Annales de la faculté des sciences de Toulouse

R. Gosse

De l'intégration des équations $s = f(x, y, z, p, q)$ par la méthode de M. Darboux

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 12 (1920), p. 107-180
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1920_3_12__107_0>

DE L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS $s = f(x, y, z, p, q)$

PAR LA MÉTHODE DE M. DARBOUX

PAR M. R. GOSSE

INTRODUCTION

La méthode de M. Darboux ramène l'étude de l'équation $s = f(x, y, z, p, q)$ à la recherche d'un invariant distinct de x ou de y, pour chacun des systèmes de caractéristiques.

M. Goursat [1] a formé et intégré toutes les équations de cette forme qui ont un invariant d'ordre inférieur ou égal à 2 pour chaque système. Ses deux Mémoires sont fondamentaux à plusieurs titres. Il y indique [2] des méthodes de calcul dont le présent travail montrera qu'elles sont susceptibles de généralisation; il y démontre [3] des propriétés générales des équations $s = f(x, y, z, p, q)$ qui ont été le point de départ de tous les travaux récents sur le sujet.

Parmi ceux-ci la thèse de M. Gau [4] a marqué un progrès important de la question. M. Gau [5] a été amené à distinguer deux grandes classes parmi les équations $s = f$:

1° Les équations qui vérifient une relation de la forme

$$\frac{\partial A}{\partial y} + q\frac{\partial A}{\partial z} + f\frac{\partial A}{\partial p} + A\frac{\partial f}{\partial p} = 0$$

où A est une fonction de x, y, z, p, qui n'est pas nulle;

2° Les équations qui ne vérifient pas cette relation.

---

(1) *Annales de la Faculté de Toulouse*, 2e série, t. I, 1899. Nous désignerons le premier Mémoire par M_1 (pp. 31-78) et le deuxième par M_2 (pp. 439-464).

(2) M_1, p. 36 et sq.

(3) M_2, p. 460 et sq.

(4) Thèses de doctorat (Gauthier-Villars, 1911). Nous la désignerons par T. G.

(5) T. G., p. 25 et sq.

Pour les premières, il suffit de connaître une seule équation $p_n + \theta = 0$ en involution avec l'équation donnée pour pouvoir former un invariant donné par la formule :

$$\varphi = A(p_n + \theta)$$

Pour les secondes, il a démontré que tout invariant de ces équations est de la forme :

$$\varphi = \frac{p_n + \theta}{p_m + \psi}, \qquad n > m, \qquad p_n + \theta = 0 \quad \text{et} \quad p_m + \psi = 0$$

étant deux équations formant chacune un système en involution avec l'équation $s = f$.

Réciproquement, si on connaît deux telles équations, l'expression φ est un invariant d'ordre n, en supposant $n > m$ et n et m supérieurs à l'unité.

Ce théorème d'abord démontré dans un cas particulier par M. Goursat [1], et que M. Gau a déduit d'un théorème général démontré pour les équations $r + f(x, y, z, p, q, s, t) = 0$, permet de remplacer la recherche des invariants d'une équation aux dérivées partielles par la recherche des équations en involution avec cette équation.

Comme la méthode de M. Darboux s'applique, si élevé que soit l'ordre n de l'invariant trouvé, il fallait faire l'étude des équations admettant une involution d'ordre quelconque. Ce problème paraissant inabordable par des méthodes directes, il était naturel, pour essayer de simplifier au préalable la forme de la fonction f, de commencer par former des conditions nécessaires que doit vérifier cette fonction pour que l'équation $s = f$ admette une involution. M. Gau [2] a été amené à expliciter deux de ces conditions.

Posons :

$$E_x^m(A) = \frac{\partial A}{\partial y} + q_1 \frac{\partial A}{\partial z} + f \frac{\partial A}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right) \frac{\partial A}{\partial p_2} + \dots + \left(\frac{d^{m-1} f}{dx^{m-1}}\right) \frac{\partial A}{\partial p_m} + A \frac{\partial f}{\partial p_1}.$$

Si, la fonction f étant donnée on ne peut pas trouver de fonction $A(x, y, z, p_1, \dots, p_m) \neq 0$ vérifiant la relation $E_x^m(A) = 0$ pour $m = 0$, 1 ou 2,

---

(1) M_2, p. 460.
(2) T. G., p. 36 et sq.

l'équation $s=f$ ne peut admettre une involution du système X que si f vérifie à la fois les deux conditions :

$$C_x(\alpha) \equiv \frac{\partial\alpha}{\partial y} + q_1\frac{\partial\alpha}{\partial z} + f\frac{\partial\alpha}{\partial p_1} + \alpha\frac{\partial f}{\partial p_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2} = 0,$$

$$\begin{aligned} C_x'(\alpha_1) \equiv \frac{\partial\alpha_1}{\partial y} + q_1\frac{\partial\alpha_1}{\partial z} + f\frac{\partial\alpha_1}{\partial p_1} + (m-1)\alpha\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p_1\frac{\partial f}{\partial z} + f\frac{\partial f}{\partial q_1}\right) \\ + (m-1)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p_1\partial x} + p_1\frac{\partial^2 f}{\partial p_1\partial z} + f\frac{\partial^2 f}{\partial p_1\partial q_1}\right) + \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p_1}\cdot\frac{\partial f}{\partial q_1} = 0, \end{aligned}$$

α et α_1 étant des fonctions de x, y, z, p_1. De même pour que $s=f$ soit en involution avec $q_n + \psi(x, y, z, q_1, \ldots, q_{n-1}) = 0$, il faut que les deux conditions analogues :

$$C_y(\beta) = 0, \qquad C_y'(\beta_1) = 0$$

soient vérifiées, β et β_1 ne dépendant que de x, y, z, q_1, et étant spécifié qu'il est impossible de trouver une fonction B de $x, y, z, q_1, \ldots, q_n$ vérifiant la relation :

$$E_y^n(B) = 0 \quad \text{pour} \quad n = 0, 1, \text{ou } 2.$$

En discutant ces diverses conditions M. Gau, complétant les résultats de Sophus Lie sur l'équation $s=f(z)$ et de Clairin sur les équations $s=f(x, y, z)$, a pu déterminer toutes les équations de la forme :

$$s = \lambda pq\rho(x, y, z) + pa(x, y, z) + qb(x, y, z) + c(x, y, z)$$

qui sont de la première classe, et démontrer qu'une équation $s=f$ en involution simultanée avec deux équations de système différent et d'ordre supérieur à 1 est du type des équations de Moutard.

Je me suis attaché dans ce travail à la généralisation de ces résultats, et plus spécialement à la recherche des équations $s=f(x, y, z, p, q)$ de la première classe.

Le rapide exposé que je viens de faire montre que le cas où l'équation $s=f(x, y, z, p, q)$ admet un invariant, et par suite une involution, d'ordre 2 se présente comme un cas d'exception qui mérite une étude spéciale. Elle fait l'objet de mon premier chapitre.

La conclusion en est très simple : En supposant que le système de caractéristiques admette un invariant d'ordre 2, si la fonction f n'est pas du premier degré en q l'équation se ramène aux types que M. Goursat (¹) a déterminés en supposant

(¹) M_1, p. 69.

qu'il existe deux invariants du second ordre; si l'équation est du premier degré en q, une transformation de contact, suivie d'une transformation de Bäcklund [1], la ramène à la forme : $s = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)$, qui s'étudie immédiatement.

Dès lors on peut se borner à chercher les équations de la première classe parmi celles qui admettent un invariant d'ordre supérieur à 2. Elles peuvent se classer en trois groupes :

1° Les équations F_1 pour lesquelles on a simultanément

$$E_x^m(A) \neq 0, \qquad E_y^n(B) \neq 0, \qquad m, n \text{ étant égaux à } 0, 1, \text{ ou } 2;$$

2° Les équations F_2 pour lesquelles

$$E_x^m(A) = 0, \qquad E_y^n(B) \neq 0,$$

avec lesquelles se classent les équations F_2' pour lesquelles

$$E_x^m(A) \neq 0, \qquad E_y^n(B) = 0;$$

3° Les équations F_3 pour lesquelles

$$E_x^m(A) = 0, \qquad E_y^n(B) = 0.$$

Il est clair que si on a $E_x^n(A) = 0$, cette unique condition fait disparaître les deux conditions

$$C_x(\alpha) = 0, \qquad C_x'(\alpha_1) = 0.$$

Il était donc naturel de chercher à adjoindre à la condition $E_x^n(A) = 0$ une nouvelle condition nécessaire que doive vérifier f pour que l'équation $s = f$ admette une involution de système X. Dans mon second chapitre, j'ai démontré d'abord que, dans ce cas, la fonction f doit vérifier la condition que j'appelle :

$$\Gamma_x(\theta) = 0.$$

J'y établis ensuite quelques propositions générales sur les équations $s = f$ de la première classe qui me permettent de ramener leur recherche à la résolution des trois problèmes suivants dont l'étude constitue mes troisième, quatrième et cinquième chapitre.

---

[1] Voir Goursat, *Équations du second ordre*, t. II, p. 264, et Mémoire *Sur le problème de Bäcklund*, p. 59. C'est un cas particulier de la transformation d'Imschenetsky.

Premier problème : $E_x^m(A) \neq 0$, $E_y^n(B) \neq 0$. — Est-il possible que l'équation $s = f$ admette deux involutions simultanées de systèmes différents ?

Une discussion longue, mais simple, montre que les quatre conditions :

$$C_x = 0, \qquad C_x' = 0, \qquad C_y = 0, \qquad C_y' = 0$$

sont incompatibles.

Deuxième problème. — C'est le même problème que précédemment, mais où on a :

$$E_x^m(A) = 0, \qquad E_y^n(B) \neq 0.$$

On trouve encore que les conditions $C_y = 0$, $C_y' = 0$ sont incompatibles avec la condition $E_x^n(A) = 0$, à laquelle on adjoint la condition $\Gamma_x(\theta) = 0$.

Troisième problème. — Un théorème de M. Goursat [1] permet de le poser d'une façon plus précise. Est-il possible qu'une équation $s = f(x, y, z, p, q)$, où la fonction f a la forme

$$s = h(x, y, z)a(x, p)b(y, q), \qquad \frac{\partial^2 a}{\partial p^2} \neq 0, \qquad \frac{\partial^2 b}{\partial q^2} \neq 0,$$

admette une involution du système X d'ordre supérieur à 2 ?

J'ai déterminé toutes les formes d'équation pour lesquelles il peut en être ainsi. En comparant le résultat obtenu à celui que donnerait la permutation de x et y, j'ai démontré encore l'impossibilité de deux involutions simultanées d'ordre différent, sauf peut-être lorsque $s = 2h(x, y)\sqrt{pq}$. Ce cas a été complètement étudié par M. Goursat (*Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles*, t. II, p. 252).

Il résulte en particulier de ces recherches que les seules équations de la forme $s = f(x, y, z, p, q)$ qui soient de la première classe sont celles que M. Goursat [2] a déjà déterminées et classées.

Je me suis borné aux équations qui ne sont du premier degré ni en p, ni en q. M. Gau a complètement étudié celles qui le sont à la fois en p et en q. — J'ai presque terminé l'étude de l'équation $s = \omega(x, y, z, p) + q\theta(x, y, z, p)$, et je n'ai trouvé jusqu'ici, comme faisant exception au résultat négatif que j'indique, que

---

[1] M_2, p. 462.
[2] M_1, p. 67.

des équations qui se ramènent par des transformations simples à des équations connues.

Je n'ai osé reprendre ce travail dans des circonstances difficiles que sur l'insistance de mon ami Gau. J'ai été soutenu au cours de son exécution par les encouragements de M. Borel et de M. Perrin, et je leur en garde une affectueuse gratitude. Je dois d'avoir pu mener mes recherches à bonne fin à l'obligeance et aux bienveillants conseils de M. Goursat : non seulement il a mis gracieusement à ma disposition les livres et mémoires qui m'étaient indispensables, mais encore il n'a cessé d'être pour moi le plus précieux des guides. L'hommage que je lui fais ici de mon travail n'est qu'un faible témoignage de ma respectueuse reconnaissance.

CHAPITRE PREMIER

Détermination des équations $s=f(x, y, z, p, q)$ qui admettent un invariant du second ordre.

M. Goursat a déterminé [1] toutes les équations de cette forme qui admettent un invariant du second ordre pour chaque système de caractéristiques. Nous allons nous proposer de déterminer celles de ces équations qui admettent un invariant du second ordre pour le seul système X.

M. Goursat a établi les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi. Il faut d'abord que l'on ait :

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y}+\frac{\partial\lambda}{\partial z}q+f\frac{\partial\lambda}{\partial p}-\lambda\frac{\partial f}{\partial p}=0 \qquad (\lambda \text{ fonction de } x, y, z, p).$$

En posant $\lambda=\dfrac{1}{\dfrac{\partial a}{\partial p}}$, cette condition montre qu'on doit avoir

$$f=\frac{b(x, y, z, q)-\dfrac{\partial a}{\partial y}-q\dfrac{\partial a}{\partial z}}{\dfrac{\partial a}{\partial p}}.$$

Il faut ensuite que l'on ait

$$(1)\qquad \frac{\partial\lambda}{\partial y}+q\frac{\partial\lambda}{\partial z}+f\frac{\partial\lambda}{\partial p}+\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial z}+f\frac{\partial f}{\partial q}=\lambda\frac{\partial f}{\partial p} \qquad (\lambda \text{ fonction de } x, y, z, p).$$

et ces deux conditions sont suffisantes.

Nous allons écrire que f vérifie la seconde condition.

En dérivant deux fois celles-ci par rapport à q, on obtient

$$(2)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial q^2}\frac{\partial\lambda}{\partial p}+\frac{\partial^3 f}{\partial q^2\partial x}+p\frac{\partial^3 f}{\partial q^2\partial z}+f\frac{\partial^3 f}{\partial q^3}+3\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial^2 f}{\partial q^2}=\lambda\frac{\partial^3 f}{\partial p\,\partial q^2}.$$

---

[1] M_1, p. 36.

Premier cas. — $\frac{\partial^2 f}{\partial q^2} = 0$.

Pour que f soit du premier degré en q, il faut et suffit que b soit du premier degré en q. L'équation s'écrit alors :

$$s = f = \frac{q\beta(x, y, z) + \beta_1(x, y, z) - \frac{\partial a}{\partial y} - q\frac{\partial a}{\partial z}}{\frac{\partial a}{\partial p}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{da}{dy} = q\beta(x, y, z) + \beta_1(x, y, z).$$

Nous pourrons toujours poser $\beta(x, y, z) = \frac{\partial \gamma}{\partial y}(x, y, z)$ et $a = \alpha + \gamma(x, y, z)$. L'équation s'écrit alors

$$\frac{d\alpha}{dy} = \beta_1(x, y, z) - \frac{\partial \gamma}{\partial y}(x, y, z) = h(x, y, z).$$

Faisons le changement de variable $z_1 = h(x, y, z)$. L'équation vient $\frac{d\alpha}{dy} = Z$ (α fonction de x, y, z, p), car une fonction α de x, y, z, p devient une fonction de x, y, z_1, p_1. (Si h ne contient pas z, l'équation admet une intégrale intermédiaire du premier ordre $\alpha = X + \int h(x, y)dy$).

Nous sommes donc ramenés à intégrer

$$s = f = \frac{z - \frac{\partial a}{\partial y} - q\frac{\partial a}{\partial z}}{\frac{\partial a}{\partial p}} = \omega + \theta q$$

en posant

$$\omega = \frac{z - \frac{\partial a}{\partial y}}{\frac{\partial a}{\partial p}}, \qquad \theta = -\frac{\frac{\partial a}{\partial z}}{\frac{\partial a}{\partial p}}.$$

La condition (1) s'écrit alors :

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y}+q\frac{\partial\lambda}{\partial z}+(\omega+\theta q)\frac{\partial\lambda}{\partial p}+\frac{\partial\omega}{\partial x}+q\frac{\partial\theta}{\partial x}+p\left(\frac{\partial\omega}{\partial z}+q\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)+(\omega+\theta q)\theta=\lambda\left(\frac{\partial\omega}{\partial p}+q\frac{\partial\theta}{\partial p}\right).$$

Cette relation donne :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\lambda}{\partial y}+\omega\dfrac{\partial\lambda}{\partial p}+\dfrac{\partial\omega}{\partial x}+p\dfrac{\partial\omega}{\partial z}+\omega\theta=\lambda\dfrac{\partial\omega}{\partial p},\\[2mm] \dfrac{\partial\lambda}{\partial z}+\theta\dfrac{\partial\lambda}{\partial p}+\dfrac{\partial\theta}{\partial x}+p\dfrac{\partial\theta}{\partial z}+\theta^2=\lambda\dfrac{\partial\theta}{\partial p}.\end{cases}$$

Posons $\lambda=\mu-p\theta$. Ce système s'écrit :

$$\frac{\partial\mu}{\partial z}+\theta\frac{\partial\mu}{\partial p}+\frac{\partial\theta}{\partial x}=\mu\frac{\partial\theta}{\partial p},$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial y}+\omega\frac{\partial\mu}{\partial p}+\frac{\partial\omega}{\partial x}=\mu\frac{\partial\omega}{\partial p}-p\left(\frac{\partial\omega}{\partial z}-\frac{\partial\theta}{\partial y}+\theta\frac{\partial\omega}{\partial p}-\omega\frac{\partial\theta}{\partial p}\right)=\mu\frac{\partial\omega}{\partial p}-\frac{p}{\dfrac{\partial a}{\partial p}},$$

car le coefficient de p dans cette dernière équation se réduit, tout calculs faits, à $\dfrac{1}{\dfrac{\partial a}{\partial p}}$.

On doit donc avoir :

$$\frac{\partial\mu}{\partial p}\frac{\partial\theta}{\partial z}+\theta\left(\frac{\partial\mu}{\partial p}\frac{\partial\omega}{\partial p}+\mu\frac{\partial^2\omega}{\partial p^2}-\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{p}{\dfrac{\partial a}{\partial p}}\right)-\frac{\partial\omega}{\partial p}\frac{\partial\mu}{\partial p}-\omega\frac{\partial^2\mu}{\partial p^2}-\frac{\partial^2\omega}{\partial p\,\partial x}\right)+\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y}-\mu\frac{\partial^2\theta}{\partial p\,\partial y}$$
$$-\frac{\partial\theta}{\partial p}\left(\mu\frac{\partial\omega}{\partial p}-\frac{p}{\dfrac{\partial a}{\partial p}}-\omega\frac{\partial\mu}{\partial p}-\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)$$
$$=\frac{\partial\mu}{\partial p}\frac{\partial\omega}{\partial z}+\omega\left(\frac{\partial\mu}{\partial p}\frac{\partial\theta}{\partial p}+\mu\frac{\partial^2\theta}{\partial p^2}-\frac{\partial\theta}{\partial p}\frac{\partial\mu}{\partial p}-\theta\frac{\partial^2\mu}{\partial p^2}-\frac{\partial^2\theta}{\partial p\,\partial x}\right)+\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\dfrac{\partial a}{\partial p}}\right)-\mu\frac{\partial^2\omega}{\partial p\,\partial z}$$
$$-\frac{\partial\omega}{\partial p}\left(\mu\frac{\partial\theta}{\partial p}-\frac{\partial\theta}{\partial x}-\theta\frac{\partial\mu}{\partial p}\right)$$

d'où

$$\frac{\partial\mu}{\partial p}\left(\frac{\partial\omega}{\partial z}-\frac{\partial\theta}{\partial y}+\theta\frac{\partial\omega}{\partial p}-\omega\frac{\partial\theta}{\partial p}\right)-\mu\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial p\,\partial z}-\frac{\partial^2\theta}{\partial p\,\partial y}+\theta\frac{\partial^2\omega}{\partial p^2}-\omega\frac{\partial^2\theta}{\partial p^2}\right)$$
$$+\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial z}-\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial\omega}{\partial p}\frac{\partial\theta}{\partial x}+\theta\frac{\partial^2\omega}{\partial p\,\partial x}-\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial p}-\omega\frac{\partial^2\theta}{\partial p\,\partial x}+\theta\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{p}{\dfrac{\partial a}{\partial p}}\right)-\frac{p}{\dfrac{\partial a}{\partial p}}\frac{\partial\theta}{\partial p}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\dfrac{\partial a}{\partial p}}\right)=0,$$

c'est-à-dire, tout calculs faits :

$$\frac{\partial \mu}{\partial p} + \mu \frac{\partial}{\partial p} \log \frac{\partial a}{\partial p} + \theta = \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{\partial a}{\partial p}.$$

On a de plus

$$\frac{\partial \mu}{\partial z} = \mu \frac{\partial \theta}{\partial p} - \frac{\partial \theta}{\partial x} - \theta \left(\frac{\partial}{\partial x} \log \frac{\partial a}{\partial p} - \mu \frac{\partial}{\partial p} \log \frac{\partial a}{\partial p} - \theta \right),$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial \omega}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{p}{\frac{\partial a}{\partial p}} - \omega \left(\frac{\partial}{\partial x} \log \frac{\partial a}{\partial p} - \mu \frac{\partial}{\partial p} \log \frac{\partial a}{\partial p} - \theta \right),$$

et, par suite, le système

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial a}{\partial x} - \mu \frac{\partial a}{\partial p} \right) = \theta \frac{\partial a}{\partial z}, \\ & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial a}{\partial x} - \mu \frac{\partial a}{\partial p} \right) = \theta \left(\frac{\partial a}{\partial y} - z \right) + p, \\ & \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial a}{\partial x} - \mu \frac{\partial a}{\partial p} \right) = \theta \frac{\partial a}{\partial p}. \end{aligned} \right.$$

On en tire les conditions

$$\frac{\partial \theta}{\partial p} \frac{\partial a}{\partial z} = \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial a}{\partial p}, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial p} \left(\frac{\partial a}{\partial y} - z \right) + 1 = \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial a}{\partial p}.$$

La première montre que

$$\theta = \frac{\partial \varphi}{\partial a}(x, y, a), \qquad \varphi \text{ étant une fonction arbitraire};$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\partial a}{\partial p} \frac{\partial \varphi}{\partial a} = 0,$$

ce qui montre que l'on a :

$$p = z \frac{\partial \varphi}{\partial a}(x, y, a) + \varphi_1(x, y, a), \qquad \varphi_1 \text{ étant une fonction arbitraire.}$$

Mais on a aussi

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a^2} \frac{\partial a}{\partial p} \left(\frac{\partial a}{\partial y} - z \right) + 1 = \frac{\partial a}{\partial p} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a^2} \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} \right),$$

et par suite

$$1 = \frac{\partial a}{\partial p} \left[z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} \right],$$

et comme on a,

$$\frac{\partial a}{\partial p} \left(z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a^2} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial a} \right) = 1,$$

on en conclut :

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial a} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial a};$$

φ n'est défini qu'à une fonction près de x et de y. On peut donc dire que a est défini par l'identité :

$$p = z \frac{\partial \varphi}{\partial a}(x, y, a) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y, a).$$

Mais alors l'équation

$$\frac{da}{dy} = z$$

donne

$$p = \frac{d^2 a}{dx\,dy},$$

et on a :

$$\frac{d^2 a}{dx\,dy} = \frac{da}{dy} \frac{\partial \varphi}{\partial a}(x, y, a) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y, a),$$

et par suite

$$\frac{d^2 a}{dx\,dy} = \frac{d}{dy} \varphi(x, y, a),$$

qui s'étudie immédiatement.

