ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

A. BUHL

Sur les formules fondamentales de l'électromagnétisme et de la gravifique

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 16 (1924), p. 1-28

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1924_3_16__1_0>

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

SUR LES FORMULES FONDAMENTALES DE L'ELECTROMAGNÉTISME ET DE LA GRAVIFIQUE

PAR M. A. BUHL

QUATRIÈME MÉMOIRE

Je me propose, dans ce Mémoire, non pas de donner un grand nombre de résultats nouveaux mais, au contraire, après avoir regardé *en arrière* dans la Science classique, de montrer combien ses méthodes peuvent être rapprochées aisément des méthodes einsteiniennes.

Je suis retourné aux *Vorlesungen über Dynamik* de Jacobi, aux admirables développements qu'en a tirés Henri Poincaré et j'ai repris de même les *Lezioni di Geometria differenziale* de L. Bianchi. Pour peu que l'on se place à un point de vue convenable, en s'aidant de cet algorithme admirable qu'est le Calcul différentiel absolu, la Géométrie, la Mécanique, la Physique classiques et leur commune et récente géométrisation, tout cela rentre dans un même cadre sans qu'on n'aperçoive plus le moindre prétexte à dire que les plus neuves de choses aussi bien encadrées produisent un bouleversement dans les plus anciennes.

Une exposition des plus intéressantes, qu'on peut d'ailleurs considérer comme un admirable modèle, est le Mémoire de M. E. Cartan *Sur les Variétés à Connexion affine et la Théorie de la Relativité généralisée* (Annales de l'École Normale, 1923).

M. Cartan reprend la gravitation newtonienne (p. 335) et remarque qu'elle est essentiellement contenue dans l'annulation des mineurs de la matrice

$$\begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{matrix}$$

et dans l'équation de Poisson

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = -4\pi\rho .$$

Que cette idée soit adoptée comme point de départ, que l'on considère des matrices plus générales, telles que

$$\begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x_i} & \frac{\partial}{\partial x_j} & \frac{\partial}{\partial x_k} & \dots \\ M_{i\dots} & M_{j\dots} & M_{k\dots} & \dots \\ i & j & k & \dots \end{matrix} .$$

et l'électromagnétisme apparaît. On peut alors remarquer que les mineurs de telles matrices se conservent en y remplaçant les ∂ par des D plus généraux d'où des dérivées en D qui conduisent au parallélisme de Levi-Civita, aux propriétés spatiales métriques et, en particulier, à cette forme de la loi de gravitation d'Einstein : *Les expressions*

$$\begin{vmatrix} \frac{D}{Dx_i} & \frac{D}{Dx_j} \\ \frac{DP^j}{Dx_i} & \frac{DP^j}{Dx_j} \end{vmatrix} \quad \text{ou bien} \quad \begin{vmatrix} \frac{D}{Dx_i} & \frac{D}{Dx_j} \\ \frac{DP^i}{Dx_i} & \frac{DP^i}{Dx_j} \end{vmatrix}$$

sont nulles quel que soit le vecteur P. Ceci équivaut, en effet, à $G_{ij} = 0$ (*Voir* le Mémoire précédent et *L'Enseignement mathématique,* 1923, pp. 281 et 283).

Mais ce ne sera pas tout. Dans les matrices précédentes les variables de dérivation changent d'indices quand on passe d'une colonne à l'autre. Considérons, au contraire, des matrices

$$\begin{matrix} \frac{\partial A}{\partial x_j} & \frac{\partial B}{\partial x_j} & \frac{\partial C}{\partial x_j} & \dots \\ \frac{\partial A}{\partial y_j} & \frac{\partial B}{\partial y_j} & \frac{\partial C}{\partial y_j} & \dots \end{matrix}$$

où ce sont les fonctions à dériver qui changent. En annulant leurs mineurs on tombera immédiatement sur les équations canoniques de Jacobi-Hamilton. Et voilà les *Vorlesungen* qui s'accordent de la manière la plus simple et la plus suggestive avec la méthode einsteinienne.

Sans doute il y a là une réciprocité qui n'est plus à signaler; toutes les études sur le problème de Pfaff[1], les formules stokiennes, les équations aux variations de Poincaré, les invariants intégraux[2], etc... tout cela, dis-je, unit les deux ordres de propriétés que je dis ici être *stokiennes* et *antistokiennes*. Mais, en fait de synthèse simple et immédiate, il restait peut-être encore à jeter un coup d'œil d'ensemble, relativement très élémentaire, sur la Mécanique céleste de Lagrange, Laplace, Cauchy, Poincaré et à ne dérouler rien d'autre que les résultats fondamentaux de ces illustres savants mais avec une facilité qui surprend et récompense quand on a fait le premier effort nécessaire à l'étude de l'analyse einsteinienne.

Henri Poincaré montrait autant de génie qu'Einstein et dans un domaine analytique analogue quand il faisait, dans les développements lagrangiens du mouvement planétaire troublé, le changement de variables qui éliminait les termes séculaires!

* * *

Parmi les exposés qui me semblent plus ou moins analogues à ceux faits ici, je signalerai d'abord les *Éléments de Géométrie des Espaces* de M. G. Darmois (Annales de Physique, dixième série, tome L, 1924, pp. 5-88). Comme dans le travail de M. P. Dienes, signalé dans le précédent Mémoire, une séparation nette est faite entre les méthodes fondamentales du Calcul différentiel absolu et l'introduction des considérations métriques. On doit également à M. Darmois une exposition particulièrement nette de la théorie des géodésiques et la dérivation tensorielle est d'une symétrie tout aussi remarquable que celle qui s'appuie sur le symbolisme des déterminants.

Il faut signaler aussi les *Leçons de Géométrie vectorielle préliminaires à l'étude de la Théorie d'Einstein* de M. G. Bouligand (Paris, Vuibert, 1924). Par une analyse à la fois concise et élégante, M. Bouligand a repris l'étude des formes différentielles quadratiques fondamentales sur une surface, par une méthode qui a un remarquable cachet d'uniformité quant aux conditions de coexistence de ces formes.

Dans mon propre travail je ne veux voir, à l'origine de tous les résultats, que des formules stokiennes. Là encore je suis d'accord avec M. Cartan écrivant : Au fond, les lois de la Dynamique des milieux continus et celles de l'Électromagnétisme s'expriment par des équations analogues à la formule de Stokes ou à cette formule généralisée (*loc. cit.*, p. 329).

---

(1) E. GOURSAT. *Leçons sur le Problème de Pfaff* (Paris, J. Hermann, 1922).
(2) E. CARTAN. *Leçons sur les Invariants intégraux* (Paris, J. Hermann, 1922).

Avec de tels procédés ne risque-t-on pas de vouloir cataloguer trop de phénomènes sous des formules que certains pourront toujours critiquer malgré leur immense généralité et leur non moins grande élégance? N'allons-nous pas ressembler aux Grecs dont toute l'Astronomie était circulaire et sphérique parce que le cercle et la sphère leur semblaient présenter des propriétés fondamentales d'harmonie et d'esthétique? Il semble que des philosophes et des historiens de la Science aient déjà perçu la possibilité de cette critique et y aient répondu par avance.

Le regretté Pierre Boutroux, en terminant son ouvrage sur *Les Principes de l'Analyse mathématique* (Paris, A. Hermann, 1919) n'hésite pas à dire qu'il semble que l'âme du mathématicien redevienne hellène (t. II, p. 460). Les citations de ce genre pourraient sans doute être abondantes et je n'ai point le loisir de les recueillir en ce moment; je signalerai simplement, comme visant les théories d'Einstein, un livre de M. Arnold Reymond dont *L'Enseignement Mathématique* vient de publier quelques extraits (1923). D'après ceux-ci l'attitude einsteinienne n'est pas, au fond, différente de celle des philosophes grecs; nous ne savons ce qu'est la vérité mais nous nous consolons en jouissant de l'harmonie.

CHAPITRE PREMIER

Formules antistokiennes. Equations canoniques.

