

G. DARMOIS

Sur les courbes algébriques à torsion constante

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3^e série, tome 11 (1919), p. 67-189

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1919_3_11__67_0

© Université Paul Sabatier, 1919, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES COURBES ALGÈBRIQUES A TORSION CONSTANTE

PAR M. G. DARMOIS

INTRODUCTION HISTORIQUE

[1] Dans la première édition des leçons sur la *Théorie générale des surfaces* (1887), M. Darboux, après avoir donné les équations générales des courbes à torsion constante, et déterminé comme application la courbe transcendante dont l'indicatrice des binormales est une conique sphérique, ajoutait la phrase suivante : « Il serait intéressant d'examiner si toutes les courbes à torsion constante sont nécessairement transcendantes ou bien, s'il y en a d'algébriques, de déterminer les plus simples. » (Tome I, p. 46.)

Cette invitation suscita rapidement un certain nombre de travaux, étudiés par M. Darboux au tome IV, p. 429 de son ouvrage (1896).

[2] Nous signalons seulement l'intéressant mémoire de M. Koenigs⁽¹⁾, dont l'objet est assez différent du nôtre, et nous arrivons à la thèse de M. Lyon⁽²⁾.

Le but de son travail est la recherche spéciale des courbes unicursales à torsion constante. Ramenée à la résolution de systèmes d'équations dont le maniement est assez difficile, cette recherche donne comme résultats effectifs la cubique gauche à torsion constante coupée par le plan de l'infini en trois points confondus, et d'une façon plus générale les courbes de degré M à torsion constante coupées par le plan de l'infini en M points confondus. Ce problème particulier équivaut à la résolution de l'équation :

$$AC - B^2 = I,$$

où A, B, C sont trois polynômes entiers d'une même variable. En d'autres termes, c'est la recherche des courbes sphériques n'ayant qu'un point à l'infini.

(1) *Annales de la Fac. des Sciences de Toulouse*, tome I, 1887.

(2) I. Lyon, *Sur les courbes à torsion constante*, Paris, juillet 1890.

La généralité de ces solutions, le moyen de les obtenir aisément, sont des questions qui ne sont pas entièrement traitées.

Citons encore un résultat intéressant (p. 11) qui donne sous forme finie deux coordonnées d'un point de la courbe cherchée, la troisième coordonnée seulement contenant une quadrature.

[3] Le travail de M. Fouché ⁽¹⁾ ramène à une forme simple ou plutôt condensée le problème général des courbes algébriques à torsion constante. Il suffit, pour le résoudre entièrement, de déterminer deux fonctions algébriques y et z d'une même variable x satisfaisant à l'équation

$$(1) \quad y' + y^2 = z''.$$

Cette méthode fournit sans effort un nombre illimité de courbes unicursales. D'autre part, la réduction du problème à l'équation (1) paraît très satisfaisante. Elle donne lieu pourtant aux remarques suivantes : En fait, la résolution générale de l'équation (1) étant impossible, comme nous le verrons plus loin, on est forcé de se borner à la recherche de classes déterminées de solutions, par exemple celles qui correspondent aux courbes unicursales. Mais x et y ayant la signification suivante,

$$x = \alpha, \quad y = \frac{1}{\alpha - \beta},$$

où α et β sont les paramètres des génératrices rectilignes de la sphère, y est en général une fonction compliquée de x . y n'est fonction rationnelle de x que pour les indicatrices unicursales coupées en un seul point par les génératrices rectilignes $x = \text{const}$. Il paraît assez difficile d'utiliser l'équation (1) pour des recherches générales.

Une remarque presque évidente, mais très intéressante, est celle-ci : L'équation (1) exprime la condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse exprimer en fonction de x , de y , z et de leurs dérivées les coordonnées d'un point d'une courbe à torsion constante, sans aucun signe de quadrature.

[4] Un travail de M. Fabry ⁽²⁾ [1892] apporte à cette théorie une importante contribution. Par une méthode particulière, M. Fabry a pu déterminer une infinité de courbes algébriques réelles à torsion constante. Elles sont toutes unicursales de degré pair $M = 2p$. Elles coupent le plan de l'infini en deux points imaginaires conjugués, comptant chacun pour p , et situés sur le cercle de l'infini.

⁽¹⁾ M. Fouché, *Sur les courbes algébriques à torsion constante* (Annales de l'E. N. S., 3^e série, tome VII, p. 335, novembre 1890).

⁽²⁾ E. Fabry, *C. R.*, janvier 1892 (Annales de l'E. N. S., 3^e série, tome IX, p. 177, 1892).

Les indicatrices sphériques des binormales de ces courbes peuvent être d'un degré pair quelconque. On trouve en outre, dans le mémoire de M. Fabry, les équations d'une famille d'indicatrices du dixième degré ne dépendant d'aucun paramètre, du huitième degré à deux paramètres, et enfin du sixième degré à un paramètre, ces dernières solutions ne rentrant pas dans la solution générale.

Le degré des courbes obtenues par cette méthode, pour une indicatrice de degré $q + 2p$, est $M = 2p + 2q$ (notations de M. Fabry, p. 189). Il résulte des propositions générales démontrées au chapitre II du présent travail que les points à l'infini des courbes de M. Fabry sont singuliers d'ordre p .

Ces ingénieuses recherches ont donné le premier exemple, assez général comme on le voit, de courbes algébriques réelles à torsion constante.

[5] Une note élégante de M. E. Cosserat, publiée en 1895 ⁽¹⁾, vint établir d'intéressantes relations entre cette théorie et celle des surfaces minima. Prenons-les sous la forme où elles se trouvent énoncées par G. Darboux ⁽²⁾.

« Toute courbe à torsion constante $\frac{1}{\tau}$ peut être prise pour ligne asymptotique d'une surface minima qui se détermine sans aucune intégration si la courbe est connue, et qui est algébrique si la courbe est algébrique. »

La surface minima adjointe est inscrite à la sphère de rayon τ suivant une courbe qui peut servir d'indicatrice sphérique des binormales pour la courbe à torsion constante.

Les réciproques sont vraies. Il en résulte en particulier que la détermination des surfaces minima algébriques inscrites dans une sphère et celle des courbes algébriques à torsion constante sont deux problèmes équivalents.

Ces propriétés, dont on verra dans les pages citées l'extension aux courbes de Bertrand, montrent tout l'intérêt que présente une étude approfondie et générale des courbes à torsion constante.

[6] Mais ces recherches ont de plus un lien étroit avec la déformation du parabolôïde de révolution. G. Darboux ⁽³⁾ a mis sous la forme suivante la proposition définitive qui résume la solution du problème : Pour déterminer toutes les surfaces applicables sur le parabolôïde de révolution de paramètre 2τ , c'est-à-dire d'équation

$$x^2 + y^2 = 4\tau z,$$

⁽¹⁾ E. Cosserat, *Sur les courbes algébriques à torsion constante*, etc. (*C. R.*, tome CXX, p. 1252, 1895).

⁽²⁾ G. Darboux, *T. S.*, 2^e édition, tome I, p. 485.

⁽³⁾ *T. S.*, §§ 769 et 770, tome II, ou page 429, tome IV.

on construit deux courbes ayant des torsions constantes égales et de signes contraires $\frac{i}{\tau}$, $\frac{-i}{\tau}$. Le milieu de la corde joignant un point de la première courbe Γ à un point de la deuxième courbe Γ_1 décrit une surface S_0 engendrée soit par la translation de Γ' homothétique à Γ , soit de Γ'_1 homothétique à Γ_1 . Les plans osculateurs à Γ' Γ'_1 se coupent suivant une droite d'' , laquelle engendre une congruence de normales dont les surfaces focales sont les surfaces cherchées. Pour avoir des nappes réelles, on prendra les deux courbes Γ , Γ_1 imaginaires conjuguées.

Il résulte de là qu'il y a le plus grand intérêt à faire l'étude générale des courbes à torsion constante, en particulier de celles qui sont entièrement imaginaires.

[7] Enfin G. Darboux a signalé ce fait ⁽¹⁾ que le problème des courbes à torsion constante est un de ceux que Monge a posés en général et qui s'énoncent ainsi : « Des fonctions y, z, \dots , de la variable x doivent vérifier une ou plusieurs équations différentielles de la forme :

$$F(x, y, z, \dots, y'z', \dots, y''z'' \dots) = 0,$$

où figurent les fonctions et leurs dérivées jusqu'à un certain ordre. Est-il possible de résoudre ces équations, c'est-à-dire d'exprimer x, y, z en fonction d'un paramètre, de fonctions arbitraires de ce paramètre, et des dérivées de ces fonctions arbitraires ? »

On obtient bien des problèmes de cet ordre en cherchant les courbes pour lesquelles une relation est donnée entre la courbure et la torsion.

Pour les courbes à torsion constante l'équation (1) de M. Fouché est l'une des formes les plus simples du problème. C'est bien une équation de Monge.

Est-il donc possible de déterminer en fonction d'un paramètre d'une fonction arbitraire de ce paramètre et des dérivées de cette fonction les trois quantités x, y, z ? Cette question domine évidemment toutes les autres, car si elle était résolue la théorie se développerait, comme celle des surfaces minima par exemple, où l'équation de Monge

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0,$$

équation résoluble, donne la solution complète du problème.

Le problème de Monge a suscité de nombreuses recherches : je ne citerai pour l'objet que nous poursuivons que deux mémoires de Beudon ⁽²⁾ et de M. Cartan ⁽³⁾.

⁽¹⁾ T. S., tome IV, p. 432.

⁽²⁾ Beudon, B. S. M. F., tome XXVIII, p. 107, *Sur les changements de variables*.

⁽³⁾ E. Cartan, B. S. M. F., tome XXIX, p. 118, *Sur quelques quadratures dont l'élément différentiel contient des fonctions arbitraires*.

Les résultats de ces mémoires simplifient grandement notre problème en n'y laissant subsister qu'une quadrature au lieu de trois.

Ce résultat équivaut à celui que nous avons signalé dans la thèse de M. Lyon ; nous verrons dans le chapitre I les formes précises des propositions obtenues.

[8] Toutes les recherches tentées pour obtenir en termes finis les coordonnées d'un point de la courbe la plus générale à torsion constante ayant échoué, il était naturel d'opérer autrement et de délimiter les classes de courbes dont on voulait étudier l'existence et les propriétés.

C'est dans cet état du problème que l'Académie des Sciences mit au concours le sujet suivant (1) :

« Réaliser un progrès notable dans la recherche des courbes à torsion constante ; déterminer, s'il est possible, celles de ces courbes qui sont algébriques, tout au moins celles qui sont unicursales. »

Le présent travail, qui est un essai sur cette difficile question, a été composé de janvier 1913 à juillet 1914. Un extrait des premiers résultats a paru aux *Comptes rendus* (2) en 1913. Interrompu par la guerre, il a été rédigé hâtivement en 1915 pour être soumis au jugement de l'Académie. Celle-ci, parmi les mémoires envoyés aux concours, a bien voulu récompenser également le travail de M. Bertrand Gambier et le mien (3).

Avec des différences de détails dans la rédaction et des développements de points dont j'avais seulement indiqué les résultats, c'est ce mémoire que je publie aujourd'hui.

(1) C. R., séance du 16 décembre 1912.

(2) C. R., 1913, tome II, p. 1379.

(3) C. R., séance du 18 décembre 1916.

CHAPITRE PREMIER

Différents systèmes de formules déterminant les courbes à torsion constante. — La réduction des trois quadratures à une seule. — Impossibilité d'une réduction plus complète. — Nécessité de recherches directes. — Leur orientation.

[1] Soit une courbe A, lieu du point M(X, Y, Z), $\frac{1}{\tau}$ sa torsion, α, β, γ les paramètres directeurs de la binormale x, c, c', c'' ses cosinus directeurs. On a les formules suivantes, valables pour une courbe quelconque

$$(1) \quad \begin{cases} dX = \tau(c''dc' - c'dc'') = \tau \frac{\gamma d\beta - \beta d\gamma}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}, \\ dY = \tau(cdc'' - c''dc) = \tau \frac{\alpha d\gamma - \gamma d\alpha}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}, \\ dZ = \tau(c'dc - cdc') = \tau \frac{\beta d\alpha - \alpha d\beta}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}. \end{cases}$$

Si A est à torsion constante, on aura donc :

$$(2) \quad \begin{cases} X = \tau \int \frac{\gamma d\beta - \beta d\gamma}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}, \\ Y = \tau \int \frac{\alpha d\gamma - \gamma d\alpha}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}, \\ Z = \tau \int \frac{\beta d\alpha - \alpha d\beta}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}. \end{cases}$$

Et inversement si les variables α, β, γ sont liées par une relation quelconque

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

les équations (2) fourniront une courbe à torsion constante (τ) dont la binormale a la direction α, β, γ .