Par conséquent, toutes les équations $s = \omega(x, y, z, p) + q\theta(x, y, z, p)$ qui admettent un invariant du second ordre se ramènent par une transformation de contact suivie d'une transformation de Bäcklund à l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \varphi(x, y, z),$$

qui admet une intégrale intermédiaire de premier ordre évidente.

Deuxième cas. — $\frac{\partial^2 f}{\partial q^2} \neq 0$.

L'équation (2) s'écrit :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} + p \frac{\partial}{\partial z} \log \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} + f \frac{\partial}{\partial q} \log \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} + 3 \frac{\partial f}{\partial q} = \lambda \frac{\partial}{\partial p} \log \frac{\partial^2 f}{\partial q^2}.$$

Or,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial q^2} = \frac{b''}{\frac{\partial a}{\partial p}} = \frac{b''}{a'} \quad \text{en posant} \quad b'' = \frac{\partial^2 b}{\partial q^2}, \quad \frac{\partial a}{\partial p} = a'.$$

On a donc

$$\frac{\partial \lambda}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{b''}{a'} + p \frac{\partial}{\partial z} \log \frac{b''}{a'} + f \frac{\partial}{\partial q} \log \frac{b''}{a'} + 3 \frac{\partial f}{\partial q} + \lambda \frac{\partial}{\partial p} \log a' = 0 \tag{3}$$

et

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial q} \log b'' + p \frac{\partial^2}{\partial z \partial q} \log b'' + f \frac{\partial^2}{\partial q^2} \log b'' + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial}{\partial q} \log b'' + \frac{3 b''}{a'} = 0. \tag{4}$$

Supposons d'abord $\frac{\partial^2}{\partial x \partial q} \log b'' = 0$. Log b'' est une fonction linéaire de q.

Alors, ou bien b'' est constant, ou bien $b'' = \beta^2 \beta_1 e^{\beta q}$, β et β_1 étant fonctions de x, y, z.

Si b'' est constant, $b = \alpha q^2 + \alpha_1 q + \alpha_2$, $\alpha \neq 0$.

La condition (1) est une identité en q. Elle contient un seul terme du troisième degré provenant de $f \frac{\partial f}{\partial q}$, et c'est $\alpha q^2 \times 2\alpha q$. On devrait avoir $\alpha = 0$, ce qui est impossible.

Si $b'' = \beta^2 \beta_1 e^{\beta q}$, β et β_1 étant tous deux $\neq 0$, $b = \beta_1 e^{\beta q} + \beta_2 q + \beta_3$.

La condition (1) contient un seul terme en $e^{2\beta q}$: c'est $\beta_1 e^{\beta q} \times \beta \beta_1 e^{\beta q}$.

Il n'est nul que si $\beta_1^2\beta^2 = 0$, ce qui est impossible. Donc $\frac{\partial^2}{\partial q^2}\log b'' \neq 0$.

On a donc :

$$\frac{\frac{\partial^2}{\partial x \partial q}\log b''}{\frac{\partial^2}{\partial q^2}\log b''} + p\,\frac{\frac{\partial^2}{\partial z \partial q}\log b''}{\frac{\partial^2}{\partial q^2}\log b''} + f + \frac{\partial f}{\partial q}\,\frac{\frac{\partial}{\partial q}\log b''}{\frac{\partial^2}{\partial q^2}\log b''} + \frac{3}{a'}\,\frac{b''}{\frac{\partial^2}{\partial q^2}\log b''} = 0 \tag{4'}$$

que nous écrirons :

$$A + pB + f + C\,\frac{\partial f}{\partial q} + \frac{3}{a'}D = 0,$$

la signification des lettres A, B, C, D étant évidente.

On en tire

$$\frac{\partial A}{\partial q} + p\,\frac{\partial B}{\partial q} + \frac{\partial f}{\partial q}\left(1 + \frac{\partial C}{\partial q}\right) + C\,\frac{\partial^2 f}{\partial q^2} + \frac{3}{a'}\,\frac{\partial D}{\partial q} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial A}{\partial q} + p\,\frac{\partial B}{\partial q} + \frac{Cb'' + 3\,\frac{\partial D}{\partial q}}{a'} + \frac{\partial f}{\partial q}\left(1 + \frac{\partial C}{\partial q}\right) = 0. \tag{5}$$

Supposons

$$1 + \frac{\partial C}{\partial q} = 0, \qquad C + q = l(x, y, z),$$

c'est-à-dire

$$q\,\frac{\partial}{\partial q}\log b'' = l\,\frac{\partial}{\partial q}\log b'' + l_1, \qquad \frac{\partial}{\partial q}\log b'' = \frac{l_1}{q-l} = l_1\,\frac{\partial}{\partial q}\log(q-l).$$

On en tire

$$b'' = l_2(q-l)^{l_1}.$$

En prenant pour nouvelle variable une fonction $\theta(x, y, z)$ vérifiant $l\frac{\partial\theta}{\partial z} + \frac{\partial\theta}{\partial x} = 0$, la forme de l'équation ne change pas, et on a $l = 0$.

On peut donc prendre, en changeant les notations :

$$b'' = \lambda q^l, \qquad \log b'' = \log \lambda + l \log q, \qquad \frac{\partial}{\partial q} \log b'' = \frac{l}{q},$$

d'où :

$$\frac{\partial^2}{\partial q^2} \log b'' = -\frac{l}{q^2}.$$

On a alors

$$A = -q\frac{\partial \log l}{\partial x}, \qquad B = -q\frac{\partial \log l}{\partial z}, \qquad C = -q, \qquad D = -\frac{\lambda q^{l+2}}{l}.$$

La relation (5) s'écrit alors

$$\frac{\partial \log l}{\partial x} + p\frac{\partial \log l}{\partial z} + \frac{\lambda q^{l+1} + \frac{3\lambda}{l} q \frac{\partial}{\partial q}(q^{l+2})}{a'} = 0.$$

Si $l + 2 \neq 0$, le terme en q^{l+1} a pour coefficient $l + 3(l+2)$, et on doit avoir $l = -\frac{3}{2}$.

Si $l + 2 = 0$, on devrait avoir $\lambda = 0$, ce qui est impossible. Le seul cas à considérer est donc celui où $b'' = \lambda q^{-\frac{3}{2}}$, c'est-à-dire celui où $b = \omega(x, y, z)\sqrt{q}$.

La relation (1) donne dans ce cas

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} + q\frac{\partial \lambda}{\partial z} + \frac{\left(\omega\sqrt{q} - \frac{\partial a}{\partial y} - q\frac{\partial a}{\partial z}\right)}{a'}\frac{\partial \lambda}{\partial p} + \sqrt{q}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\omega}{a'}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{\partial a}{\partial y}}{a'}\right) - q\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{\partial a}{\partial z}}{a'}\right)$$

$$+ p\left[q\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\omega}{a'}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\frac{\partial a}{\partial y}}{a'}\right) - q\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\frac{\partial a}{\partial z}}{a'}\right)\right] + \frac{\left(\omega\sqrt{q} - \frac{\partial a}{\partial y} - q\frac{\partial a}{\partial z}\right)}{a'}\left(\frac{\omega}{2a'\sqrt{q}} - \frac{\frac{\partial a}{\partial z}}{a'}\right)$$

$$= \lambda\left[\omega\sqrt{q}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{a'}\right) - \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\frac{\partial a}{\partial y}}{a'}\right) - q\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\frac{\partial a}{\partial z}}{a'}\right)\right].$$

Le seul terme en $q^{-\frac{1}{2}}$ est $-\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\omega}{2a'^2}$. On a donc $\frac{\partial a}{\partial y}=0$; a est une fonction de x, z, p, et en posant

$$\frac{\omega}{a'}=\mu, \qquad -\frac{\frac{\partial a}{\partial z}}{a'}=0$$

l'équation précédente s'écrit :

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y}+q\frac{\partial\lambda}{\partial z}+\left(\mu\sqrt{q}+q\theta\right)\frac{\partial\lambda}{\partial p}+\sqrt{q}\frac{\partial\mu}{\partial x}+\frac{\partial\theta}{\partial x}q+p\left(\frac{\partial\mu}{\partial z}\sqrt{q}+q\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)$$
$$+\left(\mu+\theta\sqrt{q}\right)\left(\frac{\mu}{2}+\theta\sqrt{q}\right)=\lambda\left(\sqrt{q}\frac{\partial\mu}{\partial p}+\frac{\partial\theta}{\partial p}q\right);$$

on a donc

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y}+\frac{\mu^2}{2}=0,$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial z}+\theta\frac{\partial\lambda}{\partial p}+\frac{\partial\theta}{\partial x}+p\frac{\partial\theta}{\partial z}+\theta^2=\lambda\frac{\partial\theta}{\partial p} \quad \text{et} \quad \frac{\partial\lambda}{\partial p}+\frac{\partial\log\mu}{\partial x}+p\frac{\partial\log\mu}{\partial z}+\frac{3\theta}{2}=\lambda\frac{\partial\log\mu}{\partial p}.$$

Écrivons les conditions d'intégrabilité de ce système. On a :

$$\mu\frac{\partial\mu}{\partial z}=\theta\frac{\partial^2\lambda}{\partial p\,\partial y}-\frac{\partial\theta}{\partial p}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial y}=-\theta\mu\frac{\partial\mu}{\partial p}-\frac{\mu^2}{2}\frac{\partial\theta}{\partial p},$$

d'où

$$\frac{\partial\log\mu}{\partial z}+\theta\frac{\partial\log\mu}{\partial p}+\frac{1}{2}\frac{\partial\theta}{\partial p}=0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial\log\omega}{\partial z}-\frac{\frac{\partial a'}{\partial z}}{a'}+\frac{\frac{\partial a}{\partial z}}{a'}\cdot\frac{a''}{a'}+\frac{1}{2}\frac{\partial\theta}{\partial p}=0,$$

ou

$$\frac{\partial\log\omega}{\partial z}+\frac{3}{2}\frac{\partial\theta}{\partial p}=0.$$

Cette relation montre que $\frac{\partial \log \omega}{\partial z}$ ne dépend pas de y. On a en outre :

$$\mu \frac{\partial \mu}{\partial p} = \frac{\partial^2 \log \omega}{\partial x \partial y} - \frac{\mu^2}{2} \frac{\partial \log \mu}{\partial p}, \qquad \frac{3}{2} \mu \frac{\partial \mu}{\partial p} = \frac{\partial^2 \log \omega}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{a'^2} \right) = \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 \log \omega}{\partial x \partial y};$$

Cette dernière équation montre que $\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{a'^2} \right) = h^2(x, z)$.

On en tire :

$$\frac{1}{a'^2} = h^2(p + h_1), \qquad h \neq 0,$$

et en faisant un changement de variable

$$z_1 = \theta(x, z) \quad \text{avec} \quad h_1 = \frac{\frac{\partial \theta}{\partial x}}{\frac{\partial \theta}{\partial z}}, \qquad a' = \frac{H}{2\sqrt{p}}, \qquad a = H(x, z)\sqrt{p} + H_1(x, z);$$

on a alors :

$$\theta = \frac{-\frac{\partial H}{\partial z}\sqrt{p} - \frac{\partial H_1}{\partial z}}{\frac{H}{2\sqrt{p}}} = -2 \left(\frac{\partial \log H}{\partial z} p + \frac{\partial H_1}{\partial z} \frac{\sqrt{p}}{H} \right)$$

et l'égalité

$$\frac{\partial \log \omega}{\partial z} = 3 \left[\frac{\partial \log H}{\partial z} + \frac{1}{2\sqrt{p}} \frac{\frac{\partial H_1}{\partial z}}{H} \right] \quad \text{donne} \quad \frac{\partial H_1}{\partial z} = 0,$$

ce qui montre qu'on peut prendre $H_1 = 0$ et $\omega = l(x, y) H^3(x, z)$.

D'autre part,

$$a'^2 = \frac{H^2}{4p}, \qquad \text{donc} \quad \frac{6}{H^2} = \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 \log \omega}{\partial x \partial y},$$

et comme $\log \omega = \log l(x, z) + 3 \log H(x, z)$, on aura :

$$\frac{6}{H^2} = \frac{1}{l^2 H^6} \frac{\partial^2 \log l}{\partial x \partial y} \quad \text{et} \quad 6H^4(x, z) = \frac{1}{l^2(x, z)} \frac{\partial^2 \log l}{\partial x \partial y} = X^2,$$

donc H est indépendant de z et θ est nul. On arrive alors sans peine [1], en intégrant l'équation $\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 \log \omega}{\partial x \partial y} = 1$, à la forme $s = \frac{2\sqrt{pq}}{x+y}$ (Goursat, type I).

Si

$$h = 0, \qquad a'' = 0, \qquad a = \frac{\partial \alpha}{\partial z}(x, z)p + \alpha_1(x, z), \qquad \alpha \neq 0,$$

$$\theta = -\frac{p\frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial z}}{\frac{\partial \alpha}{\partial z}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \log \omega}{\partial z} = \frac{3}{2}\frac{\partial \log}{\partial z}\frac{\partial \alpha}{\partial z}, \qquad \omega = \alpha l(x, y)\frac{\partial \alpha}{\partial z}^{\frac{3}{2}}.$$

Il faut en plus que $\frac{\partial^2 \log \omega}{\partial x \partial y} = 0$, c'est-à-dire que $\frac{\partial^2 \log l(x, y)}{\partial x \partial y} = 0$, ce qui donne :

$$l(x, y) = XY,$$

et l'équation s'écrit :

$$\frac{d}{dy}\left[p\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \alpha_2(x, z)\right] = XY\frac{\partial \alpha}{\partial z}\sqrt{q\frac{\partial \alpha}{\partial z}}.$$

Posons

$$z_1 = \alpha(x, z), \qquad p_1 = p\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \frac{\partial \alpha}{\partial x}, \qquad q_1 = q\frac{\partial \alpha}{\partial z},$$

et il vient

$$\frac{d}{dy}[p_1 + A(x, z_1)] = XY\frac{\partial \alpha}{\partial z}\sqrt{q_1},$$

c'est-à-dire

$$\frac{d}{dy}[p + A(x, z)] = Y\alpha_1(x, z)\sqrt{q_1},$$

et en posant

$$Y_1 = \int Y^2 dy,$$

$$\frac{d}{dy}[p + A(x, y)] = \alpha_1(x, z)\sqrt{q},$$

$$s = q\frac{\partial A}{\partial z} + \alpha_1(x, z)\sqrt{q}.$$

Cette équation est du type $s = f(x, y, q)$, qu'on intègre en posant $q = u$.

---

[1] Goursat, M_1, p. 45.

Troisième cas. — Supposons $1 + \frac{\partial C}{\partial q} \neq 0$.

La relation (5) s'écrit :

$$(6) \qquad \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\frac{\partial A}{\partial q}}{1+\frac{\partial C}{\partial q}}\right) + p\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\frac{\partial B}{\partial q}}{1+\frac{\partial C}{\partial q}}\right) + \frac{1}{a'}\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{Cb'' + 3\frac{\partial D}{\partial q}}{1+\frac{\partial C}{\partial q}}\right) + \frac{b''}{a'} = 0;$$

Cette relation donnera en général $a' = \frac{\alpha(x, y, z)}{p + \beta(x, y, z)}$.

Posons

$$\beta(x, y, z) = \frac{\frac{\partial \theta}{\partial x}}{\frac{\partial \theta}{\partial z}}, \quad \text{on aura} \quad \frac{\partial a}{\partial p} = \frac{\frac{\partial \theta}{\partial z}\alpha(x, y, z)}{p\frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial \theta}{\partial x}}.$$

En prenant comme nouvelle inconnue $z_1 = \theta(x, y, z)$, l'équation $\frac{da}{dy} = b(x, y, z, q)$ ne change pas de forme, et il vient :

$$\frac{da}{dp} = \frac{\alpha(x, y, z)}{p}.$$

On peut donc prendre :

$$\beta = 0, \qquad a = \alpha \log p + \alpha_1(x, y, z).$$

En modifiant b, on aura $a = \alpha \log p$.

Dans la relation (4), faisons

$$f = \frac{bp}{\alpha} - p \log p\left(\frac{\partial \log \alpha}{\partial y} + q\frac{\partial \log \alpha}{\partial z}\right).$$

En annulant le coefficient des termes logarithmiques, on trouve :

$$\frac{\partial^2}{\partial q^2}\log b''\left(\frac{\partial \log \alpha}{\partial y} + q\frac{\partial \log \alpha}{\partial z}\right) + \frac{\partial \log \alpha}{\partial z}\frac{\partial}{\partial q}\log b'' = 0.$$

Si $\dfrac{\partial \log \alpha}{\partial z}$ n'était pas nul, on en conclurait

$$C + q + \frac{\dfrac{\partial \log \alpha}{\partial y}}{\dfrac{\partial \log \alpha}{\partial z}} = 0,$$

ce qui est contraire à nos hypothèses.

Donc

$$\frac{\partial \log \alpha}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial \log \alpha}{\partial y}, \qquad \alpha = X.$$

On peut prendre $\alpha = 1$, $f = pb(x, y, z, q)$.

La condition (1) s'écrit alors :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} + q \frac{\partial \lambda}{\partial z} + b \left(p \frac{\partial \lambda}{\partial p} - \lambda \right) + p \left(\frac{\partial b}{\partial x} + p \frac{\partial b}{\partial z} + pb \frac{\partial b}{\partial q} \right) = 0.$$

En posant $\lambda_1 = \dfrac{\partial^3 \lambda}{\partial p^3}$, on en tire :

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial y} + q \frac{\partial \lambda_1}{\partial z} + b \frac{\partial^3}{\partial p^3} \left(p \frac{\partial \lambda}{\partial p} - \lambda \right) = 0,$$

b n'est pas du premier degré en q. On en conclut sans peine que

$$\lambda = X_1 p \log p + \alpha_2 p^2 + \alpha_3 p - \alpha_0.$$

La condition (1) devient :

$$p^2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} + p \frac{\partial \alpha_3}{\partial y} - \frac{\partial \alpha_0}{\partial y} + q \left(p^2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial z} + q \frac{\partial \alpha_3}{\partial z} - \frac{\partial \alpha_0}{\partial z} \right)$$
$$+ b(\alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0) + p \left(\frac{\partial b}{\partial x} + p \frac{\partial b}{\partial z} + pb \frac{\partial b}{\partial q} \right) = 0,$$

On en tire d'abord $\alpha_0 = 0$ et

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial y} + q \frac{\partial \alpha_2}{\partial z} + b\alpha_2 + \frac{\partial b}{\partial z} + b \frac{\partial b}{\partial q} = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial \alpha_3}{\partial y} + q \frac{\partial \alpha_3}{\partial z} + bX_1 + \frac{\partial b}{\partial x} = 0. \tag{8}$$

Si b ne dépend pas de x, l'équation (7) montre qu'il en est de même de α_2. En posant :

$$\alpha_2 = \frac{\partial}{\partial z} \log \frac{\partial H(y, z)}{\partial z}.$$

l'équation devient, en prenant comme inconnue $z_1 = H(y, z)$,

$$s_1 = p_1 b \quad \text{avec} \quad q_1 = bz_1 + g(x, y, b).$$

C'est le type VI des équations de M. Goursat.

