

CHARLES RIQUIER

**Sur une propriété des fonctions analytiques de variables  
imaginaires en nombre quelconque**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3<sup>e</sup> série*, tome 16 (1924), p. 139-172

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1924\\_3\\_16\\_\\_139\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1924_3_16__139_0)

© Université Paul Sabatier, 1924, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

SUR UNE PROPRIÉTÉ  
DES  
FONCTIONS ANALYTIQUES DE VARIABLES IMAGINAIRES

EN NOMBRE QUELCONQUE

Par CHARLES RIQUIER,

Professeur à l'Université de Caen.

---

INTRODUCTION

Le présent travail a pour objet l'examen de la propriété suivante, relative à la nullité identique d'une fonction de variables imaginaires en nombre quelconque.

Désignant par  $a, b, \dots$  des entiers algébriques indéterminés, en nombre  $n$ , on suppose que les divers systèmes de valeurs particulières dont ces entiers sont susceptibles se trouvent rangés suivant une loi arbitraire, mais sans omission ni répétition, sur la file illimitée

$$(a_1, b_1, \dots), \quad (a_2, b_2, \dots), \quad \dots, \quad (a_k, b_k, \dots), \quad \dots,$$

et on considère un système de  $2n + 1$  variantes<sup>(1)</sup> associées,

$$\left\{ \begin{array}{l} u_k, v_k, \dots, \\ N_k, \\ v_k, \zeta_k, \dots, \end{array} \right.$$

---

<sup>(1)</sup> Nous nommons *variante* un nombre variable dépendant d'un entier positif indéterminé, ou *indice*, auquel on peut donner des valeurs arbitraires.



(obtenu en inscrivant dans chacun des  $n$  contours certain polygone de  $2N_k + 1$  sommets, et associant les sommets de même rang des  $n$  polygones).

Cela étant, si une fonction des  $n$  variables imaginaires  $x, y, \dots$  est analytique et régulière dans la région composée  $(\Re_x, \Re_y, \dots)$ , et si, quelque petite que soit la constante positive  $\alpha$ , la suite formée par les groupes

$$(1) \quad \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_k, \dots$$

en renferme une infinité en tous les points desquels la fonction présente un module moindre que  $\alpha$ , cette dernière est identiquement nulle dans toute l'étendue de la région  $(\Re_x, \Re_y, \dots)$ .

Par exemple, la nullité de la fonction en tous les points des groupes de la suite (1) entraîne sa nullité identique.

Ce résultat a fait l'objet d'une communication à l'Académie des Sciences, insérée dans les *Comptes rendus* du 28 octobre 1918.

---

## Rappel de notions diverses.

(Nous avons réuni dans ce premier paragraphe, à seule fin d'en alléger ultérieurement notre exposé, diverses propositions et observations, sans lien mutuel étroit, dont le rapprochement n'offre en lui-même aucun intérêt, mais qui, chacune en temps voulu, interviendront de façon utile dans les raisonnements).

[1] Rappelons tout d'abord une remarque que nous avons eu l'occasion d'établir dans un travail antérieur<sup>(1)</sup>.

Si l'on désigne par  $u, v, \dots$  des variables en nombre quelconque, indifféremment réelles ou imaginaires, par  $\mathfrak{R}$  une région normale<sup>(2)</sup> de l'espace  $[[u, v, \dots]]$ , par  $f(u, v, \dots)$  une fonction olotrope dans la région  $\mathfrak{R}$ , et par  $\mathfrak{f}$  un fragment à la fois limité et complet de  $\mathfrak{R}$ , il existe, comme on sait<sup>(3)</sup>, quelque constante positive,  $R'$ , jouissant de la propriété que, en un point variable de  $\mathfrak{f}$ , la fonction  $f(u, v, \dots)$  admet un système d'olomètres (au moins) égaux à  $R'$ ; ou, ce qui revient au même, il existe des constantes positives,  $R'_u, R'_v, \dots$ , jouissant de la propriété que, en un point variable de  $\mathfrak{f}$ , la fonction  $f(u, v, \dots)$  admet un système d'olomètres (au moins) égaux respectivement à  $R'_u, R'_v, \dots$ .

Désignons maintenant par  $R_u, R_v, \dots$  des constantes positives choisies comme on voudra, mais une fois pour toutes, au-dessous des précédentes ( $R_u < R'_u, R_v < R'_v, \dots$ ), et, dans le développement taylorien de notre fonction construit à partir d'un point quelconque,  $(u, v, \dots)$ , de  $\mathfrak{f}$ , remplaçons chaque coefficient par son module, et les accroissements attribués aux valeurs initiales  $u, v, \dots$  respectivement par  $R_u, R_v, \dots$  : la somme du développement résultant est une quantité positive dont la valeur est entièrement déterminée quand on se donne un point  $(u, v, \dots)$  du fragment  $\mathfrak{f}$ , et que nous nommerons  $S(u, v, \dots)$ .

Cela étant, la quantité  $S(u, v, \dots)$  reste, dans toute l'étendue du fragment  $\mathfrak{f}$ , constamment inférieure à une quantité positive fixe convenablement choisie.

Cette première remarque, dont on trouvera la démonstration dans le Mémoire cité, en entraîne immédiatement une seconde, qui se formule ainsi :

---

<sup>(1)</sup> Sur les systèmes partiels du premier ordre auxquels s'applique la méthode d'intégration de Jacobi, et sur le prolongement analytique de leurs intégrales (n° 9), Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 3<sup>e</sup> série, t. VII.

<sup>(2)</sup> Voir l'Introduction.

<sup>(3)</sup> Les systèmes d'équations aux dérivées partielles. n° 57, I.

Considérons le développement taylorien,

$$\sum \frac{h^m}{1.2 \dots m} \frac{k^n}{1.2 \dots n} \dots f_{u,v,\dots}^{(m,n,\dots)}(u, v, \dots),$$

correspondant à un point quelconque,  $(u, v, \dots)$ , de  $\mathfrak{f}$ ; dans ce développement, supprimons, suivant une loi donnée d'avance, certains termes, dont le nombre peut être limité ou illimité, et supposons que le développement partiel résultant de cette suppression contienne dans tous ses termes le facteur  $h^\mu k^\nu \dots$ , où  $\mu, \nu, \dots$  désignent certains entiers fixes (positifs ou nuls); puis, après suppression du facteur commun  $h^\mu k^\nu \dots$ , remplaçons chaque coefficient par son module, et les accroissements  $h, k, \dots$  par  $R_u, R_v, \dots$  respectivement : la somme (positive) finalement obtenue a, comme la précédente, une valeur,  $T(u, v, \dots)$ , entièrement déterminée pour tout point  $(u, v, \dots)$  du fragment  $\mathfrak{f}$ .

Je dis que, dans toute l'étendue du fragment, elle demeure, elle aussi, constamment inférieure à une quantité positive fixe convenablement choisie.

Il résulte en effet de la remarque précédente qu'en désignant par  $M$  une constante positive suffisamment grande, on a, dans toute l'étendue du fragment  $\mathfrak{f}$ ,

$$S(u, v, \dots) < M,$$

d'où, à plus forte raison,

$$R_u^\mu R_v^\nu \dots T(u, v, \dots) < M,$$

et enfin

$$T(u, v, \dots) < \frac{M}{R_u^\mu R_v^\nu \dots}.$$

[2] Soient :

$u$  une variable imaginaire;

$\mathfrak{R}_u$  une région normale extraite de l'espace  $[[u]]$ ;

$\mathfrak{A}_u$  un arc continu dépendant d'une indéterminée réelle, ne se réduisant pas à un point, ne passant pas deux fois par le même point, et entièrement situé dans la région  $\mathfrak{R}_u$ .

Cela étant, pour qu'une fonction  $f(u)$ , olotrope dans la région  $\mathfrak{R}_u$ , y soit identiquement nulle, il suffit qu'elle soit nulle tout le long de l'arc  $\mathfrak{A}_u$ , si peu étendu que soit cet arc.

Effectivement, si l'on désigne par  $u_0$  une valeur numérique de  $u$  choisie comme on voudra sur l'arc  $\mathfrak{A}_u$ , et que l'on pose  $u - u_0 = u'$ , la fonction  $f(u)$ , peut, pour

toutes valeurs de  $u$  suffisamment voisines de  $u_0$ , s'exprimer par la somme d'une série entière en  $u'$ . Cette somme, constamment nulle, en vertu de notre hypothèse, pour tous les points de l'arc  $\mathfrak{A}_u$  suffisamment voisins de  $u_0$ , s'annulera donc une infinité de fois à l'intérieur d'un cercle de rayon arbitrairement petit décrit du point zéro comme centre dans le plan de notation graphique de la variable  $u'$  : la série considérée aura, par suite, tous ses coefficients nuls<sup>(1)</sup>, c'est-à-dire que, pour  $u = u_0$ , la fonction  $f(u)$  s'annulera numériquement avec ses dérivées de tous ordres; elle sera donc identiquement nulle dans toute l'étendue de la région  $\mathfrak{A}_u$ <sup>(2)</sup>.

[3] Supposons qu'une fonction,  $H(u)$ , de la variable imaginaire  $u$  soit développable (en série de Taylor) à partir d'une certaine valeur initiale,  $u_0$ , de  $u$ , et qu'elle y ait pour valeur initiale  $U_0$ , sans se réduire identiquement à cette constante; les valeurs de la suite illimitée

$$H'(u_0), \quad H''(u_0), \quad H'''(u_0), \dots$$

ne peuvent en pareil cas s'annuler toutes : soit  $p$  le rang de la première d'entre elles qui ne s'annule pas.

Cela étant, l'équation

$$(1) \quad H(u) = U,$$

si on la considère exclusivement dans le voisinage de la solution numérique

$$u = u_0, \quad U = U_0,$$

a pour solution générale

$$u = \varphi \left[ (U - U_0)^{\frac{1}{p}} \right],$$

où  $(U - U_0)^{\frac{1}{p}}$  désigne toute racine  $p^{\text{ième}}$  de  $U - U_0$ , et où la composante  $\varphi(t)$ , développable en série de Maclaurin, satisfait à l'égalité numérique  $\varphi(0) = u_0$ , ainsi qu'à l'inégalité  $\varphi'(0) \neq 0$ .

En outre, si le module de  $U - U_0$  est suffisamment petit, sans être nul, celui de la quantité

$$u - u_0 = \varphi \left[ (U - U_0)^{\frac{1}{p}} \right] - u_0$$

(1) Les systèmes d'équations aux dérivées partielles, n° 35, II.

(2) Ibid., n° 57.

tombe au-dessous de tout nombre positif donné, sans être nul non plus, et les  $p$  valeurs de  $u$  qui correspondent respectivement aux  $p$  déterminations de  $(U - U_0)^{\frac{1}{p}}$  sont toutes distinctes entre elles.