On peut donc se donner arbitrairement le cône Γ des binormales. Il lui correspond à une translation près, une courbe bien déterminée à torsion constante τ , soit A_τ .

[2] Il est évident géométriquement qu'une transformation qui conserve les génératrices du cône Γ , accompagnée d'une rotation quelconque autour du sommet du cône, ne fait que déplacer la courbe A en la laissant égale à elle-même.

Analytiquement, il est évident que la substitution

$$\frac{x_1}{x} = \frac{\beta_1}{\beta} = \frac{\gamma_1}{\gamma} = \lambda$$

laisse invariables les trois intégrales (2).

Proposons-nous de voir analytiquement l'effet du déplacement, ou plus généralement de la substitution linéaire :

$$(3) \quad \begin{cases} x = ax_1 + b\beta_1 + c\gamma_1, \\ \beta = a'x_1 + b'\beta_1 + c'\gamma_1, \\ \gamma = a''x_1 + b''\beta_1 + c''\gamma_1, \end{cases}$$

on suppose naturellement :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Appelons $\Phi(x, \beta, \gamma)$ la forme $x^2 + \beta^2 + \gamma^2$, après la substitution elle devient

$$\Phi_1(x_1, \beta_1, \gamma_1) \equiv \Phi(x, \beta, \gamma).$$

Nous poserons

$$(4) \quad \begin{cases} X_1 = \tau \int \frac{\gamma_1 d\beta_1 - \beta_1 d\gamma_1}{\Phi_1}, \\ Y_1 = \tau \int \frac{x_1 d\gamma_1 - \gamma_1 dx_1}{\Phi_1}, \\ Z_1 = \tau \int \frac{\beta_1 dx_1 - x_1 d\beta_1}{\Phi_1}. \end{cases}$$

La substitution des valeurs (3) dans les équations (2) nous donne alors

$$(5) \quad \begin{cases} \Delta X_1 = aX + a'Y + a''Z, \\ \Delta Y_1 = bX + b'Y + b''Z, \\ \Delta Z_1 = cX + c'Y + c''Z, \end{cases}$$

ce qui n'est autre que le résultat classique relatif à la transformation des coordonnées de droites dans une transformation homographique. Nous voyons immédiatement sur ces formules qu'un déplacement effectué sur le cône amène la courbe A_1 à coïncider avec la courbe A . Mais ce résultat, d'ailleurs peu intéressant, se généralise.

Considérons un cône quelconque Γ_1 , lieu du point $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$. Les intégrales (4) attachées à ce cône, définissent une courbe gauche A. Cette courbe est la transformée d'une certaine courbe à torsion constante, dans une homographie conservant le plan de l'infini. Les formules définissant la transformation ont la forme (5); pour les obtenir il suffit, par les formules (3), de transformer la forme quadratique Φ_1 en $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$. On peut dire que cette transformation est définie à un déplacement près, car dès qu'on possède une solution particulière $\alpha^1 \beta^1 \gamma^1$, on doit résoudre l'équation :

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2,$$

qui donne une rotation quelconque (avec ou sans symétrie par rapport à l'origine, cette dernière transformation étant sans effet).

[3] La proposition que nous venons de démontrer a deux sortes d'applications :

1° Pour un cône des binormales donné, on peut toujours, par une transformation homographique appropriée, réduire l'équation de ce cône à sa forme la plus simple. On obtient ainsi une certaine forme quadratique Φ_1 et des intégrales de la forme (4) à calculer.

2° On peut aussi, et ceci est plus important, choisir des formes simples pour Φ_1 .

Utilisant la propriété du début du paragraphe (2), on peut faire $\lambda = \frac{1}{\gamma}$ ce qui revient au fond à remplacer γ par 1, nous avons :

$$(6) \quad \begin{cases} X = \tau \int \frac{d\beta}{\alpha^2 + \beta^2 + 1}, \\ Y = \tau \int \frac{-dx}{\alpha^2 + \beta^2 + 1}, \\ Z = \tau \int \frac{\beta dx - \alpha d\beta}{\alpha^2 + \beta^2 + 1}. \end{cases}$$

Ces formules sont données par M. Lyon (Thèse, p. 17).

Si nous posons maintenant, dans les formules générales :

$$\begin{cases} 2\alpha_1 = \alpha + i\beta, & \alpha = \alpha_1 - \beta_1, \\ -2\beta_1 = \alpha - i\beta, & \beta = -i(\alpha_1 + \beta_1), \\ \gamma_1 = \gamma, & \gamma = \gamma_1, \end{cases} \quad \Delta = -2i,$$

nous aurons :

$$\begin{cases} -2iX_1 = X - iY, \\ +2iY_1 = X + iY. \\ -2iZ_1 = Z; \end{cases}$$

$$(7) \quad \begin{cases} X - iY = -2i\tau \int \frac{\gamma_1 d\beta_1 - \beta_1 d\gamma_1}{\gamma_1^2 - 4\alpha_1\beta_1}, \\ X + iY = 2i\tau \int \frac{\alpha_1 d\gamma_1 - \gamma_1 d\alpha_1}{\gamma_1^2 - 4\alpha_1\beta_1}, \\ Z = -2i\tau \int \frac{\beta_1 d\alpha_1 - \alpha_1 d\beta_1}{\gamma_1^2 - 4\alpha_1\beta_1}. \end{cases}$$

Par application du premier principe, nous pouvons dans ces formules (7) faire par exemple $\gamma_1 = 1$, ce qui nous donne, en changeant un peu les notations :

$$(8) \quad \begin{cases} u_1 = -2i\alpha_1, & u = -2i\beta_1, \\ \left\{ \begin{array}{l} X - iY = \tau \int \frac{du}{1 + uu_1}, \\ X + iY = \tau \int \frac{du_1}{1 + uu_1}, \\ Z = \frac{i\tau}{2} \int \frac{u du_1 - u_1 du}{1 + uu_1}. \end{array} \right. \end{cases}$$

Ce sont les formules obtenues par M. Lyon (Thèse, p. 20).

Si nous effectuons enfin dans les formules (7) les substitutions suivantes :

$$\alpha_1 = xy, \quad \beta_1 = 1, \quad \gamma_1 = x + y.$$

nous obtiendrons le système de formules (9), bien connu dans cette théorie et dont l'importance est considérable (Lyon, Thèse, p. 7).

$$(9) \quad \begin{cases} X - iY = 2i\tau \int \frac{dx + dy}{(x - y)^2}, \\ X + iY = -2i\tau \int \frac{y^2 dx + x^2 dy}{(x - y)^2}, \\ Z = -2i\tau \int \frac{y dx + x dy}{(x - y)^2}. \end{cases}$$

Nous nous servirons à peu près uniquement de ce dernier système de formules.

Si nous avons démontré les autres, c'est qu'il nous a paru assez intéressant de les rattacher à une idée unique, et de les déduire par une méthode uniforme du système primitif.

[4] Quelle est dans ce système (9) la signification des variables x, y ? — On voit que nous avons posé

$$\begin{aligned}x + i\beta &= 2xy, \\x - i\beta &= -2, \\ \gamma &= x + y,\end{aligned}$$

x et y sont les paramètres des plans tangents au cône isotrope menés par la droite α, β, γ . Autrement dit, si l'on calcule les cosinus directeurs de la binormale

$$\left\{ \begin{aligned}c &= \frac{1 - xy}{x - y}, \\c' &= \frac{i(1 + xy)}{x - y}, \\c'' &= \frac{x + y}{x - y},\end{aligned} \right. \quad \sqrt{x^2 + \beta^2 + \gamma^2} = y - x$$

x et y sont les paramètres des génératrices rectilignes de la sphère de rayon 1 sur laquelle on fait la représentation sphérique.

[5] A un point de vue purement analytique, on peut se demander ce que deviennent les considérations précédentes quand la forme quadratique $\Phi(x, \beta, \gamma)$ qui, pour les courbes à torsion constante, est formée de trois carrés, se réduit à deux carrés ou à un seul. Dans le premier cas on peut toujours, par une transformation linéaire, supposer :

$$\Phi(x, \beta, \gamma) \equiv x\beta;$$

on se bornera donc à considérer les intégrales

$$\begin{aligned}X &= \int \frac{dx}{x\beta}, \\Y &= \int \frac{d\beta}{x\beta}, \\Z &= \int \frac{\beta dx - x d\beta}{x\beta}.\end{aligned}$$

Ici $Z = L \frac{\alpha}{\beta}$. De plus, on peut obtenir X et Y sans signe de quadrature.

En effet :

$$\begin{aligned} X &= \frac{\alpha}{\alpha\beta} - \int \alpha \frac{d(\alpha\beta)}{(\alpha\beta)^2}, \\ Y &= \frac{\alpha}{\alpha\beta} - \int \beta \frac{d(\alpha\alpha)}{(\alpha\beta)^2}. \end{aligned}$$

Il faut donc et il suffit que l'on ait, en posant $u = \alpha\beta$,

$$(10) \quad \begin{cases} \alpha \frac{du}{u^2} = dX_1, \\ \beta \frac{du}{u^2} = dY_1, \end{cases}$$

ou bien :

$$dX_1 dY_1 = \frac{du^2}{u^3} = \left(\frac{du}{u^{\frac{3}{2}}} \right)^2.$$

Or cette dernière équation est d'une forme classique :

$$dX_1 dY_1 = dZ_1^2$$

qu'on sait résoudre de la manière la plus générale. On aurait donc X_1, Y_1, Z_1 ou X, Y, u en fonction d'une variable, d'une fonction arbitraire de cette variable et des dérivées première et seconde de cette fonction. On tirera ensuite des équations (10) les valeurs de α, β , et l'on aura ainsi exprimé X, Y, Z sans signe de quadrature.

Signalons ici une différence considérable entre ce problème et celui des courbes à torsion constante. Il existe des solutions algébriques du deuxième; pour le premier au contraire X, Y, Z ne sauraient être toutes les trois algébriques puisque $Z = L \frac{\alpha}{\beta}$.

Étudions maintenant le cas où $\Phi(\alpha, \beta, \gamma)$ se réduit à un seul carré. On peut poser :

$$\Phi(\alpha, \beta, \gamma) \equiv \alpha^2$$

et se borner à considérer les intégrales

$$\begin{aligned} X &= \int \frac{d\alpha}{\alpha^2} = -\frac{1}{\alpha}, \\ Y &= \int \frac{d\beta}{\alpha^2} = \psi(\beta), \\ Z &= \int \frac{\beta d\alpha - \alpha d\beta}{\alpha^2} = -\frac{\beta}{\alpha}. \end{aligned}$$

Il suffit, pour obtenir Y sans quadrature, de lier $\alpha\beta$ par la relation :

$$\frac{1}{\alpha^2} = \psi'(\beta).$$

[6] Revenons au cas général. Comme nous l'avons dit dans l'introduction, la question préalable qui domine cette recherche est la suivante :

Est-il possible d'obtenir X, Y, Z sans signe de quadrature ?

On trouve dans la thèse de M. Lyon une expression des deux coordonnées $X + iY$, Z débarrassées de quadratures.

Dans le mémoire de Beudon, on trouve les expressions de $X - iY$, $X + iY$ sous forme finie. M. Cartan a repris cette question à la fin de son mémoire et donné des expressions équivalentes à celles de Beudon, et d'une forme très élégante.

Remarquons qu'on peut obtenir immédiatement ce résultat par une méthode analogue à celle du paragraphe 5

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{1 + uu_1} &= \frac{u}{1 + uu_1} - \int u \frac{d\lambda}{\lambda^2}, \\ \int \frac{du_1}{1 + uu_1} &= \frac{u_1}{1 + uu_1} - \int u_1 \frac{d\lambda}{\lambda^2}, \end{aligned} \quad \lambda = 1 + uu_1$$

en posant :

$$\begin{aligned} u \frac{d\lambda}{\lambda^2} &= dX_1, \\ u_1 \frac{d\lambda}{\lambda^2} &= dY_1, \end{aligned}$$

on est ramené à résoudre

$$dX_1 dY_1 = \frac{\lambda - 1}{\lambda^4} d\lambda^2 = dZ_1^2.$$

Or cette équation est résolue. Il est inutile de faire les calculs. On voit assez clairement qu'on peut faire disparaître deux quadratures. Est-il possible de faire disparaître la dernière? Tous les efforts avaient échoué; mais il n'était pas démontré que le problème fût impossible. C'est seulement dans le courant de l'année 1914 qu'une réponse complète a été apportée par un travail de M. Cartan (¹).