Cherchons, dans le cas général, les solutions communes à (7) et (8). Posons $X_1 = \frac{X'}{X}$ $(X \neq 0)$ et changeons α_3 en $\frac{\alpha_3}{X}$. On a :

$$bX + \frac{\partial \alpha_3}{\partial y} + q \frac{\partial \alpha_3}{\partial z} = \beta(y, z, q)$$

(Si X_1 est nul, il suffit de faire dans cette relation $X = 1$) et

$$\text{(9)} \qquad X^2 \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial y} + q \frac{\partial \alpha_3}{\partial z} \right) + \alpha_2 X \left(\beta - \frac{\partial \alpha_3}{\partial y} - q \frac{\partial \alpha_3}{\partial z} \right)$$
$$+ X \left(\frac{\partial \beta}{\partial z} - \frac{\partial^2 \alpha_3}{\partial y \partial z} - q \frac{\partial^2 \alpha_3}{\partial z^2} \right) + \left(\frac{\partial \beta}{\partial q} - \frac{\partial \alpha_3}{\partial z} \right) \left(\beta - \frac{\partial \alpha_3}{\partial y} - q \frac{\partial \alpha_3}{\partial z} \right) = 0.$$

En dérivant par rapport à x, on obtient une relation de la forme :

$$X' \frac{\partial \beta}{\partial z} - \frac{\partial \beta}{\partial q} \left(\frac{\partial^2 \alpha_3}{\partial x \partial y} + q \frac{\partial^2 \alpha_3}{\partial x \partial z} \right) + \beta \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_2 X - \frac{\partial \alpha_3}{\partial z} \right) + q \frac{\partial \gamma_1}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial x} = 0.$$

Si X' n'est pas nul, on a :

$$\frac{\partial \beta}{\partial q} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{X'} \frac{\partial^2 \alpha_3}{\partial x \partial y} \right) + q \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{X'} \frac{\partial^2 \alpha_3}{\partial x \partial z} \right) \right] = \beta \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{X'} \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_2 X - \frac{\partial \alpha_3}{\partial z} \right) \right] + q\gamma_3 + \gamma_4.$$

Si X' est nul, on a :

$$\frac{\partial \beta}{\partial q} \left(\frac{\partial^2 \alpha_3}{\partial x \partial y} + q \frac{\partial^2 \alpha_3}{\partial x \partial z} \right) = \beta \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_2 X - \frac{\partial \alpha_3}{\partial z} \right) + q \frac{\partial \gamma_1}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial x}.$$

Si cette relation ne se réduit pas à une identité, on en tire :

$$\frac{\partial}{\partial q}\log \beta'' = \frac{\partial}{\partial q}\log b'' = \frac{l_1}{q-l},$$

ce qui est contraire à nos hypothèses.

On a donc :

$$\frac{\partial^2 \alpha_3}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \alpha_3}{\partial x \partial z} = 0, \qquad \frac{\partial(\alpha_2 X)}{\partial x} = 0,$$

On en conclut sans peine qu'on peut prendre

$$\alpha_3 = 0, \qquad bX = \beta, \qquad \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} = 0. \qquad X\frac{\partial \beta}{\partial z} + \beta\frac{\partial \beta}{\partial q} = 0.$$

On retombe sur le type VI.

Si X' est différent de zéro, le même raisonnement montre que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{X'}\frac{\partial^2 \alpha_3}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{X'}\frac{\partial^2 \alpha_3}{\partial x \partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{X'}\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha_2 X - \frac{\partial \alpha_3}{\partial z}\right)\right] = \gamma_3 = \gamma_4 = 0.$$

En changeant la sifinification de β, on peut prendre

$$\alpha_3 = X\varphi(y, z) = \frac{\partial}{\partial z}\log \psi(y, z).$$

L'équation $\dfrac{d}{dy}\log p = b$ s'écrit alors :

$$\frac{d}{dy}\log p + \frac{d}{dy}\frac{\partial}{\partial z}\log \psi = \frac{1}{X}\beta(y, z, q).$$

Posons $z_1 = \psi(y, z)$. On obtient, en changeant les notations,

$$\frac{d}{dy}\log p = \frac{1}{X}\beta(y, z, q).$$

Ceci revient à prendre $\alpha_3 = 0$, $\alpha_2 X = \psi_1(y, z) + X\psi_2(y, z)$.

La relation (9) doit être une identité en X ; ce qui exige :

$$\beta\left(\psi_1 + \frac{\partial \beta}{\partial q}\right) = 0.$$

égalité contraire à nos hypothèses.

Quatrième cas. — Il faut donc que la relation (6) ou bien donne $a' = l(x, y, z)$, ou bien se réduise à une identité.

Si on a $a' = l$, on peut prendre, après un changement d'inconnue, $a = p\dfrac{\partial\theta}{\partial z}(x, y, z)$.

Posons $z_1 = \theta(x, y, z)$. L'équation donnée se ramène à la forme :

$$s = b(x, y, z, q).$$

La relation (1) donne alors :

$$\lambda = \frac{X}{2}p^2 + p\alpha(x, y, z) + \alpha_1(x, y, z),$$

d'où on tire :

$$\frac{\partial\alpha}{\partial y} + q\frac{\partial\alpha}{\partial z} + bX + \frac{\partial b}{\partial z} = 0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial\alpha_1}{\partial y} + q\frac{\partial\alpha_1}{\partial z} + \frac{\partial b}{\partial x} + b\alpha + b\frac{\partial b}{\partial q} = 0. \tag{11}$$

L'équation (10) donne $b'' = \varphi''(x, y, q)e^{-Xz}$.

1° $X = 0$. En posant $\alpha = \dfrac{\partial\theta}{\partial z}(x, y, z)$, on obtient :

$$b = \varphi(x, y, q) - \frac{\partial\theta}{\partial y} - q\frac{\partial\theta}{\partial z},$$

et la relation (11) donne, après deux dérivations par rapport à q,

$$\frac{\partial^3\varphi}{\partial q^3}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial y\,\partial z} + q\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\right) + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = 0,$$

ce qui est contraire à nos hypothèses.

On en conclut

$$\alpha = \frac{\partial\theta}{\partial z} = X_1, \qquad \frac{\partial b}{\partial z} = 0, \qquad \alpha_1 = X_2 z + g(x, y)$$

et b est une fonction de x, y, q définie par l'équation :

$$b\frac{\partial b}{\partial q} + \frac{\partial b}{\partial x} + X_1 b + qX_2 + \frac{\partial g}{\partial y} = 0.$$

Si l'on a $X_1 = X_2 = \frac{\partial g}{\partial y} = 0$, on obtient le type VIII de M. Goursat :

$$q - bx = f(y, b).$$

Si l'on a $X_1 = X_2 = 0$ en posant $z_1 = z + \int g(x, y)\,dy$, on retrouve le type VIII.

Supposons maintenant $X_1 \neq 0$. Posons $b = \beta\xi(x)$, $x_1 = \int \xi(x)\,dx$.

En déterminant ξ de façon que

$$\frac{\xi' + X_1\xi}{\xi^2} = \left(\frac{X_2}{\xi^2}\right)' = X_3',$$

on aura :

$$s = \beta, \qquad \beta\frac{\partial\beta}{\partial q} + \frac{\partial\beta}{\partial x} + \beta X_3' + qX_3 + \frac{\partial\theta}{\partial x}(x, y) = 0.$$

En intégrant cette équation on trouve, en posant $X_3 = \frac{X''}{X'}$.

$$b + q\frac{X''}{X'} + \frac{1}{X'}\frac{\partial\theta}{\partial x} = c_1,$$

$$qX + \theta = c_1X + \varphi(y, c_1).$$

En prenant comme nouvelle inconnue $z_1 = zX' + \int \theta(x, y)\,dy$, on a :

$$s_1 = c_1X', \qquad q_1 = \frac{s_1X}{X'} + \varphi\left(y, \frac{s_1}{X'}\right).$$

En prenant comme variable $x_1 = X(x)$, on retombe sur l'équation VIII.

2° $X \neq 0$. On a $b = \varphi e^{-Xz} + \alpha_3 q + \alpha_4$.

L'équation (11) donne :

$$\alpha + \frac{\partial}{\partial x}\log\varphi'' - X'z + b\frac{\partial\log\varphi''}{\partial q} + 3b' = 0$$

et, en dérivant par rapport à z,

$$\frac{\partial\alpha}{\partial z} - X' + \frac{\partial b}{\partial z}\frac{\partial\log\varphi''}{\partial q} + 3\frac{\partial b'}{\partial z} = 0,$$

d'où, en remplaçant $\frac{\partial b}{\partial z}$ par sa valeur et en dérivant par rapport à z,

$$\frac{\partial \log \varphi''}{\partial q}\left[q\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \alpha_3}{\partial z}\frac{e^{Xz}}{X}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^{Xz}}{X}\frac{\partial \alpha_4}{\partial z}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{e^{Xz}}{X}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial z}-X'+3\frac{\partial \alpha_3}{\partial z}\right)\right]=0.$$

Nous avons déjà remarqué qu'une pareille relation doit être une identité en q. On en déduit :

$$\alpha_3 = l_1(x,y) - e^{-Xz}l(x,y), \qquad \alpha_4 = m_1(x,y) - e^{-Xz}m(x,y),$$
$$\alpha - zX' + 3\alpha_3 = k_1(x,y) - k(x,y)e^{-Xz}.$$

En modifiant b, on peut prendre $l = m = 0$, $b = \varphi e^{-Xz} + l_1 q + m_1$ et $\alpha = zX' - Ke^{-Xz} + K_2(x,y)$.

En portant ces valeurs dans la relation (10), on trouve

$$l_1 = -\frac{X'}{X}, \qquad k = 0, \qquad \frac{\partial K_2}{\partial y} + Xm_1 = 0$$

et on peut écrire l'équation donnée :

$$sX + qX' = X\varphi(x,y,q)\,e^{-Xz} + \frac{\partial K_2}{\partial y}.$$

Le changement d'inconnue $z_1 = -Xz + \int K_2\,dx$ permet de la ramener à

$$s = e^z\varphi(x,y,q).$$

On peut donc faire dans les équations (10) et (11), $X = -1$, $\alpha = 0$, $b = \varphi(x,y,q)e^z$. On en tire :

$$\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial q} = ql(x,y) + l_1(x,y).$$

Nous avons déjà étudié le cas où l est nul.

En supposant $l \neq 0$, on a :

$$\varphi = \sqrt{lq^2 + 2l_1 q + l_2(x,y)}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{q^2\frac{\partial l}{\partial x} + 2q\frac{\partial l_1}{\partial x} + \frac{\partial l_2}{\partial x}}{\sqrt{lq^2 + 2l_1 q + l_2}}.$$

L'équation (11) montre que les fonctions l ne dépendent que de y, et que, si on pose $\alpha_1 = \alpha_0 e^{2z}$, on doit avoir :

$$\frac{\partial \alpha_0}{\partial y} + l_1 = 0, \qquad \frac{\partial \alpha_0}{\partial z} + 2\alpha_0 + l(y) = 0.$$

On en conclut en posant $Y' = 2l_1$ que $l(y) = Y$, et on a :

$$s = e^{z}\sqrt{Yq^2 + Y'q + Y_1}.$$

C'est l'équation VII de M. Goursat.

Cinquième cas. — Supposons que la relation (6) se réduise à une identité.

$$A = \alpha(q + C) + \alpha_1, \qquad B = \beta(q + C) + \beta_1, \qquad Cb' + 3D + b = \gamma(q + C) + \gamma_1,$$

les α, β, γ ne contenant que x, y, z.

On en tire

(12) $$\frac{\partial \log b''}{\partial x} = (\alpha q + \alpha_1)\frac{\partial \log b''}{\partial q} + \alpha_2,$$

(13) $$\frac{\partial \log b''}{\partial z} = (\beta q + \beta_1)\frac{\partial \log b''}{\partial q} + \beta_2,$$

(14) $$bb' = b'(\gamma q + \gamma_1) + \gamma_3 q + \gamma_4 + b(\gamma_2 - 2\gamma).$$

Les équations (12) et (13) donnent :

$$\frac{\partial \log b''}{\partial q}\left[q\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial z} - \left(q\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \beta_1}{\partial x}\right) + \alpha_1\beta - \beta_1\alpha\right] + \frac{\partial \alpha_2}{\partial z} - \frac{\partial \beta_2}{\partial x} = 0.$$

Cette relation doit se réduire à une identité, puisque $1 + \frac{\partial C}{\partial q}$ n'est pas nul.

On peut alors satisfaire de la façon la plus générale aux conditions qui en résultent en posant

$$\alpha = \frac{\partial}{\partial x}\log\frac{\partial \theta}{\partial z}, \quad \beta = \frac{\partial}{\partial z}\log\frac{\partial \theta}{\partial z}, \quad \alpha_1 = \frac{\dfrac{\partial \omega}{\partial x}}{\dfrac{\partial \theta}{\partial z}}, \quad \beta_1 = \frac{\dfrac{\partial \omega}{\partial z}}{\dfrac{\partial \theta}{\partial z}}, \quad \alpha_2 = \frac{\partial \log h}{\partial x}, \quad \beta_2 = \frac{\partial \log h}{\partial z}.$$

et on en conclut sans peine que $\log\frac{b''}{h}$ est une fonction de y et de $q\frac{\partial \theta}{\partial z} + \omega(x, y, z)$.

Un changement d'inconnue $z_1 = \theta(x, y, z)$ — et un changement de notation — nous amène alors à poser

$$b = h(x, y, z)\,\varphi\big(q + \theta(x, y, z), y\big) + ql(x, y, z) + l_1(x, y, z),$$

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0, \qquad \alpha_1 = \frac{\partial \theta}{\partial x}, \qquad \beta_1 = \frac{\partial \theta}{\partial z}, \qquad \alpha_2 = \frac{\partial \log h}{\partial x}, \qquad \beta_2 = \frac{\partial \log h}{\partial z}.$$

L'équation (5) donne alors $\dfrac{\partial a}{\partial z} = \gamma$, et l'équation (4')

$$a'\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial z} + p\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial z}.$$

Ceci exige que

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0, \qquad \frac{\partial \gamma}{\partial y} = \frac{\partial \gamma_1}{\partial z} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z}, \qquad \gamma = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \qquad \gamma_1 = \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

d'où $\theta = zY + l_2(x, y)$. Posons : $a = A + \psi$.

L'équation donnée prend la forme :

$$\frac{dA}{dy} + q\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = h\varphi(q + zY + l_2, y) + ql + l_1.$$

On peut prendre $\psi = 0$ en modifiant les fonctions l. On a alors :

$$\gamma = \gamma_1 = 0, \qquad \frac{\partial a}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial a}{\partial p}\left(pY + \frac{\partial l_2}{\partial x}\right) = \frac{\partial a}{\partial y}.$$

Si Y est nul, un changement d'inconnue évident montre qu'on peut prendre ψ fonction de y et q ; a fonction de x et de p.

Si Y n'est pas nul, remplaçons-le par $\dfrac{Y_1'}{Y_1}$ $(Y_1 \neq 0)$.

Le changement d'inconnue $z_1 = zY_1 + \int Y_1 l_2 dy$ conduit à la même conclusion.

Or l'équation (14) donne

$$bb' = b\gamma_2 + q\gamma_3 + \gamma_4$$

avec

$$b = h\big(\varphi(y, q) + ql + l_1\big), \qquad h \neq 0.$$

En dérivant la relation que l'on obtient ainsi par rapport à x, puis deux fois par rapport à q, on démontre que l et l_1 ne dépendent pas de x; on démontrerait de même qu'ils ne dépendent pas de z; on n'a donc qu'à étudier les équations :

$$s = h(x, y, z)a(x, p)b(y, q), \qquad a''b'' \neq 0.$$

La relation (14) donne

$$bb' = bY + qY_1 + Y_2.$$

La relation (1) donne une relation de même forme. En écrivant que ces deux relations sont identiques, on obtient le système

$$(15) \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial y} + a^2h^2Y_2 = 0, \qquad (16) \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial z} + a^2h^2Y_1 = 0,$$

$$(17) \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial p} + \frac{\partial \log h}{\partial x} + \frac{\partial \log a}{\partial x} + p\frac{\partial \log h}{\partial z} - \lambda\frac{\partial \log a}{\partial p} + ahY = 0.$$

On a d'abord :

$$(18) \qquad \frac{\partial h^2}{\partial y}Y_1 + h^2Y_1' = Y_2\frac{\partial h^2}{\partial z}.$$

1° $Y_1 = 0$. On a $\frac{\partial \lambda}{\partial z} = \frac{\partial h^2}{\partial z} = 0$.

En changeant b, on peut prendre $Y_2 = 1$.

Les équations (15) et (17) donnent alors :

$$aa' = \frac{1}{h^2}\frac{\partial^2 \log h}{\partial x \partial y} + \frac{a}{h^2}\frac{\partial}{\partial y}(\log Y)$$

dont les coefficients ne doivent contenir que x.

On retrouve les équations I et V de M. Goursat suivant que Y est nul ou non.

2° $Y_1 \neq 0$. En intégrant l'équation (18), on voit que, en prenant $Y_1 = 1$, et en posant $Y_2 = Y_3'$, $h^2 = F(x, z + Y_3)$:

Un changement d'inconnue permet de prendre $Y_3 = 0$, c'est-à-dire $Y_2 = 0$. Alors h ne dépend pas de y, et on doit avoir :

$$aa' = \frac{1}{h^2}\frac{\partial^2 \log h}{\partial x \partial z} + \frac{p}{h^2}\frac{\partial^2 \log h}{\partial z^2} + \frac{a}{h^2}Y\frac{\partial h}{\partial z};$$

Y est une constante k.

Si k n'est pas nul, $-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{h}\right)$ est une fonction de x qu'on peut prendre égale à -1. On peut prendre $h=\frac{1}{z}$, $aa'=ak+p$. C'est le type IV.

Si k est nul, on retrouve les équations II et III de M. Goursat.

Nous avons donc démontré le théorème suivant :

Théorème. — Si l'équation $s=f(x, y, z, p, q)$ admet un invariant du second ordre pour le système $x=$ constante, elle admet un autre invariant pour le système $y=$ constante, et se ramène aux équations de M. Goursat, si elle n'est pas du premier degré en q.

Si elle est du premier degré en q, une transformation qui est un cas particulier de la transformation d'Imstchenetsky la ramène à l'équation $s=\frac{\partial}{\partial y}f(x, y, z)$.

CHAPITRE II

Le chapitre précédent montre que nous n'avons plus qu'à étudier les équations $s = f(x, y, z, p, q)$ qui admettent un invariant d'ordre n supérieur à 2.

Soit $u(x, y, z, p_1, p_2, \ldots, p_n)$ un pareil invariant pour le système X de caractéristiques. M. Gau a démontré qu'il peut toujours se mettre sous la forme :

$$\Pi = [p_n + \psi(x, y, z, p_1, \ldots, p_{n-1})] \mathrm{A}(x, y, z, p_1, p_2, \ldots, p_{n-k}),$$

l'équation $p_n + \psi = 0$ étant en involution avec l'équation donnée.

Deux cas peuvent alors se présenter :

1° Il existe une fonction $\mathrm{A}(x, y, z, p_1)$ vérifiant identiquement la relation :

$$\mathrm{E}_x^1(\mathrm{A}) \equiv \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial z} + f \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial p_1} + \mathrm{A} \frac{\partial f}{\partial p_1} = 0.$$

L'invariant u peut alors se mettre sous la forme :

$$\Pi = \mathrm{A}(x, y, z, p_1)[p_n + \psi(x, y, z, p_1, \ldots, p_{n-1})].$$

2° Il est impossible de trouver une fonction $\mathrm{A}(x, y, z, p_1)$ vérifiant $\mathrm{E}_x'(\mathrm{A}) = 0$. L'invariant se met alors sous la forme :

$$\Pi = \frac{p_n + \psi(x, y, z, p_1, \ldots, p_{n-1})}{p_{n-k} + \theta(x, y, z, p_1, \ldots, p_{n-k-1})}.$$

l'équation $p_{n-k} + \theta(x, y, z, p_1, \ldots, p_{n-k-1}) = 0$ étant en involution avec l'équation donnée.

Supposons que Π soit l'invariant d'ordre minimum et examinons successivement les deux hypothèses.

1° Je dis d'abord que l'équation $s = f$ n'admet aucune involution d'ordre inférieur à n.

En effet, si $s = f$ était en involution avec $p_{n-h} + \psi_1(x, y, z, \ldots, p_{n-h-1}) = 0$, l'expression

$$\Pi_1 = [p_{n-h} + \psi_1(x, y, z, \ldots, p_{n-h-1})] A$$

serait, d'après la réciproque du théorème de M. Gau (¹), un invariant d'ordre $n - h$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Comme il est impossible que l'équation admette deux invariants distincts d'ordre n, on voit par le même raisonnement que l'équation ne peut pas admettre deux involutions d'ordre n pour le même système de caractéristiques.

2° Dans le cas où l'équation $s = f$ est en involution avec chacune des deux équations

$$p_n + \psi = 0, \qquad p_{n-k} + \theta = 0.$$

Nous allons d'abord démontrer que l'équations ne peut pas non plus admettre deux involutions d'ordre n.

On devrait en effet avoir simultanément dans ce cas :

$$(1) \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \psi}{\partial z} + f \frac{\partial \psi}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right) \frac{\partial \psi}{\partial p_2} + \ldots + \left(\frac{d^{n-2} f}{dx^{n-2}}\right) \frac{\partial \psi}{\partial p_{n-1}} + \left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right) = (p_n + \psi) \frac{\partial f}{\partial p_1},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \theta}{\partial z} + f \frac{\partial \theta}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right) \frac{\partial \theta}{\partial p_2} + \ldots + \left(\frac{d^{n-2} f}{dx^{n-2}}\right) \frac{\partial \theta}{\partial p_{n-1}} + \left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right) = (p_n + \theta) \frac{\partial f}{\partial p_1}.$$

En retranchant membre à membre, et posant $\omega = \psi - \theta$, on aurait :

$$(2) \qquad \frac{\partial \omega}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \omega}{\partial z} + f \frac{\partial \omega}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right) \frac{\partial \omega}{\partial p_2} + \ldots + \left(\frac{d^{n-2} f}{dx^{n-2}}\right) \frac{\partial \omega}{\partial p_{n-1}} = \omega \frac{\partial f}{\partial p_1}.$$

On sait que

$$\left(\frac{d^i f}{dx^i}\right) = p_{i+1} \frac{\partial f}{\partial p_1} + F(x, y, z, p_2, \ldots, p_i).$$

(¹) T. G., p. 26.

Si donc on dérive l'identité précédente par rapport à p_{n-1}, on a, en posant $\omega' = \dfrac{\partial\omega}{\partial p_{n-1}}$:

$$\frac{\partial\omega'}{\partial y} + q_1 \frac{\partial\omega'}{\partial z} + f\frac{\partial\omega'}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial\omega'}{\partial p_2} + \ldots + \frac{d^{n-2}f}{dx^{n-2}}\frac{\partial\omega'}{\partial p_{n-1}} = 0.$$

Cette relation exprime que ω' est un invariant de l'équation $s = f$; comme il est d'ordre inférieur à n, on doit avoir $\omega' = X$.