Cette proposition, qui se rattache à une théorie bien connue, peut s'établir très simplement comme il suit :

I. Si, dans la série entière

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

(admettant quelque domaine de convergence), le coefficient  $a_1$  de la première puissance de  $x$  est différent de zéro, à deux valeurs distinctes de  $x$ , arbitrairement choisies dans un voisinage suffisamment rapproché de la valeur zéro, correspondent toujours deux valeurs distinctes de  $f(x)$ .

Effectivement, en vertu de l'hypothèse  $a_1 \neq 0$ , l'équation

$$(2) \quad f(x') = f(x''),$$

où se trouvent engagées les deux indéterminées  $x'$ ,  $x''$ , et qui admet la solution numérique évidente  $x' = 0$ ,  $x'' = 0$ , peut être résolue par rapport à  $x'$  à partir de cette solution numérique conformément au principe général des fonctions implicites : la formule de résolution est d'ailleurs, évidemment,  $x' = x''$ . Or, dans un voisinage suffisamment rapproché de la solution numérique initiale, elle équivaut entièrement, comme on sait, à l'équation (2).

II. Revenons à la proposition qu'il s'agit d'établir.

En posant, pour abrégér les notations,

$$u - u_0 = u', \quad U - U_0 = U',$$

$$\frac{H^{(p)}(u_0)}{1 \cdot 2 \dots p} = a \neq 0, \quad \frac{H^{(p+1)}(u_0)}{1 \cdot 2 \dots (p+1)} = b, \quad \frac{H^{(p+2)}(u_0)}{1 \cdot 2 \dots (p+2)} = c, \dots,$$

l'équation (1) prend la forme

$$(3) \quad U' = au'^p + bu'^{p+1} + cu'^{p+2} + \dots$$

Par la substitution

$$U' = az^p, \quad u' = z + wz^2,$$

elle devient

$$(4) \quad az^p = a(z + wz^2)^p + b(z + wz^2)^{p+1} + c(z + wz^2)^{p+2} + \dots,$$

puis, après suppression du facteur commun  $z^{p-1}$ ,

$$(5) \quad b + apw + zK(z, w) = 0,$$

où  $K(z, w)$  est développable (en série de Taylor) à partir des valeurs initiales  $z = 0$ ,  $w = -\frac{b}{ap}$ . Cette dernière équation admet manifestement la solution numérique

$$z = 0, \quad w = -\frac{b}{ap},$$

et, comme la dérivée partielle de son premier membre par rapport à  $w$ ,

$$ap + z \frac{\partial K}{\partial w},$$

est essentiellement différente de zéro pour ces mêmes valeurs, le principe général des fonctions implicites est applicable, et l'équation (5), par suite aussi l'équation (4), est identiquement vérifiée par la substitution à  $w$  d'une certaine série entière,  $\chi(z)$ , ayant pour terme constant  $-\frac{b}{ap}$ . L'équation (3), à son tour, est donc identiquement vérifiée quand on pose

$$U' = az^p, \quad u' = z + z^2\chi(z) = \psi(z)$$

[la série entière  $\psi(z)$  commençant par le terme  $z$ ], ou, ce qui revient au même, quand on pose

$$u' = \psi \left[ \left( \frac{U'}{a} \right)^{\frac{1}{p}} \right] = \psi \left[ \frac{U'^{\frac{1}{p}}}{a^{\frac{1}{p}}} \right].$$

En choisissant à volonté pour la quantité  $a^{\frac{1}{p}}$  l'une des  $p$  valeurs, essentiellement différentes de zéro, dont elle est susceptible, la formule précédente peut s'écrire

$$(6) \quad u' = \omega \left[ U'^{\frac{1}{p}} \right]$$

[la série entière  $\omega(t)$  commençant par le terme  $\frac{t}{a^{\frac{1}{p}}}$ ], et l'équation proposée (1)

est dès lors identiquement vérifiée pour

$$(7) \quad u = u_0 + \omega \left[ (U - U_0)^{\frac{1}{p}} \right] = \varphi \left[ (U - U_0)^{\frac{1}{p}} \right]$$

[la série entière  $\varphi(t)$  commençant par les termes  $u_0 + \frac{t}{a^p}$ , d'où  $\varphi(0) = u_0$ ,  $\varphi'(0) \neq 0$ ].

La formule (7) donne d'ailleurs la solution la plus générale de (1) dans un voisinage suffisamment rapproché de la solution numérique  $(u_0, U_0)$ ; ou, ce qui revient au même, la formule (6) donne la solution la plus générale de (3) dans un voisinage suffisamment rapproché de la solution numérique  $(0, 0)$ : car, si l'on suppose  $U' = 0$ , les deux équations (3) et (6) admettent l'une et l'autre la valeur  $u' = 0$  comme racine isolée, et, si l'on suppose  $U' \neq 0$ , l'équation (3) équivaut, moyennant les formules de transformation, à l'équation (5), dont la solution générale, obtenue à l'aide du théorème classique des fonctions implicites, se trouve exprimée par (6).

Observons enfin que, par suite de l'inégalité numérique  $\varphi'(0) \neq 0$ , à deux valeurs distinctes de  $t$  de modules suffisamment petits correspondent, d'après I, deux valeurs distinctes de  $\varphi(t)$ .

Cela étant, considérons le développement

$$\varphi(t) = u_0 + u_1 t + u_2 t^2 + \dots$$

$$\left( u_1 = \frac{1}{a^p} \right),$$

et soient

$$v_1, v_2, \dots$$

les modules respectifs des coefficients

$$u_1, u_2, \dots,$$

$\mu$  la racine  $p^{\text{ième}}$  arithmétique du module de  $U - U_0$  ( $\mu$  est, comme on sait, le module commun des  $p$  racines  $p^{\text{ièmes}}$  de  $U - U_0$ ): on a, évidemment, en se reportant à la formule (7),

$$\text{mod}(u - u_0) \leq v_1 \mu + v_2 \mu^2 + \dots$$

Or, lorsque le module de  $U - U_0$  est indéfiniment voisin de zéro, il en est de même de sa racine  $p^{\text{ième}}$ (<sup>1</sup>), donc aussi du second membre de l'inégalité précédente, et à plus forte raison du premier membre. D'ailleurs, puisque l'hypothèse  $U - U_0 = 0$  donne  $\varphi\left[\left(U - U_0\right)^{\frac{1}{p}}\right] = u_0$ , l'hypothèse  $U - U_0 \neq 0$  donnera nécessairement

(<sup>1</sup>) On sait en effet qu'en désignant par  $p$  un entier positif, et par  $z$  une variable indépendante assujettie à se mouvoir dans la région  $z \geq 0$ , la fonction (positive)  $\sqrt[p]{z}$  est continue (*Les Systèmes d'équations aux dérivées partielles*, n° 18, II).

$\varphi \left[ (U - U_0)^{\frac{1}{p}} \right] \neq u_0$ ; et puisque, dans l'hypothèse  $U - U_0 \neq 0$ , les  $p$  racines  $p^{\text{ièmes}}$  de  $U - U_0$  sont distinctes entre elles, les  $p$  valeurs correspondantes de  $u$  le seront également.

Ainsi se trouve établi notre énoncé.

*Si, notamment, l'entier  $p$  est  $> 1$ , c'est-à-dire si l'on a  $H'(u_0) = 0$ , on voit que, pour une valeur de  $U$  différente de  $U_0$  et indéfiniment voisine de  $U_0$ , l'équation  $H(u) = U$  admet comme racines, dans un voisinage indéfiniment rapproché de la valeur  $u_0$ , plusieurs valeurs de  $u$  distinctes entre elles.*

[4] La propriété que nous venons de rappeler entraîne immédiatement la suivante :

La fonction  $H(u)$  de la variable imaginaire  $u$  étant olotrope dans une région normale,  $\mathfrak{R}_u$ , de l'espace  $[[u]]$ , supposons qu'à deux valeurs *distinctes* de  $u$ , arbitrairement choisies dans cette région, correspondent toujours deux valeurs *distinctes* de  $H(u)$  : cela étant, la dérivée  $H'(u)$  reste *différente de zéro* dans toute l'étendue de la région  $\mathfrak{R}_u$ .

Désignant en effet par  $u_0$  un point particulier quelconque de cette région, posons  $H(u_0) = U_0$ , et considérons l'équation

$$(8) \quad U = H(u),$$

aux indéterminées  $u, U$  : son second membre,  $H(u)$ , développable en série taylorienne à partir de la valeur  $u_0$  de  $u$ , considérée comme initiale, ne peut évidemment, en vertu de nos hypothèses, se réduire identiquement à sa valeur initiale  $U_0$ . Cela étant, si l'on avait  $H'(u_0) = 0$ , il résulte de ce que nous venons d'établir (n° 3) que, pour une valeur de  $U$  différente de  $U_0$  et indéfiniment voisine de  $U_0$ , l'équation (8) admettrait comme racines, dans un voisinage indéfiniment rapproché de  $u_0$ , *plusieurs* valeurs de  $u$  distinctes entre elles : inversement donc, à ces valeurs de  $u$  distinctes entre elles correspondrait une valeur unique de  $U$ , ce qui est contraire à l'hypothèse.

Il convient d'ajouter ceci :

Désignons par  $\mathfrak{R}_U$  la région formée dans l'espace  $[[U]]$  par l'ensemble des points  $U$  qui, en vertu de la formule (8), correspondent respectivement aux divers points de la région  $\mathfrak{R}_u$  : la dérivée  $H'(u)$  restant, d'après ce qui précède, constamment différente de zéro dans toute l'étendue de cette dernière, il résulte d'une remarque exposée ailleurs<sup>(1)</sup> que *la formule (8) définit, entre les deux régions normales  $\mathfrak{R}_u$  et  $\mathfrak{R}_U$ , une correspondance olotrope point par point.*

(1) Sur les systèmes partiels du premier ordre auxquels s'applique la méthode d'intégration de Jacobi, et sur le prolongement analytique de leurs intégrales (n° 2 et 3), Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 3<sup>e</sup> série, t. VII.

[5] Lorsqu'une fonction imaginaire des variables réelles  $x, y, \dots$  est olotrope dans une région (normale) de l'espace  $[[x, y, \dots]]$ , chacun de ses deux éléments (considéré dans la région dont il s'agit) jouit de la même propriété.

Car si, dans le développement taylorien de la fonction, construit à partir d'un point quelconque de la région, on réduit les coefficients, d'abord à leurs premiers éléments, puis à leurs seconds éléments, les deux nouvelles séries entières qui en résultent représentent respectivement, dans le voisinage du point considéré, le premier et le second élément de la fonction.

[6] Le principe fondamental de la composition des fonctions olotropes, que nous avons eu mainte fois, dans un travail antérieur<sup>(1)</sup>, l'occasion de faire intervenir, donne lieu à une observation que, nonobstant son extrême simplicité, il est bon de noter.