[**1**] *Forme stokienne et forme antistokienne.* — Les formules stokiennes rencontrées dans les précédents Mémoires nous ont notamment familiarisés avec des matrices de la forme

$$
(1) \qquad \left\{ \begin{matrix} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u}{\partial x_3} & \cdots \\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v}{\partial x_2} & \dfrac{\partial v}{\partial x_3} & \cdots \end{matrix} \right.
$$

auxquelles correspondent des identités telles que

$$
(2) \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u}{\partial x_3} \\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v}{\partial x_2} & \dfrac{\partial v}{\partial x_3} \end{vmatrix} = 0.
$$

Dans un ordre d'idées analogue, mais avec une symétrie de variables ou d'indices pour ainsi dire inverse, nous allons considérer maintenant des matrices du type

$$
(3) \qquad \left\{ \begin{matrix} \dfrac{\partial A}{\partial x_j} & \dfrac{\partial B}{\partial x_j} & \dfrac{\partial C}{\partial x_j} & \cdots \\[2mm] \dfrac{\partial A}{\partial y_j} & \dfrac{\partial B}{\partial y_j} & \dfrac{\partial C}{\partial y_j} & \cdots \end{matrix} \right.
$$

auxquelles correspondra l'identité facile à vérifier

$$
(4) \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial A}{\partial x_i}\dfrac{\partial}{\partial y_i} - \dfrac{\partial A}{\partial y_i}\dfrac{\partial}{\partial x_i} & \dfrac{\partial B}{\partial x_i}\dfrac{\partial}{\partial y_i} - \dfrac{\partial B}{\partial y_i}\dfrac{\partial}{\partial x_i} & \dfrac{\partial C}{\partial x_i}\dfrac{\partial}{\partial y_i} - \dfrac{\partial C}{\partial y_i}\dfrac{\partial}{\partial x_i} \\[2mm] \dfrac{\partial A}{\partial x_j} & \dfrac{\partial B}{\partial x_j} & \dfrac{\partial C}{\partial x_j} \\[2mm] \dfrac{\partial A}{\partial y_j} & \dfrac{\partial B}{\partial y_j} & \dfrac{\partial C}{\partial y_j} \end{vmatrix} = 0.
$$

On voit, du premier coup d'œil, quelle est la symétrie qui oppose (1) et (3). Dans une même ligne de (1) on rencontre toujours la même fonction dérivée partiellement par rapport à des variables d'indices différents; dans une même ligne de (3), les fonctions à dériver diffèrent, au contraire, d'un terme à l'autre et la variable de dérivation est toujours la même.

Évidemment les formules (3) et (4) supposent deux séries de variables

$$\begin{gathered} x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \\ y_1, y_2, y_3, \dots, y_n \end{gathered}.$$

Nous dirons, comme par le passé, que les formules (1) et (2) sont du type *stokien* et que, de par l'opposition qui vient d'être indiquée, (3) et (4) sont du type *antistokien.* Ce néologisme n'a pas la prétention de correspondre à une véritable originalité; la formule (4), comme nous allons le voir, pourrait aussi bien être dite du type de Poisson mais la terminologie adoptée aura, au moins, l'avantage de faire ressortir commodément, en ne recourant qu'à deux mots, l'idée essentielle du présent Chapitre. Disons aussi que *stokien* et *antistokien* sont analogues aux termes *covariant* et *contrevariant* du Calcul tensoriel.

[**2**] *Équations canoniques.* — Un des cas les plus simples, en lesquels on ait à considérer la matrice (1), est celui où tous les mineurs du second ordre qu'on peut en tirer sont nuls. Alors

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} & \dfrac{\partial u}{\partial x_j} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x_i} & \dfrac{\partial v}{\partial x_j} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_i} & \dfrac{\partial}{\partial x_j} \\ u\dfrac{\partial v}{\partial x_i} & u\dfrac{\partial v}{\partial x_j} \end{vmatrix} = 0$$

exprime que

$$u\frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx_i = u dv$$

est une différentielle exacte ou que u est une fonction de v. On voit que nous sommes amenés ici, tout naturellement, à appliquer l'une des règles fondamentales du Calcul tensoriel, règle d'après laquelle tout indice, tel que i, figurant deux fois dans un même terme, est indice de sommation.

Ce petit résultat *stokien* étant rappelé, quel est le résultat *antistokien* correspondant?

En d'autres termes, qu'obtient-on si l'on annule l'un quelconque des mineurs issus de (3)?

Soit

$$\frac{\partial B}{\partial x_j}\frac{\partial C}{\partial y_j}-\frac{\partial B}{\partial y_j}\frac{\partial C}{\partial x_j}=0 \tag{5}$$

avec, bien entendu, j indice de sommation. Pour satisfaire à (5) on peut se donner arbitrairement l'une des fonctions B ou C, soit C; alors B satisfait à une équation aux dérivées partielles du premier ordre dont l'intégration entraîne la considération préliminaire du système d'équations différentielles

$$\frac{dx_j}{dt}=\frac{\partial C}{\partial y_j}, \qquad \frac{dy_j}{dt}=-\frac{\partial C}{\partial x_j}. \tag{6}$$

Ce sont les équations *canoniques* de Jacobi et Hamilton.

Rappelons que ces équations sont intégrées par $2n$ relations entre les x, les y, la variable t et $2n$ constantes α_k. En résolvant ces $2n$ relations,

par rapport aux x, y, on a $2n$ solutions;
» α, » $2n$ intégrales.

Une intégrale, en général, contient les x, les y et t. Les intégrales qui ne contiennent pas t ne peuvent être qu'au nombre de $2n-1$ au plus.

[**3**] *Parenthèses et Théorème de Poisson.* — Posons, conformément à l'usage,

$$(B, C)=\frac{\partial B}{\partial x_j}\frac{\partial C}{\partial y_j}-\frac{\partial B}{\partial y_j}\frac{\partial C}{\partial x_j}. \tag{7}$$

Alors la condition pour que B soit une intégrale des équations (6) est

$$\frac{\partial B}{\partial t}+(B, C)=0.$$

En particulier C est une intégrale de ces équations quand cette fonction C ne contient pas explicitement t. Avec la notation (7) la formule (4) peut s'écrire

$$\big(A,(B, C)\big)+\big(B,(C, A)\big)+\big(C,(A, B)\big)=0. \tag{8}$$

Si A et B sont des intégrales, on a

$$\frac{\partial A}{\partial t}+(A, C)=0, \qquad \frac{\partial B}{\partial t}+(B, C)=0$$

et, d'après (8),

$$\left(\frac{\partial B}{\partial t}, A\right) + \left(B, \frac{\partial A}{\partial t}\right) + \big(C, (A, B)\big) = 0$$

ou bien

$$\frac{\partial}{\partial t}(B, A) + \big((B, A), C\big) = 0.$$

Donc (B, A), ou (A, B), est aussi une intégrale. C'est le théorème de Poisson qui est, par excellence, le théorème *antistokien* (Cf. P. Appell, *Traité de Mécanique*, t. II, 2e édition, 1904, p. 418).

[**4**] *Crochets de Lagrange.* — Reprenons les équations canoniques (6) et, en exprimant tout avec les variables α_k et t, formons

$$\frac{\partial C}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial C}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial \alpha_k} + \frac{\partial C}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial \alpha_k} = \frac{dx_j}{dt}\frac{\partial y_j}{\partial \alpha_k} - \frac{dy_j}{dt}\frac{\partial x_j}{\partial \alpha_k}.$$

Cela peut encore s'écrire

$$\frac{d}{dt}\left(x_j\frac{\partial y_j}{\partial \alpha_k}\right) - \frac{\partial}{\partial \alpha_k}\left(x_j\frac{dy_j}{dt}\right) = \frac{\partial C}{\partial \alpha_k}. \tag{9}$$

C'est là, d'après Henri Poincaré, une seconde forme des équations canoniques (6), forme complètement équivalente à la première. On en conclut

$$\frac{\partial^2 C}{\partial \alpha_k \partial \alpha_h} - \frac{\partial^2 C}{\partial \alpha_h \partial \alpha_k} = \frac{d}{dt}[\alpha_h, \alpha_k] = 0,$$

en posant

$$[\alpha_h, \alpha_k] = \frac{\partial x_j}{\partial \alpha_h}\frac{\partial y_j}{\partial \alpha_k} - \frac{\partial x_j}{\partial \alpha_k}\frac{\partial y_j}{\partial \alpha_h}.$$

Ce sont là les crochets de Lagrange; ils sont de nature *stokienne* car on peut les extraire de la matrice

$$\left\{\begin{matrix} \dfrac{\partial x_j}{\partial \alpha_h} & \dfrac{\partial x_j}{\partial \alpha_k} & \dfrac{\partial x_j}{\partial \alpha_l} & \cdots \\ \dfrac{\partial y_j}{\partial \alpha_h} & \dfrac{\partial y_j}{\partial \alpha_k} & \dfrac{\partial y_j}{\partial \alpha_l} & \cdots \end{matrix}\right. \tag{10}$$

qui donne lieu à des identités

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \alpha_h} & \dfrac{\partial}{\partial \alpha_k} & \dfrac{\partial}{\partial \alpha_l} \\ \dfrac{\partial x_j}{\partial \alpha_h} & \dfrac{\partial x_j}{\partial \alpha_k} & \dfrac{\partial x_j}{\partial \alpha_l} \\ \dfrac{\partial y_j}{\partial \alpha_h} & \dfrac{\partial y_j}{\partial \alpha_k} & \dfrac{\partial y_j}{\partial \alpha_l} \end{vmatrix} = 0$$

