

A. BUHL

Sur les formules fondamentales de l'électromagnétisme et de la gravifique

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3^e série, tome 15 (1923), p. 1-25

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1923_3_15__1_0

© Université Paul Sabatier, 1923, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANNALES
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

SUR LES FORMULES FONDAMENTALES
DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME ET DE LA GRAVIFIQUE

PAR M. A. BUHL

TROISIÈME MÉMOIRE

Ce troisième Mémoire conserve exactement l'esprit des deux précédents. Je n'ai d'autres points de départ que les identités

$$\int_C X dY = \int \int_A dX dY, \quad \int \int_S X dY dZ = \int \int \int_V dX dY dZ$$

qui donnent les deux formules stokiennes de l'espace-temps, c'est-à-dire deux formes différentielles fondamentales, l'une, *linéaire*, extension de $X dY$, l'autre, *bilinéaire*, extension de $X dY dZ$.

Avec cela on peut établir bien des choses sans hypothèses métriques spéciales⁽¹⁾; la métrique n'apparaît que lorsqu'on consent à diminuer la généralité en vertu d'hypothèses supplémentaires aisées à préciser.

De même, ce qu'on appelle ordinairement le Calcul tensoriel n'a rien d'indispensable, comme l'a prouvé, par exemple, M. Th. De Donder en écrivant une *Gravifique einsteinienne* basée sur le Calcul des variations.

En se tenant toujours le plus près possible des principes des Mathématiques, une

⁽¹⁾ Voir la Note placée à la fin du Mémoire.

théorie qui apparaît comme absolument fondamentale est celle des déterminants. Le Calcul tensoriel n'en est qu'un complément.

Les déterminants des formules stokiennes fondamentales peuvent subir des adjonctions qui ne changent point ces formules. Mais les dérivées partielles ordinaires, en ∂ , qui constituent, toujours dans ces formules, les composantes tourbillonnaires, se changent alors en dérivées plus générales, en D , lesquelles contiennent les dérivées covariantes comme cas particuliers.

La forme des dérivées en D ne repose donc en rien sur une détermination métrique et la métrique riemannienne n'apparaît que lorsqu'on consent à annuler les D de certains g_{ik} . Certains auteurs, intervertissant ces points, ont étudié d'abord une forme différentielle quadratique et ont fait ainsi des exposés qui, bien entendu, ne méritent aucune critique essentielle; il me semble seulement qu'il vaut mieux ne pas faire l'interversion en question et que la Gravifique a encore des progrès à faire quant à son ordination à partir de principes aussi peu nombreux que possible.

Ceci ne va toujours pas sans soulever des problèmes philosophiques susceptibles de tourmenter bien des esprits.

La forme des équations électromagnétiques de Maxwell-Lorentz-Einstein, *la forme* des équations canoniques hamiltoniennes, *la forme* des équations déterminant les métriques, *la forme* des lois de gravitation, ... ont toutes quelque chose de purement analytique, susceptible d'être ramené aux principes des Mathématiques, quelque chose qu'il importe justement de très bien préciser et qui est indépendant de ce qu'il convient ensuite de tirer de l'expérience ou de n'admettre que d'accord avec celle-ci.

D'où vient la légitimité du substratum purement mathématique?

La question est plus aisée à poser qu'à résoudre.

Pour moi, je crois simplement qu'une pensée mathématique correcte ne peut pas ne pas refléter l'Univers dont elle fait partie et que c'est ainsi que tant de théories mathématiques, considérées pendant longtemps comme des constructions abstraites, ont, tout à coup, pris figure de cadres merveilleux pour des théories physiques d'une extrême généralité.

*
* *

Le présent Mémoire aidera peut-être à expliquer l'évolution qui se manifeste en les théories einsteiniennes au fur et à mesure qu'elles sont mieux comprises.

Ces théories perdent indéniablement l'apparence mystique qu'elles avaient au début, ce qu'il n'y a certainement pas lieu de regretter. On entrevoit, de plus en plus, la possibilité d'en trouver des représentations dans l'espace euclidien, comme le fait, par exemple, M. Th. De Donder, en introduisant les ultra-électrons (*Interprétation physique de la Relativité générale*, Bulletin de l'Académie de Belgique, 1922-23).

Sans préciser autant, les considérations des pages suivantes pourraient conduire à présager quelque chose d'analogue. Nous partons d'expressions tourbillonnaires *euclidiennes* [celles qui se construisent avec les matrices (2) et (29)] et il se trouve que, sur ces expressions, se greffent les extensions de la gravifique einsteinienne proprement dite. Dès lors il serait invraisemblable que cette gravifique, constructible à partir de l'espace euclidien, ne puisse pas s'interpréter toute entière dans cet espace! Ceci n'implique nullement que les considérations non-euclidiennes doivent être abandonnées; dans bien des cas elles peuvent représenter la commodité maximum. Ce à quoi on doit s'habituer c'est justement à changer d'espace comme on change de coordonnées et c'est probablement poursuivre un insaisissable fantôme que de vouloir déterminer un espace *vrai*.

CHAPITRE PREMIER

Généralités tensorielles déduites de la première formule stokienne.

[1] *Tourbillon euclidien et déplacement parallèle.* — Nous partons toujours de l'identité fondamentale invoquée dans les deux Mémoires précédents, savoir

$$(1) \quad \int_C X dY = \int_A dX dY.$$

La succession de transformations également invoquée conduit à la première formule stokienne c'est-à-dire à la formule (2) du Mémoire II, formule qu'il est inutile de reproduire. D'ailleurs cette formule s'établirait aussi bien dans l'espace à n dimensions que dans l'espace à quatre et, dans ce cas général, l'intégrale double transformée de celle de (1) contiendrait un déterminant d'ordre n dont les deux dernières lignes pourraient s'écrire

$$(2) \quad \begin{array}{cccc} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} \\ \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n \end{array}$$

On peut dire que cette matrice contient les composantes d'un *tourbillon euclidien* considéré dans l'espace à n dimensions. Prenons l'une quelconque de ces composantes et envisageons l'identité

$$(3) \quad \left| \begin{array}{cc} \mathbf{D} & \mathbf{D} \\ \mathbf{D}x_i & \mathbf{D}x_j \\ \xi_i & \xi_j \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x_i} & \frac{\partial}{\partial x_j} \\ \xi_i & \xi_j \end{array} \right| - \left| \begin{array}{cc} \Gamma^x_{i\omega} & \Gamma^x_{j\omega} \\ \xi_{i\omega} & \xi_{j\omega} \end{array} \right|$$

dont le sens ne va pas sans quelques explications.

Le dernier déterminant de (3) doit se développer sous la forme

$$(4) \quad \Gamma^x_{ij}\xi_x - \Gamma^x_{ji}\xi_x,$$

les indices i et j qui, dans le déterminant, précèdent les ξ venant se substituer aux indices ω des fonctions Γ ; dans un tel cas, nous dirons que ω est un *indice de substitution*. Pour l'instant l'indice x ne joue encore aucun rôle.

Si, *hypothèse qui sera toujours faite*, on admet que

$$(5) \quad \Gamma_{ij}^{\alpha} = \Gamma_{ji}^{\alpha},$$

l'expression (4) est identiquement nulle et, par suite, les symboles D ne peuvent avoir, dans (3) ou dans la formule stokienne qui donne naissance à la matrice (2), d'autre effet global que les ∂ puisque le premier membre de (3) aura toujours même signification que le premier déterminant du second membre.

Mais ceci n'empêche pas qu'en identifiant terme à terme les deux membres de (3), on peut écrire

$$(6) \quad \frac{D\zeta_j}{Dx_i} = \frac{\partial\zeta_j}{\partial x_i} - \Gamma_{ij}^{\alpha} \zeta_{\alpha}$$

et une formule analogue où les indices i et j seraient intervertis, ce qui d'ailleurs n'ajoute rien puisque ces indices i et j sont jusqu'ici absolument quelconques.