Si $X \neq 0$, on peut prendre $X = 1$ et ω est alors égal à $p_{n-1} + \omega_1(x, y, z, p_1, \ldots, p_{n-2})$. En portant cette valeur dans la relation (2), on trouve :

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial y} + q_1 \frac{\partial\omega_1}{\partial z} + f\frac{\partial\omega_1}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial\omega_1}{\partial p_2} + \ldots + \left(\frac{d^{n-3}f}{dx^{n-3}}\right)\frac{\partial\omega_1}{\partial p_{n-2}} + \frac{d^{n-2}f}{dx^{n-2}} = (p_{n-1} + \omega_1)\frac{\partial f}{\partial p_1},$$

l'équation $p_{n-1} + \omega_1 = 0$ serait en involution avec $s = f$ et on pourrait former deux invariants distincts d'ordre n :

$$\frac{p_n + \psi}{p_{n-1} + \omega_1} \quad \text{et} \quad \frac{p_n + \theta}{p_{n-1} + \omega_1}, \quad \text{ce qui est impossible.}$$

On doit donc avoir $X = 0$.

Supposons alors que :

$$\frac{\partial\omega}{\partial p_{n-2}} = \frac{\partial\omega}{\partial p_{n-3}} = \ldots = \frac{\partial\omega}{\partial p_{n-h+1}} = 0 \quad \text{avec} \quad \frac{\partial\omega}{\partial p_{n-h}} \neq 0,$$

l'équation (2) s'écrit :

$$\frac{\partial\omega}{\partial y} + q_1 \frac{\partial\omega}{\partial z} + f\frac{\partial\omega}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial\omega}{\partial p_2} + \ldots + \left(\frac{d^{n-h-1}f}{dx^{n-h-1}}\right)\frac{\partial\omega}{\partial p_{n-h}} = \omega\frac{\partial f}{\partial p},$$

et le même raisonnement nous amènera à la conclusion $\dfrac{\partial\omega}{\partial p_{n-h}} = 0$. Il faut donc, puisque l'équation f ne vérifie aucune relation de la forme $E_x^1(A) = 0$, que ω soit identiquement nul. C. q. f. d.

Il est intéressant de remarquer qu'on peut, par cette méthode, pénétrer plus avant dans la connaissance de la structure de l'invariant. Nous reviendrons à cette question dans un prochain Mémoire.

Dans ce qui va suivre, je vais me proposer spécialement de rechercher s'il existe des équations de la forme

$$s = f(x, y, z, p, q)$$

qui admettent un invariant d'ordre supérieur à 2 pour chaque système de caractéristiques, c'est-à-dire qui soient de la première classe.

Il est bien évident que, s'il en est ainsi, l'équation est en involution avec deux équations :

$$p_n + \psi(x, y, z, p_1, \ldots, p_{n-1}) = 0,$$
$$q_m + \varphi(x, y, z, q_1, \ldots, q_{m-1}) = 0.$$

M. Gau a établi que, si l'équation

$$E_x^k(A) \equiv \frac{\partial A}{\partial y} + q_1 \frac{\partial A}{\partial z} + f \frac{\partial A}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right) \frac{\partial A}{\partial p_2} + \ldots + \left(\frac{d^{k-1} f}{dx^{k-1}}\right) \frac{\partial A}{\partial p_k} + A \frac{\partial f}{\partial p_1} = 0$$

ne peut être vérifiée par aucune fonction A de $x, y, z, p_1, \ldots, p_k$ pour $k = 0$, 1 ou 2, la fonction f doit vérifier les deux conditions nécessaires :

$$C_x(\alpha) \equiv \frac{\partial \alpha}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \alpha}{\partial z} + f \frac{\partial \alpha}{\partial p_1} + \alpha \frac{\partial f}{\partial p_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2} = 0,$$

$$C'_{(x)} \alpha_1 \equiv \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial z} + f \frac{\partial \alpha_1}{\partial p_1} + \alpha(m-1) \left[\frac{\partial f}{\partial x} + p_1 \frac{\partial f}{\partial z} + f \frac{\partial f}{\partial q_1}\right]$$
$$+ (m-1) \left[\frac{\partial^2 f}{\partial p_1 \partial x} + p_1 \frac{\partial^2 f}{\partial p_1 \partial z} + f \frac{\partial^2 f}{\partial p_1 \partial q_1}\right] + \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p_1} + \frac{\partial f}{\partial q_1} = 0,$$

α et α_1 étant simplement fonctions de x, y, z, p_1, pour pouvoir être en involution avec une équation du système X d'ordre quelconque supérieur à 2.

Si l'équation $s = f$ est de première classe, il est clair que la fonction f devra vérifier les conditions

$$C_x(\alpha) = 0, \qquad C_x'(\alpha_1) = 0$$

et les deux conditions :

$$C_y(\beta) = 0, \qquad C_y'(\beta_1) = 0$$

qu'on en déduit en permutant les variables x et y.

Le troisième chapitre de ce travail est consacré à démontrer que les quatre conditions sont incompatibles.

Nous allons maintenant montrer que, lorsqu'il existe une fonction A telle que $E_x^k(A) = 0$ pour $k = 0$, 1, 2, on peut remplacer la condition $C_x'(\alpha_1) = 0$ par une condition analogue $\Gamma_x(\theta) = 0$, la condition $C_x(\alpha) = 0$ étant remplacée par $E_x^k(A) = 0$.

Supposons donc $E_x^k(A) = o$.

Si l'équation admet une involution d'ordre n avec l'équation $p_n + \psi = o$ d'après un théorème de M. Gau [1] plusieurs fois invoqué, l'expression $A(p_n + \psi)$ est un invariant d'ordre n. Supposons que n soit l'ordre minimum d'involution. C'est aussi l'ordre de l'invariant d'ordre minimum et réciproquement.

Nous sommes donc dans les conditions d'application du théorème démontré par M. Goursat [2] à la fin de son second Mémoire : l'équation $s = f$ admet un invariant d'ordre minimum n, et n'est en involution avec aucune équation d'ordre inférieur. On a donc forcément $k = 1$, c'est-à-dire qu'il existe une fonction λ non nulle, et fonction seulement de x, y, z, p_1, telle que :

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y} + q_1\frac{\partial\lambda}{\partial z} + f\frac{\partial\lambda}{\partial p_1} + \lambda\frac{\partial f}{\partial p_1} = o. \tag{1}$$

Dans ce qui suit, nous supposerons la relation (1) vérifiée et n représentera l'ordre minimum d'involution ($n > 2$).

Lemme. — S'il existe une expression θ fonction de $x, y, z, p_1, \ldots, p_{n-k}$ telle que l'on ait identiquement :

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} + q\frac{\partial\theta}{\partial z} + f\frac{\partial\theta}{\partial p_1} + \ldots + \frac{\partial\theta}{\partial p_{n-k}}\left(\frac{d^{n-k-1}f}{dx^{n-k-1}}\right) + i\theta\frac{\partial f}{\partial p} = o, \qquad o < k < n,$$

elle est de la forme $\theta = X\lambda^i$.

D'abord, si $i = o$, θ est un invariant d'ordre $n - k$; il faut donc que $\theta = X$, il est de la forme annoncée.

De même si $\theta = o$:

Si θ et i ne sont pas nuls, on peut poser : $\theta = e^{i\tau}$, et en posant $\lambda = e^{\mu}$, on a :

$$\frac{\partial\tau}{\partial y} + q\frac{\partial\tau}{\partial z} + f\frac{\partial\tau}{\partial p_1} + \ldots + \frac{\partial\tau}{\partial p_{n-k}}\left(\frac{d^{n-k-1}f}{dx^{n-k-1}}\right) + \frac{\partial f}{\partial p} = o,$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial y} + q\frac{\partial\mu}{\partial z} + f\frac{\partial\mu}{\partial p_1} + \qquad\qquad + \frac{\partial f}{\partial p_1} = o,$$

d'où :

$$\frac{\partial(\tau-\mu)}{\partial y} + q\frac{\partial(\tau-\mu)}{\partial z} + f\frac{\partial(\tau-\mu)}{\partial p_1} + \ldots + \frac{\partial(\tau-\mu)}{\partial p_{n-k}}\left(\frac{d^{n-k-1}f}{dx^{n-k-1}}\right) = o.$$

---

[1] T. G., p. 37.
[2] M_2, p. 462.

Puisqu'il n'existe pas d'invariant d'ordre inférieur à n, il faut que $\tau - \mu = \xi(x)$.

Or $\dfrac{\theta}{\lambda^i} = e^{i(\tau-\mu)} = e^{i\xi(x)}$. On a donc $\theta = X\lambda^i$ C. q. f. d.

Je rappellerai d'autre part les résultats de l'élégante étude que M. Gau (¹) a faite des expressions $\left(\dfrac{d^n f}{dx^n}\right)$. Il a démontré que l'on a :

$$\frac{d^i f}{dx^i} = p_{i+1}\frac{\partial f}{\partial p_1} + p_i M_i^i + p_{i-1} M_i^{i+1} + \ldots + p_k M_i + K_i(x, y, z, \ldots, p_{k-1}),$$

les coefficients M_i étant indépendants de $p_{i+1}, p_i, \ldots, p_k$ et l'ordre maximum des dérivées contenues dans M_i^h étant $i - h + 2$. En particulier, M^i ne dépend que de x, y, z, p_1, p_2, et on voit facilement que l'on a :

$$M_i^i = i\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)\right] + \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f_1}{\partial p_1}\frac{\partial f}{\partial q_1},$$

ou, en développant

$$(2) \qquad M_i^i = i\left[r\frac{\partial^2 f}{\partial p_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial p} + p\frac{\partial f}{\partial z \partial p} + f\frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q}\right] + \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q}.$$

Ceci posé, la condition d'involution s'écrit :

$$(3) \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} + q_1\frac{\partial \psi}{\partial z} + f\frac{\partial \psi}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial \psi}{\partial p_2} + \ldots + \frac{\partial \psi}{\partial p_{n-1}}\left(\frac{d^{n-2} f}{dx^{n-2}}\right) + \left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right) = (p_n + \psi)\frac{\partial f}{\partial p}.$$

Dérivons par rapport à p_{n-1} en posant

$$\psi' = \frac{\partial \psi}{\partial p_{n-1}}, \qquad \psi'' = \frac{\partial^2 \psi}{\partial p^2_{n-1}},$$

on aura successivement :

$$(3') \quad \frac{\partial \psi'}{\partial y} + q\frac{\partial \psi'}{\partial z} + f\frac{\partial \psi'}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial \psi'}{\partial p_2} + \ldots + \frac{\partial \psi'}{\partial p_{n-1}}\left(\frac{d^{n-2} f}{dx^{n-2}}\right) + M^{n-1}_{n-1} = 0,$$

$$(4) \quad \frac{\partial \psi''}{\partial y} + q\frac{\partial \psi''}{\partial z} + f\frac{\partial \psi''}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial \psi''}{\partial p_2} + \ldots + \frac{\partial \psi''}{\partial p_{n-1}}\left(\frac{d^{n-2} f}{dx^{n-2}}\right) + \psi''\frac{\partial f}{\partial p} = 0.$$

(¹) T. G., p. 34.

L'équation (4) est de la forme qui relève du lemme. Elle donne $\psi'' = \lambda X$, et on en conclut :

$$\psi' = \lambda X p_{n-1} + \psi_1(x, y, z, p_1, \ldots, p_{n-2})$$

la fonction ψ_1 devant vérifier la condition

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + q\frac{\partial \psi_1}{\partial z} + f\frac{\partial \psi_1}{\partial p_1} + \ldots + \frac{\partial \psi_1}{\partial p_{n-2}}\left(\frac{d^{n-3}f}{dx^{n-3}}\right) + \lambda X\left[\frac{d^{n-2}f}{dx^{n-2}}\right] + M^{n-1}_{n-1} = 0,$$

en posant, comme l'a proposé M. Goursat,

$$\left[\frac{d^{n-2}f}{dx^{n-2}}\right] = \left(\frac{d^{n-2}f}{dx^{n-2}}\right) - p_{n-1}\frac{\partial f}{\partial p} = p_{n-2}M^{n-2}_{n-2} + H(x, y, z, p_1, \ldots, p_{n-3}).$$

Si on représente par ψ_1' et ψ_1'' les dérivées première et seconde de ψ_1 par rapport à p_{n-2} l'égalité précédente donne successivement :

$$\frac{\partial \psi_1'}{\partial y} + q\frac{\partial \psi_1'}{\partial z} + f\frac{\partial \psi_1'}{\partial p_1} + \ldots + \frac{\partial \psi_1'}{\partial p_{n-3}}\left(\frac{d^{n-4}f}{dx^{n-4}}\right) + \frac{\partial \psi_1'}{\partial p_{n-2}}\left(\frac{d^{n-3}f}{dx^{n-3}}\right) + \psi_1'\frac{\partial f}{\partial p} + \lambda X M^{n-2}_{n-2} = 0,$$

$$\frac{\partial \psi_1''}{\partial y} + q\frac{\partial \psi_1''}{\partial z} + f\frac{\partial \psi_1''}{\partial p_1} + \ldots + \frac{\partial \psi_1''}{\partial p_{n-3}}\left(\frac{d^{n-4}f}{dx^{n-4}}\right) + \frac{\partial \psi_1''}{\partial p_{n-2}}\left(\frac{d^{n-3}f}{dx^{n-3}}\right) + 2\psi_1''\frac{\partial f}{\partial p} = 0.$$

L'application du lemme montre alors que $\psi_1'' = X_1\lambda^2$. Nous poserons

$$\psi_1' = X_1\lambda^2 p_{n-2} + \psi_2(x, y, z, \ldots, p_{n-3}), \qquad \psi_2' = \frac{\partial \psi_2}{\partial p_{n-3}}.$$

On a alors

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial y} + q\frac{\partial \psi_2}{\partial z} + f\frac{\partial \psi_2}{\partial p_1} + \ldots + \frac{\partial \psi_2}{\partial p_{n-3}}\left(\frac{d^{n-4}f}{\partial x^{n-4}}\right) + \lambda^2 X_1\left[\frac{d^{n-3}f}{dx^{n-3}}\right] + \psi_2\frac{\partial f}{\partial p} + \lambda X M^{n-2}_{n-2} = 0,$$

$$\frac{\partial \psi_2'}{\partial y} + q\frac{\partial \psi_2'}{\partial z} + f\frac{\partial \psi_2'}{\partial p_1} + \ldots + \frac{\partial \psi_2'}{\partial p_{n-3}}\left(\frac{d^{n-4}f}{dx^{n-4}}\right) + 2\frac{\partial f}{\partial p}\psi_2' + \lambda^2 X_1 M^{n-3}_{n-3} = 0.$$

D'une façon générale, supposons qu'en posant :

$$\frac{\partial\psi_{h-1}}{\partial p_{n-h}} = X_{h-1}\lambda^h p_{n-h} + \psi_h(x, y, z, \ldots, p_{n-h-1}), \qquad n-h \geqslant 3,$$

on ait la relation :

$$(5) \quad \frac{\partial\psi_h}{\partial y} + q\frac{\partial\psi_h}{\partial z} + f\frac{\partial\psi_h}{\partial p_1} + \ldots + \frac{\partial\psi_h}{\partial p_{n-h-1}}\left(\frac{d^{n-h-2}f}{dx^{n-h-2}}\right) + X_{h-1}\lambda^h\left[\frac{d^{n-h-1}f}{dx^{n-h-1}}\right] + X_{h-2}\lambda^{h-2}M^{n-h}_{n-h} + (h-1)\psi_h\frac{\partial f}{\partial p} = 0.$$

En représentant $\frac{\partial\psi_h}{\partial p_{n-h-1}}$ par ψ_h' et $\frac{\partial^2\psi_h}{\partial p^2_{n-h-1}}$ par ψ_h'', on a successivement :

$$\frac{\partial\psi_h'}{\partial y} + q\frac{\partial\psi_h'}{\partial z} + f\frac{\partial\psi_h'}{\partial p_1} + \ldots + \frac{\partial\psi_h'}{\partial p_{n-h-1}}\left(\frac{d^{n-h-2}f}{\partial x^{n-h-2}}\right) + X_{n-1}\lambda^h M^{n-h-1}_{n-h-1} + h\psi_h'\frac{\partial f}{\partial p} = 0$$

et

$$\frac{\partial\psi_h''}{\partial y} + q\frac{\partial\psi_h''}{\partial z} + f\frac{\partial\psi_h''}{\partial p_1} + \ldots + \frac{\partial\psi_h''}{\partial p_{n-h-1}}\left[\frac{d^{n-h-2}f}{dx^{n-h-2}}\right] + (h+1)\psi_h''\frac{\partial f}{\partial p} = 0.$$

Le lemme montre alors que $\psi_h'' = X_h\lambda^{h+1}$, et on peut poser

$$\psi_h' = X_h\lambda^{h+1}p_{n-h-1} + \psi_{h+1}(x, y, z, p_1, \ldots, p_{n-h-2}).$$

En portant cette valeur dans la condition que vérifie ψ_h', on obtient la relation :

$$(6) \quad \frac{\partial\psi_{h+1}}{\partial y} + q\frac{\partial\psi_{h+1}}{\partial z} + f\frac{\partial\psi_{h+1}}{\partial p_1} + \ldots + \frac{\partial\psi_{h+1}}{\partial p_{n-h-2}}\left[\frac{d^{n-h-3}f}{dx^{n-h-3}}\right] + X_h\lambda^{h+1}\left[\frac{d^{n-h-2}f}{dx^{n-h-2}}\right] + X_{h-1}\lambda^h M^{n-h-1}_{n-h-1} + h\,\psi_{h+1}\frac{\partial f}{\partial p} = 0.$$

La loi est donc générale. L'application réitérée de ce mode de calcul nous amène donc à une relation de la forme

$$R \equiv \frac{\partial\psi_{n-3}}{\partial y} + q\frac{\partial\psi_{n-3}}{\partial z} + f\frac{\partial\psi_{n-3}}{\partial p_2}\left(\frac{df}{dx}\right) + X_{n-4}\lambda^{n-3}\left[\frac{d^2f}{dx^2}\right] + (n-4)\psi_{n-3}\frac{\partial f}{\partial p} + X_{n-5}\lambda^{n-4}M^3_3 = 0,$$

où ψ_{n-3} est une fonction de x, y, z, p_1, p_2.

Cette relation R constitue en général une condition nécessaire simple que doit vérifier la fonction f. On aperçoit cependant que cette condition s'évanouit dans le cas où X_{n-4} et X_{n-5} sont nuls simultanément. La relation donnerait simplement dans ce cas $\psi_{n-3} = X_{n-3}\lambda^{n-4}$.

Plus généralement, si l'on a $X_h = X_{h-1} = 0$, la condition que doit vérifier ψ_{h+1} se réduit à $\psi_{h+1} = \lambda^h \xi_h$.

On a alors

$$\psi_n' = \psi_{n+1} = \lambda^h \xi_h,$$
$$\psi_h = \lambda^h \xi_h p_{n-h-1} + \varphi_{h+1}(x, y, z, \ldots, p_{n-h-2}).$$

La relation (5) donne alors :

$$\frac{\partial \varphi_{h+1}}{\partial y} + q\frac{\partial \varphi_{h+1}}{\partial z} + f\frac{\partial \varphi_{h+1}}{\partial p_1} + \ldots + \frac{\partial \varphi_{h+1}}{\partial p_{n-h-2}}\left(\frac{d^{n-h-3}f}{dx^{n-h-3}}\right)$$
$$+ \lambda^h \xi_h \left[\frac{d^{n-h-2}f}{dx^{n-h-2}}\right] + X_{h-2}\lambda^{h-1} \mathrm{M}^{n-h}_{n-h} + (h-1)\varphi_{h+1}\frac{\partial f}{\partial p} = 0.$$

Si l'on compare cette relation à la relation (6) on voit que la condition en ψ_{h+1} est remplacée par une autre en tous points identiques, à cela près que dans les coefficients de $\left[\frac{d^{n-h-2}f}{dx^{n-h-2}}\right]$ et de $\frac{\partial f}{\partial p}$, h est diminué d'une unité, ainsi que dans l'ensemble du symbole $X_{h-1}\lambda^h \mathrm{M}^{n-h-1}_{n-h-1}$.

Si donc dans le calcul qui nous amène à la relation R et qui nous donne une suite de $n-3$ relations où figurent les fonctions $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-3}$, les fonctions X_i, qui figurent dans la même relation, s'annulent simultanément pour k de ces relations, nous retrouverons encore une dernière relation en $\psi_{n-3}(x, y, z, p_1, p_2)$, mais où le coefficient de $\left[\frac{d^2f}{dx^2}\right]$ sera $X_2\lambda^{n-k-3}$ celui de $\frac{\partial f}{\partial p}\psi_{n-3}$, $n-k-4$ et où le dernier terme sera

$$\xi(x)\lambda^{n-k-4}\mathrm{M}^{k+3}_{k+3} = 0.$$

La forme générale de la relation R sera donc

$$\mathrm{R} \equiv \frac{\partial \psi_{n-3}}{\partial y} + q_1\frac{\partial \psi_{n-3}}{\partial z} + f\frac{\partial \psi_{n-3}}{\partial p_1} + \frac{\partial \psi_{n-3}}{\partial p_2}\left(\frac{df}{dx}\right)$$
$$+ X\lambda^{n-k-3}\left[\frac{d^2f}{dx^2}\right] + (n-k-4)\psi_{n-3}\frac{\partial f}{\partial p} + \xi\lambda^{n-k-4}\mathrm{M}^{k+3}_{k+3} = 0,$$

où le nombre k est certainement inférieur à $n-3$. Il ne sera égal à $n-4$ que si toutes les fonctions X_i, ξ_i, ... sont nulles.