écrites, plus habituellement, sous la forme

$$(11) \qquad \frac{\partial}{\partial \alpha_h}[\alpha_k, \alpha_l] + \frac{\partial}{\partial \alpha_k}[\alpha_l, \alpha_h] + \frac{\partial}{\partial \alpha_l}[\alpha_h, \alpha_k] = 0.$$

La matrice (10) peut aussi bien s'écrire

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial}{\partial \alpha_h} & \dfrac{\partial}{\partial \alpha_k} & \dfrac{\partial}{\partial \alpha_l} & \cdots \\ x_j \dfrac{\partial y_j}{\partial \alpha_h} & x_j \dfrac{\partial y_j}{\partial \alpha_k} & x_j \dfrac{\partial y_j}{\partial \alpha_l} & \cdots \end{matrix}$$

si bien que, si l'on pose

$$(12) \qquad x_j \frac{\partial y_j}{\partial \alpha_k} = A_k + \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_k},$$

on a

$$[\alpha_h, \alpha_k] = \frac{\partial A_k}{\partial \alpha_h} - \frac{\partial A_h}{\partial \alpha_k}.$$

La nature *stokienne* des crochets de Lagrange se précise de plus en plus; les A_k sont complètement analogues aux potentiels électromagnétiques Φ_k du second groupe des équations de Maxwell-Lorentz généralisées (Cf. Premier Mémoire, paragraphe 12). Le second groupe des équations de Maxwell-Lorentz n'est formé que d'équations identiques à (11).

On peut résumer l'idée essentielle de ce qui précède en cette assertion : *Les solutions des équations canoniques ont des propriétés stokiennes; les intégrales des mêmes équations ont des propriétés antistokiennes.*

[**5**] *Transformations canoniques.* — A la double série de variables x_i, y_i, adjoignons la double série analogue x'_i, y'_i et soit

$$x'_i dy'_i - x_i dy_i = dS, \tag{13}$$

d'où

$$x'_i \frac{\partial y'_i}{\partial \alpha_k} - x_i \frac{\partial y_i}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial S}{\partial \alpha_k},$$

$$x'_i \frac{dy'_i}{dt} - x_i \frac{dy_i}{dt} = \frac{dS}{dt}.$$

En formant

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial S}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial}{\partial \alpha_k}\frac{dS}{dt},$$

on a

$$\frac{d}{dt}\left(x_i \frac{\partial y_i}{\partial \alpha_k}\right) - \frac{\partial}{\partial \alpha_k}\left(x_i \frac{dy_i}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(x'_i \frac{\partial y'_i}{\partial \alpha_k}\right) - \frac{\partial}{\partial \alpha_k}\left(x'_i \frac{dy'_i}{dt}\right) = \frac{\partial C}{\partial \alpha_k}, \tag{14}$$

le dernier membre étant emprunté à (9). Cette double égalité montre qu'on a, à la fois,

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial C}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial C}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad \frac{dx'_i}{dt} = \frac{\partial C}{\partial y'_i}, \quad \frac{dy'_i}{dt} = -\frac{\partial C}{\partial x'_i}.$$

Donc, le changement de variables envisagé, pourvu, bien entendu, qu'il satisfasse à (13), conserve les équations canoniques.

On peut, avec Jacobi, présenter les choses d'une manière encore plus explicite. Remplaçons (13) par

$$x'_i dy'_i + y_i dx_i = d(S + x_i y_i) = dU$$

et imaginons que la fonction U ne contienne que les x_i et les y'_i. Alors

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial U}{\partial y'_i} dy'_i$$

et, par suite,

$$y_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \qquad x'_i = \frac{\partial U}{\partial y'_i}.$$

Telles sont les $2n$ formules qui lient les x_i, y_i aux x'_i, y'_i et qui conservent la forme canonique (H. Poincaré, *Méthodes nouvelles*, t. I, p. 15).

[**6**] *La fonction* Ω. — Voyons maintenant ce que l'on peut faire par un choix convenable de la fonction *arbitraire* Ω introduite dans (12). En portant (12) dans (9), on a

$$\frac{dA_k}{dt} + \frac{\partial}{\partial \alpha_k}\left[\frac{d\Omega}{dt} - x_j \frac{dy_j}{dt} - C\right] = 0.$$

Dans ces conditions, si l'on pose

$$\frac{d\Omega}{dt} = x_j \frac{dy_j}{dt} + C, \tag{15}$$

les A_k sont indépendants du temps. Remarquons que Ω n'apparaissant que comme une fonction de t et des α_k qui sont des constantes, il est ici indifférent d'écrire

$$\frac{d\Omega}{dt} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial\Omega}{\partial t}.$$

Comme on a

$$dy_j = \frac{\partial y_j}{\partial \alpha_k} d\alpha_k + \frac{dy_j}{dt} dt,$$

il vient, en multipliant par x_j et tenant compte de (12) et de (15),

$$x_j dy_j = A_j d\alpha_j + d\Omega - C dt. \tag{16}$$

C'est là une formule qui est de la plus haute importance dans les transformations des développements de la Mécanique céleste, notamment quand on veut s'affranchir des termes séculaires; nous le rappellerons brièvement plus loin. Remarquons tout de suite que si, dans (16), on pouvait se débarrasser du terme $C dt$, les *constantes* A_j et α_j pourraient devenir variables avec le temps et constituer alors des variables *canoniques* nouvelles. Ceci parce que les nouvelles variables A_j, α_j seraient liées aux anciennes x_j, y_j par une relation différentielle (16) qui aurait la forme (13).

[**7**] *Théorème de Cauchy*. — Adjoignons maintenant à l'exposé de Poincaré un théorème qui aidera puissamment à de nouvelles synthèses. Avec l'esprit du Calcul tensoriel, il tient d'ailleurs en quelques lignes. On a

$$\frac{\partial x_\mu}{\partial \alpha_i}\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_\nu} = \begin{cases} 1 \text{ si } \mu = \nu \\ 0 \text{ si } \mu \neq \nu \end{cases}, \qquad \frac{\partial y_\mu}{\partial \alpha_i}\frac{\partial \alpha_i}{\partial y_\nu} = \begin{cases} 1 \text{ si } \mu = \nu \\ 0 \text{ si } \mu \neq \nu \end{cases}.$$

Les seconds membres pourraient d'ailleurs se représenter plus simplement par un opérateur mixte tel que $g^\mu{}_\nu$. Il est évident, d'autre part, que, dans les dérivées partielles que nous venons d'écrire, les x et les y peuvent être considérés comme des solutions des équations canoniques et les α comme des intégrales de ces mêmes équations. De toutes façons, on a

$$\frac{\partial x_\mu}{\partial \alpha_i}(\alpha_i, \alpha_j) = \frac{\partial x_\mu}{\partial \alpha_i}\left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_k}\frac{\partial \alpha_j}{\partial y_k} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial y_k}\frac{\partial \alpha_j}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial \alpha_j}{\partial y_\mu},$$

$$\frac{\partial y_\mu}{\partial \alpha_i}(\alpha_i, \alpha_j) = \frac{\partial y_\mu}{\partial \alpha_i}\left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_k}\frac{\partial \alpha_j}{\partial y_k} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial y_k}\frac{\partial \alpha_j}{\partial x_k}\right) = -\frac{\partial \alpha_j}{\partial x_\mu},$$

d'où

$$\left(\frac{\partial x_\mu}{\partial \alpha_i}\frac{\partial y_\mu}{\partial \alpha_h} - \frac{\partial x_\mu}{\partial \alpha_h}\frac{\partial y_\mu}{\partial \alpha_i}\right)(\alpha_i, \alpha_j) = \frac{\partial \alpha_j}{\partial y_\mu}\frac{\partial y_\mu}{\partial \alpha_h} + \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_\mu}\frac{\partial x_\mu}{\partial \alpha_h},$$

ce qui est

$$[\alpha_i, \alpha_h](\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} 1 \text{ si } j = h \\ 0 \text{ si } j \neq h \end{cases}. \tag{17}$$

Tel est le théorème en vue. Il constitue une préface aux recherches plus profondes de Poincaré sur les relations unissant les parenthèses de Poisson, les crochets de Lagrange, les équations aux variations, les invariants intégraux, etc. Voir encore, à ce sujet, les *Leçons de Mécanique céleste* dont le Chapitre I particulièrement contient tous renvois utiles aux *Méthodes nouvelles*.