On reconnaît, en (6), la *forme* de la *dérivée covariante* des composantes *covariantes* ζ_j d'un vecteur (ζ) de l'espace E_n .

L'équation

$$(7) \quad \frac{D\zeta_j}{Dx_i} \frac{dx_i}{ds} = \frac{d\zeta_j}{ds} - \Gamma_{ij}^{\alpha} \zeta_{\alpha} x'_i = 0$$

où i est indice de sommation, peut être considérée comme révélant la *forme* des équations du *parallélisme généralisé* de M. T. Levi-Civita.

On voit donc qu'il y a, en (6) et (7), des notions de première importance, d'ailleurs indissolublement liées, qui ne sont ni postulées ni bâties sur aucune convention spéciale sauf, si l'on veut, la convention (5) qui n'est qu'une convention de symétrie ou de simplicité maximum. Ce sont des propriétés extrêmement simples de déterminants du second ordre qui adjoignent, à la notion de *tourbillon euclidien*, les notions de *dérivation covariante* et de *déplacement parallèle*.

[2] *Composantes contravariantes d'un vecteur.* — La formule (3) n'est pas la seule intéressante du type. Nous écrirons de même

$$(8) \quad \left| \begin{array}{cc} \frac{D}{Dx_i} & \frac{D}{Dx_j} \\ \zeta^i & \zeta^j \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x_i} & \frac{\partial}{\partial x_j} \\ \zeta^i & \zeta^j \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} \Gamma_{i\alpha}^{\alpha} & \Gamma_{j\alpha}^{\alpha} \\ \zeta^{\alpha} & \zeta^{\alpha} \end{array} \right|,$$

le dernier déterminant devenant par développement

$$\Gamma_{i\alpha}^{\alpha} \zeta^{\alpha} - \Gamma_{j\alpha}^{\alpha} \zeta^{\alpha},$$

ce qui, cette fois, n'est pas nul. Ceci montre déjà que les composantes ξ^j ne sont pas les mêmes et ne peuvent avoir les mêmes propriétés que les composantes ξ_j . Néanmoins, les deux systèmes de composantes vont s'unir et se compléter de la manière la plus symétrique. De même que de (3) nous avons tiré (6), nous tirons de (8)

$$(9) \quad \frac{D\xi^j}{Dx_i} = \frac{\partial \xi^j}{\partial x_i} + \Gamma^j_{i\alpha} \xi^\alpha.$$

Avec (6) et (9), formons maintenant la combinaison

$$\xi^j \frac{D\xi_j}{Dx_i} + \xi_j \frac{D\xi^j}{Dx_i} = \xi^j \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} + \xi_j \frac{\partial \xi^j}{\partial x_i} - \Gamma^{\alpha}_{ij} \xi^\alpha \xi^j + \Gamma^j_{i\alpha} \xi^\alpha \xi_j.$$

Il est clair qu'ici une simplicité spéciale, analogue à celle invoquée en (5), se manifestera si α et j sont des indices de sommation pouvant prendre tous deux toutes les valeurs entières de 1 à n . Car alors

$$\Gamma^{\alpha}_{ij} \xi^\alpha \xi^j = \Gamma^j_{i\alpha} \xi^\alpha \xi_j$$

et par suite,

$$(10) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} (\xi^j \xi_j) = \xi^j \frac{D\xi_j}{Dx_i} + \xi_j \frac{D\xi^j}{Dx_i}.$$

Nous voilà donc dans la nécessité de considérer j comme un indice de sommation dans toutes les expressions telles que $\xi^j \xi_j$ où cet indice figure deux fois; de même α est indice de sommation dans toutes les formules qui précèdent, notamment dans (3), (6), (7), (8), (9). Moyennant quoi le symbole D de la dérivation covariante s'emploiera en (10) comme le ∂ de la dérivation partielle ordinaire.

Enfin quoique les fonctions Γ^{α}_{ij} soient encore fort indéterminées on peut cependant, dès maintenant, les dénombrer. Pour un α invariable ces fonctions forment une moitié de tableau carré limitée par une diagonale inclusivement; il y en a donc

$$\frac{n(n+1)}{2} \quad \text{d'où} \quad \frac{n^2(n+1)}{2}$$

quand α varie de 1 à n . Si l'on prend $n = 4$, on voit que, dans l'espace-temps à quatre dimensions, nos fonctions fondamentales doivent être au nombre de 40.

C'est la conclusion générale de MM. A.-S. Eddington^(*) et Th. De Donder^(*); on voit qu'ici elle apparaît immédiatement derrière l'identité (1) et la notion de tourbillon euclidien.

(*) The Mathematical Theory of Relativity, p. 227.

(*) Comptes rendus de l'Acad. des Sc. de Paris (11 juin, 9 et 23 juillet 1923).

[3] *Invariants.* — Soient deux vecteurs dont l'un (ξ) aura les composantes covariantes ξ_i , dont l'autre (τ) aura les composantes contravariantes τ^i . On aura

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{D\xi_i}{Dx_j} = \frac{\partial\xi_i}{\partial x_j} - \Gamma^{\alpha}_{ij}\xi^{\alpha}, \\ \frac{D\tau^i}{Dx_j} = \frac{\partial\tau^i}{\partial x_j} + \Gamma^i_{j\alpha}\tau^{\alpha}. \end{cases}$$

Traitant ces équations (11) comme on a déjà traité (6) et (9), on obtient de même

$$\tau^i \frac{D\xi_i}{Dx_j} + \xi_i \frac{D\tau^i}{Dx_j} = \tau^i \frac{\partial\xi_i}{\partial x_j} + \xi_i \frac{\partial\tau^i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau^i \xi_i).$$

Donc la propriété, signalée en (10) pour $\xi^j \xi_j$, existe aussi bien pour $\tau^j \xi_j$. On retrouve ainsi la propriété des *invariants* de se dériver avec les D comme avec les ∂ , propriété bien connue en Calcul tensoriel⁽¹⁾ et qu'on peut établir sans aucune particularisation des fonctions Γ^{α}_{ij} . D'ailleurs ce raisonnement ne fait que préparer des résultats encore plus généraux qui seront exposés aux paragraphes 10 et 11.

[4] *Les g_{ij} et leurs dérivées covariantes.* — Nous définirons des g_{ij} et, du même coup, des g^{ij} , au moyen des égalités

$$(12) \quad \xi_i = g_{ij} \xi^j, \quad \text{d'où} \quad \xi^i = g^{ij} \xi_j.$$

Comme à l'ordinaire, $g g^{ij}$ est le mineur de g_{ij} dans le déterminant g des g_{ij} .

Il faut remarquer que les relations (12) laissent indéterminées les g_{ij} puisque, jusqu'ici, les ξ_i et les ξ^i n'ont pas été déterminées et, même si ces dernières fonctions venaient à l'être, cela laisserait encore une très grande indétermination aux g_{ij} qui ne seraient alors assujettis qu'à n équations.

