on en tire :

$$(57)\qquad \int_a^b k[y-y_n]^2\,dx=\sum_1^\infty\frac{1}{(\lambda_m-\lambda)}\int_a^b[\mathrm{L}(y-y_n)]\mathrm{A}_m\varphi_m\,dx\leqslant\sqrt{\sum_{m=1}^\infty\frac{1}{(\lambda_m-\lambda)^2}\sum_{m=1}^\infty \mathrm{A}_m^2\int_a^b\frac{[\mathrm{L}(y-y_n)]^2}{k}\,dx}.$$

Par conséquent, si la valeur de λ diffère de la plus proche valeur singulière au moins de β et si $k\geqslant k_1>0$, on obtient de (57) :

$$(58)\qquad \int_a^b k[y-y_n]^2\,dx<\frac{\mathrm{M}\varepsilon_n}{k_1},\qquad (\text{où}\quad \mathrm{M}=\text{const.})$$

car la série $\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_m^2}$ est convergente, ce qui est bien connu d'après la théorie de l'équation (52).

De (58) on tire aussi la limitation de

$$\int_a^b (q+\lambda k)[y-y_n]^2\,dx,$$

ce qui permettra, d'après la remarque faite plus haut, d'estimer l'ordre de l'erreur commise en s'arrêtant en n^{me} approximation dans l'application de la méthode des moindres carrés à l'équation différentielle donnée[1].

---

[1] Par une application raisonnée de l'équation de fermeture, un de mes élèves M. N. Bogoliouboff a traité aussi ce cas, en élaborant le mode de raisonnement qui pour la méthode de Ritz donne la possibilité d'estimer l'erreur pour les dérivées d'ordre supérieur de l'intégrale de l'équation différentielle donnée; son travail sera publié prochainement.

§ 9. — Les conditions de minimum dans la méthode de W. Ritz et dans la méthode des moindres carrés peuvent revêtir, comme nous l'avons vu, respectivement les formes suivantes :

$$\int_a^b \mathrm{L}(y - y_n)\,\varphi_m\,dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b \mathrm{L}(y - y_n)\,\mathrm{L}(\varphi_m)\,dx = 0, \qquad (m = 1, 2, \ldots, n).$$

Il est clair donc qu'on pourra élaborer toute une série de méthodes d'intégration approchée des équations différentielles en déterminant les coefficients de $y_n = \sum_1^n a_i \varphi_i$ d'après les conditions

$$\int_a^b \mathrm{L}(y - y_n)\,\mathrm{M}(\varphi_m)\,dx = 0, \qquad (m \leqslant n) \tag{59}$$

où $\mathrm{M}(\varphi_n)$ est un opérateur (différentiel si on veut) linéaire par rapport à φ_n, permettant d'établir la convergence de y_n vers y pour $n \to \infty$ et vérifiant la condition

$$\int_a^b \mathrm{L}(z)\,\mathrm{M}(z)\,dx > 0, \tag{60}$$

suffisante comme il est facile de s'en apercevoir pour la résolubilité du système (59) par rapport aux a_i.

A titre d'exemple prenons

$$\mathrm{L}(y) = \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + q(x)\,y(x); \qquad \mathrm{M}(y) = \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + r(x)\,y(x).$$

Alors pour que la condition (60) soit remplie il suffit par exemple d'admettre que

$$q + r < 0; \qquad \frac{1}{2}\frac{d^2(q + r)}{dx^2} + qr > 0, \tag{61}$$

et ceci, vu l'arbitraire de $r(x)$ peut être réalisé de bien des façons pour une même fonction $q(x) < 0$ donnée. Il est aisé de voir que les conditions pour la détermination de a_i peuvent revêtir la forme suivante :

$$\int_a^b \mathrm{L}(y - y_n)\,\mathrm{M}(y - y_n)\,dx = \int_a^b \mathrm{L}(y - y_n)\,\mathrm{M}(y - \mathrm{Y}_n)\,dx, \tag{62}$$

où Y_n sont les sommes d'ordre n, formées à l'aide des procédés de sommation connus (par exemple celui de M. L. Féjèr ou celui de M. D. Jackson) pour l'intégrale $y(x)$ de l'équation différentielle donnée $\mathrm{L}(y) = f(x)$.

De (62) on tire aisément, en ayant égard aux conditions (61) :

$$\int_a^b \left[\frac{d^2(y-y_n)}{dx^2}\right]^2 dx < \sqrt{\int_a^b [M(Y_n - y)]^2\, dx} \left\{ \sqrt{\int_a^b \left[\frac{d^2(y-y_n)}{dx^2}\right]^2 dx} + [\max.\, |q|] \sqrt{\int_a^b [y-y_n]^2\, dx} \right\};$$

$$\int_a^b [y-y_n]^2\, dx < \frac{1}{\left[\min.\left|\frac{1}{2}\frac{d^2(r+q)}{dx^2} + qr\right|\right]} \cdot \sqrt{\int_a^b [M(Y_n - y)]^2\, dx} \left\{ \sqrt{\int_a^b \left[\frac{d^2(y-y_n)}{dx^2}\right]^2 dx} \right.$$

$$\left. + [\max.\, |q|] \sqrt{\int_a^b [y-y_n]^2\, dx} \right\}.$$

On a ensuite

$$\int_a^b \left[\frac{d^2(y-y_n)}{dx^2}\right]^2 dx < K\varepsilon_n, \tag{63}$$

où $K = \text{const.}$; l'ordre de petitesse de ε_n peut être fixé en correspondance avec les conditions restrictives imposées aux $q(x)$ et $f(x)$.

Or y et y_n vérifient les conditions frontières $y(a) = y(b) = y_n(a) = y_n(b) = 0$; donc, par l'emploi de la fonction de Green, on s'assure que :

$$|y - y_n| < \frac{1}{8}\sqrt{\int_a^b \left[\frac{d^2(y-y_n)}{dx^2}\right]^2 dx}.$$

En combinant ceci avec la formule (63) on obtient

$$|y - y_n| < K_1\sqrt{\varepsilon_n}, \qquad (K_1 = \text{const. numérique}).$$

Donc *non seulement la convergence du procédé est établie mais aussi l'estimation de l'erreur qu'on commet par cette méthode en s'arrêtant en n^{me} approximation.*

Cette méthode mérite, ce nous semble, d'être mentionnée et développée, étant donné la possibilité d'utiliser pour les différents buts l'arbitraire que comporte l'expression de l'opérateur $M(y)$.

Il va sans dire que les raisonnements précédents peuvent être généralisés dans diverses directions et que les conditions restrictives imposées aux $q(x)$ et $r(x)$ dépendent, dans une large mesure, du mode d'exposition.

(*à suivre.*)