On aura alors

$$\psi' = \psi_1(x, y, z, p_1, \ldots, p_{n-2}),$$

$$\psi_1' = \frac{\partial \psi_1}{\partial p_{n-2}} = 0,$$

ψ_1 sera indépendant de p_{n-2}. $\psi' = \psi_1 = \psi_2(x, y, z, \ldots, p_{n-3})$ ψ_2 sera de même indépendant de p_{n-3}, et ainsi de suite de proche en proche; ψ' ne pourra donc être fonction que de x, y, z, p_1, p_2.

La relation (3′) donnera alors en posant

$$\psi' = \psi_{n-3}(x, y, z, p_1, p_2),$$

$$\frac{\partial \psi_{n-3}}{\partial y} + q\frac{\partial \psi_{n-3}}{\partial z} + f\frac{\partial \psi_{n-3}}{\partial p_1} + \frac{\partial \psi_{n-3}}{\partial p_2}\left(\frac{df}{dx}\right) + \mathrm{M}^{n-1}_{n-1} = 0.$$

C'est la relation R (¹), où on a fait

$$k = n-4, \qquad \mathrm{X} = 0, \qquad \xi = 1.$$

La fonction f devra donc toujours vérifier une relation de la forme R où la fonction $\xi(x)$ au moins est différente de zéro.

Posons

$$\psi_{n-3} = \lambda^{n-k-4} g(x, y, z, p_1, p_2).$$

La relation s'écrit :

$$\frac{\partial g}{\partial y} + q_1\frac{\partial g}{\partial z} + f\frac{\partial g}{\partial p_1} + \frac{\partial g}{\partial p_2}\left(\frac{df}{dx}\right) + \lambda\mathrm{X}\left[\frac{d^2 f}{dx^2}\right] + \xi\mathrm{M}^{k+3}_{k+3} = 0,$$

et en posant $k+3 = m$, on aura en supprimant, comme nous le ferons désormais, les indices de p et q et posant $p_2 = r$:

$$\frac{\partial g}{\partial y} + q\frac{\partial g}{\partial z} + f\frac{\partial g}{\partial p} + \frac{\partial g}{\partial r}\left(\frac{df}{dx}\right) + \lambda\mathrm{X}\left[\frac{d^2 f}{dx^2}\right]$$
$$+ \xi\left(m\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)\right] + \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{\partial f}{\partial q}\right) = 0, \qquad m \geqslant 3$$

(¹) C'est, au fond, à l'établissement de cette relation dans le cas particulier des équations linéaires en p et q que M. Gau a dû de pouvoir terminer la recherche de celles de ces équations qui sont de la première classe.

avec

$$\left(\frac{df}{dx}\right)=\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial z}+f\frac{\partial f}{\partial q}+r\frac{\partial f}{\partial p},$$

$$\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial p}+p\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial p}+f\frac{\partial^2 f}{\partial p\partial q}+r\frac{\partial^2 f}{\partial p^2},$$

$$\begin{aligned}\left[\frac{d^2 f}{dx^2}\right]=r^2\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}&+r\left(2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial p}+2p\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial p}+2f\frac{\partial^2 f}{\partial p\partial q}+\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q}\right)\\&+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2p\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}+2pf\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial q}+p\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial q}\\&+p^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}+2f\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial q}+f^2\frac{\partial^2 f}{\partial q^2}+f\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)^2,\end{aligned}$$

que nous écrirons souvent :

$$\left[\frac{d^2 f}{dx^2}\right]=r^2\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}+C_1 r+C_0,$$

les coefficients C_1 et C_0 ayant une signification évidente.

On peut tirer de la relation φ des relations plus simples. Dérivons par rapport à r. On a successivement en posant :

$$g'=\frac{\partial g}{\partial r},\qquad g''=\frac{\partial^2 g}{\partial r^2},\qquad g'''=\frac{\partial^3 g}{\partial r^3},$$

$$(6)\quad \frac{\partial g'}{\partial y}+q\frac{\partial g'}{\partial z}+f\frac{\partial g'}{\partial p}+\frac{\partial g'}{\partial r}\left(\frac{df}{dx}\right)+g'\frac{\partial f}{\partial p}+\lambda X\left(2r\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}+C_1\right)+\xi m\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}=0,$$

$$(7)\quad \frac{\partial g''}{\partial y}+q\frac{\partial g''}{\partial z}+f\frac{\partial g''}{\partial p}+\frac{\partial g''}{\partial r}\left(\frac{df}{dx}\right)+2g''\frac{\partial f}{\partial p}+2\lambda X\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}=0,$$

$$(8)\quad \frac{\partial g'''}{\partial y}+g\frac{\partial g'''}{\partial z}+f\frac{\partial g'''}{\partial p}+\frac{\partial g'''}{\partial r}\left(\frac{df}{dx}\right)+3g'''\frac{\partial f}{\partial p}=0.$$

1° $X \neq 0$. On peut, en changeant g' en $g'X$ et ξ en ξX, prendre $X=1$. La relation (8) montre que $g'''=2X_1\lambda^3$. On peut poser :

$$g''=2[X_2\lambda^3 r+\lambda^2\theta(x,y,z,p)].$$

La relation (7) donne alors :

$$(9)\qquad \frac{\partial\theta}{\partial y}+q\frac{\partial\theta}{\partial z}+f\frac{\partial\theta}{\partial p}+X_1\left[\frac{df}{dx}\right]+\frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}=0.$$

Remarquons que la condition (1) peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\lambda}\right)+q\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\lambda}\right)+f\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{\lambda}\right)-\frac{1}{\lambda}\frac{\partial f}{\partial p}=0,$$

d'où

$$(10)\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]+q\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]+f\frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]-\frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}=0.$$

On aura alors :

$$(11)\quad \frac{\partial}{\partial y}\left[\theta+\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]+q\frac{\partial}{\partial z}\left[\theta+\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]+f\frac{\partial}{\partial p}\left[\theta+\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]+X_1\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]=0,$$

qui, si X_1 n'est pas nul, s'écrit immédiatement en changeant la signification de θ :

$$\frac{\partial\theta}{\partial y}+q\frac{\partial\theta}{\partial z}+f\frac{\partial\theta}{\partial p}+\left(\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial z}+f\frac{\partial f}{\partial q}\right)=0.$$

En posant $\theta=\frac{\tau}{\lambda}$, cette équation s'écrit :

$$\frac{\partial\tau}{\partial y}+q\frac{\partial\tau}{\partial z}+f\frac{\partial\tau}{\partial p}+\frac{\tau\partial f}{\partial p}+\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial z}+f\frac{\partial f}{\partial q}\right)=0.$$

Cette équation, jointe à l'équation (1), exprime, comme l'a montré M. Goursat [1], que $\varphi=\lambda r+\tau X$ est un invariant du second ordre de l'équation $s=f$.

Supposons $X_1=0$, l'équation (11) donne

$$\theta+\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{\lambda}\right)=-X_2.$$

On a

$$g''=-2\lambda^2\left[X_2+\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]\qquad\text{et on peut poser :}$$

$$g'=-2\lambda^2\left[X_2+\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]r+\lambda\theta(x,y,z,p)$$

en changeant la signification de θ.

---

[1] M_1, p. 36.

La relation (6) devient alors :

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} + q\frac{\partial \theta}{\partial z} + f\frac{\partial \theta}{\partial p} - 2\lambda\left[X_2 + \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]\left[\frac{df}{dx}\right] + C_1 + \frac{\xi m}{\lambda}\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = 0.$$

qu'on peut écrire en changeant la signification de m et de ξ :

$$(12)\quad \frac{\partial \theta}{\partial y} + q\frac{\partial \theta}{\partial z} + f\frac{\partial \theta}{\partial p} - m\lambda\left[X + \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + f\frac{\partial f}{\partial q}\right)$$
$$+ m\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial p} + p\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial p} + f\frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q}\right) + \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\xi}{\lambda}\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = 0,$$

ξ étant une fonction de x seul, qui peut être nulle, et m étant un entier égal à 2.

Si $\xi \neq 0$, on peut toujours le faire disparaître en ajoutant à cette expression l'équation (10) multipliée par ξ et en appelant θ l'expression $\theta + \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$.

2° Supposons $X = 0$.

Si $\xi \neq 0$, la relation φ s'écrit :

$$\frac{\partial g}{\partial y} + q\frac{\partial g}{\partial z} + f\frac{\partial g}{\partial p} + \frac{\partial g}{\partial r}\left(\frac{df}{dx}\right) + m\xi\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right) + \xi\left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q}\right) = 0.$$

Si $\xi = 0$, on peut remplacer la relation f par une relation analogue où $\xi = 1$ et $m = n - 1$.

On peut donc toujours supposer qu'on a une relation de la forme précédente, où ξ n'est pas nul et où m est supérieur ou égal à 2. En changeant g en $g\xi$, on peut prendre $\xi = 1$.

Alors la relation (7) donne

$$g'' = mX_1\lambda^2, \qquad g' = m[X_1\lambda^2 r + \lambda\theta(x, y, z, p)]$$

et la relation (6) s'écrit :

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} + q\frac{\partial \theta}{\partial z} + f\frac{\partial \theta}{\partial p} + \lambda X_1\left[\frac{df}{dx}\right] + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = 0.$$

C'est la relation Γ_x, si $X_1 \neq 0$.

Si X_1 est nul, on en tirera

$$\theta = -\left[X_2 + \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]$$

et on pourra poser, en changeant la signification de θ,

$$g = -m\lambda\left[X_2 + \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right] + \theta(x; y, z, p).$$

On aura alors :

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} + q\frac{\partial\theta}{\partial z} + f\frac{\partial\theta}{\partial p} - m\lambda\left[X + \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]\left[\frac{df}{dx}\right] + m\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)\right]$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q} = 0.$$

C'est la relation (12), où $\xi = 0$ et m est un entier supérieur ou égal à 2. Comme dans la relation (12) on peut toujours faire $\xi = 0$, nous arrivons dans tous les cas à la relation

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} + q\frac{\partial\theta}{\partial z} + f\frac{\partial\theta}{\partial p} - m\lambda\left[X + \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]\left[\frac{df}{dp}\right] + m\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)\right]$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q} = 0,$$

où m est un entier supérieur ou égal à 2.

Mais on a :

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\partial\mu}{\partial y} + q\frac{\partial\mu}{\partial z} + f\frac{\partial\mu}{\partial p}$$

en posant $\mu = -\log\lambda$. Donc :

$$\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{d\mu}{dx}\right] + q\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{d\mu}{dx}\right] + f\frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{d\mu}{dx}\right] + \frac{\partial\mu}{\partial p}\left[\frac{df}{dx}\right]$$

et en remarquant que $-\lambda\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = -\frac{\partial\mu}{\partial p}$ et remplaçant θ par $\theta + m\left[\frac{d\mu}{dx}\right]$, la dernière condition s'écrit :

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} + q\frac{\partial\theta}{\partial z} + f\frac{\partial\theta}{\partial p} - m\lambda X\left[\frac{df}{dx}\right] + \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q} = 0,$$

que nous pouvons écrire :

$$\Gamma_x(\theta) \equiv \frac{\partial\theta}{\partial y} + q\frac{\partial\theta}{\partial z} + f\frac{\partial\theta}{\partial p} - \lambda X\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + f\frac{\partial f}{\partial q}\right) + \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q} = 0.$$

De même, en permutant le rôle des variables x et y on démontrerait que s'il existe une fonction $\mu(x, y, z, q)$ vérifiant la relation

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} + p \frac{\partial \mu}{\partial z} + f \frac{\partial \mu}{\partial q} + \mu \frac{\partial f}{\partial q} = 0,$$

il est nécessaire, pour que la fonction f soit en involution avec une équation de la forme $q + \varphi_1(x, y, z, q_1, \ldots, q_{k-1}) = 0$, que f vérifie une condition analogue $\Gamma_y(\tau) = 0$.

Dans le quatrième chapitre de ce travail, nous chercherons s'il est possible de trouver des fonctions f qui ne soient linéaires ni en p ni en q et qui vérifient simultanément les conditions

$$E_x^1(\lambda) = 0 \qquad \text{et} \qquad \Gamma_x(\theta) = 0,$$

et

$$E_y^1(\mu) = 0 \qquad \text{et} \qquad \Gamma_y(\tau) = 0.$$

Enfin, dans le cinquième et dernier chapitre, nous montrerons qu'il est impossible de trouver une fonction f qui vérifie à la fois les conditions :

$$E_x^1(\lambda) = 0 \qquad \text{et} \qquad \Gamma_x(\theta) = 0,$$

et

$$C_y(\beta) = 0 \qquad \text{avec} \qquad C_y'(\beta_1) = 0.$$

Il en découlera qu'il est impossible de trouver une fonction f qui vérifie à la fois les conditions qu'on déduit de celles-là en y permutant les variables x et y.

Nous supposerons toujours expressément que f n'est linéaire ni en p, ni en q.

CHAPITRE III

Supposons que la fonction f ne vérifie, pour m ou n égaux à 0, 1 ou 2, ni la condition :

$$E_x^m(\lambda) \equiv \frac{\partial \lambda}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \lambda}{\partial z} + f \frac{\partial \lambda}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right) \frac{\partial \lambda}{\partial p_2} + \ldots + \left(\frac{d^{m-2} f}{dx^{m-2}}\right) \frac{\partial \lambda}{\partial p_{m-1}} + \left(\frac{d^{m-1} f}{dx^{m-1}}\right) \frac{\partial \lambda}{\partial p_m} - \lambda \frac{\partial f}{\partial p_1} = 0,$$

ni la condition :

$$E_x^n(\mu) \equiv \frac{\partial \mu}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \mu}{\partial z} + f \frac{\partial \mu}{\partial q_1} + \left(\frac{df}{dy}\right) \frac{\partial \mu}{\partial q_2} + \ldots + \left(\frac{d^{n-2} f}{dy^{n-2}}\right) \frac{\partial \mu}{\partial q_{n-1}} + \left(\frac{d^{n-1} f}{dy^{n-1}}\right) \frac{\partial \mu}{\partial q_n} - \mu \frac{\partial f}{\partial q_1} = 0.$$

λ étant une fonction de $x, y, z, p_1, \ldots, p_m$;
μ étant une fonction de $x, y, z, q_1, \ldots, q_n$.

L'équation $s = f(x, y, z, p, q)$ ne pourra admettre deux involutions simultanées de systèmes différents que si f vérifie à la fois les conditions :

$$\left\{\begin{aligned}
&(1) \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} + q \frac{\partial \alpha}{\partial z} + f \frac{\partial \alpha}{\partial p} + \alpha \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = 0, \\
&(1') \quad \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} + q \frac{\partial \alpha_1}{\partial z} + f \frac{\partial \alpha_1}{\partial p} + (m-1)\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial x} + p \frac{\partial f}{\partial z} + f \frac{\partial f}{\partial q}\right) \\
&\qquad + (m-1)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p \partial x} + p \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial z} + f \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q}\right) + \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q} = 0.
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
&(2) \quad \frac{\partial \beta}{\partial x} + p \frac{\partial \beta}{\partial z} + f \frac{\partial \beta}{\partial q} + \beta \frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} = 0. \\
&(2') \quad \frac{\partial \beta_1}{\partial x} + p \frac{\partial \beta_1}{\partial z} + f \frac{\partial \beta_1}{\partial q} + (n-1)\beta \left(\frac{\partial f}{\partial y} + q \frac{\partial f}{\partial z} + f \frac{\partial f}{\partial p}\right) \\
&\qquad + (n-1)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial q \partial y} + q \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial z} + f \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q}\right) + \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q} = 0.
\end{aligned}\right.$$

α et β ne peuvent être nuls sans que $\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial q^2}$ le soient, ce qui serait contraire à nos hypothèses. Nous pouvons donc poser :

$$\alpha = \frac{\partial^2 a}{\partial p^2} : \frac{\partial a}{\partial p} = \frac{a''}{a'}, \qquad \beta = \frac{\partial^2 b}{\partial q^2} : \frac{\partial b}{\partial q} = \frac{b''}{b'},$$

a'' et b'' étant différents de o, a étant fonction de x, y, z, p et b de x, y, z, q. On a alors :

$$\frac{\partial}{\partial y}\log a' + q\frac{\partial}{\partial z}\log a' + f\frac{\partial}{\partial p}\log a' + \frac{\partial f}{\partial p} = \mathrm{B}(x, y, z, q), \tag{3}$$

$$\frac{\partial a}{\partial y} + q\frac{\partial a}{\partial z} + f\frac{\partial a}{\partial p} = a\mathrm{B} + \mathrm{B}_1(x, y, z, q) \tag{4}$$

et de même

$$\frac{\partial}{\partial x}\log b' + p\frac{\partial}{\partial z}\log b' + f\frac{\partial}{\partial q}\log b' + \frac{\partial f}{\partial q} = \mathrm{A}(x, y, z, p), \tag{5}$$

$$\frac{\partial b}{\partial x} + p\frac{\partial b}{\partial z} + f\frac{\partial b}{\partial q} = b\mathrm{A} + \mathrm{A}_1(x, y, z, p). \tag{6}$$

Ces relations nous permettent de mettre les conditions (1′) et (2′) sous une forme plus simple. En effet :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p\,\partial x} + p\frac{\partial^2 f}{\partial p\,\partial z} + f\frac{\partial f}{\partial p\,\partial q} = \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)\right]$$

et, d'après la relation (3),

$$\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)\right] = \left[\frac{d\mathrm{B}}{dx}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{d}{dx}\log a'\right] - q\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{d}{dx}\log a'\right] - f\frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{d}{dx}\log a'\right] - \frac{\partial}{\partial p}\log a'\left[\frac{df}{dx}\right].$$

En portant cette valeur dans la relation (1′) il vient, si on change α_1 en $\alpha_1 + (m-1)\left[\frac{d}{dx}\log a'\right]$,

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} + q\frac{\partial \alpha_1}{\partial z} + f\frac{\partial \alpha_1}{\partial p} + (m-1)\left(\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial x} + p\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial z} + f\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial q}\right) + \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q} = 0, \tag{1''}$$

et on a de même :

$$(2'')\quad \frac{\partial\beta_1}{\partial y}+p\frac{\partial\beta_1}{\partial z}+f\frac{\partial\beta_1}{\partial q}+(n-1)\left(\frac{\partial A}{\partial y}+q\frac{\partial A}{\partial z}+f\frac{\partial A}{\partial p}\right)+\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q}=0.$$

Les égalités (4) et (6) nous donnent deux valeurs de $\frac{\partial^4 f}{\partial p^2\partial q^2}$, et on a :

$$\frac{\partial^2}{\partial p^2}\left(\frac{a}{\frac{\partial a}{\partial p}}\right)\frac{\partial^2 B}{\partial q^2}+\frac{\partial^2}{\partial p^2}\left(\frac{1}{\frac{\partial a}{\partial p}}\right)\frac{\partial^2 B_1}{\partial q^2}=\frac{\partial^2}{\partial q^2}\left(\frac{b}{\frac{\partial b}{\partial q}}\right)\frac{\partial^2 A}{\partial p^2}+\frac{\partial^2}{\partial q^2}\left(\frac{1}{\frac{\partial b}{\partial q}}\right)\frac{\partial^2 A_1}{\partial p^2},$$

les lettres a, A sont seules fonctions de p ; les lettres b et B sont seules fonctions de q. On peut donc, sans confusion possible, indiquer par des accents aussi bien les dérivations par rapport à p que les dérivations par rapport à q, et, avec ces notations, l'égalité précédente s'écrit :

$$(7)\qquad \left(\frac{a}{a'}\right)''B''+\left(\frac{1}{a'}\right)''B_1''=\left(\frac{b}{b'}\right)''A''+\left(\frac{1}{b'}\right)''A_1''.$$

La discussion de cette relation est longue mais simple. Pour montrer sur un exemple à quel genre de calculs on est conduit, supposons qu'on ait à la fois

$$\left(\frac{1}{a'}\right)''=0,\qquad \left(\frac{1}{b'}\right)''=0,$$

$\left(\frac{1}{b'}\right)'$ ne dépend plus que de q. Si $\left(\frac{1}{b'}\right)'$ était nul, b' serait constant et b'' nul, ce qui contredit nos hypothèses.

Nous pouvons donc écrire

$$b'=\frac{\varphi_1}{q+\varphi},\qquad b=\varphi_1[\log(q+\varphi)+\varphi_2],$$

les φ étant des fonctions de x, y, z.

Si on change b en $\frac{b}{\varphi_1}-\varphi_2$, l'équation (6) montre que seules les fonctions A, qui sont arbitraires, sont altérées. On peut donc prendre

$$b=\log(q+\varphi)$$

et de même :

$$a=\log(p+\psi).$$

On a donc

$$B''(q+\varphi) = A''(p+\psi) = \omega(x, y, z).$$

D'où

$$B = \omega(q+\varphi)\log(q+\varphi) + \omega_1 q + \omega_2$$
$$A = \omega(p+\psi)\log(p+\psi) + \omega_3 p + \omega_4,$$

les ω étant des fonctions de x, y et z.

Si on calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial p\,\partial q}$ au moyen des relations (4) et (6), où on a remplacé a et b par leurs valeurs, on obtient :

$$B_1' - \omega_3[1 + \log(q+\varphi)] = A_1' - \omega_1[1 + \log(p+\psi)] = \theta(x, y, z)$$

et

$$A_1 = \omega_1(p+\psi)\log(p+\psi) + \theta p + \theta_1,$$
$$B_1 = \omega_3(q+\varphi)\log(q+\varphi) + \theta q + \theta_2,$$

les θ étant des fonctions de x, y et z.