Dérivons partiellement (12) par rapport à une variable quelconque x_l . On a d'abord

$$\frac{\partial\xi_i}{\partial x_l} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \xi^j + g_{ij} \frac{\partial\xi^j}{\partial x_l}.$$

Si l'on remplace les dérivées partielles de ξ_i et ξ^j par leurs expressions tirées de (11), on peut écrire, après usage de la première relation (12) et de quelques permutations d'indices de sommation,

$$\frac{D\xi_i}{Dx_l} + \Gamma^{\alpha}_{il} g_{\alpha j} \xi^j = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \xi^j + g_{ij} \frac{D\xi^j}{Dx_l} - \Gamma^{\alpha}_{ij} g_{i\alpha} \xi^j$$

(1) Cf. A.-S. Eddington, *loc. cit.*, p. 63.

ce qui se réduit à

$$(12_a) \quad \frac{D\tilde{\xi}_i}{Dx_l} = g_{ij} \frac{D\tilde{\xi}^j}{Dx_l} + \tilde{\xi}^j \frac{Dg_{ij}}{Dx_l},$$

c'est-à-dire encore à une formule analogue à celle du calcul différentiel ordinaire, si l'on pose

$$(13) \quad \frac{Dg_{ij}}{Dx_l} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} - \Gamma^{\alpha}_{il} g_{\alpha j} - \Gamma^{\alpha}_{lj} g_{i\alpha}.$$

De même, en dérivant, par rapport à x_l , la seconde relation (12), un calcul tout semblable à celui qui vient d'être indiqué montre que le résultat de la dérivation partielle s'exprime sous la même forme, soit avec des ∂ soit avec des D , à condition de poser

$$(14) \quad \frac{Dg^{ij}}{Dx_l} = \frac{\partial g^{ij}}{\partial x_l} + \Gamma^i_{ul} g^{\alpha j} + \Gamma^j_{ul} g^{i\alpha}.$$

Enfin soit

$$(15) \quad g^i_j = g^{ip} g_{pj} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}.$$

Ce g^i_j est évidemment une expression très particulière mais, comme elle permet d'écrire

$$\tilde{\xi}_i = g^j_i \tilde{\xi}_j,$$

on peut encore dériver ceci, par rapport à x_l , sans s'inquiéter du caractère de g^j_i ; on a ainsi, après usage de (11) et quelques permutations d'indices,

$$\frac{D\tilde{\xi}_i}{Dx_l} + \Gamma^{\alpha}_{il} g^j_{\alpha} \tilde{\xi}_j = \frac{\partial g^j_i}{\partial x_l} \tilde{\xi}_j + g^j_i \frac{D\tilde{\xi}_j}{Dx_l} + \Gamma^j_{ul} g^{\alpha} \tilde{\xi}_j,$$

ce qui est

$$\frac{D\tilde{\xi}_i}{Dx_l} = g^j_i \frac{D\tilde{\xi}_j}{Dx_l} + \tilde{\xi}_j \frac{Dg^j_i}{Dx_l},$$

si l'on pose

$$(16) \quad \frac{Dg^j_i}{Dx_l} = \frac{\partial g^j_i}{\partial x_l} - \Gamma^{\alpha}_{il} g^j_{\alpha} + \Gamma^j_{ul} g^{\alpha} \tilde{\xi}_i$$

Résumons les formules (13), (14), (16) en le tableau

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{Dg^{ij}}{Dx_l} = \frac{\partial g^{ij}}{\partial x_l} + \Gamma^i{}_{\alpha l} g^{\alpha j} + \Gamma^j{}_{\alpha l} g^{i\alpha}, \\ \frac{Dg^j{}_i}{Dx_l} = \frac{\partial g^j{}_i}{\partial x_l} - \Gamma^\alpha{}_{il} g^j{}_\alpha + \Gamma^j{}_{\alpha l} g^\alpha{}_i, \\ \frac{Dg_{ij}}{Dx_l} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} - \Gamma^\alpha{}_{il} g_{\alpha j} - \Gamma^\alpha{}_{jl} g_{i\alpha}. \end{array} \right.$$

C'est le tableau bien connu des dérivées covariantes de composantes de tenseurs du second ordre. Nous tenons simplement à faire remarquer que la *forme* de ces dérivées est conditionnée uniquement par la notion de tourbillon euclidien et par les équations (12). Les formules (17) n'ont rien à voir avec un ds^2 ni avec aucune forme différentielle quadratique. Toutefois, on ne pourrait en dire autant quant aux formes *linéaires* car la matrice (2) provient d'une formule stokienne dont l'intégrale de ligne porte sur

$$\xi_1 dx_1 + \xi_2 dx_2 + \dots + \xi_n dx_n.$$

[5] *Remarques.* — Dans la *Mathematical Theory* déjà citée, A.-S. Eddington donne (p. 67) une formule (32.2) qui, avec les notations précédentes, peut s'écrire

$$\frac{DK_\mu}{Dx_\nu} - \frac{DK_\nu}{Dx_\mu} = \frac{\partial K_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial K_\nu}{\partial x_\mu}.$$

Ceci équivaut évidemment à notre formule (3) puisque, dans celle-ci, le dernier déterminant est identiquement nul. Ensuite le même auteur écrit

$$\frac{DK^\mu}{Dx_\nu} - \frac{DK^\nu}{Dx_\mu} \neq \frac{\partial K^\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial K^\nu}{\partial x_\mu}.$$

Ceci correspond à notre formule (8) qui se trouve alors être plus complète puisqu'elle révèle le terme d'où provient l'inégalité.

D'autres remarques, d'un caractère fondamental, pourraient être faites. Ne pourrait-on pas encore réduire les hypothèses faites dans ce qui précède? La forme *bilinéaire* $\xi^i \xi_j$, introduite en (10), est-elle indispensable?

Tout d'abord on peut remarquer qu'au début rien n'oblige à ce que les fonctions $\Gamma^\alpha{}_{ij}$ soient les mêmes dans (3) et dans (8). Si on les remplace, dans (8), par des $\Delta^\alpha{}_{ij}$, le système (11) est à remplacer par

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{D\xi^i}{Dx_j} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x_j} - \Gamma^\alpha{}_{ij} \xi^\alpha, \\ \frac{D\xi^i}{Dx_j} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x_j} + \Delta^i{}_{j\alpha} \xi^\alpha. \end{array} \right.$$

Dans ce cas, en partant de (12), on peut encore obtenir (12_a) à condition de poser

$$\frac{Dg_{ij}}{Dx_l} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} - \Gamma^x_{il} g_{ia} - \Delta^x_{lj} g_{ia}.$$

On aurait de même

$$\frac{Dg^{ij}}{Dx_l} = \frac{\partial g^{ij}}{\partial x_l} + \Delta^i_{al} g^{aj} + \Gamma^j_{al} g^{ia}.$$

Mais suivant que l'on pose

$$\xi_i = g^j_i \xi_j \quad \text{ou} \quad \xi^i = g^i_j \xi^j$$

on trouve

$$\frac{Dg^j_i}{Dx_l} = \frac{\partial g^j_i}{\partial x_l} - \Gamma^x_{il} g^j_a + \Gamma^j_{al} g^x_i,$$

ou

$$\frac{Dg^j_i}{Dx_l} = \frac{\partial g^j_i}{\partial x_l} - \Delta^x_{jl} g^i_a + \Delta^i_{al} g^x_j.$$

Or la diversité de ces résultats est inadmissible; on ne peut imaginer que les dérivées en D d'une même expression $g^j_i = g^j_i$ dépendent tantôt d'un système de fonctions Γ , tantôt d'un autre système de fonctions Δ . L'accord s'établit, au contraire, quand les deux systèmes de fonctions se réduisent à un seul. Alors le système (18) reprend la forme (11) et l'aspect formel des équations (17) redevient nécessaire en partant de la notion tourbillon euclidien, des équations linéaires (12) et de l'impossibilité, pour la seconde des dérivées (17), d'avoir deux définitions indépendantes l'une de l'autre.

