ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

A. BUHL

Sur l'addition des fonctions elliptiques et les pseudo-lignes d'infini des intégrales doubles

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 12 (1920), p. 37-45
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1920_3_12__37_0>

SUR

L'ADDITION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES

ET

LES PSEUDO-LIGNES D'INFINI DES INTÉGRALES DOUBLES

PAR M. A. BUHL

La lecture d'un ouvrage sur les Fonctions elliptiques, tel que celui de P. Appell et E. Lacour, donne l'impression que la théorie en est à peu près aussi achevée que celle des fonctions circulaires. Mais il n'est pas impossible que quelque difficulté d'ordre élevé, relative à la théorie des fonctions, soit éclairée par une construction de nature élémentaire, et peut-être y a-t-il encore beaucoup à tirer des fonctions elliptiques à ce dernier point de vue.

Dans ce qui suit, on retrouvera une forme hermitienne du théorème d'addition avec aperçus sur quelques conséquences assez cachées dans le théorème concernant l'échange du paramètre et de l'argument.

Je n'ai pas hésité à revenir sur l'addition en voyant que M. René Garnier n'hésitait pas, dans l'avant-dernier volume des présentes *Annales* (1918), à revenir sur une *Solution élémentaire du problème de l'inversion.*

Je m'associe également aux critiques faites par M. Harris Hancock dans ses *Fondements de la théorie des Fonctions elliptiques* (Société mathématique de France, 1919). Comme M. Hancock, je ne suis pas éloigné de croire à la parfaite inutilité de la fonction Al de Weierstrass.

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DU THÉORÈME D'ADDITION.

[1] Sous ce titre, nous nous proposons de donner une démonstration du théorème d'addition des fonctions elliptiques en marchant vers le but de manière aussi directe et élémentaire que possible. Nous écartons intentionnellement les nombreuses questions, plus élevées que le théorème lui-même, qui naissent à chaque pas.

On a ainsi un exposé facile à isoler et à faire figurer, sans préparation spéciale, dans un Cours de Calcul infinitésimal, ce que d'ailleurs nous avons fait à la Faculté des Sciences de Toulouse.

Soit l'identité fondamentale

$$\int\!\!\int_s dX\,dY = \int_c X\,dY \tag{1}$$

et la transformation

$$X = \frac{\Phi(x, y)}{x - \alpha(y)}, \qquad Y = Y(x, y)$$

qui est absolument quelconque et générale, à cela près que $\Phi(x, y)$ ne s'annule pas pour $x = \alpha(y)$. En d'autres termes, on a mis en évidence, dans X, la ligne d'infini $x = \alpha(y)$. Le déterminant de la transformation, lequel s'introduit dans l'intégrale double transformée, s'écrit sans peine

$$\Delta = \frac{(x - \alpha)(\Phi'_x Y'_y - \Phi'_y Y'_x) - \Phi(Y'_y + \alpha' Y'_x)}{(x - \alpha)^2}$$

avec α et α' représentant respectivement $\alpha(y)$ et $\alpha'(y)$.

Un premier point doit déjà fixer l'attention : *la ligne d'infini qui existe dans* X *n'existe pas forcément dans* Δ, car le numérateur de Δ peut être divisible par $(x - \alpha)^2$. En écrivant que ce numérateur, et sa dérivée partielle en x, s'annulent pour $x = \alpha$, on parvient, après des réductions fort simples, à ce théorème : *Le déterminant* Δ *ne contient pas la ligne d'infini* $x = \alpha(y)$ *quand sont satisfaites deux quelconques des trois conditions*

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha' Y'_x(\alpha, y) + Y'_y(\alpha, y) = 0, \\ &\Phi(\alpha, y)\, Y'_x(\alpha, y) = C, \\ &\Phi(\alpha, y)\, Y'_y(\alpha, y) = -\alpha' C. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

C désigne une simple constante.