Une méthode régulière permet de reconnaître si une équation de Monge est résoluble, et, si elle ne l'est pas complètement, jusqu'à quel point on peut en pousser la solution. Nous renverrons, pour l'énoncé du théorème général, au travail de M. Cartan, nous contentant de dire que l'application de ces méthodes à notre problème fournit la conclusion suivante :

Il est impossible d'obtenir sous forme finie, en fonction d'un paramètre, d'une fonction arbitraire de ce paramètre et des dérivées de cette fonction, l'expression des coordonnées d'un point de la courbe à torsion constante la plus générale.

[7] Dans ces conditions, il paraît nécessaire de poser autrement le problème et de chercher à déterminer et à étudier par des moyens directs des classes précisées à l'avance de courbes à torsion constante.

Les courbes algébriques sont évidemment les plus importantes, et, parmi elles, les courbes unicursales sont les plus faciles à déterminer. Nous sommes donc amenés par ce premier examen à attaquer la question telle qu'elle est posée dans le sujet même du concours.

(¹) *C. R.*, premier semestre 1914, p. 326.

CHAPITRE II

Propriétés générales des courbes à torsion constante analytiques en un point à l'infini. — Les points à l'infini d'une telle courbe sont les mêmes que les points à l'infini de l'indicatrice. — Les entiers caractéristiques p, k . — Détermination du degré du cône des binormales. — Le genre du cône des binormales. — Le genre de l'indicatrice. — Les deux classes d'indicatrices.

[1] Nous allons continuer l'étude des points à l'infini d'une courbe à torsion constante, dans l'hypothèse où les quatre coordonnées homogènes d'un point de cette courbe restent des fonctions analytiques d'un paramètre. Une courbe algébrique en particulier présente ce caractère en tous ses points à distance finie ou à l'infini, qu'ils soient ordinaires ou singuliers. Reprenons les formules :

$$(1) \quad \begin{cases} X = \tau \int \frac{\gamma d\beta - \beta d\gamma}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}, \\ Y = \tau \int \frac{\alpha d\gamma - \gamma d\alpha}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}, \\ Z = \tau \int \frac{\beta d\alpha - \alpha d\beta}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}. \end{cases}$$

Si le point à l'infini est obtenu pour la valeur $t=0$ du paramètre dont X, Y, Z, T sont des fonctions holomorphes, on pourra écrire :

$$(2) \quad \begin{cases} X = \sum_{s=-p}^{+\infty} \lambda_s t^s, \\ Y = \sum_{s=-p}^{+\infty} \mu_s t^s, \\ Z = \sum_{s=-p}^{+\infty} \nu_s t^s. \end{cases}$$

Ces développements conviennent soit pour un point à l'infini, $p \neq 0$, soit pour un point à distance finie, $p = 0$.

Si le point considéré est singulier, il peut être nécessaire, pour représenter les diverses branches de la courbe qui passent en ce point, d'utiliser plusieurs systèmes de développements de la forme (2).

Nous considérerons comme autant de points différents les points géométriquement confondus qui sont les origines de ces développements.

Envisageons isolément l'un de ces développements, soit M le point obtenu pour $t = 0$.

Nous supposons que la représentation obtenue est propre, c'est-à-dire qu'il est impossible de substituer à la variable t une variable θ , donnée par $t^n = \theta$ et fournissant pour X, Y, Z des développements suivant les puissances entières de θ . Si cette condition est remplie et que les coefficients λ_{-p} , μ_{-p} , ν_{-p} ne soient pas nuls tous les trois, le point M comptera pour p dans l'intersection de la courbe considérée et du plan de l'infini.

[2] Les paramètres directeurs de la binormale auront pour valeurs, dans le domaine du point M, au voisinage de $t = 0$,

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \sum_{\circ}^{+\infty} \alpha_s t^s, \\ \beta = \sum_{\circ}^{+\infty} \beta_s t^s, \\ \gamma = \sum_{\circ}^{+\infty} \gamma_s t^s. \end{array} \right.$$

A quelles conditions l'intégration des expressions (1) fournira-t-elle des développements (2)? Nous étudierons les cas où p est différent de zéro ou égal à zéro.

1° $p \neq 0$. Il faut dans le cas le plus général réunir trois conditions : 1) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ doit contenir en facteur t^{p-1+k} ; 2) les trois quantités $\gamma d\beta - \beta d\gamma$ doivent contenir en facteur t^k ; 3) enfin les résidus de $\frac{dX}{dt}$, $\frac{dY}{dt}$, $\frac{dZ}{dt}$ doivent être nuls.

Le cône des binormales doit donc avoir, pour $t = 0$, une génératrice isotrope, comptant pour $p + 1 + k$, dans l'intersection de Γ et du cône isotrope L de même sommet.

L'ordre de multiplicité est bien $p + 1 + k$, car la représentation (3) du cône des binormales est propre. Si elle était impropre en effet, il résulterait de l'intégration de (1) que la représentation (11) serait également impropre, contrairement à l'hypothèse. On peut dire encore que l'indicatrice sphérique des binormales a un point à l'infini en même temps que la courbe à torsion constante. C'est sous cette forme que nous allons étudier analytiquement le problème en réservant pour le chapitre III l'étude complète de la condition relative aux résidus.

[3] Nous emploierons pour cela des coordonnées symétriques x et y , en posant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = \int \frac{dx + dy}{(x-y)^2}, \\ \eta = \int \frac{y^2 dx + x^2 dy}{(x-y)^3}, \\ \zeta = \int \frac{y dx + x dy}{(x-y)^3}, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} X - iY = + 2i\tau\xi, \\ X + iY = - 2i\tau\eta, \\ Z = - 2i\tau\zeta. \end{array}$$

Si l'on pose

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2},$$

on a :

$$\frac{1 - xy}{\alpha} = \frac{i(1 + xy)}{\beta} = \frac{x + y}{\gamma} = \frac{x - y}{\rho}.$$

Nous supposons que la génératrice isotrope considérée soit :

$$\alpha + i\beta = 0, \quad \gamma = 0.$$

Nous adopterons alors pour x et y les valeurs

$$x = \frac{\gamma + \rho}{\alpha - i\beta}, \quad y = \frac{\gamma - \rho}{\alpha - i\beta}.$$

On voit que x et y s'annuleront pour $t = 0$, $(x - y)^2$ contiendra en facteur t^{p+1+k} , les numérateurs de $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ contenant t^k .

En changeant de paramètre t , on peut supposer en outre

$$(x - y)^2 = t^{p+1+k}.$$

Nous aurons deux cas à distinguer suivant que $p + 1 + k$ est pair ou impair.

1°

$$p + 1 + k = N = 2n.$$

Cela revient à dire que l'expression de ρ est holomorphe par rapport à t . On aura pour x , y deux systèmes de valeurs se déduisant l'un de l'autre en changeant ρ en $-\rho$, c'est-à-dire en échangeant x et y . Le cône des binormales coupe la sphère

suivant deux branches de courbes symétriques par rapport au centre et représentables par des développements suivant les puissances de t . En adoptant la solution :

$$x - y = t^n$$

on aura

$$\begin{cases} x = a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n + \dots, \\ y = a_1 t + a_2 t^2 + \dots + (a_n - 1) t^n + \dots \end{cases}$$

pour l'une des branches, l'autre s'obtiendra en échangeant x et y . Chacune des branches coupe le plan de l'infini en n points, l'ensemble coupe donc en $p + 1 + k$ points.

Dans ce cas, si la variable t parcourt le domaine de convergence des développements utilisés, le point x, y décrit l'une des branches de l'indicatrice sans jamais passer sur la branche symétrique. Si t décrit un contour fermé, le point de la courbe à torsion constante revient à sa position initiale, la binormale positive revenant également à sa position initiale. Dans le plan x, y , l'indicatrice se décompose en deux courbes symétriques par rapport à la première bissectrice. Par exemple si le cône des binormales est un cône du second degré bitangent au cône isotrope, c'est-à-dire de révolution, il coupe la sphère suivant deux cercles. Un de ces cercles peut servir d'indicatrice complète, et on peut fixer sur la courbe un sens aux binormales. La courbe sera dirigée.

2°

$$p + 1 + k = 2n + 1.$$

Les cônes Γ et I ont une génératrice commune d'ordre impair, la valeur de ρ est holomorphe en $t^{\frac{1}{2}}$. On pourra bien, si l'on veut, représenter les deux branches symétriques de l'indicatrice par des équations :

$$\begin{cases} x - y = 2t^{\frac{2n+1}{2}}, \\ \begin{cases} x = a_1 t + a_2 t^2 \dots + a_n t^n + t^{\frac{2n+1}{2}} + \dots, \\ y = a_1 t + \dots - t^{\frac{2n+1}{2}} + \dots \end{cases} \end{cases}$$

Mais la deuxième branche ne se distingue pas de la première dont elle se déduit en changeant $t^{\frac{1}{2}}$ en $-t^{\frac{1}{2}}$, de sorte que si la variable t décrit un contour fermé, le point x, y parti de sa position initiale se retrouvera soit à la position symétrique suivant que t aura tourné autour de l'origine un nombre pair ou impair de fois. Le

point de la courbe à torsion constante revient en place, mais dans le premier cas la binormale positive, suivie par continuité, est également en place; dans le deuxième cas, elle a repris la position opposée.

Quand on décrit toute l'indicatrice, la variable t décrit deux fois son domaine, c'est-à-dire qu'on obtient deux fois la courbe à torsion constante, la première fois avec un certain sens pour les binormales, une deuxième fois avec le sens opposé.

L'indicatrice est indécomposable dans le domaine du point $t = 0$; elle coupe le plan de l'infini en $p + 1 + k$ points.

Elle est représentée dans le plan des x, y par une courbe ayant un rebroussement à l'origine, symétrique par rapport à la tangente en ce point qui est la première bissectrice, image du plan de l'infini.

[4] Examinons avec plus de détails l'ensemble des deux premières conditions. Nous traiterons successivement les cas où $p + 1 + k$ est pair ou impair.

On doit avoir t^k en facteur dans les expressions :

$$\frac{d(x+y)}{dt}, \quad \frac{y^2 dx + x^2 dy}{dt}, \quad \frac{d(xy)}{dt}.$$

Or si $p + 1 + k = 2n$,

$$\begin{cases} x = a_n t^n + \dots + a_1 t + \dots, \\ y = a_n t^n + \dots + (a_n - 1)t^n + \dots \end{cases}$$

1° Si $k + 1 < n$, il suffira que le développement de x, y commence par un terme en t^{k+1} , avec la condition $a_{k+1} \neq 0$. On a alors :

$$\begin{aligned} dx + dy &= t^k dt [2(k+1)a_{k+1} + \dots], \\ y^2 dx + x^2 dy &= t^{2k+2} dt [2(k+1)a_{k+1}^3 + \dots], \\ y dx + x dy &= t^{2k+1} dt [2(k+1)a_{k+1}^2 + \dots]. \end{aligned}$$

Si les résidus de $\frac{d^2 z}{dt^2}$, $\frac{d\tau_1}{dt}$, $\frac{d^2 z}{dt^2}$ sont nuls, on aura, après intégration,

$$\begin{cases} X - iY = \frac{-4i\tau(k+1)a_{k+1}}{p}, \\ X + iY = \frac{-4i\tau(k+1)a_{k+1}^3}{2(k+1) - p} t^{2k+2} + \dots, \\ Z = \frac{-4i\tau(k+1)a_{k+1}^2}{k+1 - p} t^{2k+1} + \dots, \\ T = t^p. \end{cases}$$

Que se passe-t-il si $2(k + 1) = p$?

Ce cas ne saurait se présenter, car le résidu de $X + iY$ serait différent de zéro, puisque $a_{k+1} \neq 0$.

2° $k + 1 > n$, il faut d'abord que dans $x + y$ disparaisse le terme en t^n , d'où

$$a_n = \frac{1}{2};$$

mais alors le résidu de $\frac{d\zeta}{dt}$ est égal à $\frac{-n}{2}$, et ne saurait être nul.

3° $k + 1 = n$, ce qui équivaut à $k + 1 = p$.

$$\begin{cases} x = a_n t^n + a_{n+1} t^{n+1} + \dots, \\ y = (a_n - 1)t^n + \dots \end{cases}$$

Il faut ici que le résidu de $\frac{d\zeta}{dt}$ soit nul, ce qui donne :

$$a_n(a_n - 1) = 0.$$

Nous prendrons par exemple $a_n = 0$:

$$\begin{cases} x = a_{n+1} t^{n+1} + \dots, \\ y = -t^n + a_{n+1} t^{n+1} + \dots; \end{cases}$$

en intégrant, on obtient pour les coordonnées homogènes de la courbe à torsion constante :

$$\begin{cases} X - iY = -2i\tau + \dots, \\ X + iY = -2i\tau a_{n+1} t^{n+1} + \dots, \\ Z = -2i\tau(2n + 1)a_{n+1} t^{n+1} + \dots, \\ T = t^n = t^n. \end{cases}$$

En résumé, l'entier k est inférieur ou égal à $n - 1$ ou mieux, quand p est donné, à $p - 1$.