[6] *Propriétés linéaires des dérivées en D d'un vecteur.* — Reprenons le système (11). Les premiers membres dépendent évidemment des deux indices i et j . Pouvons-nous poser

$$\xi_{ij} = \frac{D\xi_j}{Dx_i}, \quad \xi^i_j = \frac{D\xi^i}{Dx_j}$$

et, à l'imitation des équations (12), avoir

$$(19) \quad \xi_{ij} = g_{ia} \xi^a_j, \quad \xi^i_j = g^{ia} \xi_{aj}.$$

Si, dans ces relations (19), où les ξ à deux indices sont les dérivées en D qui

viennent d'être indiquées, on remplace ces ξ par leurs expressions (11), elles deviennent, après quelques permutations d'indices,

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{Dg_{i\beta}}{Dx_j} = \frac{\partial g_{i\beta}}{\partial x_j} - \Gamma^{\alpha}_{ij} g_{\alpha\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\beta j} g_{i\alpha} = 0, \\ \frac{Dg^{i\beta}}{Dx_j} = \frac{\partial g^{i\beta}}{\partial x_j} + \Gamma^i_{\alpha j} g^{\alpha\beta} + \Gamma^{\beta}_{\alpha j} g^{i\alpha} = 0. \end{array} \right.$$

Évidemment ces deux relations doivent avoir lieu ensemble de même que les équations (19) ont lieu ensemble.

Les deux systèmes, déduits de (11),

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi^i_{;j} \frac{dx_j}{ds} = g^{i\alpha} \xi^{\alpha}_{;j} \frac{dx_j}{ds} = 0 \\ \xi^i_{;j} \frac{dx_j}{ds} = g^{i\alpha} \xi^{\alpha}_{;j} \frac{dx_j}{ds} = 0 \end{array} \right.$$

ont également lieu ensemble. Les deux systèmes (21) équivalent alors à ceux sur lesquels M. T. Levi-Civita a fait originairement reposer sa théorie du déplacement parallèle (*Rendiconti*, Palerme, 1917). Ces systèmes sont explicitement

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{D\xi^i}{Dx_j} \frac{dx_j}{ds} = \frac{d\xi^i}{ds} - \Gamma^{\alpha}_{ij} \xi^{\alpha} x'_j = 0, \\ \frac{D\xi^i}{Dx_j} \frac{dx_j}{ds} = \frac{d\xi^i}{ds} + \Gamma^i_{j\alpha} \xi^{\alpha} x'_j = 0. \end{array} \right.$$

Ils sont *adjoints*⁽¹⁾ l'un de l'autre, admettent les intégrales $\xi_i \xi^i$ et $\xi_i \eta^i$ d'où la constance des formes quadratiques

$$g_{ij} \xi^i \xi^j, \quad g_{ij} \xi^i \eta^j.$$

C'est ainsi que maintenant, mais seulement maintenant, apparaît la métrique riemannienne, du moins si l'on admet que $g_{ij} = g_{ji}$. Enfin, en posant

$$\Gamma_{ij,l} = g_{\alpha l} \Gamma^{\alpha}_{ij} \quad \text{d'où} \quad \Gamma^l_{ij} = g^{\alpha l} \Gamma_{ij,\alpha},$$

rappelons que la première égalité (20), soit

$$\frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} = \Gamma_{ij,l} + \Gamma_{ij,i},$$

donne immédiatement

$$2\Gamma_{ij,l} = 2 \left[\begin{array}{c} ij \\ l \end{array} \right] = \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l}.$$

(1) Cf. E. GOURSAT. *Cours d'analyse*, t. II, 2^e édition, p. 481.

[7] *Principe de non interversion des dérivées en D. Symboles à quatre indices.* —
Le principe de non interversion des dérivées en D consiste en ce que l'on a

$$(23) \quad \begin{vmatrix} \frac{D}{Dx_\sigma} & \frac{D}{Dx_\nu} \\ \frac{DA_\mu}{Dx_\sigma} & \frac{DA_\mu}{Dx_\nu} \end{vmatrix} = A_\alpha B^{\alpha\nu\sigma} = -A_\alpha B^{\alpha\sigma\nu}$$

les $B^{\alpha\nu\sigma}$ n'étant pas nuls, comme s'il s'agissait dans le premier membre de dérivées partielles ordinaires, mais ayant pour expression

$$B^{\alpha\nu\sigma} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma} - \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} + \Gamma^{\beta}_{\mu\sigma} \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} - \Gamma^{\beta}_{\mu\nu} \Gamma^{\alpha}_{\beta\sigma}.$$

Il est entendu, d'après ce que nous avons vu au début du paragraphe précédent, que les dérivées figurant dans la seconde ligne du déterminant (23) sont traitées comme expressions à deux indices $A_{\mu\nu}$, $A_{\mu\sigma}$ et que, par suite, elles doivent subir la nouvelle dérivation comme g_{ij} dans la troisième formule (17). Tout ceci est bien connu mais la formule (23) peut être remplacée par d'autres qui conduiraient tout aussi bien aux $B^{\alpha\nu\sigma}$, à l'ordre des indices près. Ainsi l'on a

$$(24) \quad \begin{vmatrix} \frac{D}{Dx_\sigma} & \frac{D}{Dx_\nu} \\ \frac{DA^\mu}{Dx_\sigma} & \frac{DA^\mu}{Dx_\nu} \end{vmatrix} = A^\alpha B^{\mu\alpha\nu\sigma} = -A^\alpha B^{\mu\alpha\sigma\nu}.$$

Ici les dérivées à dériver doivent être considérées comme les g'_i dans la seconde formule (17) qui rend les mêmes services que la troisième bien qu'elle ait été établie de façon beaucoup plus particulière. Nous verrons d'ailleurs, dans le Chapitre suivant, un procédé tout à fait général et uniforme pour l'obtention de ces formules (17).

On vérifie aisément que

$$(25) \quad B^{\alpha\nu\sigma} + B^{\alpha\sigma\nu} + B^{\alpha\nu\sigma} = 0$$

mais il faut ajouter que cette identité exprime aussi que l'on a, quel que soit le vecteur A,

$$(26) \quad \begin{vmatrix} \frac{D}{Dx_\mu} & \frac{D}{Dx_\nu} & \frac{D}{Dx_\sigma} \\ \frac{D}{Dx_\mu} & \frac{D}{Dx_\nu} & \frac{D}{Dx_\sigma} \\ A_\mu & A_\nu & A_\sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Ceci se vérifie facilement en observant que (26) est la somme de (23) et de deux formules analogues déduites de (23) par permutations circulaires des indices. On a encore, en (26), un exemple de formule aussi bien vraie avec les D qu'avec les δ .

Le déterminant, analogue à celui de (26), mais où les indices des A seraient relevés, n'est pas identiquement nul.

[8] *Loi de gravitation d'Einstein.* — On donne généralement à cette loi la physionomie, en correspondance avec la formule (23),

$$g^{\alpha} B^{\beta}_{\alpha\sigma} = G_{\alpha\sigma} = 0.$$

Mais la formule (23) n'intervient ici que de manière détournée et peu explicite, le déterminant premier membre ne portant pas trace, sans développement, de l'indice α .

Il paraît préférable de recourir à (24) multipliée par g^{μ} , ce qui donne

$$(27) \quad \left| \begin{array}{cc} \frac{D}{Dx_{\sigma}} & \frac{D}{Dx_{\nu}} \\ \frac{DA^{\nu}}{Dx_{\sigma}} & \frac{DA^{\nu}}{Dx_{\nu}} \end{array} \right| = A^{\alpha} G_{\alpha\sigma} = 0.$$

Bien entendu, dans le déterminant ainsi constitué, ν est indice de sommation et σ ne l'est pas. La dissymétrie qu'on peut relever dans la formule (27) disparaît en remarquant qu'on peut aussi bien l'écrire, en utilisant le multiplicateur g^{μ}_{σ} ,

$$(28) \quad \left| \begin{array}{cc} \frac{D}{Dx_{\sigma}} & \frac{D}{Dx_{\nu}} \\ \frac{DA^{\sigma}}{Dx_{\sigma}} & \frac{DA^{\sigma}}{Dx_{\nu}} \end{array} \right| = -A^{\alpha} G_{\alpha\nu} = 0.$$

Ici, c'est σ qui est indice de sommation. La loi de gravitation revient alors à cet énoncé : *L'un des déterminants (27) ou (28) est toujours identiquement nul quel que soit le vecteur A.* Il est clair que ceci entraînera toujours la nullité des G à deux indices.