En comparant les deux valeurs de f, on obtient sans peine :

$$\varphi\frac{\partial\psi}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial y} = \psi\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

Cette condition exprime qu'il existe une fonction $\tau(x, y, z)$ telle que l'on ait à la fois :

$$\varphi = \frac{\partial\tau}{\partial y} : \frac{\partial\tau}{\partial z}, \qquad \psi = \frac{\partial\tau}{\partial x} : \frac{\partial\tau}{\partial z}.$$

En prenant τ comme nouvelle inconnue, on ramène la fonction f à la forme ;

$$f = pq(\varphi\log p \,.\, \log q + \varphi_1 \log p + \varphi_2 \log q + \varphi_3),$$

les φ étant des fonctions de x, y et z, et $B = q(\varphi\log q + \varphi_1)$. La relation ($1''$) devra être une identité en q, si on y remplace B et f par ces valeurs.

En écrivant que le coefficient du terme en $\log^2 q$ est nul, on obtient :

$$\text{soit} \quad \varphi\log p + \varphi_2 = 0, \qquad \text{soit} \quad (m-1)\varphi + \varphi(1 + \log p) + \varphi_2 = 0,$$

c'est-à-dire $\varphi = \varphi_2 = 0$. f serait du premier degré en q, ce qui est impossible.

Dans le cas général, l'égalité (7) s'écrit :

$$\frac{\left(\frac{a}{a'}\right)''}{\left(\frac{1}{a'}\right)''}\cdot\frac{B''}{\left(\frac{1}{b'}\right)''}+\frac{B_1''}{\left(\frac{1}{b'}\right)''}=\frac{\left(\frac{b}{b'}\right)''}{\left(\frac{1}{b'}\right)''}\,\frac{A''}{\left(\frac{1}{a'}\right)''}+\frac{A_1''}{\left(\frac{1}{a'}\right)''}; \tag{8}$$

en dérivant par rapport à p et q, nous obtenons l'égalité :

$$\left[\frac{\left(\frac{a}{a'}\right)''}{\left(\frac{1}{a'}\right)''}\right]'\left[\frac{B''}{\left(\frac{1}{b'}\right)''}\right]'=\left[\frac{\left(\frac{b}{b'}\right)''}{\left(\frac{1}{b'}\right)''}\right]'\left[\frac{A''}{\left(\frac{1}{a'}\right)''}\right]'. \tag{9}$$

La discussion de cette relation ne présente aucune difficulté. Nous n'exposerons que le cas général, où $\left(\frac{1}{a'}\right)''$, $\left(\frac{1}{b'}\right)''$, $\left(\frac{a}{a'}\right)''$ et $\left(\frac{b}{b'}\right)''$ ne sont pas nuls.

On peut alors écrire la relation (9) :

$$\left[\frac{B''}{\left(\frac{1}{b'}\right)''}\right]':\left[\frac{\left(\frac{b}{b'}\right)''}{\left(\frac{1}{b'}\right)''}\right]'=\left[\frac{A''}{\left(\frac{1}{a'}\right)''}\right]':\left[\frac{\left(\frac{a}{a'}\right)''}{\left(\frac{1}{a'}\right)''}\right]'=\varphi(x, y, z).$$

D'où

$$B=\varphi\frac{b}{b'}+\frac{\varphi_1}{b'}+\beta_1 q+\beta_2,$$

$$A=\varphi\frac{a}{a'}+\frac{\varphi_2}{a'}+\alpha_1 p+\alpha_2,$$

et la relation (8) donne alors :

$$\frac{\varphi_1\left(\frac{a}{a'}\right)''-A_1''}{\left(\frac{1}{a'}\right)''}=\frac{\varphi_2\left(\frac{b}{b'}\right)''-B_1''}{\left(\frac{1}{b'}\right)''}=-\varphi_3(x, y, z)$$

et

$$A_1=\varphi_1\frac{a}{a'}+\frac{\varphi_3}{a'}+\alpha_3 p+\alpha_4, \qquad B_1=\varphi_2\frac{b}{b'}+\frac{\varphi_3}{b'}+\beta_3 q+\beta_4$$

les α et les β étant des fonctions de x, y et z, et on a :

$$\frac{\partial a}{\partial y} + q\frac{\partial a}{\partial z} + sa' = a\left(\frac{b\varphi + \varphi_1}{b'} + \beta_1 q + \beta_2\right) + \frac{b\varphi_2 + \varphi_3}{b'} + \beta_3 q + \beta_4,$$

$$\frac{\partial b}{\partial x} + p\frac{\partial b}{\partial z} + sb' = b\left(\frac{a\varphi + \varphi_2}{a'} + \alpha_1 p + \alpha_2\right) + \frac{a\varphi_1 + \varphi_3}{a'} + \alpha_3 p + \alpha_4.$$

En changeant a en $a\lambda + \mu$, b en $b\lambda_1 + \mu_1$, les λ et les μ étant des fonctions de x, y et z, il vient après un changement de notations :

$$\frac{\partial a}{\partial y} + q\frac{\partial a}{\partial z} + sa' = \frac{ab\varphi + a\varphi_1 + b\varphi_2 + \varphi_3}{b'} + a\alpha_1 + \alpha_2,$$

$$\frac{\partial b}{\partial x} + q\frac{\partial b}{\partial z} + sb' = \frac{ab\varphi + a\varphi_1 + b\varphi_2 + \varphi_3}{a'} + b\beta_1 + \beta_2.$$

On doit donc avoir

$$\frac{a\alpha_1 + \alpha_2 - \dfrac{\partial a}{\partial y} - q\dfrac{\partial a}{\partial z}}{a'} = \frac{b\beta_1 + \beta_2 - \dfrac{\partial b}{\partial x} - p\dfrac{\partial b}{\partial z}}{b'}.$$

Dérivons successivement par rapport à p et à q ; il vient :

$$\left(\frac{\dfrac{\partial a}{\partial z}}{a'}\right)' = \left(\frac{\dfrac{\partial b}{\partial z}}{b'}\right)' = \omega(x, y, z),$$

$$\frac{\partial a}{\partial z} = \frac{\partial a}{\partial p}(\omega p + \omega_1), \qquad \frac{\partial b}{\partial z} = \frac{\partial b}{\partial q}(\omega q + \omega_2).$$

Puis

$$\frac{a\alpha_1 + \alpha_2 - \dfrac{\partial a}{\partial y}}{a'} + p\omega_2 = \frac{b\beta_1 + \beta_2 - \dfrac{\partial b}{\partial x}}{b'} + q\omega_1 = -\,\omega_3(x, y, z)$$

et

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial a}{\partial p}(p\omega_2 + \omega_3) + a\alpha_1 + \alpha_2, \qquad \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial b}{\partial q}(q\omega_1 + \omega_3) + b\beta_1 + \beta_2.$$

Pour que les deux équations en a soient compatibles, il faut que :

$$a'\left[p\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}-\frac{\partial\omega_2}{\partial z}\right)+\frac{\partial\omega_1}{\partial y}-\frac{\partial\omega_3}{\partial z}+\omega_1\omega_2-\omega\omega_3\right]=a\frac{\partial\alpha_1}{\partial z}+\frac{\partial\alpha_2}{\partial z},$$

qu'on peut écrire $\frac{\partial a}{\partial p}=\frac{a\mathrm{C}+\mathrm{D}}{\mathrm{A}p+\mathrm{B}}$ avec $\mathrm{C}\neq 0$, sans quoi $\left(\frac{1}{a'}\right)''$ serait nul.

On aura d'ailleurs :

$$\frac{\partial a}{\partial z}=(a\mathrm{C}+\mathrm{D})\frac{\omega p+\omega_1}{\mathrm{A}p+\mathrm{B}},$$

d'où

$$(a\mathrm{C}+\mathrm{D})\left[\omega\mathrm{B}-\omega_1\mathrm{A}+p\frac{\partial\mathrm{A}}{\partial z}+\frac{\partial\mathrm{B}}{\partial z}-\frac{\partial\log\mathrm{C}}{\partial z}(\mathrm{A}p+\mathrm{B})\right]$$
$$=\left(\frac{\partial\mathrm{D}}{\partial z}-\mathrm{D}\frac{\partial\log\mathrm{C}}{\partial z}\right)(\mathrm{A}p+\mathrm{B}),$$

et on a successivement :

$$a\mathrm{C}+\mathrm{D}=\frac{\mathrm{A}p+\mathrm{B}}{\theta p+\theta_1},\qquad a'=\frac{1}{\theta p+\theta_1},$$

ce qui est impossible : $\left(\frac{1}{a'}\right)''$ serait nul, ce qui est contraire à nos hypothèses.

Il faut donc que $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{C}}$ soit indépendant de z et que

$$\omega\mathrm{B}-\omega_1\mathrm{A}+\frac{\partial\mathrm{B}}{\partial z}-\mathrm{B}\frac{\partial\log\mathrm{C}}{\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial\mathrm{A}}{\partial z}-\mathrm{A}\frac{\partial\log\mathrm{C}}{\partial z}=0;\qquad \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}}\text{ est indépendant de } z.$$

Si $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{C}}$ est indépendant de z, on pourra, sans changer la forme des équations, changer a en $a_1-\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{C}}$, et on aura :

$$\frac{\partial a_1}{\partial p}=\frac{a_1\mathrm{C}}{\mathrm{A}p+\mathrm{B}},\qquad \text{d'où}\quad \left(\frac{a_1}{a_1'}\right)''=0$$

ce qui est contraire à nos hypothèses.

Il nous reste à supposer $C = o$; alors, l'égalité qui donne a' doit être une identité en p.

$\frac{\partial \alpha_1}{\partial z} = o$, $\frac{\partial \alpha_2}{\partial z} = o$, et il est possible, en changeant a en $a_1\lambda(x, y) + \mu(x, y)$, de ramener l'équation à une forme identique où α_1 et α_2 sont nuls. On est alors ramené à étudier les systèmes :

$$\frac{\partial a}{\partial z} = \frac{\partial a}{\partial p}(p\omega + \omega_1), \qquad \frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial a}{\partial p}(p\omega_2 + \omega_3),$$
$$\frac{\partial b}{\partial z} = \frac{\partial b}{\partial q}(q\omega + \omega_2), \qquad \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial b}{\partial q}(q\omega_1 + \omega_3),$$

L'étude précédente montre que l'on a :

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial \omega_2}{\partial z}, \qquad \omega_1\omega_2 + \frac{\partial \omega_1}{\partial y} = \omega\omega_3 + \frac{\partial \omega_3}{\partial z},$$
$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial \omega_1}{\partial z}, \qquad \omega_1\omega_2 + \frac{\partial \omega_2}{\partial x} = \omega\omega_3 + \frac{\partial \omega_3}{\partial z}.$$

On en tire :

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial y} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x} = \omega\omega_3 + \frac{\partial \omega_3}{\partial z} - \omega_1\omega_2.$$

Nous pouvons prendre

$$\omega_1 = \frac{\partial h}{\partial x}, \qquad \omega_2 = \frac{\partial h}{\partial y}$$

et poser

$$\omega = \frac{\partial}{\partial z}\log\frac{\partial \theta}{\partial z}, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial z} \neq o.$$

On a alors :

$$\omega = \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{Z'}{Z}, \qquad \log\frac{\partial \theta}{\partial z} = h - \log Z + \log u(x, y).$$

En changeant θ en $\frac{\theta}{u}$, on a $h = \log\frac{\partial \theta}{\partial z} + \log Z$.

On a alors

$$\omega_1 = \frac{\partial}{\partial x}\log\frac{\partial\theta}{\partial z}, \qquad \omega_2 = \frac{\partial}{\partial y}\log\frac{\partial\theta}{\partial z}, \qquad \omega = \frac{\partial}{\partial z}\log\frac{\partial\theta}{\partial z}$$

et

$$\frac{\partial\omega_3}{\partial z} + \omega_3\frac{\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}}{\frac{\partial\theta}{\partial z}} = \frac{\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial z}\cdot\frac{\partial^2\theta}{\partial y\,\partial z}}{\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^2} + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\log\frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{\frac{\partial^3\theta}{\partial x\partial y\partial z}}{\frac{\partial\theta}{\partial z}},$$

et

$$\omega_3\frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x\partial y}.$$

On peut changer θ en $\theta - V$ et on aura

$$\omega_3 = \frac{\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y}}{\frac{\partial\theta}{\partial z}}$$

d'où

$$a = f_1\left(x, p\frac{\partial\theta}{\partial z} + \frac{\partial\theta}{\partial x}\right).$$

De même $b = f_2\left(y, q\frac{\partial\theta}{\partial z} + \frac{\partial\theta}{\partial y}\right)$.

Un changement d'inconnue nous ramène aux formes

$$a = f_1(x, p), \qquad b = f_2(y, q).$$

Toutes les équations que nous retenons auront donc la forme

$$s = \frac{ab\varphi + a\varphi_1 + b\varphi_2 + \varphi_3}{a'b'},$$

a et b étant des fonctions respectives de x, p ; y, q ; et les φ des fonctions de x, y, z.

Remarque. — Cette forme ne change pas, si on change b en $bY + Y_1$ et a en $aX + X_1$.

Nous allons maintenant écrire que la fonction f vérifie la relation $(1'')$. Si nous posons

$$Q = \frac{1}{b'}, \qquad Q_1 = \frac{b}{b'},$$

Q et Q_1 étant des fonctions de y et de q seulement, on aura :

$$f = AQ + A_1Q_1 \quad \text{avec} \quad A = \frac{a\varphi_1 + \varphi_3}{a'}, \quad A_1 = \frac{a\varphi + \varphi_2}{a'},$$

et on voit que $B = \dfrac{b\varphi + \varphi_1}{b'} = \varphi_1 Q + \varphi Q_1$.

Remarquons que si A ou A_1 sont nuls, l'équation peut s'écrire :

$$f = f_1(y, q) f_2(x, y, z, p);$$

elle vérifie la relation $E_y^1(\mu) = 0$ avec $\mu = \dfrac{1}{f_1(y, q)}$. Nous pouvons donc supposer A et A_1 différents de zéro, et puisque $\left(\dfrac{1}{b'}\right)''$ et $\left(\dfrac{b}{b'}\right)''$ ne sont pas nuls, on pourra supposer

$$Q'' \neq 0, \qquad Q_1'' \neq 0.$$

L'équation $(1'')$ donne alors, en y remplaçant α_1 par α :

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \alpha}{\partial y} + q\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \frac{\partial \alpha}{\partial p}(AQ + A_1Q_1) \\
+ (m-1)\left[Q\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + Q_1\frac{\partial \varphi}{\partial x} + p\left(Q\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + Q_1\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) + (AQ + A_1Q)(\varphi_1 Q' + \varphi Q_1')\right] \\
+ Q\frac{\partial A}{\partial z} + Q_1\frac{\partial A_1}{\partial z} + (A'Q + A_1'Q_1)(AQ' + A_1Q_1') = 0,
\end{gathered}$$

que nous écrirons :

$$\begin{aligned}
(10) \quad & \frac{\partial \alpha}{\partial y} + q\frac{\partial \alpha}{\partial z} + Q\left[A\frac{\partial \alpha}{\partial p} + (m-1)\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + p\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right) + \frac{\partial A}{\partial z}\right] \\
& \quad + Q_1\left[\frac{\partial \alpha}{\partial p}A_1 + (m-1)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + p\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) + \frac{\partial A_1}{\partial z}\right] + QQ'[AA' + A\varphi_1(m-1)] \\
& + QQ_1'[A_1A_1' + A_1\varphi(m-1)] + QQ_1'[A'A_1 + A\varphi(m-1)] + Q'Q_1[AA_1' + A_1\varphi_1(m-1)] = 0,
\end{aligned}$$

ou encore :

$$(10')\qquad \frac{\partial\alpha}{\partial y}+q\frac{\partial\alpha}{\partial z}+lQ+l_1Q_1+hQQ'+h_1Q_1Q_1'+KQQ_1'+K_1Q'Q_1=0$$

les coefficients l, l_1, h, h_1, K, K_1, ayant des significations évidentes.

Mais on a

$$Q_1=bQ,\qquad Q_1'=bQ'+1,\qquad b'Q=1.$$

On peut donc écrire

$$(11)\qquad \frac{\partial\alpha}{\partial y}+q\frac{\partial\alpha}{\partial z}+Q(l+bl_1+bh_1+K)+QQ'[b^2h_1+b(K+K_1)+h]=0$$

et en dérivant par rapport à q, on a successivement

$$(11')\qquad \frac{\partial\alpha}{\partial z}+l_1+h_1+Q'[b(l_1+3h_1)+l+2K+K_1]+(QQ')'[b^2h_1+b(K+K_1)+h]=0.$$

$$b(l_1+5h_1)+l+3K+2K_1+\frac{Q'}{QQ''}(l_1+3h_1)+\frac{Q'^2}{QQ''}(2bh_1+K+K_1)$$
$$+\frac{(QQ')''}{Q''}[b^2h_1+b(K+K_1)+h]=0,$$

$$l_1\left[\frac{1}{Q}+\left(\frac{Q'}{QQ''}\right)'\right]+h_1\left[\frac{5}{Q}+3\left(\frac{Q'}{QQ''}\right)'+\frac{2Q'^2}{Q^2Q''}\right]$$
$$+(2bh_1+K+K_1)\left[\left(\frac{Q'^2}{QQ''}\right)'+\frac{(QQ')''}{QQ''}\right]+\left(\frac{(QQ')''}{Q''}\right)'[b^2h_1+b(K+K_1)+h]=0.$$

Si $\frac{1}{Q}+\left(\frac{Q'}{QQ''}\right)'$ était nul, on pourrait ramener l'équation donnée à une équation où Q_1'' est nul. Nous pourrons donc écrire l'égalité précédente :

$$(12)\qquad l_1+h_1Q_2+(2bh_1+K+K_1)Q_3+[b^2h_1+b(K+K_1)+h]Q_4=0,$$

les coefficients Q_2, Q_3, Q_4 étant des fonctions de y et de q ayant des significations évidentes.

On en tire :

$$h_1\left(Q_2'+\frac{2Q_3}{Q}\right)+(2bh_1+K+K_1)\left(Q_3'+\frac{Q_4}{Q}\right)+Q_4'[b^2h_1+b(K+K_1)+h]=0.$$

Si h_1 était nul, on aurait, puisque $A_1 \neq 0$:

$$A_1' + \varphi(m-1) = 0.$$

Si $\varphi = 0$, cette égalité est impossible. Si $\varphi \neq 0$, l'égalité s'écrit :

$$\left(\frac{a}{a'}\right)' + \frac{\varphi_2}{\varphi}\left(\frac{1}{a'}\right)' + (m-1) = 0.$$

Cette égalité montre que $\frac{\varphi_2}{\varphi}$ devrait n'être qu'une fonction de x seul, qu'on pourrait annuler en modifiant a ; on aurait alors $\left(\frac{a}{a'}\right)'' = 0$, ce qui est impossible. On a alors :

$$(13) \quad Q_2' + \frac{2Q_3}{Q} + \left(2b + \frac{K+K_1}{h_1}\right)\left(Q_3' + \frac{Q_4}{Q}\right) + Q_4'\left(b^2 + b\frac{K+K_1}{h_1} + \frac{h}{h_1}\right) = 0.$$

Si on dérive cette fois par rapport à p, on obtient :

$$(14) \qquad \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{K+K_1}{h_1}\right)\left(Q_3' + \frac{Q_4}{Q} + bQ_4'\right) + Q_4'\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{h}{h_1}\right) = 0.$$

Premier cas. — $Q_4' = 0$, c'est-à-dire $Q_4 = Y$.

1° On peut avoir $Q_3' + \frac{Q_4}{Q} = 0$. Dans ce cas l'égalité (13) montre que $Q_2' + 2\frac{Q_3}{Q} = 0$. Les égalités qui définissent les fonctions Q_2, Q_3, Q_4 montrent alors qu'il faudrait prendre Q parmi les solutions communes aux deux équations

$$\frac{dQ}{db} = \frac{Q(Y_7 - Y_4 b)}{b^2 Y + b(Y_3 - Y_4) - Y_6}, \qquad \frac{d^2Q}{db^2} = \frac{dQ}{db}(Yb + Y_3) + QY_4,$$

pour lesquelles $\frac{d^2Q}{db^2} \neq 0$. On démontre sans peine que l'existence d'une telle fonction est impossible.

2° On peut encore avoir $\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{K+K_1}{h}\right) = 0$; l'égalité (13), où on a fait $Q_4' = 0$, montre alors que $\frac{K+K_1}{h} = 2Y_{(y)}$, c'est-à-dire, d'après les égalités (10) et (10'),

$$(AA_1)' - Y(A^2)' + (m-1)(A_1\varphi_1 + A\varphi - 2YA\varphi_1) = 0,$$

ou

$$\frac{m[2a\varphi\varphi_1 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi\varphi_3 - 2Y\varphi_1(a\varphi_1 + \varphi_3)]}{(a\varphi + \varphi_2)(a\varphi_1 + \varphi_3) - Y(a\varphi_1 + \varphi_3)^2} = \frac{2a''}{a'^2}.$$

Le second membre ne contient plus que x et p. Il doit en être de même du premier. Or celui-ci s'écrit :

$$\frac{2a\varphi_1(\varphi - Y\varphi_1) + \varphi_1(\varphi_2 - Y\varphi_3) + \varphi_3(\varphi - Y\varphi_1)}{a^2\varphi_1(\varphi - Y\varphi_1) + a[\varphi_1(\varphi_2 - Y\varphi_3) + \varphi_3(\varphi - Y\varphi_1)] + \varphi_3(\varphi_2 - Y\varphi_3)}$$

Si $\varphi_1 = 0$, il faut que φ_3 ne soit pas nul, car A ne peut pas être nul, et en modifiant a on tombe sur une équation où $\left(\frac{a}{a'}\right)'' = 0$.

Si $\varphi_1 \neq 0$ et $\varphi - Y\varphi_1 = 0$, on arrive à la même conclusion, et en supposant $\varphi_1 \neq 0$, $\varphi - Y\varphi_1 \neq 0$, on voit immédiatement que a devra vérifier une relation de la forme :

$$\frac{a''}{a'^2} = \frac{m(a + X)}{a^2 + 2aX + X_1},$$

qui s'écrit aussi $a' = (a^2 + 2aX + X_1)^{\frac{m}{2}}$.