Au point de vue géométrique, il ressort des expressions des coordonnées q que le point à l'infini obtenu est le point :

$$X + iY = 0, \quad Z = 0, \quad T = 0,$$

c'est le point à l'infini de l'indicatrice, il est situé sur le cercle de l'infini.

Pour l'indicatrice, ce point est l'origine d'un cycle d'ordre $k + 1$, de classe $n - k - 1$, sauf pour $n = k + 1$, où la classe devient 1, l'ordre restant $k + 1$. Pour la courbe à torsion constante ce point est singulier d'ordre $k + 1$, le plan osculateur à la courbe en ce point et le plan isotrope

$$X + iY = 0$$

ou le plan de l'infini, suivant que $2(k + 1) \not\equiv p$.

[5] $p + 1 + k$ est impair.

On est sûr d'avance que $k + 1$ ne peut être égal à p . On peut prendre pour x, y

$$\begin{cases} x = \theta^{2n+1} + a_{k+1} \theta^{2k+2} + \dots, \\ y = -\theta^{2n+1} + a_{k+1} \theta^{2k+2} + \dots, \end{cases}$$

où l'on a posé $t = \theta^2$, on trouve aisément par intégration pour X, Y, Z, T des fonctions de θ^2 dont les premiers termes sont identiques à ceux trouvés dans le paragraphe précédent :

$$\begin{cases} X + iY = t^{2(k+1)} \alpha(t), \\ X - iY = \beta(t), \\ Z = t^{k+1} \gamma(t), \\ T = t^p; \end{cases}$$

α, β, γ sont des séries entières en t , commençant par un terme constant. Les conclusions sont donc les mêmes : la seule différence est que l'hypothèse $k = p - 1$ est devenue inadmissible.

Nous avons démontré en passant que si un point de l'indicatrice est à l'infini, il ne saurait lui correspondre de point à distance finie pour la courbe à torsion constante. Si, en effet, le nombre n est donné, k est inférieur à $n - 1$, donc les expressions de $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$ ont toujours un pôle $t = 0$. Nous pouvons maintenant résumer les résultats acquis :

Si une courbe à torsion constante A a un point M à l'infini, ce point M est un point à l'infini de l'indicatrice a des binormales et réciproquement.

Tous les points à l'infini d'une courbe à torsion constante sont donc sur le cercle de l'infini.

Si le point M compte pour p dans l'intersection de la courbe A et du plan de l'infini, et pour $k + 1$ dans l'intersection de A avec un plan quelconque, il compte pour $p + 1 + k$ dans l'intersection de a et du plan de l'infini, et pour $k + 1$ dans l'intersection de a et d'un plan quelconque.

[6] Malgré leur caractère élémentaire, les propositions démontrées permettent déjà d'obtenir des résultats dans la détermination du cône des binormales. Soit en effet à déterminer une courbe à torsion constante de degré M . Elle coupe le plan de l'infini en un nombre δ de points distincts comptant chacun pour $p_1, p_2, \dots, p_\delta$.

$$p_1 + p_2 + \dots + p_\delta = M.$$

A chacun de ces points va correspondre un point à l'infini de l'indicatrice, ou une génératrice isotrope du cône des binormales. L'ordre de multiplicité de cette génératrice est $p_i + 1 + k_i$, et nous savons qu'on les obtiendra toutes. Si μ est le degré du cône des binormales, m le degré de l'indicatrice complète, intersection de Γ et de la sphère, on aura :

$$m = 2\mu = \Sigma p_i + \Sigma k_i + \delta = M + \delta + \Sigma k_i.$$

Les entiers k sont autorisés à prendre une série de valeurs allant de 0 à $p - 1$. On voit qu'il existe un nombre fini de solutions du problème.

Supposons en particulier qu'on cherche les courbes ayant M points distincts à l'infini. Il faut que chacun d'eux soit un point ordinaire. Tous les k_i sont nuls, et l'on a :

$$\mu = M.$$

Le cône des binormales a donc même degré que la courbe.

Pour traiter un autre cas général, cherchons les courbes n'ayant qu'un point à l'infini et supposons de plus que ce point soit non singulier, on voit qu'il faut que M soit impair :

$$M = 2\mu - 1;$$

μ est alors le degré du cône des binormales.

RECHERCHE DE TOUTES LES CUBIQUES GAUCHES A TORSION CONSTANTE

1° $\delta = 1, p = 3, k$ peut prendre les valeurs 0 ou 2, la valeur 2 fournit pour la cubique un point singulier d'ordre 3, ce qui est impossible; on a donc $\mu = 2$. Le cône des binormales est du second degré. Il est surosculateur au cône isotrope et coupe la sphère suivant deux coniques, qui sont ici des paraboles sphériques, c'est-à-dire des sections de la sphère par un plan isotrope.

L'une de ces courbes peut être prise comme indicatrice. La cubique de M. Lyon, qu'on obtient par ce procédé, est une courbe dirigée.

$$2^{\circ} \delta = 2, p_1 = 1, p_2 = 2.$$

Il faut :

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 1, \quad \mu = 3,$$

le cône est du troisième ordre.

3^o $\delta = 3$, c'est le cas déjà examiné; en général, le cône est encore du troisième ordre. Nous verrons que ces deux derniers cas ne sauraient se présenter.

COURBES DU CINQUIÈME DEGRÉ N'AYANT QU'UN POINT À L'INFINI

k peut prendre les valeurs 0 ou 2, la valeur 4 est exclue comme fournissant un point singulier d'ordre 5; le cône des binormales est donc du troisième ou quatrième ordre, et nous verrons plus loin que la deuxième hypothèse ne fournit pas de solution.

Ces exemples suffisent à montrer comment, dans tous les cas, pour une courbe algébrique à torsion constante dont le degré est donné, la disposition des points à l'infini étant fixée comme nous l'avons vu, le cône des binormales est algébrique et d'un degré déterminé. Si les entiers k ne sont pas donnés d'avance, on a le choix entre un nombre fini de solutions.

[7] Le genre du cône des binormales.

Il est clair qu'une courbe A unicursale possède un cône Γ unicursal. En général, le genre de la courbe et du cône sont les mêmes.

Une courbe A de genre p est en effet représentable par des équations de la forme :

$$X = P(uv), \quad Y = Q(uv), \quad Z = R(uv),$$

où P, Q, R sont des fonctions rationnelles des deux variables u, v liées par une relation algébrique de genre p .

$$\varphi(uv) = 0.$$

Il est clair que les paramètres directeurs α, β, γ de la binormale sont des fonctions rationnelles de u, v . Par conséquent, le genre q du cône est au plus égal au genre p de la courbe A (1).

(1) E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. II, p. 454.

Inversement, le cône Γ ayant une équation de la forme :

$$F\left(\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}\right) = 0,$$

les intégrales qui fournissent les valeurs de X, Y, Z devant être algébriques sont des fonctions rationnelles de $\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}$. Il résulte de la même proposition que p est au plus égal à q , donc ces deux nombres sont égaux. Le genre du cône des binormales est toujours égal au genre de la courbe.

Naturellement il n'en est pas de même pour l'indicatrice.

[8] Pour étudier cette question plus à fond, remarquons qu'il existe sur la sphère deux classes de courbes nettement différentes :

1° Celles dont l'équation n'est pas symétrique en x, y . On peut alors exprimer rationnellement $x - y$ en fonction symétrique de x et y .

$$x - y = \Phi(xy, x + y).$$

Si l'on considère le cône ayant son sommet au centre de la sphère et s'appuyant sur une telle courbe il a le même degré que la courbe et coupe à nouveau la sphère suivant une courbe symétrique de la première par rapport au centre.

L'équation d'un tel cône est visiblement de la forme

$$(x - y)^2 = \Phi^2(xy, x + y),$$

qui devient en coordonnées α, β, γ

$$x^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \Psi^2(\alpha, \beta, \gamma),$$

où $\Psi(\alpha, \beta, \gamma)$ est une fraction rationnelle de degré d'homogénéité égal à 1.

Réciproquement tout cône Γ dont l'équation a cette forme coupe la sphère suivant deux courbes algébriques symétriques.

Donnons-en comme exemple la cubique sphérique :

$$x^3 - (y - x)(a + bx - x^2) = 0,$$

qui est coupée par le plan de l'infini en trois points confondus. Le cône s'appuyant sur cette cubique a une équation de la forme :

$$\rho[2a(\alpha - i\beta) + 2b\gamma - (\alpha + i\beta)] = \gamma(\alpha + i\beta) - 2b(x^2 + \beta^2 + \gamma^2),$$

on voit que ρ est fonction rationnelle de α, β, γ .

L'équation rendue rationnelle est du quatrième degré, mais le cône du quatrième degré contient un plan :

$$\alpha - i\beta = 0;$$

il reste donc un cône de troisième degré qui coupe la sphère suivant deux cubiques gauches symétriques.

Une circonstance analogue se présente pour toutes les courbes sphériques de degré impair. Le cône de degré pair :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \Psi^2$$

se décompose.

2° Les courbes dont l'équation est symétrique en x, y ; elle ne dépend par exemple que de $xy, x+y$ ou encore de $x+y, (x-y)^2$. C'est la forme à laquelle on aboutit généralement lorsque dans l'équation d'un cône de degré ν on remplace α, β, γ par

$$1 - xy, \quad i(1 + xy), \quad x + y;$$

on obtient alors une équation supposée indécomposable :

$$\Phi(xy, x + y) = 0$$

de degré ν en x et ν en y . Son genre par rapport aux variables $x, y, x + y$ est le genre du cône. Cette courbe sphérique est coupée en ν points par les génératrices d'un système, en ν points par les génératrices de l'autre système.

[9] Ces notions étant rappelées, nous pouvons préciser ce que nous avons dit du genre de l'indicatrice. Toutes les fois qu'elle appartient à la première classe d'équation non symétrique en x, y , le genre de l'indicatrice est le même que celui du cône et de la courbe. Il y a même plus : pour toutes les courbes de genre supérieur à 1, le fait pour l'indicatrice d'avoir même genre que la courbe entraîne la conséquence qu'elle est de première classe.

En effet, il y a correspondance rationnelle entre le cône et l'indicatrice, et, d'après le théorème de Weber (¹), cette correspondance est birationnelle dès que les genres sont égaux. Ainsi x, y sont des fonctions rationnelles de $\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}$. Par conséquent $(x-y)^2$ est le carré d'une fonction rationnelle, et le cône des binormales a une équation de la forme :

$$x^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \Psi^2.$$

(¹) E. Picard, *Traité d'Analyse*, tome II, p. 455.

Le théorème réciproque n'est plus vrai pour les courbes de genre 0 et 1. L'indicatrice et le cône des binormales peuvent parfaitement avoir le même genre sans que l'indicatrice soit de première classe.

Pour le genre 1 donnons un exemple simple :

$$\begin{cases} x - y = p'(u), \\ x + y = p(u), \end{cases}$$

p étant la fonction de Weierstrass. L'indicatrice a comme équation :

$$(x - y)^2 = 4(x + y)^3 - g_2(x + y) - g_3;$$

c'est une courbe sphérique du sixième degré de genre 1.

Le cône directeur est du troisième degré, également de genre 1. Son équation est la suivante :

$$4(\alpha + i\beta)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 3\alpha\gamma^2 - 2g_2\gamma(\alpha - i\beta)^2 - g_3(\alpha - i\beta)^3.$$

Pour le genre 0, il peut également exister des indicatrices unicursales, indécomposables et symétriques par rapport au centre de la sphère. Le cône des binormales est alors unicursal, mais il n'a pas la forme d'équation caractéristique. Considérons en général un cône unicursal n'ayant en commun avec le cône isotrope que des génératrices d'ordre de multiplicité pair. Il est clair que $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ est le carré d'un polynôme en t . Donc ρ est fonction rationnelle de t et par conséquent de α, β, γ . L'indicatrice est de première classe; elle est unicursale avec t pour paramètre.