On peut développer directement le déterminant de l'égalité (27) d'où

$$G_{\alpha\sigma} = \frac{\partial}{\partial x_{\sigma}} \Gamma^{\nu}_{\alpha\nu} - \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \Gamma^{\nu}_{\sigma\alpha} + \Gamma^{\nu}_{\beta\sigma} \Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} - \Gamma^{\nu}_{\beta\nu} \Gamma^{\beta}_{\sigma\alpha},$$

mais c'est déjà là une question de calcul. La nature analytique et la symétrie de la loi de gravitation sont beaucoup mieux révélées par le déterminant (27), ou par (28) ou, mieux encore, par l'ensemble de ces deux déterminants.

Avec les notations de M. A.-S. Eddington, déjà partiellement adoptées dans ces deux derniers paragraphes quant aux indices μ, ν, σ , les équations (27) et (28) peuvent s'écrire plus simplement

$$A^{\nu}_{\nu\sigma} - A^{\nu}_{\sigma\nu} = 0,$$

$$A^{\sigma}_{\nu\sigma} - A^{\sigma}_{\sigma\nu} = 0.$$

Il n'entre pas dans le plan de ce Mémoire de revenir sur la signification des $B^*_{\mu\nu\sigma}$ et des $G_{\alpha\sigma}$ au point de vue de la courbure ni sur l'égalité $G_{\alpha\sigma} = G_{\sigma\alpha}$ qui, dans l'espace-temps, réduit à dix le nombre des équations $G_{\alpha\sigma} = 0$ auxquelles satisfont les dix potentiels gravifiques g_{ij} .

CHAPITRE II

Recours à la seconde formule stokienne. — Électromagnétisme.

[9] *Les M_{jk} et leurs dérivées en D.* — Comme il a déjà été indiqué dans les deux Mémoires précédents, la seconde identité fondamentale

$$\int \int_S X dY dZ = \int \int \int_V dX dY dZ$$

donne une formule stokienne contenant, sous l'intégrale triple, un déterminant (du quatrième ordre dans le cas de l'espace-temps à quatre dimensions) dont les trois dernières lignes contiennent des mineurs du type

$$(29) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} & \frac{\partial}{\partial x_j} & \frac{\partial}{\partial x_k} \\ M_{i\alpha} & M_{j\alpha} & M_{k\alpha} \\ i & j & k \end{vmatrix}$$

C'est cette seconde formule stokienne qui livre immédiatement *la forme* einsteinienne des équations de Maxwell-Lorentz c'est-à-dire les équations générales de l'Électromagnétisme. Nous allons voir maintenant, en raisonnant comme au paragraphe 1, qu'on peut aussi rattacher, à cette même formule stokienne, les formules (17) mais, cette fois, sans s'appuyer en rien sur des formules du type (12). Ce dernier type devient inutile en gravifique si l'on utilise convenablement les formules fondamentales électromagnétiques.

Quand les mineurs (29) sont véritablement ceux de la seconde formule stokienne, les M_{ij} qu'ils contiennent sont tels que $M_{ij} = -M_{ji}$ mais, pour commencer de manière plus générale, nous négligerons d'abord cette hypothèse.

Nous disons d'abord que *les mineurs (29) ne changeront pas si l'on y remplace les dérivations ∂ par des dérivations D telles que*

$$\begin{vmatrix} \frac{D}{Dx_i} & \frac{D}{Dx_j} & \frac{D}{Dx_k} \\ M_{i\alpha} & M_{j\alpha} & M_{k\alpha} \\ i & j & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} & \frac{\partial}{\partial x_j} & \frac{\partial}{\partial x_k} \\ M_{i\alpha} & M_{j\alpha} & M_{k\alpha} \\ i & j & k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \Gamma^{\alpha}_{i\alpha} & \Gamma^{\alpha}_{j\alpha} & \Gamma^{\alpha}_{k\alpha} \\ M_{i\alpha} & M_{j\alpha} & M_{k\alpha} \\ i & j & k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \Gamma^{\alpha}_{i\alpha} & \Gamma^{\alpha}_{j\alpha} & \Gamma^{\alpha}_{k\alpha} \\ i & j & k \\ M_{\alpha i} & M_{\alpha j} & M_{\alpha k} \end{vmatrix}$$

Les deux derniers déterminants se développeront comme il a été expliqué pour

(3) et (4); les indices *isolés* i, j, k viendront se substituer à ω . Ainsi le développement de l'avant-dernier déterminant est

$$\Gamma^{\alpha}_{ik} M_{j\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{ji} M_{k\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{kj} M_{i\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{ij} M_{k\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{jk} M_{i\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{ki} M_{j\alpha}$$

ce qui est identiquement nul en vertu de l'hypothèse (5) qui subsiste toujours.

Pour le dernier déterminant la conclusion est la même.

Mais ceci n'empêche pas que si l'on identifie terme à terme les deux membres développés de notre dernière égalité on a six formules du type

$$(30) \quad \frac{D}{Dx_i} M_{jk} = \frac{\partial}{\partial x_i} M_{jk} - \Gamma^{\alpha}_{ik} M_{j\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{ij} M_{\alpha k},$$

formules liées par permutations circulaires des indices i, j, k .

Le type (30) est donc bien un type de dérivation en D dont le symbole D peut être substitué au ∂ sous l'intégrale triple de la seconde formule stokienne.

N'oublions pas que, quand ceci est constaté dans cette formule stokienne, en laquelle $M_{jk} = -M_{kj}$, il n'en subsiste pas moins que (30) est valable pour des M_{jk} quelconques. Dans ces conditions, on pourrait déjà, à l'aide de (30), reconstruire (20) puis, en poursuivant le raisonnement comme après (20), parvenir ainsi à la forme différentielle *quadratique* de la métrique riemannienne. Ainsi s'établit un procédé simple et bref pour parvenir à cette forme quadratique en partant de la forme différentielle *bilinéaire* située sous l'intégrale double de la seconde formule stokienne.

[10] *Les M^j_k et leurs dérivées en D .* — Par analogie avec la formule (8) nous écrirons maintenant

$$\begin{vmatrix} \frac{D}{Dx_i} & \frac{D}{Dx_j} & \frac{D}{Dx_k} \\ M^i_{\omega} & M^j_{\omega} & M^k_{\omega} \\ i & j & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} & \frac{\partial}{\partial x_j} & \frac{\partial}{\partial x_k} \\ M^i_{\omega} & M^j_{\omega} & M^k_{\omega} \\ i & j & k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \Gamma^{\alpha}_{i\omega} & \Gamma^{\alpha}_{j\omega} & \Gamma^{\alpha}_{k\omega} \\ M^i_{\alpha} & M^j_{\alpha} & M^k_{\alpha} \\ i & j & k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Gamma^{\omega}_{i\alpha} & \Gamma^{\omega}_{j\alpha} & \Gamma^{\omega}_{k\alpha} \\ i & j & k \\ M^{\alpha}_i & M^{\alpha}_j & M^{\alpha}_k \end{vmatrix}.$$

L'avant-dernier déterminant est identiquement nul; le dernier ne l'est pas. La comparaison des développements terme à terme donne une nouvelle formule analogue à (30), savoir

$$(31) \quad \frac{D}{Dx_i} M^j_k = \frac{\partial}{\partial x_i} M^j_k - \Gamma^{\alpha}_{ik} M^j_{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{i\alpha} M^{\alpha}_k.$$

Celle-ci achèvera de se justifier par des considérations d'invariance analogues à celles des paragraphes 2 et 3. On prouvera que

$$(31_a) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} (N^k_j M^j_k) = N^k_j \frac{D}{Dx_i} M^j_k + M^j_k \frac{DN^k_j}{Dx_i},$$

ce qui est immédiat du fait que α, k, j sont indices de sommation.