Rappelons tout d'abord l'énoncé du principe en question :

*Si, d'une part, les fonctions simples*

$$(9) \quad U(x, y, \dots), \quad V(x, y, \dots)$$

sont toutes olotropes dans une région,  $\mathfrak{R}_{x,y,\dots}$ , de l'espace  $[[x, y, \dots]]$ ; si, d'autre part, la composante  $f(u, v, \dots)$  jouit de la même propriété dans une région,  $\mathfrak{R}_{u,v,\dots}$ , de l'espace  $[[u, v, \dots]]$ ; si enfin, pour un choix arbitraire du point  $(x, y, \dots)$  dans la première région, l'association des valeurs prises par les fonctions simples (9) donne un point constamment situé dans la seconde : les fonctions composées

$$f[U(x, y, \dots), V(x, y, \dots), \dots], \\ f_{u,v,\dots}^{(p,q,\dots)} [U(x, y, \dots), V(x, y, \dots), \dots],$$

où  $f_{u,v,\dots}^{(p,q,\dots)}(u, v, \dots)$  désigne la dérivée d'ordres partiels  $p, q, \dots$  de  $f(u, v, \dots)$ , ne peuvent manquer d'être olotropes dans la région  $\mathfrak{R}_{x,y,\dots}$ .

En outre, la dérivée première relative à  $x$  de la fonction composée

$$f[U(x, y, \dots), V(x, y, \dots), \dots]$$

est donnée par la formule

$$\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial V}{\partial x} + \dots,$$

où il faut, naturellement, faire dans  $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \dots$  les substitutions

$$u = U(x, y, \dots), \quad v = V(x, y, \dots), \quad \dots^{(2)}.$$

<sup>(1)</sup> Sur les séries bi-entières, etc., Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 3<sup>e</sup> série, t. XIII.

<sup>(2)</sup> Les systèmes d'équations aux dérivées partielles, nos 59 à 62.

Or, dans la démonstration ou l'application de cet énoncé, on suppose le plus souvent, ou bien que les deux groupes

$$\begin{aligned} x, y, \dots, \\ u, v, \dots \end{aligned}$$

se composent l'un et l'autre de variables *imaginaires*, ou bien qu'ils se composent l'un et l'autre de variables *réelles* : mais on peut supposer tout aussi bien que le groupe  $x, y, \dots$  se compose de variables *réelles*, et le groupe  $u, v, \dots$  de variables *imaginaires* <sup>(1)</sup>.

<sup>(1)</sup> Je saisis cette occasion, bien que la chose ne nous soit actuellement d'aucune utilité, pour donner une forme plus simple que je ne l'ai fait dans l'ouvrage cité (nos 66, 67 et 68) à la démonstration d'une proposition élémentaire concernant la différentiation des fonctions composées.

Considérons, en même temps que les variables indépendantes  $x, y, \dots$ , diverses fonctions *indéterminées*,  $U, V, \dots$ , de  $x, y, \dots$ , en nombre *donné*, et les dérivées de  $U, V, \dots$  d'ordre inférieur ou égal à l'entier donné  $k$  ( $k \geq 0$ ) : soit  $N$  le nombre total des quantités contenues dans le groupe que forment les variables  $x, y, \dots$ , les fonctions  $U, V, \dots$  et les dérivées dont il s'agit. Considérons d'autre part une composante *indéterminée* à  $N$  variables, et imaginons que ces dernières y aient été remplacées, les unes par  $x, y, \dots$ , les autres par  $U, V, \dots$  et les dérivées de  $U, V, \dots$  d'ordre inférieur ou égal à  $k$ . Si l'on calcule une dérivée d'ordre  $m$  ( $m \geq 1$ ) de la fonction composée résultante en appliquant plusieurs fois de suite la règle qui fournit les dérivées premières, il est manifeste que l'expression finalement obtenue ne contient que les dérivées d'ordres  $1, 2, \dots, m$  de la composante et les dérivées d'ordres  $1, 2, \dots, m + k$  de  $U, V, \dots$ , qu'elle a par rapport à toutes ces dérivées la forme entière, et qu'elle est linéaire et homogène par rapport à celles de la composante. Or, pour une dérivée déterminée d'ordre  $m$  de la fonction composée, cette suite d'opérations peut être effectuée de diverses manières : je dis qu'en considérant comme autant de variables indépendantes distinctes les dérivées d'ordres  $1, 2, \dots, m$  de la composante et les dérivées d'ordres  $1, 2, \dots, m + k$  de  $U, V, \dots$ , les diverses expressions ainsi obtenues pour une même dérivée d'ordre  $m$  de la fonction composée sont identiquement égales entre elles ; par exemple, deux expressions,  $\Delta'_{p,q,\dots}, \Delta''_{p,q,\dots}$ , obtenues pour la dérivée d'ordres partiels  $p, q, \dots$  ( $p + q + \dots = m$ ) présentent l'une par rapport à l'autre l'identité indiquée.

Si l'on suppose en effet que la composante, d'une part, et les fonctions  $U, V, \dots$ , d'autre part, soient de simples polynômes entiers, les valeurs attribuées aux variables  $x, y, \dots$  n'excéderont jamais les limites d'olotropie de  $U, V, \dots$ , et, de leur côté, les valeurs correspondantes de  $U, V, \dots$  n'excéderont jamais les limites d'olotropie de la composante : la règle de différentiation des fonctions composées n'implique donc en pareil cas aucune restriction.

Observons en outre qu'un polynôme de degré  $G$  à coefficients indéterminés a ses dérivées d'ordre supérieur à  $G$  toutes identiquement nulles, quelques valeurs numériques qu'on attribue aux coefficients (voir l'ouvrage cité, n° 51, 2°), et qu'on peut (d'une seule manière) déterminer numériquement ces derniers de telle façon que, pour des valeurs numériques arbitrairement données des variables dont il dépend, le polynôme et ses dérivées des ordres  $1, 2, \dots, G$  prennent des valeurs numériques arbitrairement données : si l'on désigne en effet par  $z, t, \dots$  les variables dont dépend le polynôme cherché, et par

Voici, de ce dernier cas, l'exemple le plus simple que l'on puisse donner.

Désignant par  $u$  une variable *imaginaire*, par  $\mathfrak{R}_u$  une région normale de l'espace  $[[u]]$ , et par  $x, y$  deux variables *réelles*, prenons comme *composante* une fonction,  $H(u)$ , *olotrope dans*  $\mathfrak{R}_u$ , et comme fonction *simple* le binôme  $x + iy$ . Cela étant, la fonction *composée*  $H(x + iy)$  ne peut manquer d'être olotrope dans la région de l'espace  $[[x, y]]$  dont la définition se déduit de celle de  $\mathfrak{R}_u$  par la simple substitution des notations  $x, y$  à celles qui désignent le premier et le second élément de  $u$ . Le fait se formule souvent d'une façon plus brève en disant que *la fonction composée*  $H(x + iy)$  *est olotrope dans*  $\mathfrak{R}_u$ .

$z_0, t_0, \dots$  les valeurs numériques choisies pour elles, il suffit, pour obtenir les différents termes de ce polynôme (développé à partir de  $z_0, t_0, \dots$ ), de considérer l'expression

$$A_{\alpha, \beta, \dots} \frac{(z - z_0)^\alpha}{1, 2, \dots, \alpha} \frac{(t - t_0)^\beta}{1, 2, \dots, \beta} \dots,$$

d'y supposer  $A_{\alpha, \beta, \dots} = 0$  toutes les fois que la somme  $\alpha + \beta + \dots$  surpasse  $G$ , et de prendre pour  $A_{\alpha, \beta, \dots}$ , dans le cas contraire, la valeur numérique assignée d'avance à la dérivée d'ordres partiels  $\alpha, \beta, \dots$ .

Cela posé, et en désignant par  $\Omega, \dots$  les dérivées des ordres  $1, 2, \dots, k$  de  $U, V, \dots$ , supposons qu'on prenne pour composante un polynôme entier de degré  $m$  (à  $N$  variables) dont les coefficients soient indéterminés, et pour les fonctions  $U, V, \dots$  autant de polynômes entiers de degré  $m + k$  (aux variables  $x, y, \dots$ ) dont les coefficients soient également indéterminés. D'après ce qui vient d'être dit, on peut tout d'abord déterminer numériquement les polynômes  $U, V, \dots$  de telle façon que, pour des valeurs numériques arbitrairement choisies de  $x, y, \dots$ , ces polynômes et leurs dérivées des ordres  $1, 2, \dots, m + k$  prennent des valeurs numériques arbitrairement choisies; cela fait, si l'on désigne par

$$x_0, y_0, \dots, \quad U_0, V_0, \dots, \quad \Omega_0, \dots$$

les valeurs numériques de

$$x, y, \dots, \quad U, V, \dots, \quad \Omega, \dots,$$

on pourra déterminer numériquement le polynôme entier de degré  $m$  qui joue le rôle de fonction composante, de telle façon que, pour

$$x = x_0, \quad y = y_0, \dots, \quad U = U_0, \quad V = V_0, \dots, \quad \Omega = \Omega_0, \dots,$$

ce polynôme et ses dérivées des ordres  $1, 2, \dots, m$  prennent des valeurs numériques arbitrairement choisies.

Les coefficients de ces divers polynômes étant ainsi fixés numériquement, désignons par  $F(x, y, \dots)$  le polynôme entier qui résulte de leur combinaison, et par  $F_{x, y, \dots}^{(p, q, \dots)}(x, y, \dots)$  la dérivée d'ordres partiels  $p, q, \dots$  de  $F(x, y, \dots)$ . Les expressions  $\Delta_{p, q, \dots}^1, \Delta_{p, q, \dots}^m$ , entières, comme il a été dit, par rapport aux dérivées d'ordres  $1, 2, \dots, m$  de la composante indéterminée et aux dérivées d'ordres  $1, 2, \dots, m + k$  des fonctions indéterminées  $U, V, \dots$  prennent toutes deux une même valeur numérique,

$$F_{x, y, \dots}^{(p, q, \dots)}(x_0, y_0, \dots),$$

On notera les points suivants :

1° Désignons par  $E(x, y)$ ,  $F(x, y)$  le premier et le second élément de la fonction composée olotrope  $H(x + iy)$ , nécessairement olotropes eux-mêmes dans la région  $\mathfrak{R}_n$  (n° 5); posons ensuite

$$(10) \quad X + iY = H(x + iy)$$

[ce qui équivaut aux deux relations simultanées  $X = E(x, y)$ ,  $Y = F(x, y)$ ], et notons graphiquement, d'abord la valeur imaginaire  $x + iy$ , ou, ce qui revient au même, le couple de valeurs réelles  $(x, y)$ , à l'aide de deux axes rectangulaires tracés dans un premier plan, puis, de même, la valeur imaginaire  $X + iY$ , ou, ce qui revient au même, le couple de valeurs réelles  $(X, Y)$ , à l'aide de deux axes rectangulaires tracés dans un deuxième plan. A tout point du premier plan situé dans la région  $\mathfrak{R}_n$  correspond, en vertu de la formule (10), un point du deuxième.

Cela étant, si, intérieurement à cette région, on trace une branche de courbe *analytique*, c'est-à-dire tout le long de laquelle  $x$  et  $y$  soient fonctions olotropes d'une même variable indépendante réelle, il résulte immédiatement du principe général de la composition des fonctions olotropes que la branche correspondante du deuxième plan est aussi une branche analytique.