[**8**] *Variations des constantes. Méthodes diverses.* — Reprenons maintenant le problème fondamental de la Mécanique céleste. Par hypothèse on a intégré

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

Soient toujours $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}$ les intégrales. Profiter, si l'on peut, de ce résultat pour intégrer plus généralement

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial(F + R)}{\partial y_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial(F + R)}{\partial x_i}.$$

On a

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y_j}\frac{dy_j}{dt} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial t}$$

ou bien

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j}\frac{\partial(F + R)}{\partial y_j} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial y_j}\frac{\partial(F + R)}{\partial x_j} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial t}.$$

Mais, en vertu des équations déjà intégrées,

$$\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_j}\frac{\partial F}{\partial y_j}-\frac{\partial\alpha_i}{\partial y_j}\frac{\partial F}{\partial x_j}+\frac{\partial\alpha_i}{\partial t}=0$$

et, par suite,

$$\frac{d\alpha_i}{dt}=\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_j}\frac{\partial R}{\partial y_j}-\frac{\partial\alpha_i}{\partial y_j}\frac{\partial R}{\partial x_j}.$$

Or

$$\frac{\partial R}{\partial y_j}=\frac{\partial R}{\partial\alpha_h}\frac{\partial\alpha_h}{\partial y_j},\qquad \frac{\partial R}{\partial x_j}=\frac{\partial R}{\partial\alpha_h}\frac{\partial\alpha_h}{\partial x_j}.$$

Donc

$$(18)\qquad \frac{d\alpha_i}{dt}=\frac{\partial R}{\partial\alpha_h}\left(\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_j}\frac{\partial\alpha_h}{\partial y_j}-\frac{\partial\alpha_i}{\partial y_j}\frac{\partial\alpha_h}{\partial x_j}\right)=\frac{\partial R}{\partial\alpha_h}(\alpha_i,\alpha_h).$$

C'est le résultat de Cauchy (H. Laurent. *Traité d'Analyse*, t. VI, p. 86).

D'après le théorème du paragraphe précédent, on a

$$(19)\qquad [\alpha_i,\alpha_j]\frac{d\alpha_i}{dt}=\frac{\partial R}{\partial\alpha_j}.$$

C'est le résultat de Lagrange (H. Poincaré. *Leçons de mécanique céleste*, t. I, p. 100).

Enfin, on peut remplacer les $2n$ constantes α par des constantes ou intégrales canoniques susceptibles d'être réparties en deux séries

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$$
$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$$

et de telle manière que les équations (18) ou (19) aient aussi la forme canonique. *C'est le résultat de Jacobi* encore plus important que les deux précédents mais tellement connu que nous ne nous attarderons pas à le redémontrer. Nous en avons d'ailleurs assez dit pour montrer que ces résultats, fondamentaux en Mécanique céleste et permettant d'aborder indifféremment les anciennes ou les nouvelles méthodes, se rattachent à des propriétés stokiennes (ou antistokiennes) de déterminants, tout comme c'est le cas pour les résultats einsteiniens.

[9] *Élimination des termes séculaires en Mécanique céleste.* — Nous reproduisons cette théorie essentielle en suivant toujours la voie tracée par H. Poincaré dans ses

Leçons, d'abord avec le « problème restreint », mais en la débarrassant de tout ce qui n'est pas absolument fondamental.

On peut alors en saisir l'esprit, très brièvement, et y voir encore un triomphe très direct des propriétés stokiennes des équations canoniques.

Soient deux séries de variables

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n,$$
$$L_1, L_2, \ldots, L_n,$$

et les équations canoniques correspondantes

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial L_i}, \qquad \frac{dL_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \lambda_i}. \tag{20}$$

Si ces équations se rapportent à un mouvement planétaire troublé, la méthode de Lagrange y satisfait par des séries de la forme

$$\left\{ \begin{aligned} L_i &= L^0_i + \sum A\mu^\alpha t^m \cos(\nu t + h), \\ \lambda_i &= n_i t + \lambda^0_i + \sum A'\mu^\alpha t^m \cos(\nu t + h'). \end{aligned} \right. \qquad \nu = \Sigma k_i n_i. \tag{21}$$

Les termes sous les sigmas sont, en général, *séculaires*, exception faite de ceux pour lesquels m est nul. D'après un théorème non évident mais facile à démontrer et sur la démonstration duquel nous passerons, on peut aussi bien écrire

$$\left\{ \begin{aligned} L_i &= L^0_i + \sum A\mu^\alpha \tau^m \cos(k_i w_i + h) \\ \lambda_i &= w_i + \lambda^0_i + \sum A'\mu^\alpha \tau^m \cos(k_i w_i + h) \end{aligned} \right. \tag{22}$$

ce qui revient à (21) si $\tau = t$, $w_i = n_i t$, *mais ce qui satisfait encore aux équations* (20) si

$$\tau = t + c, \qquad w_i = n_i t + \varepsilon_i. \tag{23}$$

Dans ces conditions, on peut considérer comme constantes d'intégration les L^0_i (en nombre n), les λ^0_i (en nombre n), les ε_i (en nombre n) et enfin c, soit $3n + 1$ constantes que l'on peut réduire arbitrairement à $2n$. Soit donc $\lambda^0_i = 0$ et $c = 0$.

En partant des formules (22), on peut maintenant former

$$L_i d\lambda_i - d\Omega = H d\tau + W_i dw_i + C_i dL^0_i, \tag{24}$$

en définissant Ω comme en (15), la comparaison étant d'ailleurs aisée puisqu'on peut passer de (6) à (20) en remplaçant respectivement x, y, C par L, λ, — F.

Soit maintenant, dans (24),

$$\tau = t, \qquad w_i = n_i t + \varepsilon_i,$$
$$d\tau = dt, \qquad dw_i = n_i dt + d\varepsilon_i + t dn_i.$$

Il viendra

$$\text{(25)} \qquad L_i d\lambda_i - d\Omega = (H + W_i n_i)\, dt + W_i d\varepsilon_i + C^0_i dL^0_i$$

si

$$\text{(26)} \qquad C^0_i = C_i + t W_k \frac{\partial n_k}{\partial L^0_i},$$

les n_k ne dépendant d'ailleurs que des L^0_i. Or les ε_i et les L^0_i étant nos $2n$ constantes d'intégration, ce sont, dans (25), les analogues des α_j de (16) et, par suite, W_i et C^0_i sont aussi à considérer comme des constantes. De plus

$$H + W_i n_i = F$$

est encore à considérer comme une constante parce qu'on peut s'arranger de manière à construire les équations (20) avec une fonction F ne contenant pas le temps explicitement.

Cette constance des W_i et des C^0_i se conserve dans l'extension qui permet de passer de (21) à (22).

Reprenons alors (24) avec (26) étendu en

$$C^0_i = C_i + \tau W_k \frac{\partial n_k}{\partial L^0_i}.$$

Pour $\tau = 0$, $w_i = 0$, la seconde équation (22) donnera $\lambda_i = \lambda^0_i = 0$, d'où $d\lambda_i = 0$, et (24) donnera

$$-d\Omega_0 = C^0_i dL^0_i.$$

Mais alors (24) donne encore, pour $\tau = 0$,

$$\text{(27)} \qquad L_i d\lambda_i - W_i dw_i = d(\Omega - \Omega_0).$$

C'est déjà là le résultat essentiel. La suite est immédiate. Les développements (22), où l'on fait $\lambda^0_i = 0$, $\tau = 0$ peuvent être regardés comme définissant les L et les λ

en fonction des W et des w et ce changement de variables est canonique en vertu de (27). Donc

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial w} = 0, \qquad \frac{dw}{dt} = \frac{\partial F}{\partial W} = \text{const}^e = n'_i.$$

Nous pouvons donc encore satisfaire aux équations (20) en partant des développements (22) et en y faisant

$$\lambda^0_i = 0, \qquad \tau = 0, \qquad L^0_i = \text{const}^e, \qquad w_i = n'_i t + \omega_i.$$

Cette fois, puisque $\tau = 0$, il n'y a plus, dans les nouveaux développements, que des termes périodiques par rapport au temps.

En $\tau = 0$ est le coup de baguette magique qui fait évanouir les termes séculaires.

La démonstration que nous venons de résumer, relativement simple dans le cas du problème restreint, s'étend au cas général du problème des trois corps. Nous avons donc, en général, les coordonnées des trois corps représentées, en fonction du temps, par des sommes de termes périodiques; les développements lagrangiens, avec leurs termes séculaires, réflétaient beaucoup plus le mode de calcul que la nature des choses.

Mais nos développements à termes périodiques dépendent toujours de constantes arbitraires correspondant aux circonstances initiales du mouvement et l'on conçoit qu'un choix de ces constantes puisse donner *la même période* à tous les termes. C'est ainsi que l'on peut découvrir, pour le problème des trois corps, des *solutions périodiques*.