[11] *Les M^{jk} et leurs dérivées en D.* — Enfin, poursuivant toujours la même analogie, nous écrivons

$$\begin{vmatrix} \frac{D}{Dx_i} & \frac{D}{Dx_j} & \frac{D}{Dx_k} \\ M^{i\omega} & M^{j\omega} & M^{k\omega} \\ i & j & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} & \frac{\partial}{\partial x_j} & \frac{\partial}{\partial x_k} \\ M^{i\omega} & M^{j\omega} & M^{k\omega} \\ i & j & k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Gamma_{i\alpha}^{\omega} & \Gamma_{j\alpha}^{\omega} & \Gamma_{k\alpha}^{\omega} \\ M^{i\alpha} & M^{j\alpha} & M^{k\alpha} \\ i & j & k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Gamma_{i\alpha}^{\omega} & \Gamma_{j\alpha}^{\omega} & \Gamma_{k\alpha}^{\omega} \\ i & j & k \\ M^{i\alpha} & M^{j\alpha} & M^{k\alpha} \end{vmatrix}.$$

Cette fois les deux derniers déterminants ne sont nuls ni l'un ni l'autre. Mais la formule

$$(32) \quad \frac{D}{Dx_i} M^{jk} = \frac{\partial}{\partial x_i} M^{jk} + \Gamma_{i\alpha}^k M^{j\alpha} + \Gamma_{i\alpha}^j M^{k\alpha}$$

donne

$$(32_a) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} (N_{jk} M^{jk}) = N_{jk} \frac{D}{Dx_i} M^{jk} + M^{jk} \frac{D}{Dx_i} N_{jk},$$

ce qui se vérifie comme précédemment. On voit qu'on a retrouvé, en (30), (31), (32) les formules du système (17). Une première conclusion, fort remarquable en elle-même, est que ces formules ont une constitution et une symétrie en relation fort intime avec la constitution et la symétrie des déterminants. On pourrait généraliser pour les dérivations en D d'expressions à un nombre quelconque d'indices.

[12] *Retour sur la loi de gravitation.* — On voit maintenant qu'on peut, si on le désire, arriver aux conclusions du Chapitre précédent avec beaucoup moins de frais que dans ce Chapitre. Pour base, rien que deux formes différentielles, l'une *linéaire*, l'autre *bilinéaire*; ce sont celles des formules stokiennes fondamentales. La première permet de définir le système (11), c'est-à-dire le déplacement parallèle généralisé; la seconde permet d'obtenir, comme nous venons de le voir dans ce Chapitre, les formules (30), (31), (32) qui permettent de dériver des expressions à deux indices pour lesquelles on pourra précisément prendre les dérivées en D des formules (11). On reviendra ainsi au principe de non intervention des dérivations en D (paragraphe 7), aux $B^{\alpha}_{\nu\sigma}$ qui, grâce à l'opérateur g^{α}_{σ} , ou à g^{μ}_{ν} , pour $B^{\mu}_{\alpha\nu\sigma}$, redonnent les G à deux indices de la loi de gravitation. Évidemment il faudra bien finir par mettre la métrique en évidence mais celle-ci correspond à l'équation (20),

$$\frac{Dg_{ik}}{Dx_i} = 0,$$

qui, dans notre exposé, se trouve construite à partir de principes fondamentaux dont elle ne fait point partie. L'idée correspond d'ailleurs à celle d'Eddington écrivant :

According to this mode of development the in-tensors $\star B^{\alpha\beta}$ and $\star G_{\alpha\beta}$ are the most fundamental measures of the intrinsic structure of the world. They take precedence of the $g_{\alpha\beta}$ which are only found at a later stage in our theory. (*The Mathematical Theory of Relativity*, pp. 215-216. Cambridge, 1923).

Seulement le mode de développement ici adopté nous paraît plus naturel que celui du savant anglais; notre *déplacement parallèle* est issu naturellement d'une identité fondamentale du Calcul intégral, à savoir l'identité (1).

[13] *Généralisations diverses des dérivées en D de symboles à deux indices.* — Les formules à quatre déterminants des paragraphes 9, 10, 11 peuvent être facilement généralisées. Il n'est pas obligatoire, dans toutes ces formules, d'avoir partout le même système de fonctions Γ .

Cependant, en remplaçant ce système unique par plusieurs, il faut prendre garde à ne pas introduire d'incompatibilités avec certaines parties des raisonnements déjà faits. Ainsi notre première formule à quatre déterminants se justifie seule, mais celle qui conduit à (31) ne se justifie qu'avec (31_a) et celle qui conduit à (32) ne se justifie qu'avec (32_a).

Dans ces conditions, on peut essayer de remplacer (30), (31), (32) par

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{D}{Dx_i} M_{jk} = \frac{\partial}{\partial x_i} M_{jk} - \Delta^x_{ik} M_{jx} - E^x_{ij} M_{ak}, \\ \frac{D}{Dx_i} M^j_k = \frac{\partial}{\partial x_i} M^j_k - Z^x_{ik} M^j_x + Z^j_{ix} M^x_k, \\ \frac{D}{Dx_i} M^jk = \frac{\partial}{\partial x_i} M^jk + \Delta^k_{ix} M^{jx} + E^j_{ix} M^{xk}. \end{array} \right.$$

Si, dans la seconde de ces formules, on ne prenait pas deux fois le système Z, la relation (31_a) serait détruite; si, dans la première et la troisième, on n'avait pas les mêmes systèmes Δ et E, c'est (32_a) qui ne subsisterait pas.

En supposant, pour l'instant, qu'il n'y ait pas nécessité de conserver encore autre chose, voyons ce qu'il advient si l'on tente d'aboutir encore à la loi de gravitation d'Einstein en partant des formules (33).

Prenons d'abord

$$\frac{DA_j}{Dx_k} = A_{jk} = \frac{\partial A_j}{\partial x_k} - \Gamma^x_{jk} A_x$$

et admettons que cette expression à deux indices puisse être traitée comme le M_{jk} de la première formule (33). Alors

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{D}{Dx_i} & \frac{D}{Dx_k} \\ \frac{DA_j}{Dx_i} & \frac{DA_j}{Dx_k} \end{array} \right| = A_x \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x_k} & \frac{\partial}{\partial x_i} \\ \Gamma^x_{jk} & \Gamma^x_{ji} \end{array} \right| + A_x \left| \begin{array}{cc} E^3_{ij} & E^3_{kj} \\ \Gamma^x_{ji} & \Gamma^x_{jk} \end{array} \right| - \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial A_x}{\partial x_i} & \frac{\partial A_x}{\partial x_k} \\ \Gamma^x_{ji} - E^x_{ji} & \Gamma^x_{jk} - E^x_{jk} \end{array} \right|.$$

Si les fonctions E sont les mêmes que les fonctions Γ , cette formule se réduit à

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{D}{Dx_i} & \frac{D}{Dx_k} \\ \frac{DA_j}{Dx_i} & \frac{DA_j}{Dx_k} \end{array} \right| = A_\alpha B^{\alpha}_{jki}$$

ce qui n'est autre chose que (23). Mais ce qu'il y a de plus remarquable en tout ceci, c'est que les fonctions Δ , introduites en (33), n'interviennent pas. Ainsi les équations électromagnétiques générales se laissent adjoindre des systèmes de fonctions, tels les Δ , les E, les Z de (33), systèmes qui sont plus généraux qu'il n'est nécessaire pour obtenir une loi de gravitation au moins quant à ce qui, en celle-ci, est formel et indépendant de la métrique.