2° Supposons que, dans toute l'étendue de la région  $\mathfrak{R}_n$ , la dérivée  $H'(u)$  soit différente de zéro. Cela étant, si, intérieurement à la région du premier plan, on trace une branche analytique sans point singulier (c'est-à-dire tout le long de laquelle  $dx$  et  $dy$  ne s'annulent jamais à la fois), la branche analytique (1°) qui lui correspond dans le deuxième plan ne présente pas non plus de point singulier.

On a en effet, en deux points correspondants de ces branches,

$$dX + i dY = H'(x + iy) \times (dx + i dy);$$

lorsqu'on attribue aux dérivées dont il s'agit les valeurs numériques précédemment choisies pour elles; ce choix étant d'ailleurs entièrement arbitraire, les deux expressions considérées ne peuvent manquer d'être identiquement égales.

Ainsi se trouve établi notre énoncé.

On en déduit immédiatement la conséquence suivante :

En désignant par  $U, V, \dots$  des fonctions indéterminées de  $x, y, \dots$ , en nombre donné, par  $k$  un entier donné ( $\geq 0$ ), par  $\Omega, \dots$  les dérivées des ordres  $1, 2, \dots, k$  de  $U, V, \dots$ , et par

$$f(x, y, \dots, u, v, \dots, \omega, \dots)$$

une composante déterminée, les diverses expressions auxquelles conduit, pour une même dérivée quelconque de la fonction composée, l'application répétée de l'algorithme fournissant les dérivées premières, sont identiquement égales entre elles quand on y considère  $x, y, \dots, U, V, \dots$ , et les dérivées de tous ordres de  $U, V, \dots$  comme autant de variables indépendantes distinctes.

or,  $H'(x + iy)$  étant différent de zéro, la relation  $dX + idY = 0$  entraînerait, contrairement à l'hypothèse,  $dy + idy = 0$ .

3° Soit  $u_0 = x_0 + iy_0$  un point de la région  $\mathfrak{R}_u$  : si pour  $u = u_0$ , la dérivée  $H'(u)$  est numériquement différente de zéro, le déterminant différentiel

$$(11) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial E}{\partial x} & \frac{\partial E}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \end{vmatrix}$$

ne peut manquer de l'être lui-même pour  $x, y = x_0, y_0$ .

De la relation

$$H(x + iy) = E(x, y) + iF(x, y)$$

on tire en effet

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial x} &= H'(x + iy), \\ \frac{\partial E}{\partial y} + i \frac{\partial F}{\partial y} &= iH'(x + iy), \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\partial E}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial x} + i \left( \frac{\partial E}{\partial y} + i \frac{\partial F}{\partial y} \right) = 0,$$

et, finalement,

$$\frac{\partial E}{\partial y} = - \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial E}{\partial x}.$$

Le déterminant différentiel (11) peut donc s'écrire, au signe près,

$$\left( \frac{\partial E}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2.$$

Pour qu'il fût nul en  $(x_0, y_0)$ , il faudrait qu'en ce point on eût à la fois  $\frac{\partial E}{\partial x} = 0$ ,

$\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ , ou

$$\frac{\partial E}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

c'est-à-dire  $H'(x_0 + iy_0) = 0$ , ou enfin  $H'(u_0) = 0$ , ce qui est contraire à l'hypothèse.

**Prolongement analytique d'une fonction de variable réelle  
remplissant certaines conditions.**

[7] Désignant par  $\theta$  une variable *réelle*, supposons qu'une fonction *imaginaire*,  $\omega(\theta)$ , de cette variable satisfasse à la triple condition suivante :

1° La fonction  $\omega(\theta)$  est *olotrope* dans toute l'étendue de l'espace réel  $[[\theta]]$ .

2° En désignant par  $h$  un entier arbitraire, la relation numérique  $\theta_1 - \theta_2 = 2h\pi$  entraîne comme conséquence nécessaire  $\omega(\theta_1) = \omega(\theta_2)$ ; en d'autres termes, la fonction  $\omega(\theta)$  admet la période  $2\pi$ . Inversement, la relation numérique  $\omega(\theta_1) = \omega(\theta_2)$  entraîne comme conséquence nécessaire  $\theta_1 - \theta_2 = 2h\pi$ , où  $h$  désigne quelque entier.

3° La dérivée première  $\omega'(\theta)$  de la fonction ne s'annule en aucun point de l'espace réel  $[[\theta]]$ .

Cela étant, si l'on considère  $\theta$  comme le premier élément d'une variable imaginaire,  $\xi = \theta + ir$ , notée graphiquement à l'aide de deux axes rectangulaires  $O\theta$ ,  $Or$ , on peut formuler la propriété suivante :

*La fonction  $\omega(\theta)$  peut se prolonger analytiquement (sans présenter aucune singularité) à l'intérieur de quelque bande indéfinie, parallèle à l'axe des quantités réelles  $O\theta$ , et s'étendant de part et d'autre de cet axe.*

*A l'intérieur de cette bande, la fonction ainsi prolongée,  $\omega(\xi)$ , admet la période  $2\pi$ , c'est-à-dire que la relation numérique  $\xi_1 - \xi_2 = 2h\pi$ , où  $h$  désigne un entier arbitraire, entraîne comme conséquence nécessaire  $\omega(\xi_1) = \omega(\xi_2)$ .*

*Enfin, à l'intérieur de quelque bande indéfinie parallèle à ce même axe  $O\theta$  et s'étendant de part et d'autre, la relation numérique  $\omega(\xi_1) = \omega(\xi_2)$  entraîne, inversement, comme conséquence nécessaire  $\xi_1 - \xi_2 = 2h\pi$ , où  $h$  désigne quelque entier.*

I. Si, dans l'espace réel  $[[\theta]]$ , on considère la région limitée et complète

$$0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

on peut<sup>(1)</sup> assigner quelque constante positive,  $\delta$ , telle que la fonction donnée  $\omega(\theta)$  admette un *olomètre* (au moins) égal à  $\delta$  dans toute l'étendue de cette région, et, par suite, à cause de la périodicité supposée, dans toute l'étendue de l'espace réel  $[[\theta]]$ .

---

(1) Voir le début du n° 1.

Considérons maintenant la variable imaginaire  $\xi = \theta + i\tau$ , et, dans son plan de notation graphique, menons deux parallèles à l'axe des quantités réelles qui en soient à la distance  $\delta$  de part et d'autre; nous délimiterons ainsi, dans le plan, une bande,  $\mathfrak{B}$ , d'épaisseur  $2\delta$ , parallèle à l'axe des quantités réelles, et ayant cet axe pour médiane. Si, désignant par  $\theta_0$  une valeur arbitrairement choisie sur l'axe réel, on décrit du point  $\theta_0$  comme centre un cercle de rayon  $\delta$ , le développement taylorien de la fonction donnée  $\omega(\theta)$ , construit à partir de la valeur initiale  $\theta_0$ , fournit manifestement, à l'intérieur du cercle, un prolongement analytique de la fonction. D'autre part, si l'on considère, intérieurement à la bande  $\mathfrak{B}$ , une valeur déterminée de  $\xi$ , il existe une infinité de cercles de rayon  $\delta$  ayant leur centre sur l'axe des quantités réelles, et auxquels la valeur considérée de  $\xi$  est intérieure. Pour établir la possibilité du prolongement analytique de  $\omega(\theta)$  à l'intérieur de la bande  $\mathfrak{B}$ , il suffit donc de faire voir que si l'on effectue, de la façon indiquée, le prolongement analytique de  $\omega(\theta)$  tour à tour à l'intérieur de deux pareils cercles, les deux fonctions olotropes de  $\xi$  ainsi obtenues sont égales l'une à l'autre dans la région (normale) commune.

Or, dans cette région commune, le fragment fourni par la considération exclusive des valeurs réelles de  $\xi$  se trouve défini par la formule  $\xi = \theta$ , où l'indéterminée réelle  $\theta$  reste arbitraire entre certaines limites. D'ailleurs, dans le fragment dont il s'agit, l'égalité des deux fonctions de  $\xi$  résulte immédiatement du fait qu'elles se réduisent alors l'une et l'autre à la fonction donnée  $\omega(\theta)$ . Elles sont donc, ainsi que nous voulions le prouver, identiquement égales l'une à l'autre dans toute l'étendue de la région commune (n° 2).

II. La possibilité du prolongement analytique de  $\omega(\theta)$  dans la bande  $\mathfrak{B}$  une fois établie, désignons par  $\omega(\xi)$  la fonction de variable imaginaire qui en résulte : je dis que  $\omega(\xi)$  admet la période  $2\pi$ . Effectivement, la fonction donnée  $\omega(\theta)$  de la variable réelle  $\theta$  l'admettant par hypothèse, la différence

$$\omega(\theta + 2\pi) - \omega(\theta),$$

fonction olotrope de  $\theta$  dans toute l'étendue de l'espace réel  $[[\theta]]$ , est identiquement nulle; par suite, la différence

$$\omega(\xi + 2\pi) - \omega(\xi),$$

fonction olotrope de la variable imaginaire  $\xi$  dans la région  $\mathfrak{B}$ , s'annule dans le fragment de cette région que définit la formule  $\xi = \theta$ , où l'indéterminée réelle  $\theta$  est entièrement arbitraire : donc, en vertu de la proposition qui fait l'objet du n° 2, elle est identiquement nulle dans toute l'étendue de la région  $\mathfrak{B}$ .

Ainsi, dans la bande  $\mathfrak{B}$ , la relation numérique  $\xi_1 - \xi_2 = 2h\pi$ , où  $h$  désigne un entier arbitraire, entraîne bien comme conséquence nécessaire  $\omega(\xi_1) = \omega(\xi_2)$ .