[**2**] La première équation (2) n'est évidemment autre chose que l'équation $dY = 0$ en laquelle on suppose x remplacé par une solution $\alpha(y)$. Pour avoir une équation différentielle très simple, à laquelle on pourra immédiatement assigner une solution particulière, posons

$$dY = \frac{dy}{f(y)} - \frac{dx}{f(x)}.$$

Alors $dY = 0$ aura pour solution $x = y$. En d'autres termes, $\alpha(y)$ se réduira simplement à y. Les deux dernières équations (2) prennent la forme

$$\Phi(x, y) = -\mathrm{C}f(x), \qquad \Phi(x, y) = -\mathrm{C}f(y)$$

et doivent déterminer Φ aussi bien l'une que l'autre. En recourant à leur produit, on aura

$$\Phi^2 = \mathrm{C}^2 f(x) f(y).$$

En résumé, *la transformation*

$$\mathrm{X} = \frac{\sqrt{f(x)f(y)}}{x - y}, \qquad \mathrm{Y} = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{f(y)} - \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{f(x)}$$

change l'identité (1) *en*

$$(3) \qquad \int_{\mathrm{C}} \mathrm{X}d\mathrm{Y} = \frac{1}{2} \int\int_{\mathrm{S}} \frac{(x-y)[f'(x) + f'(y)] - 2f(x) + 2f(y)}{(x-y)^2 \sqrt{f(x)f(y)}} dx\,dy.$$

Cette formule est susceptible d'une vérification directe qui montre que le raisonnement précédent n'a introduit aucune difficulté de signe.

La constante C disparaît d'elle-même du calcul.

[**3**] *Échange du paramètre et de l'argument.* — Le premier membre de la formule (3) peut s'écrire

$$(4) \qquad \int_{\mathrm{C}} \frac{\sqrt{f(x)}\,dy}{(x-y)\sqrt{f(y)}} - \int_{\mathrm{C}} \frac{\sqrt{f(y)}\,dx}{(x-y)\sqrt{f(x)}}$$

et, *si le contour* C *est un rectangle à côtés parallèles aux axes, f étant, de plus, un polynôme,* on voit, d'après le second membre de (3), que *la différence d'intégrales* (4) *est une somme de produits tels que*

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{f(x)}} \int \frac{y^n\,dy}{\sqrt{f(y)}}.$$

C'est là le *théorème d'échange entre le paramètre et l'argument.*

[**4**] Imaginons, pour fixer les idées, que le *rectangle* C ait d'abord des coordonnées positives pour tous ses sommets. Soit (a, b) le sommet le plus voisin de l'origine et (x, y) le plus éloigné. Cette configuration pourra d'ailleurs se modifier dans la suite. Soit

$$f(x) = (1 - x^2)(1 - k^2 x^2),$$

$$\xi = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}, \qquad x = sn\,\xi.$$

La dérivée de $sn\,\xi$, par rapport à ξ, sera désignée par $sn'\xi$.

Avec la forme indiquée pour $f(x)$, et par application du théorème d'échange, la différence (4) s'égale à

$$k^2 \int_a^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{f(x)}} \int_b^y \frac{dy}{\sqrt{f(y)}} - k^2 \int_b^y \frac{y^2\,dy}{\sqrt{f(y)}} \int_a^x \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}.$$

Dans cette égalité, posons

$$x = sn\,\xi, \qquad a = sn\,\alpha,$$
$$y = sn\,\eta, \qquad b = sn\,\beta.$$

L'égalité transformée pourra se remplacer par ces deux

$$u = \int_\alpha^\xi \frac{sn'\eta\,d\xi}{sn\,\xi - sn\,\eta} + k^2(\xi - \alpha) \int_\beta^\eta sn^2\eta\,d\eta + \int_\beta^\eta \frac{sn'\alpha\,d\eta}{sn\,\eta - sn\,\alpha},$$

$$u = \int_\beta^\eta \frac{sn'\xi\,d\eta}{sn\,\eta - sn\,\xi} + k^2(\eta - \beta) \int_\alpha^\xi sn^2\xi\,d\xi + \int_\alpha^\xi \frac{sn'\beta\,d\xi}{sn\,\xi - sn\,\beta},$$

d'où

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \xi} &= \frac{sn'\eta}{sn\,\xi - sn\,\eta} + k^2 \int_\beta^\eta sn^2\eta\,d\eta = F'(\xi + \eta) + f'(\xi - \eta), \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} &= \frac{sn'\xi}{sn\,\eta - sn\,\xi} + k^2 \int_\alpha^\xi sn^2\xi\,d\xi = F'(\xi + \eta) - f'(\xi - \eta). \end{aligned} \right.$$