Si une seule génératrice est d'ordre impair, soit t_1 la valeur de t qui lui correspond, en posant :

$$t - t_1 = \theta^2.$$

Les coordonnées d'un point de l'indicatrice s'expriment rationnellement en fonction de θ . L'indicatrice est unicursale, mais θ n'est plus fonction rationnelle de α, β, γ . On a bien à faire ici à une indicatrice symétrique et indécomposable, puisque en changeant θ en $-\theta$ on obtient le point symétrique par rapport au centre de la sphère. Il en sera de même si deux génératrices t_1, t_2 sont d'ordre impair en posant :

$$(t - t_1)(t - t_2) = \theta^2,$$

on exprimera t et θ en fonction d'un paramètre u ; l'indicatrice sera unicursale, mais le paramètre u ne sera plus fonction rationnelle de α, β, γ .

Si plus de deux génératrices étaient d'ordre impair, l'indicatrice serait de genre au moins égal à un.

On voit que, dans le cas des indicatrices unicursales, il peut arriver que ces indicatrices soient de première classe; le paramètre qui sert à leur représentation fournit alors une représentation impropre pour la courbe à torsion constante; on a en effet généralement :

$$t = \frac{au^2 + bu + c}{a'u^2 + b'u + c'};$$

à chaque valeur de t correspondent deux valeurs de u . Quand on décrit l'indicatrice complète, on obtient deux fois la courbe à torsion constante. Nous appellerons courbes doubles les courbes unicursales correspondant à ces indicatrices de seconde classe.

Donnons un exemple simple d'indicatrice :

$$\begin{cases} x + y = \theta^2, \\ x - y = \theta^3, \end{cases}$$

cette indicatrice est de sixième degré, il lui correspond un cône unicursal du troisième degré :

$$(x^2 + \beta^2 + \gamma^2)(x - i\beta) = \gamma^3.$$

On peut, nous le verrons, obtenir des courbes doubles A_1 .

[10] Quand l'indicatrice est de deuxième classe, son genre est généralement plus élevé que celui du cône. Le cône Γ d'ordre ν coupe la sphère suivant une courbe que chaque génératrice rectiligne rencontre en ν points. Analytiquement, l'équation du cône est la suivante :

$$F\left(\frac{x - iy}{x + iy}, \frac{2z}{x - iy}\right) = 0.$$

$F(u, v) = 0$ est une relation d'ordre ν en u, v , et de genre p .

Donnons quelques indications générales. Supposons que le cône n'ait comme génératrices multiples que des génératrices doubles non isotropes et ne coupe le cône isotrope qu'en des génératrices d'ordre de multiplicité de 2 ou 1. Ce cône a un nombre de génératrices doubles égal à

$$\frac{(\nu - 1)(\nu - 2)}{2} - p,$$

donc l'indicatrice possède deux fois plus de points doubles, c'est-à-dire

$$(\nu - 1)(\nu - 2) - 2p;$$

elle possède d'autre part deux points multiples d'ordre ν à l'infini, soit l'équivalent de $\nu(\nu - 1)$ points doubles. Enfin chaque génératrice commune à Γ et L fournit un point de contact de Γ avec la sphère, et l'intersection possède un point double en ce point. Si on appelle g_2 le nombre des génératrices d'ordre de multiplicité 2, nous aurons finalement pour le genre P de l'indicatrice :

$$(2\nu - 1)(\nu - 1) - (\nu - 1)(\nu - 2) + 2p - \gamma(\gamma - 1 - g_2),$$

$$P = 2p + \nu - 1 - g_2,$$

en particulier si toutes les génératrices communes sont d'ordre 2.

$$g_2 = \nu,$$

$$P = 2p - 1.$$

Comme autre application, supposons $p = 0$. Pour que $P = 0$, il faut et il suffit que $g_2 = \nu - 1$, donc que deux génératrices seulement soient d'ordre de multiplicité 1. C'est un résultat que nous avons déjà obtenu.

Exemple. — Considérons la courbe d'équation

$$x^4 y^4 - (x - y)^2 [a(x + y)^2 + bxy(x + y) + cxy + d(x + y) + e] + f(x - y)^4 = 0;$$

c'est l'intersection avec la sphère du cône du quatrième degré :

$$(\alpha + i\beta)^4 - 4(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)[4a\gamma^2 + b\gamma(\alpha + i\beta) - c(\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta) + 2d\gamma(\alpha - i\beta) + e(\alpha - i\beta)^2] + e(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2 = 0,$$

ce cône du quatrième degré a en commun avec le cône isotrope la génératrice

$$\alpha + i\beta = 0, \quad \gamma = 0,$$

qui compte pour 8. La singularité correspondante de l'indicatrice est un contact du troisième ordre de deux branches passant à l'origine, ce qui équivaut à quatre points doubles (comme s'il y avait quatre génératrices d'ordre 2).

Le cône l' est ici en général de genre 3, ce genre peut descendre à 2, 1 ou 0; examinons ces différents cas. La courbe possède en outre de sa singularité à l'origine deux points quadruples à l'infini, ce qui vaut douze points doubles ordinaires. En conséquence, on a le tableau suivant :

Genre du cône : 3, 2, 1, 0

Genre de la courbe : 5, 3, 1, décomposition.

[11] Nous sommes finalement amenés à distinguer deux classes de courbes gauches algébriques.

Première classe, les cosinus directeurs de la binormale sont des fonctions rationnelles sur la surface de Riemann correspondant à la courbe algébrique donnée; dans ce cas, le cône des binormales coupe la sphère de rayon 1 suivant deux courbes algébriques symétriques dont chacune a même genre que le cône et la courbe elle-même. Il est possible pour ces courbes de définir analytiquement deux sens sur la binormale.

Nous dirons que ce sont des courbes simples; si on parcourt leur indicatrice, elles sont obtenues une seule fois.

Deuxième classe, les cosinus directeurs de la binormale ne sont pas des fonctions rationnelles. L'indicatrice des binormales est une courbe algébrique indécomposable dont le genre est en général différent de celui de la courbe. Il peut arriver, si le genre de la courbe donnée est 0 ou 1, que le genre de l'indicatrice soit également 0 ou 1, mais l'indicatrice et la courbe ne sont pas en correspondance birationnelle. Les considérations qui terminent ce chapitre sont tout à fait analogues à celles que l'on trouve développées par G. Darboux (1) sur les surfaces minima.

(1) T. S., tome I, 2^e édition, pp. 414 à 421.

CHAPITRE III

[1] La détermination des courbes algébriques à torsion constante peut être ramenée à la question suivante, exprimer que les trois intégrales :

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = \int \frac{dx + dy}{(x - y)^2}, \\ \eta = \int \frac{y^2 dx + x^2 dy}{(x - y)^2}, \\ \zeta = \int \frac{y dx + x dy}{(x - y)^2}. \end{array} \right.$$

sont des fonctions algébriques de x, y . Ces deux variables sont liées par une relation algébrique, dont nous avons appris à prévoir le degré et le genre, étant donnés à l'avance le degré et le genre de la courbe à obtenir, ainsi que la nature de ses points à l'infini.

Une condition nécessaire, qui sera suffisante pour les courbes unicursales, est que ces trois intégrales soient dépourvues de singularités logarithmiques.

D'après la signification des variables x, y , une même substitution linéaire :

$$x = \frac{ax_1 + b}{cx_1 + d}, \quad y = \frac{ay_1 + b}{cy_1 + d}$$

équivaut à un déplacement de l'indicatrice. Elle transformera les trois intégrales ξ, η, ζ en combinaisons linéaires de ξ_1, η_1, ζ_1 . Or nous savons, c'est d'ailleurs évident, que ξ, η, ζ ne peuvent devenir infinies que si $x - y$ s'annule, x et y restant finis, ou si x ou y deviennent infinis. Si une seule de ces variables augmente indéfiniment, la substitution $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}$ nous ramène au cas où x, y ont des valeurs finies différentes. Si x et y deviennent infinis tous les deux, la même substitution nous ramène au cas où ils s'annulent tous deux.

En résumé, pour l'étude des infinis des fonctions ξ, η, ζ on peut supposer que $x - y$ s'annulent, x et y restant finis; on peut même supposer qu'ils s'annulent tous les deux, cela revient à faire une nouvelle substitution.

C'est le résultat déjà obtenu au chapitre (2) paragraphe 3, et nous avons vu quelle forme nous pouvons donner au développement de x, y . Nous allons maintenant examiner pour toutes les valeurs des entiers p, k , à quelles conditions les résidus des trois fonctions $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$ sont nuls tous les trois.

$$[2] \quad p=1, \quad k=0, \quad n=1.$$

On peut prendre pour x, y

$$\begin{cases} x = a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots, \\ y = (a_1 - 1)t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots \end{cases}$$

L'intégrale ζ fournit la condition $a_3 = 0$; l'intégrale ξ donne :

$$a_1(a_1 - 1) = 0.$$

Nous choisirons la solution $a_1 = 1$, ce qui donne :

$$\begin{cases} x = t + a_3 t^3 + \dots, \\ y = a_3 t^3 + \dots \end{cases}$$

La génératrice rectiligne $y=0$ de la sphère coupe l'indicatrice en trois points confondus, et cette condition est suffisante. Si nous avons pris $a_1 = 0$, nous aurions trouvé comme tangente stationnaire la génératrice $x=0$.

L'indicatrice aura donc une équation de la forme :

$$y - a_3(x - y)^3 - a_4(x - y)^4 \dots = 0.$$

La deuxième branche de l'indicatrice, quand elle existe, a une équation

$$x + a_3(x - y)^3 - a_4(x - y)^4 \dots = 0,$$

qu'on obtient en permutant x et y , et l'ensemble peut être représenté par :

$$xy - a_3(x - y)^4 \dots = 0,$$

les termes non écrits étant de degré supérieur en x, y . Réciproquement, une indicatrice dont l'équation est de cette forme a un point double à l'origine : les deux droites $x=0, y=0$ sont tangentes stationnaires, et les deux branches sont représentables par des développements analogues à ceux donnés plus haut.

On peut transformer cette dernière condition en utilisant le cône des binormales. Son équation prend la forme :

$$\frac{\alpha + i\beta}{\alpha - i\beta} - a_3 \frac{16 \cdot \rho^4}{(\alpha - i\beta)^4} \dots = 0$$

et le plan tangent à ce cône suivant la génératrice considérée le coupe suivant quatre génératrices confondues avec la droite isotrope :

$$\alpha + i\beta, \quad \gamma = 0.$$

Nous avons deux conditions géométriques équivalentes également simples :

L'indicatrice a deux branches distinctes dont chacune coupe le plan de l'infini en un point d'ordre 1 dans l'intersection. Une génératrice rectiligne de la sphère rencontre une branche, l'autre génératrice rectiligne rencontre l'autre branche en trois points confondus.

Le cône des binormales est tangent au cône isotrope, son plan tangent le coupe suivant quatre génératrices confondues.

[3] La courbe à torsion constante a pour équations :

$$\begin{aligned} X - iY &= 2i\tau \int \left(\frac{1 + 6a_3 t^2 + \dots}{t^2} \right) dt, \\ X + iY &= -2i\tau \int \left(\frac{3a_3 t^4 + 4a_4 t^5 + \dots}{t^2} \right) dt, \\ Z &= -2i\tau \int \frac{4a_3 t^3 + 6a_3^2 t^5 + \dots}{t^2} dt, \end{aligned}$$

ou encore :

$$\left\{ \begin{aligned} X - iY &= -2i\tau [1 - 6a_3 t^2 + \dots], \\ X + iY &= -2i\tau [a_3 t^4 + a_4 t^5 + \dots], \\ Z &= -2i\tau \left[2a_3 t^3 + \frac{3}{2} a_3^2 t^5 + \dots \right], \\ T &= t. \end{aligned} \right.$$

Le point à l'infini est :

$$X + iY = 0, \quad Z = 0, \quad T = 0.$$

La tangente est stationnaire, le plan osculateur isotrope est également stationnaire.

Tout ce que nous venons de dire ne suppose qu'une chose, que la courbe à torsion constante est analytique dans le domaine du point à l'infini considéré.

[4] Étudions maintenant le cas d'une courbe à torsion constante tangente au plan de l'infini, le contact étant d'ordre 1

$$p = 2, \quad k = 0.$$

L'indicatrice est indécomposable, et d'après le chapitre II, § 5, on peut donner à cette équation la forme :

$$\begin{cases} x = a_1 \theta^2 + \theta^3 + a_2 \theta^4 + a_3 \theta^5 + \dots, \\ y = a_1 \theta^2 - \theta^3 + a_2 \theta^4 + a_3 \theta^5 + \dots \end{cases}$$

La première intégrale donne immédiatement la condition $a_3 = 0$.

La deuxième intégrale donne la condition $a_4 = 0$, mais alors le résidu de la troisième intégrale ne saurait être nul, il est égal à -6 . On peut donc énoncer le résultat suivant qui va bien au delà, comme nous l'avons remarqué, des courbes algébriques :

Il ne saurait exister de courbes analytiques à torsion constante ayant un contact simple avec le plan de l'infini.