Prenons encore

$$\frac{DA'}{Dx_k} = A^j_k = \frac{\partial A^j}{\partial x_k} + \Gamma^j_{k\beta} A^\beta$$

et admettons que cette expression à deux indices puisse être traitée comme le M'_k de la seconde formule (33). Alors

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{D}{Dx_i} & \frac{D}{Dx_k} \\ \frac{DA'}{Dx_i} & \frac{DA'}{Dx_k} \end{array} \right| = A^\alpha \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x_i} & \frac{\partial}{\partial x_k} \\ \Gamma^j_{i\alpha} & \Gamma^j_{k\alpha} \end{array} \right| + A^\alpha \left| \begin{array}{cc} Z^j_{i\beta} & Z^j_{k\beta} \\ \Gamma^{\beta}_{i\alpha} & \Gamma^{\beta}_{k\alpha} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial A^\alpha}{\partial x_i} & \frac{\partial A^\alpha}{\partial x_k} \\ \Gamma^j_{i\alpha} - Z^j_{i\alpha} & \Gamma^j_{k\alpha} - Z^j_{k\alpha} \end{array} \right|.$$

Si les fonctions Z sont les mêmes que les fonctions Γ , cette formule se réduit à

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{D}{Dx_i} & \frac{D}{Dx_k} \\ \frac{DA'}{Dx_i} & \frac{DA'}{Dx_k} \end{array} \right| = A^\alpha B^{\alpha}_{aik}$$

ce qui n'est autre chose que (24). Ici l'arbitraire est moindre que dans le cas précédent.

Pour revenir à celui-ci, on voit que le système généralisé (33) permet, de deux manières, avec les Δ quelconques et, en particulier, identiquement nuls, de passer de la forme des équations de l'électromagnétisme à la forme des tenseurs de courbure puis à la forme du $G_{\alpha\beta}$ de la loi de gravitation. Il faut particulariser bien davantage pour apercevoir la métrique, celle-ci correspondant à la première expression (33) égale à zéro et quand, de plus, les Δ et les E se réduisent aux Γ .

[14] Les B'_{ikl} et la première formule stokienne. — Rappelons, pour l'utilité de certaines comparaisons, que la première formule stokienne réagissant, pour ainsi dire, sur elle-même, peut conduire aux B'_{ikl} . Le tourbillon euclidien de cette formule nous a conduits au déplacement parallèle c'est-à-dire aux formules (11). Prenons d'abord la première formule (11) ou plutôt

$$(34) \quad \frac{D\xi_i}{Dx_j} dx_j = d\xi_i - \Gamma^x_{ij} \xi_x dx_j.$$

Par analogie avec le théorème de la différentielle exacte prise le long d'un contour fermé, on peut chercher à intégrer le premier membre de (34) le long d'un tel contour.

Nous n'écrivons pas toute l'intégrale double correspondante; contentons-nous d'un mineur extrait de la matrice (2), mineur qui est

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_k} & \frac{\partial}{\partial x_l} \\ \Gamma^x_{ik} \xi_x & \Gamma^x_{il} \xi_x \end{vmatrix} = \xi_l B'_{ikl} - \begin{vmatrix} \Gamma^x_{ik} & \Gamma^x_{il} \\ \frac{D\xi_x}{Dx_k} & \frac{D\xi_x}{Dx_l} \end{vmatrix}.$$

De même à la seconde formule (11) ou plutôt à

$$(35) \quad \frac{D\xi^i}{Dx_j} dx_j = d\xi^i + \Gamma^i_{jx} \xi^x dx_j$$

correspondent des mineurs du type

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_k} & \frac{\partial}{\partial x_l} \\ \Gamma^i_{xk} \xi^x & \Gamma^i_{xl} \xi^x \end{vmatrix} = \xi^l B^i_{ikl} - \begin{vmatrix} \Gamma^i_{xk} & \Gamma^i_{xl} \\ \frac{D\xi^x}{Dx_k} & \frac{D\xi^x}{Dx_l} \end{vmatrix}.$$

En somme, de tels mineurs combinés avec les dérivées, en D, de composantes ξ_x ou ξ^x révèlent, une fois de plus, les B à quatre indices. C'est la méthode employée par Eddington (*Math. Theory*, p. 214) dans le cas d'un contour infiniment petit, cas dans lequel l'auteur croit pouvoir se dispenser des deux déterminants qui ici complètent les termes en B.

Quoiqu'il en soit on a ces B, appelés $\star B^s_{\mu\nu}$ par Eddington, et l'on peut en déduire les $\star G_{\mu\nu}$ qui peuvent, à leur tour, servir de base à une métrique généralisée.

Mais la méthode précédemment exposée et qui aboutit notamment au système (33) nous paraît préférable; elle s'inspire de l'extrême généralité du champ électromagnétique, elle permet les généralisations d'Eddington et permet, en outre, si on le désire, de revenir très simplement à la métrique riemannienne.

[15] *Déterminants correspondant à la métrique riemannienne.* — Admettons que l'on soit revenu, par une méthode quelconque, à la métrique riemannienne. Donc

$$(36) \quad ds^2 = g_{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta.$$

En posant

$$\frac{dx_\alpha}{ds} = u^\alpha, \quad \frac{dx_\beta}{ds} = u^\beta,$$

on a

$$(37) \quad W^2 = g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = g^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta = 1.$$

Bien entendu les égalités fondamentales du type (12) recommencent ici à jouer. Ainsi

$$g_{\alpha i} u^i = g_{\alpha 1} u^1 + g_{\alpha 2} u^2 + g_{\alpha 3} u^3 + g_{\alpha 4} u^4 = u_\alpha, \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

$$u_i u^i = u_1 u^1 + u_2 u^2 + u_3 u^3 + u_4 u^4 = W^2.$$

Si, entre ces cinq équations, on élimine u^1, u^2, u^3, u^4 , le résultat peut s'écrire

$$(38) \quad W^2 = -\frac{1}{g} \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} & u_1 \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} & u_2 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} & u_3 \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} & u_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 \end{vmatrix}.$$

De même, et en utilisant des résultats bien connus⁽¹⁾ sur les déterminants formés avec les mineurs d'un autre,

$$(39) \quad W^2 = -g \begin{vmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} & g^{14} & u^1 \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} & g^{24} & u^2 \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} & g^{34} & u^3 \\ g^{41} & g^{42} & g^{43} & g^{44} & u^4 \\ u^1 & u^2 & u^3 & u^4 & 0 \end{vmatrix}.$$

Bien entendu ces déterminants, exprimant deux formes de W^2 , sont identiques à ceux que l'on rencontre en Mécanique analytique⁽²⁾ quand on passe des variables

⁽¹⁾ Cf. WEBER, *Traité d'Algèbre supérieure* (traduction J. Griess), p. 118; M. BÖCHER, *Einführung in die höhere Algebra* (traduction H. Beck), p. 36.

⁽²⁾ P. APPELL, *Traité de Mécanique*, 3^e édition, t. I, p. 553.

de Lagrange aux variables d'Hamilton. Nous ne faisons que rappeler l'association classique d'une forme quadratique avec son adjointe mais ceci n'était pas inutile à cause de l'analogie qui va se présenter, au paragraphe suivant, à propos du champ électromagnétique.