Les derniers membres proviennent de ce que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

d'où

$$u = F(\xi + \eta) + f(\xi - \eta).$$

L'addition des formules (5) donne

$$2F'(\xi+\eta)=\frac{sn'\eta-sn'\xi}{sn\xi-sn\eta}+k^2\int_\beta^\eta sn^2\eta\,d\eta+k^2\int_\alpha^\xi sn^2\xi\,d\xi$$

d'où, en remplaçant η par zéro et ξ par $\xi+\eta$,

$$2F'(\xi+\eta)=\frac{1-sn'(\xi+\eta)}{sn(\xi+\eta)}+k^2\int_\beta^0 sn^2\eta\,d\eta+k^2\int_\alpha^{\xi+\eta} sn^2\xi\,d\xi.$$

La soustraction des formules (5) donne

$$2f(\xi-\eta)=\frac{sn'\eta+sn'\xi}{sn\xi-sn\eta}+k^2\int_\beta^\eta sn^2\eta\,d\eta-k^2\int_\alpha^\xi sn^2\xi\,d\xi$$

d'où, en remplaçant η par zéro et ξ par $\xi-\eta$,

$$2f'(\xi-\eta)=\frac{1+sn'(\xi-\eta)}{sn(\xi-\eta)}+k^2\int_\beta^0 sn^2\eta\,d\eta-k^2\int_\alpha^{\xi-\eta} sn^2\xi\,d\xi.$$

A l'égalité des $F'(\xi+\eta)$, ajoutons celle des $f'(\xi-\eta)$, où l'on changera η en $-\eta$; il viendra

$$\frac{2}{sn(\xi+\eta)}=\frac{sn'\xi+sn'\eta}{sn\xi+sn\eta}-\frac{sn'\xi-sn'\eta}{sn\xi-sn\eta}.$$

C'est le théorème d'addition de sn sous une forme particulièrement symétrique.

[**5**] *Cas de la fonction* $\mathbf{p}$ *de Weierstrass.* — Dans ce cas, il n'y a qu'à prendre, avec les notations habituelles,

$$f(x)=4x^3-g_2x-g_3.$$

Alors, avec le même rectangle d'intégration que précédemment, la différence (4) s'égale à

$$2\int_a^x\frac{x\,dx}{\sqrt{f(x)}}\int_b^y\frac{dy}{\sqrt{f(y)}}-2\int_b^y\frac{y\,dy}{\sqrt{f(y)}}\int_a^x\frac{dx}{\sqrt{f(x)}}.$$

Dans l'égalité ainsi obtenue, posons

$$x=\mathbf{p}\xi,\qquad a=\mathbf{p}\alpha,$$
$$y=\mathbf{p}\eta,\qquad b=\mathbf{p}\beta.$$

L'égalité transformée pourra se remplacer par ces deux

$$u = \int_\alpha^\xi \frac{\mathbf{p}'\eta\, d\xi}{\mathbf{p}\xi - \mathbf{p}\eta} + 2(\xi - \alpha)\int_\beta^\eta \mathbf{p}\eta\, d\eta + \int_\beta^\eta \frac{\mathbf{p}'\alpha\, d\eta}{\mathbf{p}\eta - \mathbf{p}\alpha},$$

$$u = \int_\beta^\eta \frac{\mathbf{p}'\xi\, d\eta}{\mathbf{p}\eta - \mathbf{p}\xi} + 2(\eta - \beta)\int_\alpha^\xi \mathbf{p}\xi\, d\xi + \int_\alpha^\xi \frac{\mathbf{p}'\beta\, d\xi}{\mathbf{p}\xi - \mathbf{p}\beta}$$