III. Il reste à faire voir que, dans une bande suffisamment mince parallèle à l'axe des quantités réelles et s'étendant de part et d'autre, la relation numérique  $\omega(\mathfrak{Z}_1) = \omega(\mathfrak{Z}_2)$  entraîne, inversement, comme conséquence nécessaire  $\mathfrak{Z}_1 - \mathfrak{Z}_2 = 2h\pi$ , où  $h$  désigne quelque entier. A cet effet, nous considérerons la fonction composée olotrope (n° 6)  $\omega(\theta + ir)$  des deux variables *réelles*  $\theta, r$ ; nous désignerons par  $\Phi(\theta, r), \Psi(\theta, r)$  ses deux éléments, également olotropes (n° 5), et dont chacun admet par rapport à  $\theta$  la période  $2\pi$ <sup>(1)</sup>, et nous établirons que, dans une bande suffisamment mince parallèle à l'axe  $O\theta$  et s'étendant de part et d'autre, les relations

$$(12) \quad \begin{cases} \Phi(\theta_1, r_1) = \Phi(\theta_2, r_2), \\ \Psi(\theta_1, r_1) = \Psi(\theta_2, r_2), \end{cases}$$

supposées vérifiées en même temps, entraînent comme conséquences nécessaires

$$r_1 - r_2 = 0, \quad \theta_1 - \theta_2 = 2h\pi,$$

où  $h$  désigne quelque entier. On peut d'ailleurs, à cause de la périodicité de  $\Phi(\theta, r)$  et  $\Psi(\theta, r)$  par rapport à la variable  $\theta$ , se borner à prouver que, dans une bande suffisamment mince, limitée aux deux valeurs  $\theta = 0, \theta = 2\pi$  (et les comprenant), les relations (12) ne peuvent être vérifiées en même temps que si l'on a à la fois

$$\begin{cases} r_1 - r_2 = 0, \\ \theta_1 - \theta_2 = \text{l'une des trois valeurs } 0, 2\pi, -2\pi. \end{cases}$$

Or, pour  $r = 0$ , les deux éléments,  $\Phi(\theta, r), \Psi(\theta, r)$ , de  $\omega(\theta + ir)$  se réduisent respectivement aux deux éléments,  $\varphi(\theta), \psi(\theta)$ , de  $\omega(\theta)$ ; on voit d'ailleurs, par le

(1) Puisqu'on a, quel que soit  $\mathfrak{Z}$  (imaginaire), l'identité

$$\omega(\mathfrak{Z} + 2\pi) = \omega(\mathfrak{Z}),$$

on aura, quels que soient  $\theta$  et  $r$  (réels), l'identité

$$\omega(\theta + ir + 2\pi) = \omega(\theta + ir),$$

ou

$$\omega[(\theta + 2\pi) + ir] = \omega[\theta + ir],$$

ou encore

$$\Phi(\theta + 2\pi, r) + i\Psi(\theta + 2\pi, r) = \Phi(\theta, r) + i\Psi(\theta, r),$$

ce qui entraîne séparément

$$\Phi(\theta + 2\pi, r) = \Phi(\theta, r), \quad \Psi(\theta + 2\pi, r) = \Psi(\theta, r).$$

simple rapprochement de l'hypothèse  $\omega'(\theta) \neq 0$ , qui a lieu quel que soit  $\theta$ , avec une remarque antérieure (n° 6, 3°), que, pour  $r = 0$ , le déterminant différentiel

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} & \frac{\partial \Phi}{\partial r} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} & \frac{\partial \Psi}{\partial r} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro quel que soit  $\theta$ . Il en résulte qu'en désignant par  $\theta_0$  une valeur numérique quelconque de  $\theta$ , et posant  $\varphi(\theta_0) = x_0$ ,  $\psi(\theta_0) = y_0$ , le système

$$(13) \quad \begin{cases} x = \Phi(\theta, r), \\ y = \Psi(\theta, r) \end{cases}$$

peut-être résolu par rapport à  $r$  et  $\theta$ , conformément au principe général des fonctions implicites, à partir de la solution numérique

$$r = 0, \quad \theta = \theta_0, \quad x = x_0, \quad y = y_0.$$

Si donc, dans le plan des axes  $O\theta$ ,  $Or$ , on trace, du point

$$r = 0, \quad \theta = \theta_0$$

comme centre, un carré suffisamment petit ayant ses côtés parallèles aux axes, les formules (13) établiront, comme on sait, une correspondance *point par point* entre l'intérieur de ce carré et une certaine région (normale) de l'espace  $[[x, y]]$ . En s'astreignant alors à ne considérer le couple  $(\theta, r)$  que dans l'intérieur du carré, il est manifeste que les relations (12), supposées vérifiées à la fois, entraînent de toute nécessité

$$r_1 = r_2, \quad \theta_1 = \theta_2.$$

Ainsi donc, si l'on considère sur la droite  $r = 0$  une valeur quelconque,  $\theta_0$ , il existe quelque constante positive,  $\delta_0$ , telle que, dans l'intérieur d'un carré parallèle aux axes ayant son centre au point  $\theta_0$  et ses côtés égaux en longueur à  $\delta_0$ , les relations (12), supposées vérifiées en même temps, entraînent comme conséquences nécessaires  $r_1 = r_2$ ,  $\theta_1 = \theta_2$ . Si l'on considère une autre valeur,  $\theta'_0$ , de la droite, il existe quelque constante positive analogue,  $\delta'_0$ . Il est visible d'ailleurs que, si le point  $\theta'_0$  est suffisamment voisin de  $\theta_0$ , on peut choisir  $\delta'_0$  de manière que sa différence à  $\delta_0$  soit moindre que toute quantité donnée. Il existe dès lors<sup>(1)</sup> quelque constante positive,  $\delta$ , possédant la propriété dont il s'agit en tout point de la droite  $r = 0$

(1) Les systèmes d'équations aux dérivées partielles, n° 13.

compris dans l'intervalle  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , et par suite, à cause de la périodicité de  $\Phi(\theta, r)$  et  $\Psi(\theta, r)$  par rapport à  $\theta$ , en tout point de la droite indéfinie  $r = 0$ .

Cela posé, partageons l'intervalle de  $0$  à  $2\pi$  en intervalles dont l'amplitude soit moindre que  $\frac{\delta}{2}$ , et soient

$$0, \theta', \theta'', \theta''', \dots, \theta^{(n)}, 2\pi$$

les valeurs de  $\theta$  qui limitent les intervalles partiels successifs.

Tout d'abord, si l'on fait varier respectivement  $\theta_1$  et  $\theta_2$  dans deux intervalles partiels qui ne soient pas à la fois les deux intervalles extrêmes, et qui soient séparés l'un de l'autre par un intervalle au moins, on peut se convaincre que, dans deux rectangles ayant pour médianes respectives ces deux intervalles partiels avec une hauteur suffisamment petite, les relations (12) sont incompatibles, ou, en d'autres termes, que l'expression

$$(14) \quad [\Phi(\theta_1, r_1) - \Phi(\theta_2, r_2)]^2 + [\Psi(\theta_1, r_1) - \Psi(\theta_2, r_2)]^2$$

ne peut s'annuler.

Effectivement,  $\theta_1$  et  $\theta_2$  étant supposés arbitrairement variables dans toute l'étendue de l'espace (réel)  $[[\theta]]$ , retranchons de l'expression (14) la quantité à laquelle elle se réduit pour  $r_1 = r_2 = 0$ , c'est-à-dire

$$(15) \quad [\varphi(\theta_1) - \varphi(\theta_2)]^2 + [\psi(\theta_1) - \psi(\theta_2)]^2,$$

désignons par  $\Delta$  la différence ainsi obtenue, et considérons le développement taylorien de  $\Delta$ , construit à partir de valeurs initiales nulles pour  $r_1, r_2$ , et quelconques (réelles) pour  $\theta_1, \theta_2$ : ce développement contient évidemment dans chacun de ses termes l'un au moins des deux facteurs  $r_1, r_2$ . Or si, avec les termes dont il s'agit, on forme deux groupes, le premier  $r_1 M_1$ , comprenant tous ceux où figure le facteur  $r_1$ , le second,  $r_2 M_2$ , tous les termes restants, il est facile de voir, en rapprochant d'une remarque antérieure (n° 1) la périodicité de  $\Delta$  relative à  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , que, pour une certaine valeur positive fixe,  $\varepsilon$ , attribuée à  $r_1, r_2$  et aux accroissements de  $\theta_1, \theta_2$ , la somme des modules des termes contenus soit dans le développement  $M_1$ , soit dans le développement  $M_2$ , reste constamment inférieure à une quantité positive fixe, quelles que soient les valeurs initiales choisies pour  $\theta_1, \theta_2$ . Il en résulte manifestement que, pour  $r_1$  et  $r_2$  numériquement assez petits, le module de  $\Delta$  tombe au-dessous de toute quantité donnée indépendamment des valeurs (réelles) attribuées à  $\theta_1, \theta_2$ .

D'autre part, il résulte de nos hypothèses sur  $\varphi(\theta), \psi(\theta)$  que, si l'on fait varier respectivement  $\theta_1$  et  $\theta_2$  dans deux intervalles partiels qui ne soient pas à la fois les deux intervalles extrêmes et qui soient séparés l'un de l'autre par un intervalle au

moins, l'expression (15) ne s'annule jamais, et reste constamment supérieure à une quantité positive fixe convenablement choisie.

En conséquence, pour  $r_1$  et  $r_2$  numériquement assez petits, et quels que soient  $\theta_1$  et  $\theta_2$  dans les limites qu'à l'instant même nous venons de leur assigner, l'expression (14), somme de l'expression (15) et de la différence  $\Delta$ , jouira de la même propriété : elle ne pourra donc jamais s'annuler, et les deux relations (12) seront incompatibles.

Il reste à examiner les trois cas où  $\theta_1$  et  $\theta_2$  varient respectivement, soit dans deux intervalles partiels identiques, soit dans deux intervalles contigus, soit dans les deux intervalles extrêmes.

Si les deux intervalles partiels sont identiques, leur amplitude, moindre que  $\frac{\delta}{2}$ , est, à plus forte raison, moindre que  $\delta$ , et il résulte de ce qui a été dit plus haut qu'en supposant  $r_1$  et  $r_2$  numériquement assez petits, les relations (12), supposées vérifiées à la fois, entraînent comme conséquences nécessaires

$$r_1 = r_2, \quad \theta_1 = \theta_2.$$

Si les deux intervalles partiels sont contigus, leur réunion forme un intervalle partiel d'amplitude moindre que  $\delta$ , et la conclusion précédente subsiste.

Enfin, si les deux intervalles partiels coïncident respectivement avec les deux extrêmes,

$$(16) \quad 0 \text{ à } \theta', \quad \theta^{(9)} \text{ à } 2\pi,$$

on observera qu'en substituant à ces derniers les intervalles respectifs

$$2\pi \text{ à } 2\pi + \theta', \quad \theta^{(9)} \text{ à } 2\pi,$$

on obtient deux intervalles contigus (d'amplitude moindre que  $\frac{\delta}{2}$ ) : comme ci-dessus, les relations (12), simultanément vérifiées, entraînent à titre de conséquences nécessaires, si  $r_1$  et  $r_2$  sont numériquement assez petits,

$$r_1 - r_2 = 0, \quad \theta_1 - \theta_2 = 0,$$

et  $\theta_1, \theta_2$  sont, en pareil cas, tous deux égaux à  $2\pi$ ; si donc on revient aux intervalles (16), l'une des valeurs  $\theta_1, \theta_2$  reste égale à  $2\pi$ , et l'autre devient égale à zéro, en sorte que l'on a

$$r_1 - r_2 = 0, \quad \theta_1 - \theta_2 = +2\pi \text{ ou } -2\pi.$$

En conséquence, dans l'intérieur d'une bande indéfinie suffisamment mince ayant

pour médiane la droite  $r = 0$ , les relations (12), supposées vérifiées à la fois, entraînent bien comme conséquences nécessaires

$$r_1 - r_2 = 0, \quad \theta_1 - \theta_2 = 2h\pi,$$

où  $h$  désigne quelque entier. C'est ce qu'il s'agissait d'établir.

### Etablissement d'une formule de correspondance point par point.

[8] Nous commencerons par rappeler diverses définitions relatives aux contours analytiques.