[10] *Identité einsteinienne fondamentale.* — Ne perdons pas de vue les matrices stokiennes telles que (1) et (10). Reprenons même (2) sous la forme plus générale

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_\mu} & \frac{\partial}{\partial x_\nu} & \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \\ \frac{\partial}{\partial x_\mu} & \frac{\partial}{\partial x_\nu} & \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \\ \Gamma^\rho_{\lambda\mu} & \Gamma^\rho_{\lambda\nu} & \Gamma^\rho_{\lambda\sigma} \end{vmatrix} = 0.$$

Ceci peut être étendu en

(a) $$\begin{vmatrix} \frac{D}{Dx_\mu} & \frac{D}{Dx_\nu} & \frac{D}{Dx_\sigma} \\ B^\rho_{\lambda\mu\omega} & B^\rho_{\lambda\nu\bar\omega} & B^\rho_{\lambda\sigma\omega} \\ \mu & \nu & \sigma \end{vmatrix} = 0$$

ce que l'on peut encore écrire

(b) $$\frac{D}{Dx_\mu} B^\rho_{\lambda\nu\sigma} + \frac{D}{Dx_\nu} B^\rho_{\lambda\sigma\mu} + \frac{D}{Dx_\sigma} B^\rho_{\lambda\mu\nu} = 0.$$

C'est une généralisation du théorème de divergence nulle donné par l'égalité antéprécédente et cette généralisation est jusqu'ici *amétrique* car elle s'obtient sans aucune précision sur la forme des $\Gamma^{\rho}_{\lambda\mu}$. Précisée, au point de vue métrique, elle donne les quatre identités fondamentales sur lesquelles reposent les équations générales d'Einstein relatives aux milieux continus (A.-E. HARWARD. *The Identical Relations in Einstein's Theory*, Philosophical Magazine, août 1922. — G. DARMOIS. *Éléments de Géométrie des Espaces*. Annales de Physique, 1924, p. 52).

Mais, sans redévelopper ces points, remarquons que l'égalité (a) est complètement analogue aux équations de Maxwell-Lorentz généralisées lesquelles sont susceptibles d'être tirées de la matrice

$$\text{(c)} \qquad \left\{\begin{matrix} \dfrac{\partial}{\partial x_\mu} & \dfrac{\partial}{\partial x_\nu} & \dfrac{\partial}{\partial x_\sigma} & \dots \\ M_{\mu\omega} & M_{\nu\omega} & M_{\sigma\omega} & \dots \\ \mu & \nu & \sigma & \dots \end{matrix}\right.$$

en laquelle les ∂ peuvent précisément être remplacés par des D (Cf. Troisième Mémoire, § 9). Or les B à quatre indices sont des composantes de *courbure*; les $M_{\mu\nu}$ conduisent au *déplacement électrique* et à la *force magnétique*. Les trois expressions soulignées désignent donc des choses de même nature. Sans doute il ne suffit pas de constater ce rapprochement pour conclure, absolument et définitivement, que l'électromagnétisme est géométrisé; d'abord parce que cette géométrisation pourrait être aperçue sous d'autres espèces, ensuite parce qu'il n'y a rien d'absolu et de définitif dans une théorie scientifique, surtout dans une théorie *relativiste*. Mais que penser des physiciens qui continuent, plus ou moins volontairement, à ignorer de telles et si frappantes analogies?

D'autre part, l'égalité (b) est manifestement à rapprocher du théorème de Poisson (8) ou de l'identité de Lagrange (11). La théorie einsteinienne se rapproche donc de la Mécanique classique qui prendrait d'ailleurs la forme einsteinienne si l'on proposait, par exemple, de voir une harmonie fondamentale dans la très belle relation (4) et dans les équations canoniques qui s'y adjoignent immédiatement. Ce serait là probablement le véritable triomphe du théorème de Poisson auquel Jacobi attachait tant d'importance; ce théorème n'a jamais donné d'intégrale, véritablement importante et nouvelle, d'un système canonique, en partant de deux intégrales connues. Mais il peut devenir l'une des raisons d'être des équations canoniques tout comme les identités (a) ou (b) et la matrice (c) sont des raisons d'être des systèmes généraux de Maxwell, Lorentz et Einstein.

Dans le Chapitre suivant, nous allons précisément examiner quelques conséquences *géométriques* en relation avec la matrice (c).

CHAPITRE II

Géométrie différentielle, électromagnétique ou stokienne.

[**11**] *Retour sur le déplacement parallèle de T. Levi-Civita.* — Reportons-nous aux deux premiers paragraphes du précédent Mémoire. La définition des dérivées en D de composantes vectorielles (c'est-à-dire à un seul indice) nous permet notamment d'écrire

$$d(P^j P_j) = P^j \frac{DP_j}{Dx_i} dx_i + P_j \frac{DP^j}{Dx_i} dx_i .$$

Le déplacement parallèle de M. T. Levi-Civita correspond au cas où cette égalité est satisfaite de la manière évidemment très particulière qui consiste à écrire

$$(28) \qquad P^j P_j = 1, \qquad \frac{DP_j}{Dx_i} dx_i = 0, \qquad \frac{DP^j}{Dx_i} dx_i = 0$$

les deux dernières relations rentrant identiquement l'une dans l'autre. La première relation (28) est scindée en

$$P_j = g_{j\alpha} P^\alpha, \qquad P^j = g^{\alpha j} P_\alpha .$$

Quant aux deux autres, elles ne s'identifient qu'à une condition qui reste à former. Écrivons-les respectivement sous les formes

$$dP_j = \Gamma^\alpha{}_{\lambda j} P_\alpha dx_\lambda, \qquad dP^j = -\Gamma^j{}_{\lambda\alpha} P^\alpha dx_\lambda$$

et exprimons que ces relations sont équivalentes au moyen de

$$dP_j = P^\alpha dg_{j\alpha} + g_{j\alpha} dP^\alpha \qquad \text{ou de} \qquad dP^j = P_\alpha dg^{\alpha j} + g^{\alpha j} dP_\alpha .$$

Si l'équivalence a lieu, quel que soit le vecteur (P) circulant sur une ligne (x) quelconque, il vient, pour la condition cherchée,

$$(29) \qquad \frac{\partial g_{\beta j}}{\partial x_\lambda} - g_{\beta\alpha} \Gamma^\alpha{}_{\lambda j} - g_{j\alpha} \Gamma^\alpha{}_{\lambda\beta} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial g^{\beta j}}{\partial x_\lambda} + g^{\alpha j} \Gamma^\beta{}_{\lambda\alpha} + g^{\beta\alpha} \Gamma^j{}_{\lambda\alpha} = 0$$

ce qui peut s'écrire

$$(30) \qquad \frac{Dg_{\beta j}}{Dx_\lambda} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{Dg^{\beta j}}{Dx_\lambda} = 0 .$$

La première de ces relations est celle qui est ordinairement employée pour définir la métrique. La seconde pourrait jouer le même rôle. Toutes deux, par leurs premiers membres comparés aux premiers membres de (29) peuvent précisément servir à définir les dérivées en D d'expressions à deux indices, *dérivées en* D qui sont celles du Calcul tensoriel et *dans lesquelles on ne trouve qu'une seule espèce de* Γ *à trois indices*.

Mais, pour tous ces points, il n'y a qu'à renvoyer encore au Mémoire précédent.

[**12**] *Dérivées en* D *contenant des* Γ *et des* Δ. — Reprenons toujours le Mémoire précédent mais, cette fois, au Chapitre II. Les mineurs de la seconde formule stokienne se généralisent formellement en

$$\begin{vmatrix} \frac{D}{Dx_i} & \frac{D}{Dx_j} & \frac{D}{Dx_k} \\ M_{i\omega} & M_{j\omega} & M_{k\omega} \\ i & j & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} & \frac{\partial}{\partial x_j} & \frac{\partial}{\partial x_k} \\ M_{i\omega} & M_{j\omega} & M_{k\omega} \\ i & j & k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \Gamma^{\alpha}_{i\omega} & \Gamma^{\alpha}_{j\omega} & \Gamma^{\alpha}_{k\omega} \\ i & j & k \\ M_{\alpha i} & M_{\alpha j} & M_{\alpha k} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \Delta^{\alpha}_{i\omega} & \Delta^{\alpha}_{j\omega} & \Delta^{\alpha}_{k\omega} \\ M_{i\alpha} & M_{j\alpha} & M_{k\alpha} \\ i & j & k \end{vmatrix}.$$