d'où, comme précédemment,

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\mathbf{p}'\eta}{\mathbf{p}\xi - \mathbf{p}\eta} + 2\int_\beta^\eta \mathbf{p}\eta\, d\eta = \mathrm{F}'(\xi + \eta) + f'(\xi - \eta),$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\mathbf{p}'\xi}{\mathbf{p}\eta - \mathbf{p}\xi} + 2\int_\alpha^\xi \mathbf{p}\xi\, d\xi = \mathrm{F}'(\xi + \eta) - f'(\xi - \eta).$$

Additionnant et dérivant par rapport à ξ, il vient

$$2\mathrm{F}''(\xi + \eta) = 2\mathbf{p}\xi - \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\mathbf{p}'\xi - \mathbf{p}'\eta}{\mathbf{p}\xi - \mathbf{p}\eta}$$

Pour $\eta = 0$ et en s'appuyant sur

$$\mathbf{p}\eta = \frac{1}{\eta^2} + c\eta^2 + \ldots,$$

on trouve facilement $\mathrm{F}''(\xi) = \mathbf{p}\xi$. Donc

$$2\mathbf{p}(\xi + \eta) = 2\mathbf{p}\xi - \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\mathbf{p}'\xi - \mathbf{p}'\eta}{\mathbf{p}\xi - \mathbf{p}\eta}.$$

C'est bien l'une des formes du théorème d'addition relatif à la fonction $\mathbf{p}$.

Sur les pseudo-lignes d'infini des intégrales doubles.

[**6**] Ceci est le titre d'un Mémoire publié ici même en 1918. Il resterait bien des choses à lui ajouter, et, sur un tel sujet, il en restera vraisemblablement toujours. L'essentiel de ce qui précède, relativement aux théorèmes d'addition, semble avoir fait les délices de la prime jeunesse de Charles Hermite; la méthode indiquée se présente dans l'une des célèbres Lettres à C.-G.-J. Jacobi (Ch. Hermite, *Œuvres*, t. I, pp. 34-37; C.-G.-J. Jacobi, *Werke*, t. II, pp. 111-114). Seulement nous avons un peu modifié l'exposition de Ch. Hermite pour pouvoir souligner des points où elle touche à des difficultés signalées seulement ensuite par M. Émile Picard et qui

relèvent précisément de la question fort ardue des intégrales doubles à pseudo-lignes d'infini.

Reprenons l'expression

$$V(x,y) = (x-y)[f'(x)+f'(y)] - 2f(x) + 2f(y),$$

qui s'est naturellement introduite dans (3); supposons toujours que $f(x)$ soit un polynôme et, pour ne rien changer aux notations de Ch. Hermite, posons

$$f(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots + p_n x^n.$$

Alors V est aussi un polynôme qui, ordonné par rapport aux p, a pour coefficient de p_n

$$(x-y)^3[1(n-2)x^{n-3} + 2(n-3)x^{n-4}y + 3(n-4)x^{n-5}y^2 + \ldots].$$

Le polynôme entre crochets est de formation très élégante au moyen du tableau

$n=3$					1
$n=4$				2	2
$n=5$			3	4	3
$n=6$		4	6	6	4
$n=7$	5	8	9	8	5

facile à prolonger indéfiniment.

Le même polynôme peut aussi s'écrire

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(xy\frac{x^{n-2}-y^{n-2}}{x-y}\right)$$

et tout ceci est fort élégant, mais il y a une chose beaucoup plus remarquable encore : c'est que nous avons voulu imposer à $V(x, y)$ d'être divisible par $(x-y)^2$ et qu'à cet égard nous avons obtenu plus que nous ne voulions; *il se trouve que* $V(x,y)$ *est divisible par* $(x-y)^3$.