Deuxième cas. — Supposons $Q_4' \neq 0$. La relation (14) peut alors être satisfaite en prenant

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{K + K_1}{h_1}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{h}{h_1}\right) = 0;$$

dans le cas général, elle donnera :

$$\frac{1}{Q_4'}\left(Q_3' + \frac{Q_4}{Q}\right) + b = Y, \qquad \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{K + K_1}{h_1}\right) + Y\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{h}{h_1}\right) = 0;$$

en modifiant b on pourra prendre $Y = 0$. On aura encore $\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{K + K_1}{h_1}\right) = 0$.

En changeant de variables x et y, et modifiant a et b, il nous reste donc à étudier le cas où :

$$Q = (b^2 + 1)^{-\frac{m}{2}}, \qquad P = \frac{1}{a'} = (a^2 + 1)^{-\frac{n}{2}},$$

$$s = \frac{ab\varphi + a\varphi_1 + b\varphi_2 + \varphi_3}{a'b'}.$$

On a $QQ' = -mb(b^2+1)^{-\frac{m}{2}-1}$, et la relation (11) donne :

$$\frac{\partial\alpha}{\partial y} + q\frac{\partial\alpha}{\partial z} + (b^2+1)^{-\frac{m}{2}}[b(l_1+h_1)+K+l] - mb(b^2+1)^{-\frac{m}{2}-1}[b^2h_1+b(K+K_1)+h] = 0$$

qui doit être une identité en b. On obtient les conditions :

$$\frac{\partial\alpha}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial\alpha}{\partial z} = 0,$$
$$(b^2+1)[b(l_1+h_1)+K+l] \equiv mb[b^2h_1+b(K+K_1)+h],$$

d'où

$$K+l=0, \qquad l_1+h_1 = mh_1 \quad \text{et} \quad h = h_1.$$

Cette dernière relation donne (voir 10') :

$$AA' - A_1A_1' + (m-1)(A\varphi_1 - A_1\varphi) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\left[\frac{(a\varphi_1+\varphi_3)^2-(a\varphi+\varphi_2)^2}{a'^2}\right]' + 2(m-1)\left[\frac{a(\varphi_1^2-\varphi^2)+\varphi_1\varphi_3-\varphi\varphi_2}{a'}\right] = 0$$

ou :

$$[a^2(\varphi_1^2-\varphi^2)+2a(\varphi_1\varphi_3-\varphi\varphi_2)+\varphi_3^2-\varphi_2^2]\frac{a''}{a'^2} = m[a(\varphi_1^2-\varphi^2)+\varphi_1\varphi_3-\varphi\varphi_2];$$

or

$$\frac{a''}{a'} = \frac{na'a}{a^2+1}.$$

On doit donc avoir :

$$[a^2(\varphi_1^2-\varphi^2)+2a(\varphi_1\varphi_3-\varphi\varphi_2)+\varphi_3^2-\varphi_2^2]\,na = m(a^2+1)[a(\varphi_1^2-\varphi^2)+\varphi_1\varphi_3-\varphi\varphi_2].$$

d'où

$$\varphi_1\varphi_3 = \varphi\varphi_2, \qquad m=n, \qquad \varphi_1^2-\varphi^2 = \varphi_3^2-\varphi_2^2.$$

Par raison de symétrie, en permutant les variables x et y on obtiendrait les conditions analogues :

$$\varphi_2\varphi_3 = \varphi\varphi_1 \qquad \varphi_1^2 + \varphi_2^2 = \varphi_3^2 + \varphi^2.$$

Une fonction φ ne peut être nulle sans qu'une autre de ces fonctions le soit en même temps, et dans ce cas la fonction f contient en facteur une fonction de y, q ou de x, p. Elle vérifie soit $E_x^1 = 0$, soit $E_y^1 = 0$.

Supposons toutes les fonctions φ différentes de 0, on a :

$$\frac{\varphi_3}{\varphi} = \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \varepsilon, \qquad \varphi_3 = \varepsilon\varphi, \qquad \varphi_2 = \varepsilon\varphi_1, \qquad \varphi_1^2 = \varphi^2, \qquad \varphi_1 = \varepsilon'\varphi.$$

Donc

$$sa'b' = \varphi(ab + \varepsilon' a + b\varepsilon\varepsilon' + \varepsilon) = \varphi(a + \varepsilon\varepsilon')(b + \varepsilon')$$

l'équation vérifie à la fois $E_x^1 = 0$, $E_y^1 = 0$.

Il n'y a donc aucune fonction f qui vérifie à la fois (1) et (2) et (1″) et (2″).

CHAPITRE IV

Nous allons maintenant étudier le cas où l'on a simultanément :

$$(1)\qquad \frac{\partial\lambda}{\partial y}+q\frac{\partial\lambda}{\partial z}+f\frac{\partial\lambda}{\partial p}+\lambda\frac{\partial f}{\partial p}=0,\qquad \lambda \text{ fonction de } x,y,z,p,$$

$$(2)\qquad \frac{\partial\mu}{\partial x}+p\frac{\partial\mu}{\partial z}+f\frac{\partial\mu}{\partial q}+\mu\frac{\partial f}{\partial q}=0,\qquad \mu \quad \text{—} \quad x,y,z,p.$$

M. Goursat [1] a montré qu'on doit avoir dans ce cas :

$$(3)\qquad f=h(x,y,z)\,a(x,p)\,b(y,q),\qquad a''b''\neq 0.$$

Pour préciser la forme de a et b, nous nous servirons des deux conditions [2] :

$$\Gamma_x(\theta)=0,\qquad \Gamma_y(\tau)=0.$$

Portons par exemple la valeur (3) de f dans $\Gamma_x(\theta)=0$, qui s'écrit :

$$\frac{\partial\theta}{\partial y}+q\frac{\partial\theta}{\partial z}+f\frac{\partial\theta}{\partial p}-X\left(\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial z}+f\frac{\partial f}{\partial q}\right)+\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q}=0.$$

On trouve :

$$bb'ah^2(a'-X)+abh\left(\frac{\partial\theta}{\partial p}+\frac{\partial\log h}{\partial z}-\frac{X}{a}\left(\frac{\partial\log a}{\partial x}+\frac{\partial\log h}{\partial x}+p\frac{\partial\log h}{\partial z}\right)\right)+q\frac{\partial\theta}{\partial z}+\frac{\partial\theta}{\partial y}=0.$$

---

[1] M_1, pp. 38-39. — M_2, p. 462.

[2] La relation (1) et la condition $\Gamma_x(\theta)=0$ permettent, par un calcul analogue à celui du chapitre I, de préciser la forme des fonctions f considérées qui peuvent admettre une involution du système Y, sans que (2) et $\Gamma_y=0$ soient vérifiées.

Puisque a'' n'est pas nul, le coefficient de bb' n'est jamais nul et b vérifie une équation de la forme :

$$bb' = b\mathrm{Y} + q\mathrm{Y}_1 + \mathrm{Y}_2,$$

les fonctions Y_i ne dépendant que de y. En calculant les valeurs de ces fonctions, on est conduit à écrire le système :

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} + \mathrm{Y}_2 a h^2 (a' - \mathrm{X}) = 0, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mathrm{Y}_1 a h^2 (a' - \mathrm{X}) = 0,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial p} + \frac{\partial \log h}{\partial z} - \frac{\mathrm{X}}{a}\left(\frac{\partial \log a}{\partial x} + \frac{\partial \log h}{\partial x} + p\frac{\partial \log h}{\partial z}\right) + h\mathrm{Y}(a' - \mathrm{X}) = 0.$$

C'est là un système que nous avons déjà discuté plusieurs fois.

Un calcul tout à fait analogue à celui du premier chapitre montre que, pour que l'équation $s = abh$ puisse avoir une involution du système Y, il faut que a, b, h satisfassent à un des dix-sept groupes de conditions du tableau Y. Il en résulte qu'une telle équation ne sera de la première classe que si a, b, h satisfont aussi à un des dix-sept groupes de conditions du tableau X, qu'on déduit de Y en permutant le rôle des variables x et y.

Système Y

Tableau A : $h = 1$

1	$aa' = 1$	$bb' = b + 1$	
2	$aa' = a + 1$	$bb' = b + Y_2$	
3	$aa' = aX + 1$	$bb' = Kb + 1$	$X \neq 0$
4	$aa' = a(X + 1) - pX + X_2$	$bb' = by + 1$	$X \neq 0$
5	$aa' = 1$	$bb' = q$	
6	$aa' = 1$	$bb' = bY + q$	$Y \neq 0$
7	$aa' = aX + 1$	$bb' = q$	$X \neq 0$

Tableau B : $h = \dfrac{1}{x + y}$

8	$aa' = -a - X_2$	$bb' = -b - 1$	
9	$a(aa' - aX)' = aK_1 - X$	$bb' = bK_2 + 1$	$X \neq 0$
10	$a(aa' - aX)' = ax - X$	$bb' = by + 1$	$X \neq 0$

Tableau C : $h = \dfrac{1}{z}$

11	$aa' = p + 1$	$bb' = q$	
12	$aa' = p - Ka + X_2$	$bb' = Kq + Y$	$K \neq 0$
13	$a(aa' - aX)' + K(aa' - aX) = a - pX$	$bb' = Kb + q$	$X \neq 0$

Tableau D : $h = e^{z\xi(x)}$ $\quad \xi \neq 0$

14	$aa' = 1$	$bb' = q$	
15	$aa' = aX + 1$	$bb' = q$	$X \neq 0$

Tableau E : $h = \dfrac{1}{\operatorname{sh} z\xi}$ $\quad \xi \neq 0$

16	$aa' = p + 1$	$bb' = q$	
17	$a(aa' - aX)' = a - pX$	$bb' = q$	

Système X

Tableau A' : $h = 1$

1'	$aa' = a + 1$	$bb' = 1$	
2'	$aa' = a + X_2$	$bb' = b + 1$	
3'	$aa' = K_1 a + 1$	$bb' = bY + 1$	$Y \neq 0$
4'	$aa' = ax + 1$	$bb' = b(Y + 1) - qY + Y_2$	$Y \neq 0$
5'	$aa' = p$	$bb' = 1$	
6'	$aa' = aX + p$	$bb' = 1$	$X \neq 0$
7'	$aa' = p$	$bb' = bY + 1$	$Y \neq 0$

Tableau B' : $h = \dfrac{1}{x + y}$

8'	$aa' = -a - 1$	$bb' = -b - Y_2$	
9'	$aa' = aK_3 + 1$	$b(bb' - bY)' = bK_4 - Y$	$Y \neq 0$
10'	$aa' = ax + 1$	$b(bb' - bY)' = by - Y$	$Y \neq 0$

Tableau C' : $h = \dfrac{1}{z}$

11'	$aa' = p$	$bb' = q + 1$	
12'	$aa' = K_1 p + X$	$bb' = q - K_1 b + Y_2$	$K_1 \neq 0$
13'	$aa' = K_1 a + p$	$b(bb' - bY)' + K_1(bb' - bY) = b - qY$	$Y \neq 0$

Tableau D' : $h = e^{z\eta(y)}$ $\quad \eta \neq 0$

14'	$aa' = p$	$bb' = 1$	
15'	$aa' = p$	$bb' = bY + 1$	$Y \neq 0$

Tableau E' : $h = \dfrac{1}{\operatorname{sh} z\eta}$

16'	$aa' = p$	$bb' = q + 1$	
17'	$aa' = p$	$b(bb' - bY)' = b - qY$	

On ne doit évidemment comparer que les groupes de conditions qui appartiennent à deux tableaux affectés de la même lettre. De plus, à cause de la symétrie, on peut se borner à ne comparer une équation satisfaisant aux conditions d'un rang quelconque qu'à celles qui satisfont à des conditions de rang inférieur ou égal.

Il est alors facile de voir qu'en dehors des équations classées par M. Goursat, on ne trouve que celles qui satisfont aux conditions :

1 et 3′, si k_1 est nul et Y égal à 1 ;
4 et 7′, si X_2 est nul, Y égal à y et X à -1.

On obtient ainsi, d'abord, l'équation

$$s = b\sqrt{2p} \qquad \text{où l'on a} \qquad q = b - \log(b + 1)$$

et que la transformation classique $b + 1 = e^u$ ramène à une équation de Lie :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 1 = e^u,$$

et ensuite l'équation :

$$s = b\sqrt{p^2 + 1} \qquad \text{avec} \qquad qy^2 = by - \log(by + 1).$$

Une transformation analogue : $by + 1 = e^{uy}$, la ramène à une équation qui ne contient que $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial x}$:

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = (e^{uy} - 1)\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - 1}.$$

Parmi les équations de la forme $s = abh$, $a''b'' \neq 0$, il n'y a donc de la première classe que celles que M. Goursat a déterminées.

CHAPITRE V

Il nous reste à étudier le cas où l'on a à la fois

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y}+q\frac{\partial\lambda}{\partial z}+f\frac{\partial\lambda}{\partial p}+\lambda\frac{\partial f}{\partial p}=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial y}+q\frac{\partial\theta}{\partial z}+f\frac{\partial\theta}{\partial p}-\lambda X\left(\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial z}+f\frac{\partial f}{\partial q}\right)+\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q}=0, \tag{2}$$

λ et θ étant des fonctions de x, y, z, p et

$$\frac{\partial\beta}{\partial x}+p\frac{\partial\beta}{\partial z}+f\frac{\partial\beta}{\partial q}+\beta\frac{\partial f}{\partial q}+\frac{\partial^2 f}{\partial q^2}=0, \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\beta_1}{\partial x}+p\frac{\partial\beta_1}{\partial z}+f\frac{\partial\beta_1}{\partial q}+(n-1)\beta\left(\frac{\partial f}{\partial y}+q\frac{\partial f}{\partial z}+f\frac{\partial f}{\partial p}\right)&\\+(n-1)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial q\,\partial y}+q\frac{\partial^2 f}{\partial q\,\partial z}+f\frac{\partial^2 f}{\partial p\,\partial q}\right)+\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q}&=0.\end{aligned} \tag{4}$$

β et β_1 étant des fonctions de x, y, z, q.

Nous poserons :

$$\lambda=\frac{\partial a}{\partial p}=a', \qquad \beta=\frac{\partial^2 b}{\partial q^2}:\frac{\partial b}{\partial q}=\frac{b''}{b'},$$

a' et b'' étant $\neq 0$.

Nous avons vu que l'équation (3) donne

$$\frac{\partial b}{\partial x}+p\frac{\partial b}{\partial z}+f\frac{\partial b}{\partial q}=bA(x,y,z,p)+A_1(x,y,z,p) \tag{5}$$

et que l'équation (4) peut se mettre avec cette notation sous la forme :

$$\frac{\partial\beta_1}{\partial x}+p\frac{\partial\beta_1}{\partial z}+f\frac{\partial\beta_1}{\partial q}+(n-1)\left(\frac{\partial A}{\partial y}+q\frac{\partial A}{\partial z}+f\frac{\partial A}{\partial p}\right)+\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q}=0, \tag{6}$$

β_1 ayant changé de signification.

On sait d'ailleurs que les équations (1) et (2) donnent

$$\frac{\partial a}{\partial y} + q\frac{\partial a}{\partial z} + f\frac{\partial a}{\partial p} = \mathrm{B}(x, y, z, q) \tag{7}$$

et

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} + q\frac{\partial \theta}{\partial z} + f\frac{\partial \theta}{\partial p} - a'\mathrm{X}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + f\frac{\partial f}{\partial q}\right) + \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q} = 0. \tag{8}$$

Les égalités (5) et (7) donnent

$$f = \frac{b\mathrm{A} + \mathrm{A}_1 - \dfrac{\partial b}{\partial x} - p\dfrac{\partial b}{\partial z}}{b'} = \frac{\mathrm{B} - \dfrac{\partial a}{\partial y} - q\dfrac{\partial a}{\partial z}}{a'}, \tag{9}$$

et en égalant les deux valeurs de $\dfrac{\partial^4 f}{\partial^2 p\, \partial^2 q}$ on obtient la relation :

$$\mathrm{B}''\left(\frac{1}{a'}\right)'' = \mathrm{A}''\left(\frac{b}{b'}\right)'' + \mathrm{A}_1''\left(\frac{1}{b'}\right)'', \quad \left(\frac{1}{a'}\right)'' \neq 0, \quad \left(\frac{1}{b'}\right)'' \neq 0$$

après une discussion en tous points semblable à celles que nous avons déjà rencontrées. On l'écrit :

$$\left[\frac{\mathrm{A}''}{\left(\frac{1}{a'}\right)''}\right]'\left(\frac{b}{b'}\right)'' + \left[\frac{\mathrm{A}_1''}{\left(\frac{1}{a'}\right)''}\right]'\left(\frac{1}{b'}\right)'' = 0.$$

Si $\left(\dfrac{\mathrm{A}''}{\left(\frac{1}{a'}\right)''}\right)'$ n'est pas nul, on en tire :

$$\left(\frac{b}{b'}\right)'' : \left(\frac{1}{b'}\right)'' = -\left[\frac{\mathrm{A}_1''}{\left(\frac{1}{a'}\right)''}\right]' : \left[\frac{\mathrm{A}''}{\left(\frac{1}{a'}\right)''}\right]' = \varphi(x, y, z).$$

En modifiant b, on obtient $\left(\dfrac{b}{b'}\right)'' = 0$ avec $\left[\dfrac{\mathrm{A}_1''}{\left(\frac{1}{a'}\right)''}\right]' = 0$. Nous traiterons ce cas en dernier lieu.

On a de plus à examiner l'hypothèse

$$\mathrm{A}'' = \left(\frac{1}{a'}\right)''\varphi, \qquad \mathrm{A}_1'' = \left(\frac{1}{a'}\right)''\varphi_1, \qquad \mathrm{B}'' = \varphi\left(\frac{b}{b'}\right)'' + \varphi_1\left(\frac{1}{b'}\right)'',$$

les φ_i étant des fonctions de x, y et z.

Premier cas. — On tire des relations précédentes :

$$A = \frac{\varphi}{a'} + \psi p + \omega, \qquad A_1 = \frac{\varphi_1}{a'} + \psi_1 p + \omega_1, \qquad B = \varphi\frac{b}{b'} + \frac{\varphi_1}{b'} + q\varphi_2 + \varphi_3,$$

et la relation (9) donne :

$$\frac{b(\psi p + \omega) + \psi_1 p + \omega_1 - \frac{\partial b}{\partial x} - p\frac{\partial b}{\partial z}}{b'} = \frac{q\varphi_2 + \varphi_3 - q\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial y}}{a'},$$

d'où, α, β, α_1, β_1 désignant de nouvelles fonctions de x, y et z,

$$\frac{\partial a}{\partial p}(\alpha p + \alpha_1) + \frac{\partial a}{\partial z} = \varphi_2, \qquad \frac{\partial a}{\partial p}(\beta p + \beta_1) + \frac{\partial a}{\partial y} = \varphi_3,$$

$$\frac{\partial b}{\partial q}(\alpha q + \beta) + \frac{\partial b}{\partial z} = b\psi + \psi_1, \qquad \frac{\partial b}{\partial q}(\alpha_1 q + \beta_1) + \frac{\partial b}{\partial x} = \omega b + \omega_1.$$

Pour que les équations en a soient compatibles, il faut que :

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} - a'\left(p\frac{\partial\alpha}{\partial y} + \frac{\partial\alpha_1}{\partial y}\right) + (\alpha p + \alpha_1)a'\beta = \frac{\partial\varphi_3}{\partial z} - a'\left(p\frac{\partial\beta}{\partial z} + \frac{\partial\beta_1}{\partial z}\right) + a'\alpha(p\beta + \beta_1),$$

et comme $\left(\frac{1}{a'}\right)''$ ne peut être nul, cette relation doit se réduire à une identité.

On pourra donc prendre

$$\varphi_2 = \frac{\partial u}{\partial z}, \qquad \varphi_3 = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

En modifiant a, on pourra prendre $\varphi_2 = \varphi_3 = 0$. On aura de plus $\frac{\partial\alpha}{\partial y} = \frac{\partial\beta}{\partial z}$ et on pourra prendre

$$\alpha = -\frac{\partial \log\gamma}{\partial z}, \qquad \beta = -\frac{\partial\log\gamma}{\partial y}, \qquad \alpha_1 = -\frac{1}{\gamma}\frac{\partial\gamma_1}{\partial z}, \qquad \beta_1 = -\frac{1}{\gamma}\frac{\partial\gamma_1}{\partial y}.$$

Pour que les équations en b soient compatibles, il faudra de même que l'on ait la relation

$$b\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\omega}{\partial z}\right) + b'q\left(\frac{\partial\alpha_1}{\partial z} - \frac{\partial\alpha}{\partial x}\right) + b'\left(\frac{\partial\beta_1}{\partial z} - \frac{\partial\beta}{\partial x} + \alpha_1\beta - \beta_1\alpha\right) + \frac{\partial\psi_1}{\partial x} - \frac{\partial\omega_1}{\partial z}$$
$$+ \psi\omega_1 - \omega\psi_1 = 0.$$

On peut l'écrire

$$\frac{ub}{b'} + \frac{v}{b'} + wq + w_1 = 0.$$

Si $u = 0$, $\left(\frac{1}{b'}\right)''$ serait nul si v n'est pas nul. Si u n'est pas nul, en modifiant b, on aurait $\left(\frac{b}{b'}\right)'' = 0$. Il faut donc que u, v, w et w_1 soient tous nuls, c'est-à-dire que :

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\omega}{\partial z}, \qquad \frac{\partial\psi_1}{\partial x} - \omega\psi_1 = \frac{\partial\omega_1}{\partial z} - \omega_1\psi,$$

$$\frac{\partial\alpha_1}{\partial z} = \frac{\partial\alpha}{\partial x}, \qquad \frac{\partial\beta_1}{\partial x} + \alpha_1\beta = \frac{\partial\beta}{\partial x} + \beta_1\alpha,$$

Avant de résoudre ce système remarquons que le système qui donne a nous permet d'écrire :

$$a = \alpha(p\gamma + \gamma_1, x).$$

La relation $\frac{\partial\alpha_1}{\partial z} = \frac{\partial\alpha}{\partial x}$ montre alors que $\alpha_1 = -\frac{\partial \log \gamma}{\partial x}$, d'où :

$$\frac{\partial\gamma}{\partial x} = \frac{\partial\gamma_1}{\partial z} = \frac{\partial^2 h(x, y, z)}{\partial x \partial y}, \qquad \gamma = \frac{\partial h}{\partial z}, \qquad \gamma_1 = \frac{\partial h}{\partial x}.$$

En prenant comme nouvelle inconnue $Z_1 = h(x, y, z)$, on aura une équation de même forme où $\gamma = 1$, $\gamma_1 = 0$, a étant fonction de x et de p. Alors

$$\alpha = \beta = \alpha_1 = \beta_1 = 0, \qquad \psi = -\frac{\partial \log g}{\partial z}, \qquad \omega = -\frac{\partial \log g}{\partial x},$$

g étant une fonction de x, y et z.

$$\psi_1 = \frac{1}{g}\frac{\partial g_1}{\partial z}, \qquad \omega_1 = \frac{1}{g}\frac{\partial g_1}{\partial x} \quad \text{et} \quad d(bg) = dg_1,$$

d'où

$$b = \frac{g_1 + \beta(y, q)}{g}, \qquad a'f = \frac{\varphi b + \varphi_1}{b'}.$$

En changeant les notations, on peut donc prendre :

$$f = \frac{\varphi(x, y, z) b(y, q) + \varphi_1(x, y, z)}{\frac{\partial a}{\partial p}(x, p) \frac{\partial b}{\partial q}(y, q)}.$$

Dans le cas où l'une des fonctions φ ou φ_1 est nulle, comme dans celui où le rapport $\frac{\varphi_1}{\varphi}$ est fonction de y seul, on a $E_y' = 0$.