En posant de même

$$\begin{vmatrix} \frac{D}{Dx_i} & \frac{D}{Dx_j} & \frac{D}{Dx_k} \\ M^{i\omega} & M^{j\omega} & M^{k\omega} \\ i & j & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} & \frac{\partial}{\partial x_j} & \frac{\partial}{\partial x_k} \\ M^{i\omega} & M^{j\omega} & M^{k\omega} \\ i & j & k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Gamma^{\omega}_{i\alpha} & \Gamma^{\omega}_{j\alpha} & \Gamma^{\omega}_{k\alpha} \\ i & j & k \\ M^{\alpha i} & M^{\alpha j} & M^{\alpha k} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Delta^{\omega}_{i\alpha} & \Delta^{\omega}_{j\alpha} & \Delta^{\omega}_{k\alpha} \\ M^{i\alpha} & M^{j\alpha} & M^{k\alpha} \\ i & j & k \end{vmatrix},$$

on a, par développement et identifications de termes homologues,

$$(31)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{D}{Dx_i} M_{jk} &= \frac{\partial}{\partial x_i} M_{jk} - \Gamma^{\alpha}_{ij} M_{\alpha k} - \Delta^{\alpha}_{ik} M_{j\alpha}, \\ \frac{D}{Dx_i} M^{jk} &= \frac{\partial}{\partial x_i} M^{jk} + \Gamma^{j}_{i\alpha} M^{\alpha k} + \Delta^{k}_{i\alpha} M^{j\alpha}, \end{aligned} \right.$$

ce qui donne lieu à la formule

$$(32)\qquad N^{jk} \frac{D}{Dx_i} M_{jk} + M_{jk} \frac{D}{Dx_i} N^{jk} = \frac{\partial}{\partial x_i} (M_{jk} N^{jk})$$

en laquelle, bien entendu, j et k sont, comme α, des indices de sommation.

On voit que dans la seconde formule stokienne fondamentale, ainsi que dans (32), on peut introduire les D définis en (31). Ces dérivées en D sont celles du Calcul tensoriel *quand les* Γ^{α}_{ij} *sont identiques aux* Δ^{α}_{ij} mais il est bien remarquable — et il ne semble pas qu'on ait remarqué jusqu'ici — qu'avec des Γ distincts des Δ, les formules (31) donnent encore des D qui peuvent être substitués aux ∂ de la seconde formule stokienne, ces D pouvant aussi être introduits dans (32).

Cette constatation étant faite on peut se demander si les formules (31) ne sont pas plus curieuses qu'utiles; y a-t-il véritablement des questions où ces formules se présentent *naturellement* avec des Γ et des Δ différents? La réponse est nettement affirmative en Géométrie différentielle et particulièrement dans la théorie de la représentation sphérique où des formules données depuis longtemps par Weingarten sont du type (31).

Aussi allons-nous nous occuper maintenant de Géométrie différentielle considérée comme ayant surtout son origine dans les formules stokiennes. A ce point de vue, cette géométrie a même origine que l'Électromagnétisme; elle est aussi à rapprocher des développements stokiens issus des équations canoniques mais elle est à distinguer de la Mécanique classique justement par les formules d'extension (31) avec leurs fonctions Γ et Δ non apparues dans le Chapitre précédent.

[**13**] *Le système fondamental de la Géométrie différentielle.* — Reprenons les équations du déplacement parallèle de Levi-Civita et, plus particulièrement, la seconde équation (28); on peut l'écrire

$$\frac{\mathrm{D}P_j}{\mathrm{D}x_i} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i} - \Gamma^{\alpha}{}_{ji} P_{\alpha} = 0. \tag{33}$$

On sait que les conséquences géométriques de la théorie du parallélisme de M. Levi-Civita sont extrêmement importantes; cependant on ne peut aller jusqu'à prétendre que l'équation (33) ou même les équations (28) contiennent toute la Théorie des Surfaces. Ceci nous mène à la question suivante : *Quel est le système d'équations qui, avec ou après le système* (28), *joue le rôle le plus important en Géométrie différentielle?*

Nous répondrons : *C'est le système*

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \xi^s{}_i}{\partial x_l} - \Gamma^{\alpha}{}_{il}\xi^s{}_{\alpha} = b_{il}X^s, \\ &\frac{\partial \eta^s{}_k}{\partial x_l} - \Delta^{\alpha}{}_{kl}\eta^s{}_{\alpha} = -c_{kl}X^s, \\ &m_{ik} = -S\xi^s{}_i\eta^s{}_k. \end{aligned}\right. \tag{34}$$

Comme nous allons le voir, ce système contient véritablement, à l'état latent, *toutes les formules fondamentales* de la Géométrie différentielle, telle qu'elle est exposée dans le Tome I (3^e édition) des *Lezioni* de Luigi Bianchi (Pise, 1922).

Si le système (34) est différent du système (28) il n'en faut pas moins remarquer qu'il s'en inspire presque exclusivement; les deux premières équations (34) sont analogues comme structure et leur premier membre est manifestement inspiré du membre développé en (33). A ce point de vue, la théorie de M. Levi-Civita est tout de même ce qu'il y a d'absolument essentiel.

Avant d'entreprendre l'étude de (34), précisons quelques notations.

L'indice supérieur s est un simple indice d'énumération; sa position n'indique aucune contrevariance ni aucune propriété analytique spéciale. Cela sera même si vrai que toute sommation par rapport à s sera, comme dans la dernière équation du système, indiquée par le symbole S. Nous marquons ainsi que nous ne comptons sur aucune propriété attribuée préliminairement à l'indice s. La notation ξ^s_i se rapporte, si l'on veut, à $n+1$ vecteurs ξ^s avec s variant ainsi de 1 à $n+1$. Chacun de ces vecteurs possède n composantes avec i variant de 1 à n. De même pour η^s_k. Enfin les x_l sont en nombre n et la théorie est ainsi relative à l'espace à n dimensions.

[**14**] *La représentation sphérique. Formules de Weingarten.* — On tire immédiatement du système fondamental (34) :

$$\frac{\partial m_{ik}}{\partial x_l} = -\mathrm{S}\eta^s_k\frac{\partial \xi^s_i}{\partial x_l} - \mathrm{S}\xi^s_i\frac{\partial \eta^s_k}{\partial x_l},$$

$$\frac{\partial m_{ik}}{\partial x_l} = -\mathrm{S}\eta^s_k(\Gamma^\alpha_{il}\xi^s_\alpha + b_{il}\mathrm{X}^s) - \mathrm{S}\xi^s_i(\Delta^\alpha_{kl}\eta^s_\alpha - c_{kl}\mathrm{X}^s),$$

$$\frac{\partial m_{ik}}{\partial x_l} = \Gamma^\alpha_{il}m_{\alpha k} + \Delta^\alpha_{kl}m_{i\alpha} - b_{il}\mathrm{S}\eta^s_k\mathrm{X}^s + c_{kl}\mathrm{S}\xi^s_i\mathrm{X}^s.$$

Considérons le tableau T, en lequel les indices supérieurs seront des s explicités,

$$\begin{vmatrix} \bigstar^1 & \bigstar^2 & \dots & \bigstar^{n+1} \\ \xi^1_1 & \xi^2_1 & \dots & \xi^{n+1}_1 \\ \xi^1_2 & \xi^2_2 & \dots & \xi^{n+1}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi^1_n & \xi^2_n & \dots & \xi^{n+1}_n \end{vmatrix}.$$

Posons

$$\mathrm{X}^s = \frac{\text{mineur algébrique de } \bigstar^s \text{ dans T}}{\sqrt{\text{somme des carrés des mineurs des } \bigstar}}.$$

On a évidemment

(35) $$\mathrm{S}\xi^s_i\mathrm{X}^s = 0, \qquad \mathrm{S}(\mathrm{X}^s)^2 = 1.$$

Si

$$\eta^s_k = \frac{\partial X^s}{\partial x_k}, \qquad S\eta^s_k X^s = 0 \tag{36}$$

et, premier résultat marquant,

$$\frac{\partial m_{ik}}{\partial x_l} = \Gamma^\alpha_{il} m_{\alpha k} + \Delta^\alpha_{kl} m_{i\alpha}. \tag{37}$$

Bien qu'il reste à ajouter quelques précisions à ce résultat, notamment au point de vue géométrique, on peut cependant y voir déjà les *formules de Weingarten* (Bianchi, *loc. cit.*, p. 230).

Le plus important, pour le moment, est de remarquer que la formule (37) est du type de la première expression (31) égalée à zéro. Les fonctions Γ et Δ sont différentes; ce ne sont d'ailleurs pas encore des symboles de Christoffel parce que jusqu'ici aucune métrique n'est nécessairement déterminée.

[**15**] *Formules de Codazzi.* — On tire immédiatement de deux formules (37) à indices convenables

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_k} & \frac{\partial}{\partial x_l} \\ m_{ik} & m_{il} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_{\alpha k} & m_{\alpha l} \\ \Gamma^\alpha_{ik} & \Gamma^\alpha_{il} \end{vmatrix} = 0. \tag{38}$$

Cette formule ne contenant plus les Δ, il est indiqué de chercher ses conséquences au moyen d'une hypothèse *métrique*, du type (30), où n'interviennent que des Γ. Soit donc

$$\frac{Dg^{\lambda\alpha}}{Dx_k} = \frac{\partial g^{\lambda\alpha}}{\partial x_k} + \Gamma^\lambda_{ik} g^{i\alpha} + \Gamma^\alpha_{ik} g^{\lambda i} \tag{39}$$

ce qui ne conduira d'ailleurs à la métrique qu'en cas d'identique nullité.