Par rapport à deux axes  $Ox, Oy$ , que nous supposerons rectangulaires, les formules

$$x = \varphi(\theta), \quad y = \psi(\theta),$$

où  $\varphi(\theta), \psi(\theta)$  désignent deux fonctions réelles de la variable réelle  $\theta$ , sont dites représenter un *contour analytique sans nœuds*, lorsque les fonctions  $\varphi(\theta), \psi(\theta)$  satisfont à la double condition ci-après :

1° Elles sont l'une et l'autre monotones dans toute l'étendue de l'espace réel  $[[\theta]]$ .

2° En désignant par  $h$  un entier arbitraire, la relation numérique  $\theta_1 - \theta_2 = 2h\pi$  entraîne comme conséquence nécessaire

$$(17) \quad \begin{cases} \varphi(\theta_1) = \varphi(\theta_2), \\ \psi(\theta_1) = \psi(\theta_2); \end{cases}$$

en d'autres termes, les fonctions  $\varphi(\theta), \psi(\theta)$  admettent l'une et l'autre la période  $2\pi$ . Inversement, les relations (17), supposées vérifiées à la fois, entraînent comme conséquence nécessaire

$$\theta_1 - \theta_2 = 2h\pi,$$

où  $h$  désigne quelque entier.

Si, en outre, les fonctions  $\varphi(\theta), \psi(\theta)$  sont telles, que leurs dérivées premières,  $\varphi'(\theta), \psi'(\theta)$ , ne s'annulent jamais en même temps, le contour dont il s'agit ne présente pas de point singulier, et on le qualifie de *régulier*.

Ces définitions peuvent être formulées d'une façon un peu différente, comme il suit :

La formule  $z = \omega(\theta)$ , où  $z$  désigne une variable imaginaire,  $\theta$  une variable

réelle, et  $\omega(\theta)$  une fonction (imaginaire) de  $\theta$ , est dite représenter un *contour analytique sans nœuds*, si la fonction  $\omega(\theta)$  remplit la double condition ci-après :

1° Elle est *olotrope* dans toute l'étendue de l'espace réel  $[[\theta]]$ .

2° En désignant par  $h$  un entier arbitraire, la relation numérique  $\theta_1 - \theta_2 = 2h\pi$  entraîne comme conséquence nécessaire

$$\omega(\theta_1) = \omega(\theta_2);$$

en d'autres termes, la fonction  $\omega(\theta)$  admet la période  $2\pi$ . Inversement, la relation  $\omega(\theta_1) = \omega(\theta_2)$  entraîne comme conséquence nécessaire

$$\theta_1 - \theta_2 = 2h\pi,$$

où  $h$  désigne quelque entier.

Si, en outre, la fonction  $\omega(\theta)$  est telle, que sa dérivée première,  $\omega'(\theta)$ , ne s'annule jamais, le contour dont il s'agit ne présente pas de point singulier, et on le qualifie de *régulier*.

[9] Désignant par  $\mathfrak{Z} = \theta + ir$  une variable imaginaire, et considérant, dans le plan de notation graphique de cette variable, une bande,

$$(18) \quad r_0 < r < R \quad (r_0 < R),$$

parallèle à l'axe des quantités réelles  $O\theta$ , supposons qu'à l'intérieur de cette bande une fonction donnée,  $\omega(\mathfrak{Z})$ , satisfasse à la double condition suivante :

1° La fonction  $\omega(\mathfrak{Z})$  est *olotrope* dans la bande (18).

2° En désignant par  $h$  un entier arbitraire, la relation numérique  $\mathfrak{Z}_1 - \mathfrak{Z}_2 = 2h\pi$  entraîne comme conséquence nécessaire  $\omega(\mathfrak{Z}_1) = \omega(\mathfrak{Z}_2)$ ; en d'autres termes, la fonction  $\omega(\mathfrak{Z})$  admet la période  $2\pi$ . Inversement, la relation  $\omega(\mathfrak{Z}_1) = \omega(\mathfrak{Z}_2)$ , supposée vérifiée pour deux points,  $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2$ , de la bande, entraîne comme conséquence nécessaire  $\mathfrak{Z}_1 - \mathfrak{Z}_2 = 2h\pi$ , où  $h$  désigne quelque entier.

Posons maintenant

$$z = \omega(\mathfrak{Z}),$$

et considérons, dans le plan de notation graphique de la variable imaginaire  $z$ , la région

$$(19) \quad \begin{cases} z = \omega(\theta + ir), \\ r_0 < r < R, \end{cases}$$

que décrit (avec répétition de points) cette deuxième variable, lorsque la première,  $\mathfrak{Z}$ , décrit la bande (18).

Désignant, d'autre part, la fonction exponentielle  $e^s$ , tantôt par la notation traditionnelle  $e^s$ , tantôt par la notation  $f(s)$ , indifféremment, posons

$$Z = f(i\mathfrak{Z}),$$

et considérons, dans le plan de notation graphique de la variable imaginaire  $Z$ , la couronne circulaire

$$(20) \quad \begin{cases} Z = e^{i(\theta + ir)}, \\ r_0 < r < R \end{cases}$$

(ou  $e^{-R} < \text{mod } Z < e^{-r_0}$ ), que décrit (avec répétition de points) cette troisième variable, lorsque la première,  $\mathfrak{Z}$ , décrit, comme ci-dessus, la bande (18).

Je dis qu'il existe une fonction,  $\Omega(Z)$ , jouissant des propriétés suivantes :

La formule

$$(21) \quad z = \Omega(Z)$$

défini (n° 4) une correspondance olotrope point par point entre la couronne circulaire (20) de l'espace  $[[Z]]$  et la région (19) de l'espace  $[[z]]$ ; deux points correspondants de ces régions respectives s'obtiennent en donnant à  $r$  et  $\theta$ , dans les formules

$$Z = e^{i(\theta + ir)}, \quad z = \omega(\theta + ir),$$

les mêmes valeurs respectives; enfin, si, à l'intérieur de la couronne circulaire (20), on considère une circonférence quelconque concentrique à cette couronne,

$$(22) \quad Z = e^{i(\theta + ir')} \quad (r_0 < r' < R),$$

la courbe correspondante,

$$(23) \quad z = \omega(\theta + ir'),$$

de la région (19) est un contour analytique régulier sans nœuds.

Effectivement, puisque la fonction  $\omega(\mathfrak{Z})$  est, par hypothèse, olotrope à l'intérieur de la bande (18), et qu'elle admet la période  $2\pi$ , elle peut, d'après ce qui a été vu dans un Mémoire antérieur<sup>(1)</sup>, se représenter, dans les mêmes limites, par la somme d'une série bi-entière en  $f(i\mathfrak{Z})$ ,

$$\omega(\mathfrak{Z}) = \dots + A_{-2}f^{-2}(i\mathfrak{Z}) + A_{-1}f^{-1}(i\mathfrak{Z}) + A_0 + A_1f(i\mathfrak{Z}) + A_2f^2(i\mathfrak{Z}) + \dots;$$

le changement de variable  $Z = f(i\mathfrak{Z})$  la transforme alors en une fonction,

$$\Omega(Z) = \dots + A_{-2}Z^{-2} + A_{-1}Z^{-1} + A_0 + A_1Z + A_2Z^2 + \dots,$$

---

<sup>(1)</sup> Sur les séries bi-entières, etc. (n° 11). Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 3<sup>e</sup> série, t. XIII.

olotrope dans la couronne circulaire (20)<sup>(1)</sup>, et donnant lieu, dans la bande (18), à l'identité

$$(23 \text{ bis}) \quad \Omega[f(i\zeta)] = \omega(\zeta).$$

De cette dernière il résulte d'abord que si, conformément à ce qui a été dit plus haut, on fait varier la quantité  $\zeta = \theta + ir$  dans toute l'étendue de la bande (18), les valeurs

$$z = \omega(\theta + ir), \quad Z = e^{i(\theta + ir)}$$

vérifient bien la relation  $z = \Omega(Z)$ .

D'ailleurs, si l'on désigne par  $Z_1, Z_2$  deux valeurs *distinctes*, intérieures à la couronne circulaire (et, dès lors, forcément différentes de zéro), les valeurs  $\Omega(Z_1), \Omega(Z_2)$  seront, elles aussi, nécessairement *distinctes*. Car, en considérant deux déterminations respectives quelconques,  $LZ_1, LZ_2$ , des logarithmes népériens de  $Z_1$  et  $Z_2$ , et posant

$$\zeta_1 = \frac{1}{i} LZ_1, \quad \zeta_2 = \frac{1}{i} LZ_2,$$

d'où

$$Z_1 = f(i\zeta_1), \quad Z_2 = f(i\zeta_2),$$

les points  $\zeta_1, \zeta_2$  seront intérieurs à la bande (18)<sup>(2)</sup>, et si l'on avait

$$\Omega(Z_1) = \Omega(Z_2), \quad \text{c'est-à-dire} \quad \Omega[f(i\zeta_1)] = \Omega[f(i\zeta_2)],$$

cette égalité, qui, en vertu de (23 bis), peut s'écrire

$$\omega(\zeta_1) = \omega(\zeta_2),$$

entraînerait, en vertu de nos hypothèses sur  $\omega(\zeta)$ ,

$$\zeta_1 - \zeta_2 = 2h\pi, \quad \text{d'où} \quad Z_1 = Z_2,$$

ce qui est contradictoire. La formule (21),  $z = \Omega(Z)$ , établit donc (n° 4) une correspondance olotrope point par point entre la couronne circulaire (20) et la région (19), et les points correspondants s'obtiennent comme l'indique l'énoncé.

Considérons enfin, dans ces régions respectives, la circonférence (22) et la courbe (23), qui se correspondent l'une à l'autre. Il est facile de voir que la courbe (23) est un contour analytique régulier sans nœuds (n° 8), car, en vertu de nos hypothèses sur  $\omega(\zeta)$ , le second membre,  $\omega(\theta + ir)$ , de la formule (23), qui dépend de la seule variable réelle  $\theta$ , remplit les diverses conditions suivantes : 1° Il est olotrope dans

(1) Sur les séries bi-entières, etc., n° 10, II.

(2) Ibid., n° 10.

toute l'étendue de l'espace (réel)  $[[\theta]]$ . 2° Il admet la période  $2\pi$ ; inversement la relation

$$\omega(\theta_1 + ir') = \omega(\theta_2 + ir')$$

entraîne comme conséquence nécessaire

$$(\theta_1 + ir') - (\theta_2 + ir') = 2h\pi,$$

c'est-à-dire

$$\theta_1 - \theta_2 = 2h\pi,$$

où  $h$  désigne quelque entier. 3° La dérivée du second membre de (23) a pour valeur

$$\omega'(\theta + ir') = ie^{i(\theta+ir')} \Omega[e^{i(\theta+ir')}],$$

et, par suite, est constamment différente de zéro, puisque en vertu du n° 4, le second membre,  $\Omega(Z)$ , de la formule (21) a une dérivée constamment différente de zéro.