Le même fait peut être reconnu dans des cas beaucoup plus généraux. Ainsi, appliquée à (1), la transformation

$$(6) \qquad X = \frac{\sqrt{g(x)} + \alpha'\sqrt{f(y)}}{x-\alpha}, \qquad Y = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{f(y)}} - \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{g(x)}}$$

donne [formule (25) du Mémoire de 1918],

$$\int_C \frac{\sqrt{g}+\alpha'\sqrt{f}}{x-\alpha}\left(\frac{dy}{\sqrt{f}} - \frac{dx}{\sqrt{g}}\right) = \int\int_S \frac{(x-\alpha)[g'+\alpha' f' + 2\alpha'' f] + 2\alpha'^2 f - 2g}{2(x-\alpha)^2\sqrt{fg}}\,dx\,dy.$$

Ici $x = \alpha(y)$ doit être solution de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{g(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{f(y)}} \tag{7}$$

et il est à remarquer que ce peut être une solution *rationnelle* dans des cas fort étendus, par exemple quand cette équation différentielle se réduit à celle de la multiplication des fonctions elliptiques. Quoi qu'il en soit, le numérateur qui figure sous l'intégrale double précédente est divisible par $(x - \alpha)^3$, comme on le voit immédiatement en dérivant deux fois ce numérateur par rapport à x.

Même phénomène pour presque toutes les formules du Mémoire précité, notamment pour (30) et (38).

Un tel fait, malgré son apparence paradoxale, semble pouvoir être expliqué de plusieurs manières, par exemple comme suit.

En appliquant une transformation *singulière* à l'*identité* (1), nous devons obtenir deux nouveaux membres identiques et, par suite, tous deux singuliers. Il est cependant possible de faire apparaître une ligne d'infini sous l'intégrale simple sans qu'elle apparaisse sous l'intégrale double. Fort bien. Sous l'intégrale double, ce ne sera pas une ligne d'infini, mais ce sera tout de même une ligne singulière. Et il faut compter comme ligne singulière, dans la transformation d'une intégrale double, toute ligne sur laquelle s'annule le déterminant Δ de la transformation. Ceci est conforme avec les précautions de tous les Traités modernes quant au changement de variables dans les intégrales doubles (Cf. E. Picard, *Analyse*, t. I, 2^e^ édition, p. 111).

Le prétendu paradoxe apparaît ainsi comme beaucoup moins étrange; toutefois, il resterait à l'étudier encore, et de manière directe, en reprenant le numérateur du Δ du paragraphe 1 et en étudiant non seulement sa dérivée partielle *première* en x, mais aussi sa dérivée *seconde*. On pourrait peut-être alors préciser les conditions exactes dans lesquelles les pseudo-lignes d'infini des intégrales attachées aux surfaces algébriques peuvent être recherchées parmi des lignes de zéros plus apparentes.

Pour en revenir à la première partie de cet exposé, on voit qu'il vaut mieux choisir le rectangle C de manière à ce qu'il ne soit ni coupé ni touché par la droite $x = y$. Il ne faut donc pas supposer a et b nuls, hypothèse qui paraît simplifier un peu la démonstration, mais menace la rigueur de celle-ci.

[**7**] *Sur les intégrales doubles en lesquelles les pseudo-lignes d'infini sont lignes de zéros.* — Ce paragraphe, ajouté au moment de la correction des épreuves, a le titre d'une Note insérée aux *Comptes rendus* du 13 décembre 1920, Note en laquelle la dérivée seconde du numérateur de Δ est étudiée. Le résultat est beaucoup moins compliqué qu'on aurait pu le croire.

Si, outre deux des trois conditions (2), *on a*

$$\frac{\partial}{\partial x}(\Phi^2 Y'_x) = C_1, \tag{8}$$

pour $x = \alpha(y)$, *en désignant par* C_1 *une nouvelle constante, le numérateur de* Δ *est divisible par* $(x - \alpha)^2$.

Si l'on reprend le paragraphe 2 on voit que $\Phi^2 Y'_x$ ne contient pas x. Avec la transformation (6) on trouve, par un calcul très simple, que le premier membre de (8) est identiquement nul pour $x = \alpha(y)$ solution de l'équation différentielle (7).