[5] Contact d'ordre 2 avec le plan de l'infini

$$p = 3, \quad k = 0, \quad n = 2.$$

Nous pouvons adopter les développements suivants :

$$(1) \quad \begin{cases} x = a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \dots, \\ y = a_1 t + (a_2 - 1)t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \dots \end{cases}$$

On voit aisément que les conditions sont :

$$a_2 = \frac{1}{2}, \quad 2a_4 a_3 = \frac{1}{4}, \quad a_4 = 0.$$

Nous allons voir que cet ensemble de conditions est susceptible d'une interprétation géométrique simple.

[6] Le principe de la méthode consiste à chercher une équation de l'indicatrice. Comme il est évident que le problème qui nous intéresse est indépendant des coefficients de rang supérieur ou égal à 5, il ne faut qu'une équation approchée, propre à représenter les termes utiles. Or on peut mettre sous diverses formes le résultat de l'élimination de t . Par exemple, la valeur de t en fonction de x étant calculée, ou aura :

$$a_1^2(x - y) = x^2 + \alpha_1 x^2 + \beta_1 x^4 + \gamma_1 x^5 + \delta_1 x^6 + \dots,$$

les termes à partir de $\delta_1 x^6$ sont sans intérêt pour nous. Appelons pour un instant Y la différence $x - y$, on aura :

$$a_1^2 Y = x^2 + \alpha_1 x^3 + \beta_1 x^4 + \gamma_1 x^5 + \dots$$

On peut dans cette équation remplacer dans un terme quelconque x^2 par sa valeur en fonction de Y et de x , le terme en x^4 fournirait un terme en Y^2 et xY^2 par la suite d'opérations

$$\begin{aligned} x^4 &= x^2(a_1^2 Y - \alpha_1 x^3 \dots) = a_1^2 Y(a_1^2 Y - \alpha_1 x^3 \dots) - \alpha_1 x^5, \\ x^4 &= a_1^4 Y^2 - \alpha_1 a_1^4 x Y^2 - \alpha_1 x^5. \end{aligned}$$

On voit aisément qu'on peut par cette méthode obtenir une équation équivalente à la proposée, et où les termes sont de degré minimum, c'est la suivante :

$$a_1^2 Y = x^2 + \beta x Y + \gamma Y^2 + \delta x Y^2 + \dots$$

Les termes non écrits étant du sixième ordre, nous les supprimerons et nous considérerons l'équation (2)

$$(2) \quad a_1^2 Y = x^2 + \beta x Y + \gamma Y^2 + \delta x Y^2.$$

Le point $x = 0$, $Y = 0$ de cette courbe algébrique est l'origine d'un cycle qu'on peut faire coïncider jusqu'aux termes du quatrième degré inclus, avec le cycle Γ .

Nous dirons que l'équation (2) est une équation rapprochée réduite du cycle Γ .

Il faut et il suffit que l'on ait

$$\beta = -2a_2, \quad \gamma = a_2^2 - 2a_1 a_3, \quad \delta = -2a_4.$$

Remarquons qu'étant donnée une courbe tangente à la droite $Y = 0$, si l'on veut déterminer jusqu'aux termes du quatrième degré le cycle d'origine $(0, 0)$, il faut considérer l'ensemble des termes :

$$(3) \quad a_1^2 Y = x^2 + \beta_1 x Y + \gamma_1 Y^2 + Ax^3 + BxY + CxY^2 + Dx^4 + ExY + Fx^5,$$

où figurent tous les termes d'ordre inférieur à 6.

Au point de vue où nous nous plaçons, il existe pour cette courbe une réduite et une seule dépendant de quatre paramètres :

$$a_1^2, \beta, \gamma, \delta.$$

Ces quatre paramètres sont des fonctions des coefficients $\beta_1, \gamma_1, \dots, D, E, F$. Leur signification est la suivante : Si l'on veut exprimer que deux courbes ont un contact du cinquième ordre, il suffit d'exprimer que les réduites sont les mêmes, c'est-à-dire que les quatre fonctions ont la même valeur pour les deux courbes.

Toute propriété ne faisant intervenir dans les développements (1) que les termes jusqu'au quatrième ordre s'exprimera pour la courbe par une relation entre les coefficients de la réduite.

[7] Appliquons ces généralités au problème que nous avons en vue.

Nous trouvons immédiatement :

$$\beta = -1, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que les trois résidus soient nuls est la suivante :

L'indicatrice doit avoir six points communs (confondus à l'origine) avec la courbe :

$$(4) \quad a_1^2 Y = x^2 - xY, \quad a_1^2(x - y) = xy.$$

Cette forme élégante est devenue indépendante de toute représentation paramétrique. La courbe représentée par cette équation réduite est une courbe plane tangente au plan de l'infini. C'est une parabole sphérique section de la sphère par un plan isotrope.

La courbe dont elle est l'indicatrice n'est autre que la cubique gauche à torsion constante découverte par M. Lyon. La chose est évidente, puisque cette courbe n'a comme l'indicatrice qu'un point à l'infini et qu'il compte pour trois.

Par la transformation $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}$ qui est réelle (c'est une symétrie par rapport à ox), on ramène l'équation de l'indicatrice à la forme :

$$\begin{aligned} x - y &= 2h, \\ x &= h + t, & y &= -h + t, \\ \xi &= \int \frac{2dt}{4h^2} = \frac{t}{2h^2}, \\ \tau &= \int \frac{2(t^2 + h^2)}{4h^2} dt = \left[\frac{t^3}{3} + h^2 t \right] \frac{1}{2h^2}, \\ \zeta &= \int \frac{2tdt}{4h^2} = \frac{t^2}{4h^2}. \end{aligned}$$

Et enfin, en posant $\frac{t}{h} = T$:

$$\begin{cases} X - iY = \frac{i\tau}{h} T, \\ X + iY = -i\tau h \left(\frac{T^3}{3} + T \right), \\ Z = -i\tau \frac{T^2}{2}. \end{cases}$$

A une homothétie près, ces cubiques gauches dépendent du seul paramètre h réel ou imaginaire.

On pourrait même croire qu'en faisant la transformation hx, hy , on peut faire disparaître h . Or cette transformation est bien un déplacement, mais il est en géné-

ral imaginaire. C'est une rotation autour de l'axe oz , mais l'angle de rotation n'est réel que si le module de h est égal à 1. On voit que cette transformation permet toutefois de faire disparaître de h la partie imaginaire.

En résumé, la cubique gauche de M. Lyon dépend, à une homothétie près, d'un seul paramètre réel h .

[8] La courbe A_7 est donnée, en général, par les équations suivantes :

$$\begin{cases} X - iY = -2i\tau \left[\frac{2a_1}{3t^3} + \frac{6a_3}{t} - 10a_5 t \dots \right], \\ X + iY = 2i\tau \left[\frac{2a_1^3}{t} + \frac{a_4}{4} t + \lambda t^3 \dots \right], \\ Z = 2i\tau \left[\frac{a_1^2}{t^2} + \omega t^3 \dots \right]. \end{cases}$$

Le point à l'infini est

$$X + iY = 0, \quad Z = 0.$$

Le plan osculateur est le plan de l'infini.

[9] Nous avons la propriété caractéristique de l'indicatrice. Si cette courbe est indécomposée, elle comprend deux branches analytiquement distinctes passant au point donné. Une de ces branches a six points communs avec la parabole sphérique :

$$xy - a_1^2(x - y) = 0.$$

L'autre branche a six points communs avec :

$$xy + a_1^2(x - y) = 0.$$

Si nous considérons le cône passant par ces deux courbes, d'équation

$$\begin{aligned} x^2 y^2 - a_1^4 (x - y)^2 &= 0, \\ (5) \quad (\alpha + i\beta)^2 - 4a_1^2 [\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2] &= 0. \end{aligned}$$

on se rend compte immédiatement par substitution de α, β, γ que le cône des binormales de la courbe doit avoir avec ce cône (5) huit génératrices communes confondues avec la génératrice

$$\alpha + i\beta = 0, \quad \gamma = 0.$$

Cette condition est suffisante.

Le cône (5) est surosculateur au cône isotrope le long de cette génératrice.

[10] Nous allons étudier en détail le cas un peu plus compliqué :

$$p=5, \quad k=0, \quad n=3;$$

on aura les développements :

$$(1) \quad \begin{cases} x = a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots + a_6 t^6 + \dots, \\ y = a_1 t \dots + (a_3 - 1)t^3 \dots + a_6 t^6 + \dots \end{cases}$$

Les conditions que les résidus soient nuls s'expriment par :

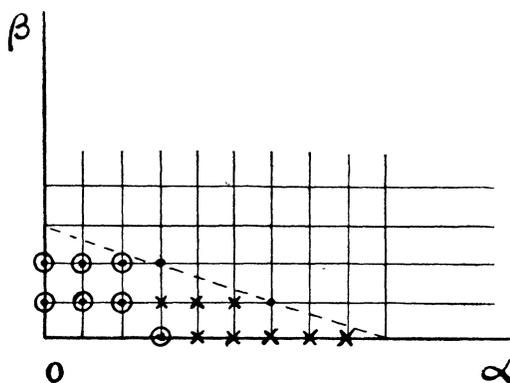
$$(a) \quad \begin{cases} a_6 = 0, \\ 2(a_1 a_5 + a_2 a_4) + a_3(a_3 - 1) = 0, \\ 3a_1^2 a_4 + a_2^3 + 6a_1 a_2 a_3 - 3a_1 a_2 = 0. \end{cases}$$

On voit que les termes au-delà du sixième ne jouent aucun rôle.

Les six coefficients utiles sont liés par trois relations,

Nous allons appliquer à l'interprétation géométrique de ces relations les principes qui nous ont servi.

[11] Il s'agit en somme de trouver une équation algébrique susceptible de représenter les termes utiles des développements. La représentation de Newton va nous permettre d'opérer de façon intuitive. Nous adopterons pour un instant la notation $x - y = Y$.



L'expression de Y en fonction de x peut prendre la forme

$$a_3 Y = x^3 + \beta_1 x^4 + \gamma_1 x^5 \dots + kx^n,$$

où les termes à partir de kx^n sont sans intérêt. Nous ne ferons figurer que les termes d'ordre inférieur à 9.

L'équation doit contenir un terme en Y ; un terme en x^3 ; la droite $\alpha + 3\beta = 9$ limite les termes utiles.

Les termes du troisième ordre sont :

$$\begin{array}{ll} x^3 & 6^\circ \text{ ordre : } Y^2, x^3Y, x^6, \\ 4^\circ \text{ ordre : } xY, x^4, & 7^\circ \text{ ordre : } xY^2, x^4Y, x^7, \\ 5^\circ \text{ ordre : } x^2Y, x^5, & 8^\circ \text{ ordre : } x^2Y^2, x^5Y, x^8. \end{array}$$

Ce sont tous les termes qu'il faudrait conserver dans l'équation d'une indicatrice donnée si l'on voulait obtenir les développements avec leurs termes utiles.

Mais nous voulons une équation contenant le moindre nombre de termes, et au degré le moins élevé.

Il est clair qu'il va nous suffire de considérer l'équation :

$$(2) \quad aY = x^3 + bxY + cx^2Y + dY^2 + exY^2 + fx^2Y^2.$$

On voit aisément que pour que les courbes (2) et (1) aient neuf points communs confondus, il faut et il suffit que les six coefficients a, b, c, d, e, f aient les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} a &= a_1^3, \\ b &= -3a_1a_2, \\ c &= -3a_3, \\ d &= 3a_1a_2a_3 - 3a_1^2a_4 - a_2^3, \\ e &= 3a_3^2 - 3(a_1a_6 + a_2a_4), \\ f &= -3a_6. \end{aligned}$$

Ainsi la réduite est bien déterminée.

Nous avons marqué d'un rond les termes de la réduite.

Dans les termes utiles de l'équation d'une indicatrice doivent figurer en outre les termes marqués d'une croix. Il faudra donc écrire une équation de la forme :

$$x^3[\mathbf{1} + \alpha x + \dots + \varepsilon x^5] + Y[\mathbf{D} + E x \dots + K x^5] + Y^2[\mathbf{A} + B x + C x^2] = 0.$$

Pour toute équation de cette forme, il existe une réduite et une seule, et l'on calcule aisément abc, def , en fonction de tous les coefficients. Ces six quantités a, b, c, d, e, f doivent permettre d'exprimer une propriété quelconque ne dépendant que des termes jusqu'au sixième degré.