Les divers points formulés dans notre énoncé se trouvent ainsi successivement établis.

### Exposé de la propriété qui fait l'objet du présent Mémoire.

[10] D'après ce qui a été vu au n° 8, la formule  $z = \zeta(\theta)$ , où  $z$  désigne une variable *imaginaire*, et  $\zeta(\theta)$  une fonction (imaginaire) de la variable *réelle*  $\theta$ , est dite définir un *contour analytique régulier sans nœuds*, lorsque la fonction  $\zeta(\theta)$  satisfait à la triple condition suivante :

1° Elle est olotrope dans toute l'étendue de l'espace (réel)  $[[\theta]]$ .

2° La relation numérique  $\theta_1 - \theta_2 = 2h\pi$ , où  $h$  désigne un entier arbitraire, entraîne comme conséquence nécessaire  $\zeta(\theta_1) = \zeta(\theta_2)$ ; en d'autres termes, la fonction  $\zeta(\theta)$  admet la période  $2\pi$ . Inversement la relation numérique  $\zeta(\theta_1) = \zeta(\theta_2)$  entraîne comme conséquence nécessaire  $\theta_1 - \theta_2 = 2h\pi$ , où  $h$  désigne quelque entier.

3° La dérivée première,  $\zeta'(\theta)$ , de la fonction reste différente de zéro dans toute l'étendue de l'espace (réel)  $[[\theta]]$ .

Cette notion étant rappelée, nous formulerons l'énoncé ci-après<sup>(1)</sup> :

---

(1) Celui que nous avons formulé au n° 5 du Mémoire *Sur les séries bi-entières, etc.* n'en est qu'un simple cas particulier.

Désignant par  $a, b, \dots$  des entiers algébriques indéterminés, en nombre  $n$ , on suppose que les divers systèmes de valeurs particulières dont ces entiers sont susceptibles se trouvent rangés suivant une loi arbitraire, mais sans omission ni répétition, sur la file illimitée

$$(a_1, b_1, \dots), \quad (a_2, b_2, \dots), \quad \dots, \quad (a_k, b_k, \dots), \quad \dots,$$

et on considère un système de  $2n + 1$  variantes associées,

$$\left\{ \begin{array}{l} u_k, v_k, \dots, \\ N_k, \\ v_k, \varphi_k, \dots, \end{array} \right.$$

défini comme il suit : les  $n$  premières,  $u_k, v_k, \dots$ , sont, pour toute valeur de l'indice  $k$ , des entiers algébriques rendant distinctes, entre elles les valeurs des  $k$  expressions

$$\left. \begin{array}{l} a_1 u_k + b_1 v_k + \dots, \\ a_2 u_k + b_2 v_k + \dots, \\ \dots, \dots, \dots, \\ a_k u_k + b_k v_k + \dots \end{array} \right\}$$

(comme nous l'avons rappelé dans l'Introduction, cette condition peut être réalisée d'une foule de manières); la variante suivante,  $N_k$ , est, pour toute valeur de  $k$ , un entier positif au moins égal à la plus grande des valeurs absolues de ces mêmes expressions; les  $n$  dernières,  $v_k, \varphi_k, \dots$ , sont réelles et complètement arbitraires,

Soient maintenant

$x, y, \dots$  des variables indépendantes imaginaires, en nombre  $n$ ;

$t_x, t_y, \dots$  des variables indépendantes réelles, en même nombre;

$\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y, \dots$  des régions normales<sup>(1)</sup> respectivement extraites des espaces imaginaires  $[[x]], [[y]], \dots$ ;

enfin,

$$(24) \quad x = \xi(t_x), \quad y = \eta(t_y), \dots$$

des contours analytiques réguliers sans nœuds, respectivement situés dans  $\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y, \dots$ .

Sur le système formé par l'association de ces  $n$  contours, on considère le groupe,  $g_k$ , des  $2N_k + 1$  points

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \xi \left( v_k + \frac{2l\pi u_k}{2N_k + 1} \right), \quad y = \eta \left( \varphi_k + \frac{2l\pi v_k}{2N_k + 1} \right), \dots \\ (l = 0, 1, 2, \dots, 2N_k). \end{array} \right.$$

(1) Voir *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, n° 41.

(obtenu en inscrivant dans chacun des  $n$  contours certain polygone de  $2N_k + 1$  sommets, et associant les sommets de même rang des  $n$  polygones).

Cela étant, si une fonction,  $f(x, y, \dots)$ , des variables imaginaires  $x, y, \dots$  est olotrope dans la région composée  $(\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y, \dots)$ , et si, quelque petite que soit la constante positive  $\omega$ , la suite formée par les groupes

$$(25) \quad \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_k, \dots$$

en renferme une infinité en tous les points desquels la fonction présente un module moindre que  $\omega$ , cette dernière est identiquement nulle dans toute l'étendue de la région  $(\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y, \dots)$ .

Par exemple, la nullité de la fonction en tous les points des groupes (25) entraîne sa nullité identique.

I. Désignant par  $z$  une variable imaginaire, considérons, dans le plan de notation graphique de cette variable, une région normale,  $\mathfrak{R}_z$ , et, dans la région  $\mathfrak{R}_z$ , une courbe fermée,  $C$ , définie par la formule

$$(26) \quad z = \zeta(\theta),$$

où  $\zeta(\theta)$  désigne une fonction imaginaire de la variable réelle  $\theta$ , continue dans toute l'étendue de l'espace (réel)  $[[\theta]]$ , et admettant la période  $2\pi$ . Je dis qu'on peut assigner une constante positive,  $\alpha$ , telle que le cercle de rayon  $\alpha$  décrit d'un point quelconque de la courbe  $C$  comme centre soit tout entier intérieur à la région  $\mathfrak{R}_z$ .

Effectivement, tous les points de la courbe fermée  $C$  peuvent se déduire de la formule (26) en faisant varier  $\theta$  dans l'intervalle (limité et complet)

$$(27) \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Puisque la courbe  $C$  est située dans la région  $\mathfrak{R}_z$ , et que cette dernière est normale, il existe, pour une valeur déterminée,  $\theta_0$ , du paramètre  $\theta$ , quelque constante positive,  $\alpha_0$ , telle que le cercle de rayon  $\alpha_0$  décrit du point correspondant de  $C$  comme centre soit tout entier intérieur à  $\mathfrak{R}_z$ . Pour une autre valeur,  $\theta_1$ , du paramètre, il existe quelque constante positive analogue,  $\alpha_1$ . Il est visible d'ailleurs que, si  $\theta_1$  est suffisamment voisin de  $\theta_0$ , on peut choisir  $\alpha_1$  de manière que sa différence à  $\alpha_0$  soit moindre que toute quantité donnée. Il existe donc, en vertu de propositions générales relatives aux régions à la fois limitées et complètes<sup>(1)</sup>, quelque constante positive,  $\alpha$ , possédant, dans toute l'étendue de l'intervalle (27), la propriété requise.

Cette conclusion est, notamment, applicable dans le cas où la formule (26) définit un contour analytique régulier sans nœuds.

<sup>(1)</sup> Les systèmes d'équations aux dérivées partielles, n<sup>os</sup> 10 et suivants.

II. Dans le plan de notation graphique d'une variable imaginaire,  $\mathfrak{Z}$ , considérons une bande parallèle à l'axe des quantités réelles, et supposons qu'une fonction,  $\zeta(\mathfrak{Z})$ , de cette variable soit continue dans la bande en question et admette la période  $2\pi$ . Désignant ensuite par  $\theta, r$  deux variables réelles, et par  $z$  une deuxième variable imaginaire, posons

$$(28) \quad z = \zeta(\theta + ir) :$$

le second membre  $\zeta(\theta + ir)$ , fonction des deux variables (réelles)  $\theta, r$ , est alors continu dans la bande considérée<sup>(1)</sup>, et il admet par rapport à  $\theta$  la période  $2\pi$ . Soit

$$(29) \quad r_0 < r < R \quad (r_0 < R)$$

la double inégalité qui définit la bande. Si l'on considère maintenant, dans le plan de la variable  $z$ , la région,  $\mathfrak{E}_z$ , formée par l'ensemble des points qui, en vertu de la formule (28), correspondent aux divers points de la bande, il résulte de cette périodicité et de cette continuité, en premier lieu que chaque point de  $\mathfrak{E}_z$  est obtenu une infinité de fois, et en second lieu que la région  $\mathfrak{E}_z$  est continue. Enfin, si, dans la formule (27), on attribue à  $r$  une valeur numérique,  $r'$ , choisie à volonté entre  $r_0$  et  $R$  ( $r_0 < r' < R$ ), il est clair que la formule résultante,

$$z = \zeta(\theta + ir'),$$

dont le second membre, fonction continue de la seule variable  $\theta$ , admet la période  $2\pi$ , définit, dans la région  $\mathfrak{E}_z$ , une courbe fermée.

Je dis que, une constante positive,  $\varepsilon$ , étant donnée, on peut assigner une constante positive,  $\beta$ , telle que, dans la région de l'espace  $[[z]]$  définie par les relations simultanées

$$(30) \quad \begin{cases} z = \zeta(\theta + ir'), \\ r' - \beta < r < r' + \beta, \end{cases}$$

la distance d'un point quelconque à un point convenablement choisi de la courbe  $r = r'$  tombe au-dessous de  $\varepsilon$ .

Désignant en effet par  $r_1, r_2$  deux valeurs numériques telles que l'on ait

$$r_0 < r_1 < r' < r_2 < R,$$

considérons, dans la bande (29) de l'espace  $[[\theta, r]]$ , le fragment limité et complet (de forme rectangulaire) défini par les relations

$$(31) \quad \begin{cases} r_1 \leq r \leq r_2, \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

<sup>(1)</sup> Les systèmes d'équations aux dérivées partielles, n° 18, III.

A cause de la continuité de  $\zeta(\mathfrak{E})$ , on peut assigner une constante positive,  $\gamma$ , telle que, deux points étant arbitrairement choisis dans le fragment sous la seule condition d'être à une distance mutuelle moindre que  $\gamma$ , la différence des valeurs correspondantes de  $\zeta(\theta + ir)$  présente un module moindre que  $\varepsilon$  : dans l'espace  $[[z]]$ , les deux points correspondants de la région  $\mathfrak{E}_z$  seront dès lors à une distance mutuelle moindre que  $\varepsilon$ . Cela étant, si, dans le fragment (31) de la bande (29), et de part et d'autre de la droite  $r = r'$ , on trace deux parallèles à cette droite qui en soient à une distance  $\beta$ , égale ou inférieure à  $\gamma$ , tout point compris entre ces deux parallèles sera à une distance moindre que  $\gamma$  de quelque point de la droite, et la région de l'espace  $[[z]]$  définie par les relations (30) jouira bien, dès lors, de la propriété énoncée.