Partons maintenant de (38) multiplié par $g^{\lambda i}$, de (39) et de cette dernière équation où k est remplacé par l. Alors (38) prend aisément la forme

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_k} & \frac{\partial}{\partial x_l} \\ g^{\lambda\alpha} m_{\alpha k} & g^{\lambda\alpha} m_{\alpha l} \end{vmatrix} - g^{i\alpha} \begin{vmatrix} m_{\alpha k} & m_{\alpha l} \\ \Gamma^\lambda_{ik} & \Gamma^\lambda_{il} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_{\alpha k} & m_{\alpha l} \\ \frac{Dg^{\lambda\alpha}}{Dx_k} & \frac{Dg^{\lambda\alpha}}{Dx_l} \end{vmatrix} = 0.$$

Multipliant par ξ^s_λ, on peut remplacer le déterminant médian par

$$\begin{vmatrix} \Gamma^\lambda_{ik}\xi^s_\lambda + b_{ik}X^s & \Gamma^\lambda_{il}\xi^s_\lambda + b_{il}X^s \\ m_{\alpha k} g^{i\alpha} & m_{\alpha l} g^{i\alpha} \end{vmatrix} + X^s \begin{vmatrix} m_{\alpha k} g^{i\alpha} & m_{\alpha l} g^{i\alpha} \\ b_{ik} & b_{il} \end{vmatrix}.$$

Ceci fait, en tenant toujours compte de la première équation (34), on a finalement

$$(40)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_k} & \dfrac{\partial}{\partial x_l} \\ \xi^s_\lambda g^{\lambda\alpha} m_{\alpha k} & \xi^s_\lambda g^{\lambda\alpha} m_{\alpha l} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\mathrm{D}g^{\lambda\alpha}}{\mathrm{D}x_k} & \dfrac{\mathrm{D}g^{\lambda\alpha}}{\mathrm{D}x_l} \\ \xi^s_\lambda m_{\alpha k} & \xi^s_\lambda m_{\alpha l} \end{vmatrix} + \mathrm{X}^s g^{i\alpha} \begin{vmatrix} b_{ik} & b_{il} \\ m_{\alpha k} & m_{\alpha l} \end{vmatrix}.$$

D'une manière complètement analogue, on peut tirer de (37)

$$(41)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_i} & \dfrac{\partial}{\partial x_l} \\ m_{ik} & m_{lk} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_{i\alpha} & m_{l\alpha} \\ \Delta^\alpha_{ki} & \Delta^\alpha_{kl} \end{vmatrix} = 0.$$

En adjoignant

$$\frac{\mathrm{D}h^{\lambda\alpha}}{\mathrm{D}x_i} = \frac{\partial h^{\lambda\alpha}}{\partial x_i} + \Delta^\lambda_{ki} h^{k\alpha} + \Delta^\alpha_{ki} h^{\lambda k}$$

on obtient de même la formule complètement analogue à (40)

$$(42)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_i} & \dfrac{\partial}{\partial x_l} \\ \eta^s_\lambda h^{\lambda\alpha} m_{i\alpha} & \eta^s_\lambda h^{\lambda\alpha} m_{l\alpha} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\mathrm{D}h^{\lambda\alpha}}{\mathrm{D}x_i} & \dfrac{\mathrm{D}h^{\lambda\alpha}}{\mathrm{D}x_l} \\ \eta^s_\lambda m_{i\alpha} & \eta^s_\lambda m_{l\alpha} \end{vmatrix} - \mathrm{X}^s h^{k\alpha} \begin{vmatrix} c_{ki} & c_{kl} \\ m_{i\alpha} & m_{l\alpha} \end{vmatrix}.$$

Les formules (38) et (41) sont de certaines formes des formules de Codazzi (Bianchi, *loc. cit.*, pp. 230-231).

Nous allons voir maintenant apparaître rapidement les autres formules de la théorie en nous laissant simplement guider par certaines idées de simplicité. Les formules (40) et (42) sont d'une structure très remarquable au point de vue de la symétrie mais elles sont indéniablement compliquées; on les simplifiera beaucoup si l'on peut annuler les seconds membres car les premiers membres exprimeront alors l'existence de certaines différentielles exactes.

Tout d'abord, on voit immédiatement que *le dernier déterminant, de chacune des formules* (40), (42) *disparaît si les m sont pris identiques aux b et les c identiques aux h*, à condition toutefois que $b_{il} = b_{li}$. D'après la dernière équation du système (34), il faut donc que l'on ait

$$(43)\qquad \mathrm{S}\,\xi^s_i \eta^s_k = \mathrm{S}\,\xi^s_k \eta^s_i.$$

Or on a déjà attribué à η^s_k la forme indiquée en (36). Prenons de plus

$$(44)\qquad \xi^s_i = \frac{\partial x^s}{\partial x_i}.$$

La condition précédente devient

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_i} & \dfrac{\partial}{\partial x_k} \\ X^s \dfrac{\partial x^s}{\partial x_i} & X^s \dfrac{\partial x^s}{\partial x_k} \end{vmatrix} = 0$$

et elle est alors nécessairement réalisée d'après (35).

Reste maintenant à annuler chaque premier déterminant du second membre dans les formules (40) et (42). On y parvient immédiatement en posant

$$\frac{Dg^{\lambda\alpha}}{Dx_k} = 0, \qquad \frac{Dh^{\lambda\alpha}}{Dx_i} = 0,$$

ce qui, pour la première fois, est de nature à déterminer les fonctions Γ et Δ du système fondamental (34). Ici et ici seulement une métrique commence à s'imposer. Mais poursuivons. Les premiers membres des formules (40) et (42) étant maintenant identiquement nuls, nous pouvons poser

$$(45) \qquad \frac{\partial U^s}{\partial x_k} = - g^{\lambda\alpha} b_{\alpha k} \frac{\partial x^s}{\partial x_\lambda}, \qquad \frac{\partial V^s}{\partial x_i} = - h^{\lambda\alpha} b_{i\alpha} \frac{\partial X^s}{\partial x_\lambda}.$$

Or

$$(46) \qquad S \frac{\partial x^s}{\partial x_l} \frac{\partial U^s}{\partial x_k} = - g^{\lambda\alpha} b_{\alpha k} S \frac{\partial x^s}{\partial x_\lambda} \frac{\partial x^s}{\partial x_l} = - g^{\lambda\alpha} b_{\alpha k} g_{\lambda l} = - b_{lk}$$

parce que

$$(47) \qquad g_{\lambda l} = S \frac{\partial x^s}{\partial x_\lambda} \frac{\partial x^s}{\partial x_l} \quad \text{si} \quad ds^2 = g_{\lambda l} dx_\lambda dx_l.$$

La métrique vient de s'accuser à nouveau. Mais, pour l'instant, remarquons seulement que la première équation (45) est satisfaite pour $U^s = X^s$, ceci d'après (35), (36), (44), (46) et la première équation (47).

Enfin un raisonnement identique nous conduit à prendre $V^s = x^s$ dans la seconde équation (45).

Finalement, on obtient

$$(48) \qquad \frac{\partial X^s}{\partial x_k} = - g^{\lambda\alpha} b_{\alpha k} \frac{\partial x^s}{\partial x_\lambda}, \qquad \frac{\partial x^s}{\partial x_i} = - h^{\lambda\alpha} b_{i\alpha} \frac{\partial X^s}{\partial x_\lambda}.$$

C'est un nouveau groupe de *formules* dites *de Codazzi* (Bianchi, *loc. cit.*, pp. 170 et 234).