Deux courbes de la forme (3) auront un contact du huitième ordre quand les six quantités a, b, c, d, e, f ont la même valeur pour ces deux courbes.

Nos trois conditions doivent s'exprimer par des relations entre ces quantités.

[12] Si l'on tient compte en effet des conditions (a), on obtient :

$$\begin{cases} f = 0, \\ e = \frac{c(c+1)}{2}, \\ d = b(c+1). \end{cases}$$

Telle est la forme remarquablement simple que prennent les conditions trouvées. L'équation réduite est donc :

$$(4) \quad x^3 = Y[a_1^2 - bx - cx^2] - Y^2 \left[b(c+1) + \frac{c(c+1)}{2} x \right].$$

Et nous pouvons résumer toute cette recherche par le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une indicatrice représentable par les équations (1) fournisse une courbe à torsion constante analytique dans le domaine du point $t = 0$, et que cette indicatrice ait avec la courbe (4) un contact d'ordre 8, c'est-à-dire neuf points communs confondus au point $x = 0, y = 0$.

[13] Le résultat obtenu a la même forme et la même simplicité que celui du paragraphe 7; on peut relever une différence. Les variables x, y que nous employons ne sont pas parfaitement déterminées; on pourrait en effet, sans changer l'indicatrice ni le point $x = 0, y = 0$, leur substituer

$$x_1 = \frac{\omega x}{1 - \lambda x}, \quad y_1 = \frac{\omega y}{1 - \lambda y}.$$

Cette substitution, effectuée dans l'équation réduite du paragraphe 7, redonne :

$$\omega a_1^2 (x_1 - y_1) = x_1 y_1.$$

c'est-à-dire l'équation réduite relative aux nouvelles variables.

Il n'en est pas de même dans le cas présent. La substitution linéaire, faite dans l'équation réduite (4), ne donne plus une équation ayant la forme réduite; elle contient en général tous les termes marqués d'une croix dans la figure 1. Il existe pour cette nouvelle équation une forme réduite. Nous allons voir qu'elle est liée très simplement à (4).

Pour cela nous prendrons la substitution sous la forme :

$$x_1 = \frac{\omega^3 x}{1 - \lambda x}, \quad y_1 = \frac{\omega^3 y}{1 - \lambda y}.$$

Ces équations fournissent x_1, y_1 en fonction de t . Si l'on pose alors

$$x_1 - y_1 = \theta^3.$$

On exprimera t en fonction de θ , et l'on a pour les deux premiers termes du développement :

$$t = \frac{\theta}{\omega} \left[1 - \frac{\lambda^2 a_1^2}{\omega^2} \theta^2 \right],$$

ce qui fournit enfin pour x_1, y_1 :

$$\begin{cases} x_1 = a_1 \omega^2 \theta + a_2 \omega \theta^2 + a_3 \theta^3 \dots, \\ y_1 = a_1 \omega^2 \theta + a_2 \omega \theta^2 + (a_3 - 1) \theta^3 \dots \end{cases}$$

On voit que les trois paramètres de l'équation réduite

$$a = a_1^3, \quad b = -a_1 a_2, \quad c = -3a_3$$

sont devenus :

$$\alpha_1^3 = a_1^3 \omega^6, \quad \beta = b \omega^3, \quad \gamma = c.$$

Ainsi a est multiplié par le carré du déterminant de la substitution, b est multiplié par ce déterminant, c reste invariable. Les trois fonctions a, b, c sont donc des invariants relativement à cette transformation, $\frac{b^3}{c}$ et c étant des invariants absolus.

La signification de a, b, c étant ainsi précisée, on peut dire que nous avons mis sous une forme entièrement géométrique les conditions du problème.

[14] Nous pouvons examiner quelques cas particuliers : $c = -1$ fournit la réduite :

$$x^3 = (x - y)(a - bx + x^2),$$

c'est une cubique gauche sphérique, évidemment unicursale. Elle est l'indicatrice d'une courbe à torsion constante du cinquième degré n'ayant qu'un point à l'infini et dépendant de deux constantes arbitraires.

$b = 0, c = 0$ fournit la réduite :

$$x^3 = a(x - y),$$

qui est une quartique sphérique unicursale. Elle a deux points à l'infini $x = y = 0$ qui compte pour trois, et le point $x = y = \infty$, qui compte pour un. Il lui correspond une courbe à torsion constante du sixième degré qui a deux points à l'infini, comptant respectivement pour 5 et 1.

[15] Il nous reste, pour terminer cette question, à voir comment s'énoncent les propriétés relatives aux cônes des binormales. Pour cela, il faut considérer l'indicatrice complète, c'est-à-dire l'ensemble constitué par la branche (1) et sa symétrique par rapport à la droite $x - y = 0$.

La première branche a un contact du huitième ordre avec la réduite :

$$(4) \quad x^3 + Y[a - bx - cx^2] + Y^2 \left[b(c+1) + \frac{c(c+1)}{2} x \right] = 0.$$

La deuxième branche a un contact du huitième ordre avec la réduite :

$$(4') \quad y^3 + Y[a - bx - cx^2] + Y^2 \left[b(c+1) + \frac{c(c+1)}{2} y \right] = 0.$$

Le cône contenant ces deux courbes a comme équation :

$$\begin{aligned} x^3 y^3 + Y^2 \left[-a^2 + ab(x+y) \dots + \frac{c(c+1)}{2} xy(x^2 + y^2) \right] \\ + Y^4 \left[b^2(c+1)(c+2) + \dots + \frac{c^2(c+1)(c+3)}{2} xy \right] = 0. \end{aligned}$$

Il faut maintenant faire les substitutions :

$$xy = -\frac{\alpha - i\beta}{\alpha + i\beta}, \quad x + y = \frac{2\gamma}{\alpha - i\beta}, \quad Y^2 = \frac{4(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}{(\alpha - i\beta)^2}.$$

Si l'on remplace dans l'équation obtenue les coordonnées α, β, γ par leurs valeurs en fonction de t , on voit facilement que le résultat est du douzième ordre en t , puisque l'un des facteurs est du neuvième ordre, l'autre du troisième. Il suffit donc de conserver dans l'équation du cône les termes d'ordre inférieur à douze. En particulier, les termes en Y^4 sont sans intérêt. Posons maintenant :

$$x + y = X, \quad xy = \frac{X^2 - Y^2}{4},$$

nous obtiendrons :

$$(5) \quad \frac{X^6}{4^3} + Y^2 \left[-a^2 + abX + \frac{a(2c+3) - b^2}{4} X^2 - \frac{3}{4^3} X^4 \right] = 0.$$

Telle est l'équation réduite du cône des binormales où l'on n'a gardé que les termes d'ordre inférieur à douze. Pour avoir l'équation sous la forme habituelle, il

faudrait remplacer X par $\frac{2\gamma}{\alpha - i\beta}$ et Y^2 par $\frac{4(x^2 + \beta^2 + \gamma^2)}{(x - i\beta)^2}$. On obtient ainsi l'équation d'un cône qui a en commun avec le cône isotrope une génératrice comptant pour six :

$$\alpha + i\beta = 0, \quad \gamma = 0.$$

Le cône des binormales a en commun avec ce cône cette même génératrice comptant pour douze.

Inversement, si l'équation (5) est du douzième ordre par rapport à X , on en tirera :

$$Y = \pm X^3 \frac{1 + \theta X^6}{(a^2 - abX \dots)^{\frac{1}{2}}}.$$

Les coefficients de Y jusqu'au huitième ordre inclus ne dépendront que des constantes qui figurent dans (5), et il est facile de montrer (nous le ferons en détail plus tard) que pour l'indicatrice (5) les trois intégrales n'ont pas de singularités logarithmiques.

Ainsi, la condition nécessaire et suffisante est que le cône des binormales ait douze génératrices communes confondues avec le cône (5).

[16] Donnons une application de ces considérations à la recherche des courbes algébriques à torsion constante du cinquième degré n'ayant à l'infini qu'un point comptant pour 5. Le cône des binormales a en commun avec le cône isotrope une seule génératrice comptant pour 6 ; il est donc du troisième degré, et l'on trouve aisément les équations de l'indicatrice et du cône :

$$\begin{aligned} x^3 y^3 + (x - y^2[A(x + y) + Bxy + C]) &= 0, \\ (x + i\beta)^3 - 4(x^2 + \beta^2 + \gamma^2)[2A\gamma - B(x + i\beta) + C(x - i\beta)] &= 0. \end{aligned}$$

Ce cône est de genre 1 ou 0, ainsi que la courbe. L'indicatrice est du sixième degré, elle possède à l'origine deux branches ayant un contact du deuxième ordre, ce qui diminue le genre de 3, plus deux points triples à l'infini, ce qui diminue le genre de 6 ; le genre est donc bien 1, conformément à la formule générale $P = 2p - 1$, qui s'applique à ce cas. Si le cône est de genre 0, l'indicatrice se décompose en deux cubiques, c'est ce que nous avons étudié au début du paragraphe 14.

Nous verrons plus tard que, dans le cas où le cône est de genre 1, les intégrales ne sauraient être algébriques, et qu'il n'y a par conséquent pas de courbe de genre différent de 0 appartenant à cette classe.

Pour cette courbe, les conditions du paragraphe 15 sont remplies d'elles-mêmes. Cela est évident, puisqu'il n'y a qu'un seul pôle pour les intégrales considérées, le résidu est forcément nul.

On trouve, en transformant l'équation (6) avec les variables X, Y, la forme :

$$\frac{X^6}{4^3} + Y^2 \left(c + AX + \frac{BX^2}{4} - \frac{3X^4}{4^3} \right) = 0$$

en laissant de côté les termes d'ordre supérieur à 12.

[17] Jusqu'ici nous n'avons étudié que des cas où le point à l'infini était d'ordre 1 sur la courbe à torsion constante, c'est-à-dire $k=0$. Nous allons commencer par le cas le plus simple, où k est différent de zéro

$$p=2, \quad k=1, \quad n=2.$$

L'indicatrice a l'une de ses branches représentée par :

$$\begin{aligned} x &= a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \dots, \\ y &= (a_2 - 1) t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \dots \end{aligned}$$

La première intégrale donne : $a_4 = 0$.

La troisième intégrale : $a_2(a_2 - 1) = 0$.

Nous prendrons $a_2 = 1$.

Quant à la deuxième intégrale, elle ne fournit pas de condition. En résumé

$$(1) \quad \begin{cases} y = a_3 t^3 + a_5 t^5 + \dots, \\ x - y = Y = t^2. \end{cases}$$

Nous allons appliquer à l'interprétation de ces conditions les méthodes qui nous ont réussi jusqu'ici.

[18] Portons en abscisses⁽¹⁾ les exposants de y , en ordonnées les exposants de Y . Les termes y^2 et Y^3 doivent figurer. Quels sont les termes à exclure? Nous allons chercher pour combien doit être compté le point commun à deux courbes représentées par des équations de la forme (1), les termes étant les mêmes jusqu'au quatrième ordre inclus. Il est clair que le résultat de l'élimination de t est pour la première courbe :

$$(y - a_3 t^3 - a_4 t^4 - a_5 t^5 \dots)(y - a_3 t^3 - a_4 t^4 - a_5 t^5 \dots) = 0,$$

(1) Le lecteur est prié de faire la figure.

où t et t' sont les deux racines de :

$$t^2 = Y.$$

Dans cette équation qui prend la forme

$$F(y, Y) = 0,$$

il faut substituer ensuite les coordonnées d'un point de la deuxième courbe, le paramètre étant appelé t_1 , et chercher l'ordre en t_1 de $F(y, Y)$. Il est évident que t_1 est égal soit à t , soit à t' . Dès lors, l'ordre d'un des facteurs est 5, l'autre est 3, donc le produit est d'ordre 8; ce sont les termes de cet ordre qu'il nous faut exclure. La limite est fournie par la droite :

$$3\alpha + 2\beta = 8.$$

les termes qui peuvent intervenir sont donc y^2, yY^2, y^3 , et la forme réduite est ici :

$$a_3^2 Y^3 - y^2 + byY^2 = 0.$$

On trouve aisément la valeur de $b = 2a_4$; ainsi l'équation réduite devient :

$$(2) \quad a_3^2 Y^3 (x - y)^2 - y^2 = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que l'indicatrice (1) fournisse une courbe à torsion constante analytique dans le domaine du point $t=0$ est qu'elle ait, en commun avec la courbe (2), huit points confondus au point $x : y = 0$.