On pourra donc rejeter ces diverses hypothèses. Si φ et φ_1 sont simultanément indépendants de z, l'équation peut s'écrire :

$$\frac{da(x, p)}{dy} = f(x, y, q).$$

Elle se ramène immédiatement à une équation du premier degré en p, cas que nous étudierons dans un prochain Mémoire. En effet, posons

$$z_1 = a(x, p); \qquad \text{on a} \quad q_1 = f(x, y, q); \qquad \text{on en tire} \quad p = \alpha(x, z_1);$$

$$q = \varphi(x, y, q_1) \quad \text{et} \quad p_1 \frac{\partial \alpha}{\partial z_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + s_1 \frac{\partial \varphi}{\partial q_1},$$

qui est bien du premier degré en p_1.

Écrivons alors que f vérifie la condition (6) ; posons

$$\frac{1}{a'} = \mu(x, p), \qquad f = \mu\left(\frac{\varphi b + \varphi_1}{b'}\right), \qquad A = \mu\varphi.$$

On aura :

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial x} + p\frac{\partial \beta_1}{\partial z} + \mu\left(\frac{\varphi b + \varphi_1}{b'}\right)\frac{\partial \beta_1}{\partial q} + (n-1)\left[\mu\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + q\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) + \mu\mu'\varphi\left(\frac{\varphi b + \varphi_1}{b'}\right)\right]$$
$$+ \mu\left(\frac{\frac{b\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}}{b'}\right) + \mu\mu'\left(\frac{\varphi b + \varphi_1}{b'}\right)\left[\varphi\left(\frac{b}{b'}\right)' + \varphi_1\left(\frac{1}{b'}\right)'\right] = 0.$$

Le coefficient de $\mu\mu'$ est

$$\left(\frac{\varphi b + \varphi_1}{b'}\right)\left[\varphi\left(\frac{b}{b'}\right)' + \varphi_1\left(\frac{1}{b'}\right)' + (n-1)\varphi\right].$$

Puisque $\left(\frac{1}{b'}\right)'$ n'est pas nul, ce coefficient ne peut être nul que si $\frac{\varphi_1}{\varphi}$ est une fonction de y, cas que nous pouvons exclure.

La relation précédente peut alors s'écrire :

$$\mu\mu' = \mu X + pX_1 + X_2,$$

et en posant $B = \frac{\varphi b + \varphi_1}{b'}$, on a :

$$(10)\quad \begin{cases} \frac{\partial \beta_1}{\partial x} + X_2 B[B' + n - 1)\varphi] = 0, \qquad \frac{\partial \beta_1}{\partial z} + X_1 B[B' + (n-1)\varphi] = 0, \\ \frac{\partial \beta_1}{\partial q} + \frac{\partial \log B}{\partial z} + \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + q\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)(n+1)}{B} + X[B' + (n-1)\varphi] = 0. \end{cases}$$

On a déjà discuté (chapitre I) des systèmes analogues et vu qu'on peut se borner aux deux hypothèses $X_1 = 0$, $X_2 \neq 0$, et $X_1 \neq 0$, $X_2 = 0$.

1° $X_1 = 0$. β ne dépend pas de z, par conséquent

$$(\varphi b + \varphi_1)\left[\varphi\left(\left(\frac{b}{b'}\right)' + n - 1\right) + \varphi_1\left(\frac{1}{b}\right)'\right]$$

ne dépend pas de z. Cette expression peut s'écrire $(\varphi b + \varphi_1)(u\varphi + v\varphi_1)$, b, u et v étant des fonctions non nulles de y et de q ; on en déduit immédiatement que φ et φ_1 ne dépendent pas de z.

2° $X_2 = 0$. On peut en modifiant a prendre $X_1 = 1$. On voit, comme plus haut, que β_1, φ et φ_1 ne contiennent pas x ; la troisième relation en β_1 montre alors que X est une constante K, et on a :

$$\mu\mu' = K\mu + p.$$

Écrivons que la relation (8) est vérifiée

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} + q\frac{\partial \theta}{\partial z} + B\mu\frac{\partial \theta}{\partial p} - \frac{X}{\mu}\left(B\frac{\partial \mu}{\partial x} + p\frac{\partial B}{\partial z}\mu + BB'\mu^2\right) + \mu\frac{\partial B}{\partial z} + \mu\mu' BB' = 0.$$

En prenant la dérivée seconde par rapport à q, on a :

$$\mu B''\frac{\partial \theta}{\partial p} - X\left(B''\frac{\partial \log \mu}{\partial x} + p\frac{\partial B''}{\partial z}\right) + \mu\frac{\partial B''}{\partial z} + \mu(\mu' - X)(BB')'' = 0,$$

B'' est différent de zéro ; on a donc

$$(11) \qquad [\mu(K - X) + p]\left[\frac{(BB')''}{B''}\right]' + \frac{\partial^2 \log B''}{\partial z\,\partial q}(\mu - pX) = 0.$$

Si

$$\frac{\partial^2 \log B''}{\partial z\,\partial q} = 0, \qquad B'' = \varphi\left(\frac{b}{b'}\right)'' + \varphi_1\left(\frac{1}{b'}\right)'' = h(x, z)K(y, q);$$

en dérivant par rapport à x, on voit que h ne dépend que de z ; d'autre part, l'égalité

$$\frac{\varphi}{h}\left(\frac{b}{b'}\right)'' + \frac{\varphi_1}{h}\left(\frac{1}{b'}\right)'' + K(y, q)$$

montre que le rapport $\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\varphi_1}{h}\right) : \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\varphi}{h}\right)$ ne dépend plus que de y

$$\frac{\varphi_1}{h} = \frac{\varphi}{h}Y + Y_1, \quad \text{et} \quad \frac{\varphi}{h}\left[\left(\frac{b}{b'}\right)'' + Y\left(\frac{1}{b'}\right)''\right] = Y_1\left(\frac{1}{b'}\right)'' = K(y, q)$$

montre que : ou bien $\left(\frac{b}{b'}\right)'' + Y\left(\frac{1}{b'}\right)'' = 0$, qu'on ramène au cas réservé, ou bien que $\frac{\varphi}{h}$ ne dépend que de y ; il en est de même de $\frac{\varphi_1}{h}$; $\frac{\varphi}{\varphi_1}$ ne dépend que de y, hypothèse que nous avons exclue.

Alors l'égalité (11) ne peut avoir lieu que si

$$\left[\frac{(BB')''}{B''}\right]' = \frac{\partial^2 \log B''}{\partial z\,\partial q}X \qquad \text{avec} \qquad 1 + X(K - X) = 0;$$

X est donc une constante K_1 liée à K par la relation

$$(12) \qquad 1 + K_1(K - K_1) = 0, \qquad K_1 \neq 0.$$

Or :

$$B = \varphi Q = \varphi_1 Q_1 \qquad \text{en posant} \qquad Q = \frac{b}{b'}, \qquad Q_1 = \frac{1}{b'}.$$

On en tire :

$$B'' = \varphi Q'' + \varphi_1 Q_1''.$$

L'égalité

$$BB' = K_1 \frac{\partial \beta}{\partial z} + \beta \varphi_2 + q\varphi_3 + \varphi_4$$

s'écrit avec ces notations :

$$(\varphi Q + \varphi_1 Q_1)(\varphi Q' + \varphi_1 Q_1') = Q\left(K_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \varphi_2 \varphi\right) + Q_1\left(K_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \varphi_2 \varphi_1\right) + q\varphi_3 + \varphi_4;$$

on en tire, par des dérivations par rapport à q :

$$QQ' = YQ_1 + \eta Q + \theta q + \tau,$$
$$Q_1 Q_1' = Y_1 Q_1 + \eta_1 Q + \theta_1 q + \tau_1,$$
$$(QQ_1)' = Y_2 Q_1 + \eta_2 Q + \theta_2 q + \tau_2,$$

les fonctions Y_i, η_i, θ_i, τ_i ne contenant que y seul. En tenant compte des définitions de Q et Q_1, on peut mettre ce système sous la forme

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2 q}{db^2} &= \frac{dq}{db}(\eta_1 b + Y_1) + \theta_1 q + \tau_1, \\ 2b\frac{d^2 q}{db^2} &= \frac{dq}{db}(\eta_2 b + Y_2 - 1) + \theta_2 q + \tau_2, \\ b^2 \frac{d^2 q}{db^2} &= \frac{dq}{db}[b(\eta - 1) + Y] + \theta q + \tau. \end{aligned}\right.$$

Une discussion simple montre que ces trois équations n'admettent aucune solution commune, compatible avec nos hypothèses.

Deuxième cas. — Dans le cas où $\left(\frac{b}{b'}\right)''$ est nul, on peut évidemment prendre

$$b = q^\varphi \quad \text{et} \quad f = \frac{A}{\varphi} q + \frac{A_1}{\varphi} q^{1-\varphi} + q \log q \left(\frac{\partial \log \varphi}{\partial x} + p \frac{\partial \log \varphi}{\partial z}\right).$$

En écrivant que f vérifie la relation (1), on obtient les conditions

$$\frac{\partial a}{\partial y} = 0, \qquad f = \frac{q^{1-\eta}\omega_1(x, y, z) + \left[\omega(x, y, z) - \frac{\partial a}{\partial z}\right] q}{a'}, \qquad A = \frac{\eta\left(\omega - \frac{\partial a}{\partial z}\right)}{a'},$$

η étant une fonction de y seul.

Écrivons que la relation (2) est vérifiée. Si η n'est pas égal à $\frac{1}{2}$, on obtient, en annulant le coefficient du terme en $q^{1-2\eta}$:

$$(1-\eta)\frac{\omega_1^2}{a'}\left[\left(\frac{1}{a'}\right)' - X\right] = 0.$$

Cette égalité est incompatible avec nos hypothèses. La seule forme à retenir est donc, après un changement de notations :

$$\text{(E)} \qquad f = \frac{\omega(x,y,z)\sqrt{q} + q\left[\omega_1(x,y,z) - \dfrac{\partial a}{\partial z}\right]}{\dfrac{\partial a}{\partial p}(x,z,p)} \quad \text{avec} \quad A = \frac{\omega_1 - \dfrac{\partial a}{\partial z}}{2a'}.$$

Faisons au préalable quelques remarques sur ces équations :

I. E ne change pas de forme, si on y fait le changement d'inconnue $Z_1 = g(x, z)$.

II. Si $\frac{\partial \omega_1}{\partial y}$ est nul, il suffit de changer a en $a + \int \omega_1(x, z)\,dz$ pour obtenir une équation de même forme où ω_1 est nul.

III. Supposons que ω vérifie un système de relations de la forme :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \omega^2 h_1(x,z); \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \omega^2 h_2(x,z), \qquad (h_1 \textit{ et } h_2 \text{ non nuls ensemble}).$$

1° Si h_1 est nul, φ ne dépend pas de z ; et on a :

$$\omega = \sqrt{\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)}\,\frac{1}{h_2(x,z)} = f_1(x,y)f_2(x,z), \qquad \frac{\partial^2 \log \omega}{\partial y\,\partial z} = 0.$$

Si nous posons :

$$z_1 = g(x,z) \quad \text{avec} \quad g = \sqrt{f_2(x,z)},$$

on obtient une équation de la forme E, où ω est égal à une fonction de x et de y.

2° Si h_1 n'est pas nul, on a :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{h_2(x,z)}{h_1(x,z)} = \frac{\partial h}{\partial x}(x,z) : \frac{\partial h}{\partial z}(x,z).$$

Par conséquent, φ est une fonction de y et de $h(x, z)$.

Si nous faisons le changement d'inconnue $z_1 = h(x, z)$, l'équation E ne change pas de forme et la fonction φ ne contient plus que y et z.

On a donc :

$$h_2 = 0, \qquad \omega^2 = \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial z} \times \frac{1}{h_1(x, z)}, \qquad \frac{\partial^2 \log \omega}{\partial x \partial y} = 0.$$

On peut donc se borner à étudier les deux cas où

$$h_1 = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0, \quad h_2 \neq 0; \quad h_1 \neq 0, \quad h_2 = 0, \quad \frac{\partial^2 \log \omega}{\partial x \partial y} = 0.$$

Notations. — Nous poserons

$$\mu = \frac{1}{\frac{\partial a}{\partial p}} = \frac{1}{a'}, \qquad P = \mu\omega, \qquad P_1 = \mu\left(\omega_1 - \frac{\partial a}{\partial z}\right)$$

et nous aurons

$$f = P\sqrt{q} + P_1 q, \qquad A = \frac{1}{2}\mu\left(\omega_1 - \frac{\partial a}{\partial z}\right) = \frac{P_1}{2}.$$

Il nous faut maintenant écrire que la fonction f vérifie les conditions $\Gamma_x(\theta) = 0$ et $C_y(\beta_1) = 0$.

Condition $\Gamma_x(\theta)$:
$$\frac{\partial\theta}{\partial y} + q\frac{\partial\theta}{\partial z} + \frac{\partial\theta}{\partial p}(P\sqrt{q} + P_1 q) - \frac{X}{\mu}\left[\sqrt{q}\frac{\partial P}{\partial x} + q\frac{\partial P_1}{\partial x} + p\left(\sqrt{q}\frac{\partial P}{\partial z} + q\frac{\partial P_1}{\partial z}\right)\right.$$
$$\left. + \left(P + P_1\sqrt{q}\right)\left(\frac{P}{2} + P_1\sqrt{q}\right)\right] + \sqrt{q}\frac{\partial P}{\partial z} + q\frac{\partial P_1}{\partial z} + \left(P' + P_1'\sqrt{q}\right)\left(\frac{P}{2} + P_1\sqrt{q}\right) = 0.$$

Cette relation, où θ ne contient pas q, doit être une identité en q. On a donc :

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{X}{2\mu}P^2 - \frac{PP'}{2} = \frac{\omega^2}{2}(\mu X - \mu\mu')$$

et

$$P\frac{\partial\theta}{\partial p} - \frac{X}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + p\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{3}{2}PP_1\right) + \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{PP_1'}{2} + P'P_1 = 0,$$
$$\frac{\partial\theta}{\partial z} + P_1\frac{\partial\theta}{\partial p} - \frac{X}{\mu}\left(\frac{\partial P_1}{\partial x} + p\frac{\partial P_1}{\partial z} + P_1^2\right) + \frac{\partial P_1}{\partial z} + P_1 P_1' = 0.$$

ce qui, tous calculs faits et en changeant θ en $\theta - X\left(\frac{\partial a}{\partial x} + p\frac{\partial a}{\partial z}\right) + \mu\frac{\partial a}{\partial z}$, donne le système :

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial\theta}{\partial y} + \frac{\omega^2}{2}(\mu\mu' - \mu X) = 0,\\
&\frac{\partial\theta}{\partial p} - \frac{X}{\mu}\left(\frac{\partial \log\omega}{\partial x} + p\frac{\partial\log\omega}{\partial z}\right) - \frac{X}{2}\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{3}{2}X\omega_1 + \frac{\partial\log\omega}{\partial z} + \frac{3}{2}\mu'\omega_1 + \frac{\partial\log\mu}{\partial z} - \mu'\frac{\partial a}{\partial z} = 0,\\
&\frac{\partial\theta}{\partial z} - X\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x} + p\frac{\partial\omega_1}{\partial z}\right) + X\left(\frac{\partial\log\omega}{\partial x} + p\frac{\partial\log\omega}{\partial z}\right)\left(\omega_1 - \frac{\partial a}{\partial z}\right) + \frac{X}{2}\mu\left(\omega_1 - \frac{\partial a}{\partial z}\right)^2\\
&\qquad + \mu\frac{\partial\omega_1}{\partial z} - \mu\frac{\partial\log\omega}{\partial z}\left(\omega_1 - \frac{\partial a}{\partial z}\right) - \frac{1}{2}\mu\mu'\left(\omega_1 - \frac{\partial a}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial\mu}{\partial z}\left(\omega_1 + \frac{\partial a}{\partial z}\right) = 0.
\end{aligned}\right.$$

Condition $C_y(\beta_1)$. — Pour écrire la condition $C_y(\beta_1) = 0$, on peut sans inconvénient supprimer l'indice de β, et on a :

$$(14)\quad \frac{\partial\beta}{\partial x} + p\frac{\partial\beta}{\partial z} + (P\sqrt{q} + P_1 q)\frac{\partial\beta}{\partial q} + \frac{(n-1)}{2}\left[\frac{\partial P_1}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} + P_1'(P\sqrt{q} + P_1 q)\right]$$
$$+ \sqrt{q}\frac{\partial P}{\partial z} + q\frac{\partial P_1}{\partial z} + (P' + P_1'\sqrt{q})\left(\frac{P}{2} + P_1\sqrt{q}\right) = 0$$

ou

$$(15)\quad \frac{\partial\beta}{\partial x} + p\frac{\partial\beta}{\partial z} + \frac{\partial\beta}{\partial q}(P\sqrt{q} + P_1 q) + C_1 + \sqrt{q}C_2 + qC_3 = 0,$$

les coefficients C ayant des significations évidentes.

En dérivant deux fois par rapport à p, on a :

$$(15')\quad \frac{\partial\beta}{\partial q}(P''\sqrt{q} + P_1''q) + C_1'' + \sqrt{q}C_2'' + qC_3'' = 0$$

et en remarquant que P'' au moins n'est pas nul,

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{C_1''}{P''\sqrt{q} + P_1''q}\right) + \sqrt{q}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{C_2''}{P''\sqrt{q} + P_1''q}\right) + q\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{C_3''}{P''\sqrt{q} + P_1''q}\right) = 0.$$

On en tire les conditions :

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned}
&C_1'''P'' - C_1''P''' = 0, &\quad& C_1'''P_1'' - C_1''P_1''' + C_2'''P'' - C_2''P''' = 0,\\
&C_3'''P_1'' - C_3''P_1''' = 0, && C_3'''P_1'' - C_2''P_1''' + C_3'''P'' - C_3''P''' = 0.
\end{aligned}\right.$$

On a toujours, les φ représentant des fonctions de x, y, z : $C_1'' = \varphi_1 P''$.

Si P_1'' n'est pas nul, on a de plus $C_3'' = \varphi_3 P_1''$.

Si enfin $\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{P_1''}{P''}\right)$ est différent de zéro, on obtient sans peine $C_2'' = \varphi_1 P_1'' + \varphi_3 P''$.

L'équation (15′) donne alors successivement :

$$\frac{\partial \beta}{\partial q}(P''\sqrt{q} + P_1''q) + \varphi_1(P'' + P_1''\sqrt{q}) + \varphi_3(P''\sqrt{q} + P_1''q) = 0,$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial q} + \frac{\varphi_1}{\sqrt{q}} + \varphi_3 = 0, \qquad \beta + 2\varphi_1\sqrt{q} + q\varphi_3 + \varphi_2 = 0.$$

La relation (15) se décompose en trois, et on a :

$$(16') \quad C_1 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + p\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \varphi_1 P, \quad C_2 = 2\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + 2p\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \varphi_1 P_1 + \varphi_3 P, \quad C_3 = \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + p\frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + \varphi_3 P_1.$$

Ce dernier calcul nous montre que nous aurons trois grands cas à distinguer :

$$P_1'' = 0; \qquad \frac{P_1''}{P''} = \frac{1}{\varphi(x, y, z)};$$

et enfin le cas général où $\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{P_1''}{P''}\right)$ n'est pas nul.

La discussion ne présente aucune difficulté : Les remarques faites au début du chapitre permettent de l'abréger considérablement. On peut aussi profiter, pour limiter les calculs, du théorème suivant :

L'équation

$$s = \mu(x, p) f(x, y, q) \quad \text{où} \quad \frac{\partial \mu}{\partial p} = X + \frac{X_1}{\mu}$$

se ramène à une équation qui ne contient plus p.

Il suffit de poser $1 + \mu = e^{z_1}$ pour être ramené à l'équation

$$s_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, q) + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{q_1}{e^{z_1} - 1},$$

où q est une fonction de x, y, q_1 définie par l'équation $q_1 = f(x, y, q)$.

La conclusion générale est encore que les conditions (1), (2), (3), (4) sont incompatibles.