[**16**] *Courbure. Symboles de Riemann-Christoffel. Formule de Gauss.* — Ce paragraphe n'aura rien d'original. Adjoignons-le aux précédents pour être complet. A l'aide de la première équation (34) écrivons que

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial \xi^x{}_i}{\partial x_l}=\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial \xi^x{}_i}{\partial x_k}. \tag{49}$$

Il vient

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(\Gamma^\alpha{}_{il}\xi^x{}_\alpha)-\frac{\partial}{\partial x_l}(\Gamma^\alpha{}_{ik}\xi^x{}_\alpha)=\frac{\partial}{\partial x_l}(b_{ik}X^x)-\frac{\partial}{\partial x_k}(b_{il}X^x). \tag{50}$$

Le premier membre de cette égalité peut s'écrire

$$\xi^x{}_\beta B^\beta{}_{ikl}+X^x(\Gamma^\alpha{}_{il}b_{\alpha k}-\Gamma^\alpha{}_{ik}b_{\alpha l}),$$

en posant

$$B^\beta{}_{ikl}=\frac{\partial}{\partial x_k}\Gamma^\beta{}_{il}-\frac{\partial}{\partial x_l}\Gamma^\beta{}_{ik}+\Gamma^\alpha{}_{il}\Gamma^\beta{}_{\alpha k}-\Gamma^\alpha{}_{ik}\Gamma^\beta{}_{\alpha l}.$$

Quant au second membre de (50), il devient, en appliquant (38) et en se rappelant que les m doivent être pris identiques aux b,

$$b_{ik}\frac{\partial X^s}{\partial x_l}-b_{il}\frac{\partial X^s}{\partial x_k}+X^s(\Gamma^\alpha{}_{il}b_{\alpha k}-\Gamma^\alpha{}_{ik}b_{\alpha l}).$$

Donc

$$\xi^x{}_\beta B^\beta{}_{ikl}=b_{ik}\frac{\partial X^s}{\partial x_l}-b_{il}\frac{\partial X^s}{\partial x_k}.$$

En écrivant que ceci a lieu quels que soient les x_s, d'après (48) et (44), il vient

$$B^\lambda{}_{ikl}=g^{\lambda\alpha}(b_{il}b_{\alpha k}-b_{ik}b_{\alpha l})$$

ou bien

$$(i\mu,lk)=B_{ikl\mu}=g_{\lambda\mu}B^\lambda{}_{ikl}=b_{il}b_{\mu k}-b_{ik}b_{\mu l}. \tag{51}$$

On voit apparaître les symboles de courbure à quatre indices (Cf. BIANCHI, *loc. cit.*, p. 172).

On sait que, dans le cas d'une surface ordinaire, les symboles $(i\mu, lk)$ se réduisent à un seul (12, 12) et que l'on a, si K est la courbure riemannienne,

$$K=\frac{(12,12)}{g_{11}g_{22}-g_{12}g_{21}}.$$

Alors (51) devient

$$(12, 12) = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$$

d'où finalement

$$K = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}}{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}}. \tag{52}$$

[**17**] *Sur l'aspect et la démonstration ordinaires des principales formules précédentes.* — Le système fondamental (34) a maintenant l'aspect plus précis

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 x^s}{\partial x_i \partial x_l} - \left\{\begin{matrix} il \\ \alpha \end{matrix}\right\} \frac{\partial x^s}{\partial x_\alpha} = b_{il} X^s, \\ &\frac{\partial^2 X^s}{\partial x_k \partial x_l} - \left\{\begin{matrix} kl \\ \alpha \end{matrix}\right\}' \frac{\partial X^s}{\partial x_\alpha} = - c_{kl} X^s, \\ &b_{ik} = - S \frac{\partial x^s}{\partial x_i} \frac{\partial X^s}{\partial x_k}. \end{aligned}\right. \tag{53}$$

En outre, trois formes différentielles quadratiques se révèlent, savoir

$$\left\{\begin{aligned} ds^2 &= S(dx^s)^2 = g_{ik} dx_i dx_k, \\ - S dx^s dX^s &= b_{ik} dx_i dx_k, \\ d\sigma^2 &= S(dX^s)^2 = c_{ik} dx_i dx_k. \end{aligned}\right. \tag{54}$$

Nous avons vu comment la première est apparue à la fin du paragraphe 15. La seconde correspond évidemment à la troisième formule (53), Enfin $d\sigma$ est évidemment élément linéaire sur l'hypersphère représentée par la seconde équation (35). La seconde relation (53) n'est autre que la première appliquée sur cette hypersphère où la première forme est $d\sigma^2$ cependant que la seconde est $-d\sigma^2$. D'après (35) et (44) les X^s sont cosinus directeurs pour la normale relative au point de la variété S dont un point possède les $n+1$ coordonnées x^s, chaque x^s dépendant des n variables x_i. En dérivant

$$S X^s \frac{\partial x^s}{\partial x_i} = 0,$$

on obtient

$$S X^s \frac{\partial^2 x^s}{\partial x_i \partial x_k} = - S \frac{\partial X^s}{\partial x_k} \frac{\partial x^s}{\partial x_i} = - S \frac{\partial X^s}{\partial x_i} \frac{\partial x^s}{\partial x_k}.$$

On a, de même,

$$\begin{bmatrix} ik \\ l \end{bmatrix} = S \frac{\partial x^s}{\partial x_l} \frac{\partial^2 x^s}{\partial x_i \partial x_k}$$

et ces formules, combinées avec (53), donnent des identités.

[**18**] *Cas des surfaces ordinaires.* — Dans ce cas les x^s sont x^1, x^2, x^3 ou, plus simplement, x, y, z. Ces coordonnées sont des fonctions de $x_1 = u$ et de $x_2 = v$. La première formule (53) devient

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x_i \partial x_l} = \left\{ \begin{matrix} il \\ 1 \end{matrix} \right\} \frac{\partial x}{\partial x_1} + \left\{ \begin{matrix} il \\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial x}{\partial x_2} + b_{il} X.$$

Elle représente neuf formules puisqu'il faudrait en écrire autant pour x et X remplacés par y et Y puis par z et Z (Cf. Bianchi, *loc. cit.*, p. 170).

La première formule (48) donne

$$(55)\qquad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x_k} = \begin{vmatrix} g_{21} & g_{22} \\ b_{1k} & b_{2k} \end{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} - \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ b_{1k} & b_{2k} \end{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}.$$

Elle en représente six.

La seconde formule (53) donne les neuf suivantes

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x_k \partial x_l} = \left\{ \begin{matrix} kl \\ 1 \end{matrix} \right\}' \frac{\partial X}{\partial x_1} + \left\{ \begin{matrix} kl \\ 2 \end{matrix} \right\}' \frac{\partial X}{\partial x_2} - c_{kl} X$$

en lesquelles les accolades accentuées se rapportent évidemment à la troisième forme quadratique (54). Enfin la seconde formule (48) donne les six (*loc. cit.*, p. 234).

$$(56)\qquad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_k} = \begin{vmatrix} c_{21} & c_{22} \\ b_{1k} & b_{2k} \end{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} - \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ b_{1k} & b_{2k} \end{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial v}.$$

Les formules (55) et (56) peuvent être mises respectivement sous les formes symétriques remarquables

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & -\frac{\partial X}{\partial x_k} \\ g_{11} & g_{12} & b_{1k} \\ g_{21} & g_{22} & b_{2k} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} & -\frac{\partial x}{\partial x_k} \\ c_{11} & c_{12} & b_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & b_{2k} \end{vmatrix} = 0.$$

Pour l'instant nous ne nous attarderons pas à l'étude de ces symétries dans le cas de n quelconque. D'ailleurs s'il ne s'agit que de mettre les équations (48) sous la forme de déterminants égalés à zéro, la chose est immédiate; ainsi la première peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} -\frac{\partial X}{\partial x_k} & \frac{\partial x}{\partial x_1} & \frac{\partial x}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial x}{\partial x_n} \\ b_{1k} & g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ b_{2k} & g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{nk} & g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Mais il resterait à comparer cette équation avec d'autres, construites de même en bordant le déterminant g des g_{ij}, ce que nous ferons ultérieurement.

Enfin remarquons que l'identité (49) doit, au point de vue logique, être étudiée aussi dans le cas de la seconde équation (34). Mais ceci ne donne rien d'essentiellement nouveau; ainsi la formule terminale (52), relative à la surface ordinaire, est à remplacer par une autre où les g deviennent des c et les b des $-c$. Alors $K = 1$; c'était bien le résultat à prévoir avec la représentation sphérique de la surface.

[**19**] *Remarques.* — Nous nous sommes proposé d'étudier *a priori* le système (34) comme succédant dans l'ordre logique et dans l'ordre de simplicité au système (28). Ici la variété à n dimensions est plongée dans un espace à $n+1$ dimensions *qui est euclidien*, ce qui est d'accord avec le point de vue primitif de M. Levi-Civita mais ce qui, évidemment, n'est pas aussi général que le cas traité par M. L. Bianchi dans le dans le tome II de ses *Lezioni* (parte II, § 442); en cet endroit, M. Bianchi suppose que l'espace à $n+1$ dimensions a, lui-même, une métrique définie par $a_{ik}dx_i dx_k$ tandis qu'ici les a_{ik} sont nuls pour i différent de k et égaux à 1 pour $i = k$.

Il ne s'agissait d'ailleurs nullement de retrouver des résultats connus mais de les mettre en harmonie avec les formules stokiennes, particulièrement avec la seconde qui régit l'Électromagnétisme.

Le présent Chapitre développe deux Notes insérées aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* les 5 et 26 mai 1924.