III. Notre énoncé général est exact dans le cas où l'on a

$$\begin{aligned} \zeta(\theta_x) &= a_x e^{i\theta_x}, \\ \zeta(\theta_y) &= a_y e^{i\theta_y}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Chacun des  $n$  contours spécifiés par l'énoncé est alors, dans le plan de la variable à laquelle il correspond, une circonférence ayant pour centre l'origine et pour rayon l'une ou l'autre des quantités positives  $a_x, a_y, \dots$ . Ces  $n$  contours circulaires, que nous désignerons respectivement par  $C_x, C_y, \dots$ , se trouvent d'ailleurs, en vertu de notre hypothèse, respectivement situés dans les régions normales  $\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y, \dots$ . Enfin, d'après ce qui a été établi à l'alinéa I, on peut assigner une constante positive,  $\rho$ , telle :

Que le cercle de rayon  $\rho$  décrit, dans le plan des  $x$ , d'un point quelconque de  $C_x$  comme centre, soit tout entier dans la région  $\mathfrak{R}_x$ ;

Que le cercle de rayon  $\rho$  décrit, dans le plan des  $y$ , d'un point quelconque de  $C_y$  comme centre, soit tout entier dans la région  $\mathfrak{R}_y$ ;

Et ainsi de suite.

En supposant, ce qui est évidemment permis, que la constante  $\rho$  soit moindre à la fois que  $a_x, a_y, \dots$ , il est manifeste que les couronnes circulaires définies, dans les plans de notation graphique des  $n$  variables  $x, y, \dots$ , par les couples respectifs d'inégalités

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} a_x - \rho < \text{mod } x < a_x + \rho, \\ a_y - \rho < \text{mod } y < a_y + \rho, \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right.$$

sont situées dans les régions respectives  $\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y, \dots$ .

Cela posé, puisque la fonction  $f(x, y, \dots)$  est supposée olotrope dans la région  $(\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y, \dots)$ , elle l'est dans la région partielle formée par l'association des couronnes

circulaires (32), et l'on peut, dans toute l'étendue de cette dernière, l'exprimer par la somme d'une série bi-entière en  $x, y, \dots$  (1). Si l'on considère maintenant le groupe,  $g_k$ , des  $2N_k + 1$  points

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a_x e^{i\left(\frac{2l\pi u_k}{2N_k+1}\right)}, \\ y = a_y e^{i\left(\frac{2l\pi v_k}{2N_k+1}\right)}, \\ \dots\dots\dots \\ (l = 0, 1, 2, \dots, 2N_k), \end{array} \right.$$

et si l'on observe qu'en vertu de nos hypothèses la suite formée par les groupes

$$g_1, g_2, \dots, g_k, \dots$$

en renferme une infinité en tous les points desquels la fonction présente un module inférieur à une constante positive de petitesse arbitraire, il résulte d'une proposition établie dans un Mémoire antérieur (2) que les coefficients de cette série bi-entière sont tous nuls, que, dès lors, la fonction  $f(x, y, \dots)$ , est identiquement nulle dans la région (32), et qu'elle l'est, par suite, dans toute l'étendue de la région ( $\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y, \dots$ ).

IV. Examinons maintenant le cas général, et considérons les  $n$  contours analytiques réguliers (24), respectivement situés dans les  $n$  régions normales  $\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y, \dots$ .

D'après ce qui a été vu au n° 7, si l'on considère  $\theta_x$  comme le premier élément d'une variable imaginaire,  $\mathfrak{x} = \theta_x + ir_x$ , notée graphiquement à l'aide de deux axes rectangulaires, la fonction donnée  $\xi(\theta_x)$  peut se prolonger analytiquement, sans présenter aucune singularité, à l'intérieur de quelque bande indéfinie,

$$-\delta < r_x < \delta,$$

parallèle à l'axe des quantités réelles, s'étendant de part et d'autre de cet axe, et dans laquelle la fonction ainsi prolongée,  $\xi(\mathfrak{x})$ , jouit de la propriété suivante :

Elle admet la période  $2\pi$ . Inversement, la relation  $\xi(\mathfrak{x}_1) = \xi(\mathfrak{x}_2)$ , supposée vérifiée pour deux points,  $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ , de la bande, entraîne comme conséquence nécessaire  $\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2 = 2h\pi$ , où  $h$  désigne quelque entier.

Cela étant, il est aisé de se convaincre qu'en supposant la constante positive  $\delta$  suffisamment petite, la région de l'espace  $[[x]]$  définie par l'ensemble des relations

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \xi(\theta_x + ir_x), \\ -\delta < r_x < \delta \end{array} \right.$$

(1) Sur les séries bi-entières. etc., n° 12.

(2) Ibid.. n° 5.

est entièrement située dans  $\mathfrak{R}_x$ . Effectivement, on peut, en vertu de I, assigner une constante positive,  $\alpha$ , telle que le cercle de rayon  $\alpha$  décrit d'un point quelconque du contour  $r_x = 0$  comme centre soit entièrement situé dans  $\mathfrak{R}_x$ ; et, d'autre part, on peut, en vertu de II, assigner une constante positive,  $\delta$ , telle que, dans la région de l'espace  $[[x]]$  définie par (34), la distance d'un point quelconque à un point convenablement choisi du contour  $r_x = 0$  tombe au-dessous de  $\alpha$ : du simple rapprochement de ces deux points il résulte que, pour une pareille valeur  $\delta$ , la région (34) de l'espace  $[[x]]$  est bien, comme nous l'avions annoncé, située dans  $\mathfrak{R}_x$ .

Dès lors, et en vertu de la propriété qui fait l'objet du n° 9, on peut, par une formule de la forme  $x = \Xi(X)$ , établir une correspondance olotrope point par point entre deux régions respectivement extraites des espaces  $[[x]]$  et  $[[X]]$ , savoir: 1° Un certain fragment normal,  $\mathfrak{R}'_x$ , de  $\mathfrak{R}_x$ , contenant le contour  $x = \xi(\theta_x)$ ; ce fragment est défini par les relations (34), où l'on suppose  $\delta$  assez petit. 2° Une couronne circulaire,  $\mathfrak{C}_x$ , ayant son centre à l'origine, et contenant la circonférence (de même centre)  $X = e^{i\theta_x}$ ; cette couronne est définie par les relations

$$\begin{cases} X = e^{i\theta_x + ir_x}, \\ \delta < r_x < \delta, \end{cases}$$

où  $\delta$  a la même valeur. Dans ces deux régions respectives, le contour et la circonférence, fournis l'un et l'autre par l'hypothèse numérique  $r_x = 0$ , se correspondent mutuellement, et les points correspondants des deux courbes s'obtiennent en donnant à  $\theta_x$  des valeurs égales.

Semblablement, on peut, par une formule de la forme  $y = H(Y)$ , établir une correspondance olotrope point par point entre deux régions respectivement extraites des espaces  $[[y]]$  et  $[[Y]]$ , savoir: 1° Un certain fragment normal,  $\mathfrak{R}'_y$ , de  $\mathfrak{R}_y$ , contenant le contour  $y = \eta(\theta_y)$ . 2° Une couronne circulaire,  $\mathfrak{C}_y$ , ayant son centre à l'origine, et contenant la circonférence (de même centre)  $Y = e^{i\theta_y}$ . Dans ces deux régions respectives, le contour et la circonférence se correspondent mutuellement, et les points correspondants des deux courbes s'obtiennent en donnant à  $\theta_y$  des valeurs égales.

Et ainsi de suite.

Cela posé, effectuons sur la fonction donnée  $f(x, y, \dots)$  le changement de variables défini par les relations

$$x = \Xi(X), \quad y = H(Y), \dots$$

et soit  $F(X, Y, \dots)$  la fonction transformée. D'après les hypothèses formulées dans notre énoncé général, la fonction  $f(x, y, \dots)$  est olotrope dans la région  $(\mathfrak{R}'_x, \mathfrak{R}'_y, \dots)$ , et, quelque petite que soit la constante positive  $\omega$ , la suite formée par les groupes (25) en renferme une infinité en tous les points desquels cette même fonction  $f(x, y, \dots)$

présente un module moindre que  $\omega$  : donc la fonction  $F(X, Y, \dots)$  est olotrope dans la région  $(\mathfrak{C}_x, \mathfrak{C}_y, \dots)$ , et, si l'on désigne par  $\mathfrak{G}_k$  le groupe des  $2N_k + 1$  points

$$\left\{ \begin{array}{l} X = e^{i\left(\nu_k + \frac{2l\pi u_k}{2N_k + 1}\right)}, \\ Y = e^{i\left(\xi_k + \frac{2l\pi v_k}{2N_k + 1}\right)}, \\ \dots\dots\dots \\ (l = 0, 1, 2, \dots, 2N_k), \end{array} \right.$$

la suite formée par les groupes

$$\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \dots, \mathfrak{G}_k, \dots$$

en renferme une infinité en tous les points desquels cette même fonction  $F(X, Y, \dots)$  présente un module moindre que  $\omega$ . Or, en vertu de l'alinéa III, cette réunion de circonstances entraîne la nullité identique de  $F(X, Y, \dots)$  dans  $(\mathfrak{C}_x, \mathfrak{C}_y, \dots)$ : donc  $f(x, y, \dots)$  est identiquement nulle dans  $(\mathfrak{R}'_x, \mathfrak{R}'_y, \dots)$ , et, finalement, dans  $(\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y, \dots)$ .

C'est ce qu'il s'agissait d'établir.

[11] Dans le cas d'une variable unique, on peut formuler l'énoncé suivant :

Désignant par  $a$  un entier algébrique indéterminé, supposons que les diverses valeurs dont cet entier est susceptible se trouvent rangées suivant une loi arbitraire, mais sans omission ni répétition, sur la file illimitée

$$a_1, a_2, \dots, a_k, \dots,$$

et désignons par  $N_k$  une variante entière et positive qui, pour chaque valeur de l'indice  $k$ , soit au moins égale à la plus grande des valeurs absolues des  $k$  entiers algébriques  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , puis par  $\nu_k$  une variante réelle complètement arbitraire.

Considérons, d'autre part, dans une région normale,  $\mathfrak{R}$ , de l'espace (imaginaire)  $[[x]]$ , un contour analytique régulier sans nœuds,  $x = \xi(l)$ , et, sur ce contour, le groupe,  $\mathfrak{g}'_k$ , des  $2N_k + 1$  points

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \xi\left(\nu_k + \frac{2l\pi}{2N_k + 1}\right), \\ (l = 0, 1, 2, \dots, 2N_k). \end{array} \right.$$

Cela étant, si une fonction de la variable imaginaire  $x$  est ototrope dans la région  $\mathfrak{R}$ , et si, quelque petite que soit la constante positive  $\omega$ , la suite formée par les groupes

$$g'_1, g'_2, \dots, g'_k, \dots$$

en renferme une infinité en tous les points desquels la fonction présente un module moindre que  $\omega$ , cette dernière est identiquement nulle dans toute l'étendue de la région  $\mathfrak{R}$ .

Car, les  $k$  entiers  $a_1, a_2, \dots, a_k$  étant tous distincts entre eux, la variante  $u_k$ , spécifiée au numéro précédent, peut être prise constamment égale à 1, quel que soit  $k$ .