Dans le champ massique, pour reprendre, sous une forme un peu différente, un raisonnement de M. De Donder⁽¹⁾, observons que la condition

$$(40) \quad W^2 - 1 = 0$$

fournit, en vertu du principe d'Hamilton généralisé,

$$\delta \int \frac{\mu}{2} (W^2 - 1) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = 0,$$

en désignant par μ une fonction de x_1, x_2, x_3, x_4 seulement. Pour *fonction caractéristique* Λ_m du champ massique, on peut donc prendre la fonction déterminée par

$$\sqrt{-g} \Lambda_m = \frac{\mu}{2} (W^2 - 1) \equiv \frac{\mu}{2} W^2$$

car les δx_i sont nuls. Ainsi

$$(41) \quad 2\Lambda_m \sqrt{-g} = \mu W^2.$$

[16] *Extension, au champ électromagnétique, des déterminants précédents.* — Pour *fonction caractéristique* Λ_e du champ électromagnétique on peut d'abord essayer de prendre, toujours comme M. De Donder⁽²⁾, la fonction déterminée par

$$(42) \quad 8\Lambda_e \sqrt{-g} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \begin{vmatrix} & & & & M_{10} & 1 \\ & & & & M_{20} & 2 \\ & & & & M_{30} & 3 \\ & & & & M_{40} & 4 \\ \hline M_{10} & M_{20} & M_{30} & M_{40} & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ceci est d'ailleurs la formule (14) de notre premier Mémoire. L'analogie de (38) et de (42) saute aux yeux. On peut même la rendre encore plus frappante. Si, dans (38), on considère le diviseur g qui est devant le déterminant comme faisant partie de la bordure en u_i , cette bordure donne des termes, en $u_i u_k : g$, qui sont d'ordre -2 par rapport aux g_{ij} . Il en est de même dans (42), les M_{ij} ne contenant pas les g_{ij} .

(1) TH. DE DONDER, *Gravifique einsteinienne*, Chap. III.

(2) *Loc. cit.*, Chap. V.

De plus les mineurs

$$\begin{vmatrix} M_{i\omega} & M_{j\omega} \\ i & j \end{vmatrix} = M_{ij} - M_{ji} = 2M_{ij}$$

contiennent naturellement le facteur 2 d'où, dans le développement du second membre de (42), un facteur 4 qui changera le 8 du premier membre en un 2; ce premier membre aura alors exactement la physionomie du premier membre de (41).

On pourrait aisément remplacer (42) par une formule à indices relevés qui jouerait le rôle de (39); cette troisième analogie serait toutefois sans utilité pour la suite.

Rappelons encore que (42) peut s'écrire

$$(43) \quad 8\Lambda_e \sqrt{-g} = \begin{vmatrix} M_{1\omega} & M_{2\omega} & M_{3\omega} & M_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ M_{1\omega}^{\star} & M_{2\omega}^{\star} & M_{3\omega}^{\star} & M_{4\omega}^{\star} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix},$$

étant entendu que c'est précisément l'égalité des seconds membres de (42) et (43) qui permet de définir les M_{ij}^{\star} au moyen des M_{ij} .

On sait comment on constitue les équations de Maxwell-Lorentz dont un premier groupe dépend des M_{ij} , un second des M_{ij}^{\star} . Le second groupe est satisfait si l'on a

$$M_{ij}^{\star} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i},$$

les Φ_i étant les *potentiels électromagnétiques*, parce qu'alors tous les mineurs tels que (29) sont nuls et que c'est précisément cette nullité qui est exprimée par le second groupe en question. Dans ces conditions, (43) devient

$$(44) \quad -4\Lambda_e \sqrt{-g} = \begin{vmatrix} M_{1\omega} & M_{2\omega} & M_{3\omega} & M_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} \\ \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \Phi_4 \end{vmatrix}.$$

Malgré le bel aspect de ces formules, elles aboutissent à une insuffisance et à une contradiction encore signalées par M. De Donder (*loc. cit.*, p. 65). Le savant belge a d'ailleurs remédié lui-même à l'inconvénient dans ses *Premiers Compléments* (p. 7) en adjoignant un certain terme au second membre de (44) mais ce que nous nous proposons de montrer c'est que *cette adjonction ne détruit rien de la symétrie précédente*.

Le résultat définitif peut s'écrire

$$(45) \quad 4\Lambda_e \sqrt{-g} = W \begin{vmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \Phi_4 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} \\ M_{10} & M_{20} & M_{30} & M_{40} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} M_{10} & M_{20} & M_{30} & M_{40} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} \\ \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \Phi_4 \end{vmatrix}.$$

Dans le premier déterminant les mineurs des Φ_i sont égaux respectivement à

$$-\sigma u^1, \quad +\sigma u^2, \quad -\sigma u^3, \quad +\sigma u^4$$

et ces quatre égalités constituent d'ailleurs le premier groupe des équations de Maxwell-Lorentz.

Le second déterminant est celui déjà étudié; on le transforme facilement grâce à l'équation (232) de M. De Donder (*Gravifique*, p. 60). Finalement

$$4\Lambda_e \sqrt{-g} = -2\sigma W \sum \Phi_i u^i + \sum \sum (-1)^{\alpha+\beta+1} M_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta}^{\star}.$$

C'est bien la formule [1] des *Premiers Compléments*.

Mais (45) peut être résumée sous la forme

$$-4\Lambda_e \sqrt{-g} = \begin{vmatrix} M_{10} & M_{20} & M_{30} & M_{40} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} \\ \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \Phi_4 \end{vmatrix} + W \begin{vmatrix} M_{10} & M_{20} & M_{30} & M_{40} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} \\ \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \Phi_4 \end{vmatrix}$$

la notation signifiant qu'au déterminant, développé comme à l'ordinaire de haut en bas, on ajoute (multiplié par W) le développement effectué, de bas en haut, à partir des Φ_i et de leurs mineurs. Ainsi (44) a été complétée sans être défigurée et la théorie est devenue exempte de toute contradiction sans perdre rien de sa symétrie première. En particulier elle peut conserver un aspect partout hérité de la seconde formule stokienne réétudiée, à de certains points de vue, en tout ce Chapitre.

Les paragraphes 15 et 16, qui terminent le présent travail, ont été résumés en une Note insérée aux *Comptes rendus* du 5 février 1923.

NOTE

Au moment où je corrige les épreuves du présent Mémoire (3 avril 1924) me parvient le premier fascicule, pour l'an 1924, du *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, fascicule qui contient un très remarquable travail de M. Paul Dienes *Sur la structure mathématique du calcul tensoriel*. Comme cette question de structure est, en somme, ce que j'examine dans les pages précédentes, il me semble intéressant de faire ici quelques comparaisons; d'ailleurs si M. Dienes et moi semblons avoir eu des préoccupations analogues, il n'en subsiste pas moins quelques différences de méthode.

D'abord M. Dienes a voulu un calcul tensoriel *amétrique*; c'est ce que je dis également rechercher dans l'introduction des pages précédentes.

Un autre point, très important, est de savoir s'il est indiqué de *généraliser* l'analyse gravitationnelle d'Einstein pour y faire entrer l'électromagnétisme, comme cela a été tenté par MM. H. Weyl et A.-S. Eddington. Ici je me suis engagé dans une voie qu'il ne m'appartient pas de dire meilleure mais qui, à coup sûr, est toute autre. De deux identités fondamentales empruntées au Calcul intégral, je déduis les deux formules stokiennes qui me donnent les matrices tourbillonnaires (2) et (29) construites avec les dérivées partielles ordinaires en \mathfrak{D} . L'essentiel est ensuite de remarquer que ces matrices se conservent avec des dérivées plus générales, en D , qui peuvent être celles du calcul tensoriel et de la théorie gravitationnelle.

Donc, dans cette manière de voir, c'est l'électromagnétisme (celui des formules stokiennes jusques et y compris la forme tout à fait générale de M. Th. De Donder, réexposée dans le premier de mes trois Mémoires) qui, par une extension convenable, conduirait aux phénomènes de gravitation et aux considérations métriques non euclidiennes.

L'électricité redevient le fondement de toutes choses.