[19] Cette courbe (2) est une courbe sphérique unicursale du sixième degré. Si on la prend comme indicatrice, il lui correspond la courbe :

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = -\frac{1}{t^2} - \frac{6a_3}{t}, \\ \eta = a_3 t^3 + 2a_3^2 t^4 + \frac{6}{5} a_3^2 t^5, \\ \zeta = 5a_3 t + 3a_3^2 t^2. \end{array} \right.$$

elle est du septième degré, avec deux points à l'infini, le premier est un point singulier d'ordre 2, le deuxième est un point singulier d'ordre 3; ils comptent respectivement pour deux et pour quatre; leurs caractéristiques sont les suivantes :

$$p_1 = 2, \quad k_1 + 1, \quad p_2 = 5, \quad k_2 = 2.$$

[20] Il nous reste à étudier le cas où l'indicatrice étant de deuxième classe, il faut considérer les deux branches. Il existe alors deux réduites :

$$\begin{aligned} a_3^2(x-y)^3 - y^2 &= 0, \\ a_3^2(x-y)^3 + x^2 &= 0 \end{aligned}$$

qui se trouvent sur le cône

$$a_3^4(x-y)^6 - x^2y^2 + a_2^2(x-y)^4(x+y) = 0$$

par un raisonnement analogue à celui du paragraphe 15 on constatera que ce cône possède, en commun avec le cône des binormales, une génératrice comptant pour 12, et qu'il suffit de conserver les termes :

$$x^2y^2 - a_2^3(x-y)^4(x+y),$$

ce qui donne le cône :

$$(x + iy)^2(x - iy)^3 - 3a_2^3(x^2 + y^2 + \gamma^2)\gamma = 0.$$

Nous n'insistons pas sur ce genre de considérations, que nous retrouverons d'une façon tout à fait générale au chapitre suivant.

[21] Nous allons aborder maintenant l'étude du cas le plus simple où l'indicatrice est de deuxième classe dans le domaine du point considéré

$$p=4, \quad k=0.$$

Les développements sont alors

$$(1) \quad \begin{cases} x = \theta^2 + a_1\theta^3 + \dots + a_n\theta^{10} + \dots, \\ y = -\theta^3 + a_1\theta^2 + \dots + a_n\theta^{10} + \dots \end{cases}$$

Nous utiliserons les nouvelles variables

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{x+y}{2} = a_1t + a_2t^2 + \dots + a_n t^9 + \dots, \\ y_1 = \frac{x-y}{2} = \theta^2, & y_1^2 = t^2. \end{cases}$$

ce qui nous fournit les équations de l'indicatrice ou du cône des binormales. On trouve aisément les trois conditions du problème :

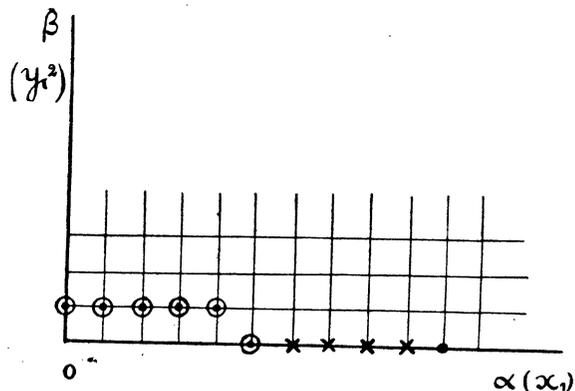
$$(3) \quad \begin{cases} a_5 = 0, \\ 2(a_1 a_4 + a_2 a_3) = 1, \\ a_4 a_3 + a_2^2 = 0. \end{cases}$$

On voit que les seuls termes utiles sont les cinq premiers. Ils sont liés par trois relations.

[22] Nous allons, pour cette forme nouvelle, donner une interprétation géométrique de ces conditions, en nous inspirant des mêmes idées. Il est immédiat ici que la relation doit être mise sous la forme

$$(4) \quad F(x_1, y_1^2) = 0,$$

β sera l'exposant des termes en y_1^2 . Pour déduire d'une équation (4) des développements (2) jusqu'aux termes du cinquième ordre, il faut retenir dans F les termes d'ordre inférieur à 10, et inversement on peut trouver une équation (4) telle que le résultat de substitution des expressions (2) soit divisible par t^6 .



La forme réduite sera choisie de façon que les termes qui y figurent soient du degré le moins élevé possible. On prendra :

$$(5) \quad x_1^5 - y_1^2 [x_0 + x_1 x_1 + x_2 x_1^2 + \dots + x_4 x_1^4] = 0.$$

Les coefficients α sont déterminés de façon unique par :

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= a_1^5, \\ \alpha_1 &= 5a_1^3 a_2, \\ \alpha_2 &= 5a_1 (a_1 a_3 + a_2^2), \\ \alpha_3 &= 5(a_1 a_4 + a_2 a_3), \\ \alpha_4 &= 5a_5. \end{aligned}$$

et nous savons, comme l'indique le raisonnement général déjà présenté, que toute propriété n'intéressant que les coefficients a_1, a_2, \dots, a_5 se traduira par des relations entre les x . On trouve ici, en utilisant (3)

$$\alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = \frac{5}{2}, \quad \alpha_4 = 0;$$

la réduite prend la forme :

$$(6) \quad x_1^5 - y_1^2 \left(x_0 + x_1 x_1 + \frac{5}{2} x_1^3 \right) = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que l'indicatrice (2) fournisse une courbe à torsion constante analytique dans le domaine du point $t=0$, est qu'elle ait en commun, avec la courbe (6), dix points confondus en $x=0, y=0$.

[23] Si l'on se reporte au paragraphe 15, on verra qu'en posant $X = 2x_1, Y = 2y_1$. L'équation (5) de ce paragraphe devient

$$x_1^5 - y_1^2 \left(\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_1^2 - \frac{6}{2} x_1^4 \right) = 0.$$

Elle présente les plus grandes analogies avec l'équation (6) que nous venons d'obtenir.

$$[24] \quad \begin{aligned} p &= 3, & k &= 1, \\ \left\{ \begin{aligned} x &= a_2 \theta^4 + \theta^5 + \dots, \\ y &= a_2 \theta^4 - \theta^5 + \dots \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Les conditions du problème sont les conditions (3) paragraphe 21, où il suffit de faire $a_1 = 0$. Il faut donc $a_2 = 0$, et l'on voit que la deuxième équation n'est pas satisfaite.

Ainsi il n'y a pas de courbe analytique à torsion constante pouvant présenter cette disposition.

$$(1) \quad [25] \quad \begin{aligned} p &= 4, & k &= 2, \\ \left\{ \begin{aligned} x &= a_3 \theta^6 + \theta^7 + a_4 \theta^8 + \dots, \\ y &= a_3 \theta^6 - \theta^7 + a_4 \theta^8 + \dots \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Les trois conditions sont ici réduites à deux

$$\left\{ \begin{aligned} a_7 &= 0, \\ 2a_3 a_4 - 1 &= 0. \end{aligned} \right.$$

Le problème est possible. Posons :

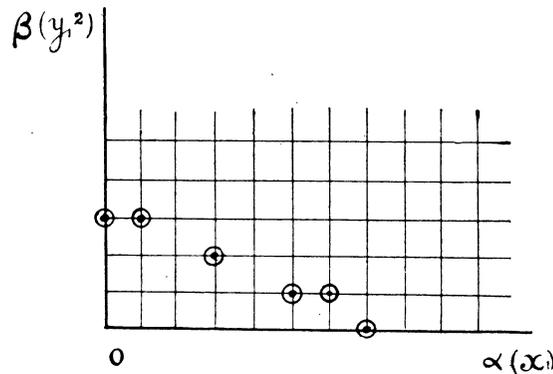
$$(2) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{x+y}{2} = a_3 t^3 + \dots + a_7 t^7 + \dots, \\ y_1^2 = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = t^7. \end{cases}$$

Pour appliquer la méthode habituelle, demandons-nous d'abord l'ordre de multiplicité de l'origine dans l'intersection de deux courbes (2) ayant en commun tous les termes jusqu'à $a_7 t^7$. On éliminera t pour l'une d'elles en formant le produit de sept facteurs

$$H(x, -a_3 t^3 - a_7 t^7) = F(x, y_1^2),$$

où t prend pour valeurs les sept racines de $t^7 = y_1^2$.

L'ordre de F , si l'on substitue maintenant les coordonnées de l'autre courbe, s'obtient immédiatement en remarquant que l'un des facteurs est du huitième ordre, les six autres étant du troisième. Ainsi le point commun compte pour 26. C'est en partant de là que nous devons choisir les termes qui resteront dans l'équation réduite.



L'ordre 21 comprend les termes (7,0) (0,3)

— 22 — (5,0)

— 23 — (3,2)

— 24 — (8,0) (1,3)

— 25 — (6,1)

Il nous suffira de garder les termes

(7,0) (0,3) (5,1) (3,2) (1,3) (6,1).

L'équation réduite aura la forme :

$$(3) \quad x_1^7 + y_1^2(\alpha_1 x_1^5 + \alpha_1 x_1^6) + y_1^4 \beta_0 x^3 + y_1^6(\gamma_0 + \gamma_1 x) = 0,$$

qui contient bien cinq coefficients comme les équations (2).

On trouve immédiatement

$$\alpha_0 = -7\alpha_3\alpha_4 = -\frac{7}{2}.$$

Un calcul un peu long, mais sans difficulté, donne ensuite les valeurs de β_0, γ_0 , puis enfin

$$\alpha_1 = 0.$$

Telle est la forme réduite remarquablement simple de l'équation de l'indicatrice, et l'on peut dire que :

La condition nécessaire et suffisante pour que l'indicatrice (2) du présent paragraphe fournisse une courbe à torsion constante analytique dans le domaine du point $t=0$ qu'elle ait en commun avec la courbe :

$$(4) \quad x_1^7 - \frac{7}{2} x_1^5 y_1^2 + \beta_0 x^3 y_1^4 + (\gamma_0 + \gamma_1 x) y_1^6 = 0,$$

26 points confondus au point $x=0, y=0$.

CHAPITRE IV

Généralisation des résultats obtenus. — Le cône des binormales doit avoir en commun, avec un cône indéterminé, une génératrice isotrope comptant pour un nombre entier, fonction connue de n, k .

[1] Nous avons dans le chapitre précédent étudié les cas les plus simples dans les différentes hypothèses où $p + 1 + k$ est pair ou impair, k étant nul ou différent de zéro.

Dans chaque cas, nous avons obtenu, par une méthode naturelle, les conditions du problème, et nous avons pu, suivant des principes uniformes, donner à ces conditions une forme géométrique assez simple.

Nous allons consacrer le présent chapitre à la généralisation complète de ces résultats.

[2] Examinons d'abord le cas général où k étant nul, $p + 1$ est pair; on aura avec les notations habituelles :

$$(1) \quad \begin{cases} x = \Sigma a_i t^i, \\ x - y = Y = t^n. \end{cases}$$

Nous proposons de démontrer directement le théorème suivant qui généralise le résultat du paragraphe 12, chapitre III :

La condition nécessaire et suffisante pour que l'indicatrice (1) fournisse une courbe à torsion constante analytique dans le domaine du point $t = 0$, est que cette indicatrice ait en commun avec la courbe (2)

$$(2) \quad x^n = Y[a_1^n + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 \dots + \alpha_{n-3} x^{n-3} - bx^{n-2} - cx^{n-1}] \\ - Y^2 \left[\beta_0 + \beta_1 x \dots + b(c+1)x^{n-3} + \frac{c(c+1)}{2} x^{n-2} \right],$$

$3n$ points confondus en $x = 0, y = 0$.

Nous allons montrer d'abord qu'au sens où nous avons employé ce mot, une indicatrice (1) possède toujours une réduite

$$(2') \quad x^n = YP_{n-1}(x) - Y^2 Q_{n-1}(x),$$

autrement dit, si l'on se borne aux termes de degré au plus égal à $2n$, les deux représentations (1) et (2') de l'indicatrice sont équivalentes.

Nous montrerons ensuite que pour la courbe (2) les intégrales de notre problème n'ont pas de singularités logarithmiques pour la valeur $x = 0$.

Pour obtenir l'équation de l'indicatrice par élimination de t , il suffit en effet de former le produit de n facteurs :

$$\Pi(x - \Sigma a_i t^i),$$

t_i étant l'une des racines de :

$$t^n = Y.$$

Cette équation développée prend la forme :

$$x^n - YP_{n-1}(x) + Y^2Q_{n-1}(x) + Y^3R_{n-1}(x) = 0.$$

Série entière en Y dont les coefficients sont des polynômes de degré $n - 1$ en x , le terme indépendant de Y étant x^n .

Inversement, si remplaçant dans une telle équation Y par t^n , on cherche à déterminer un développement de x qui satisfasse identiquement à cette équation, les $2n$ premiers coefficients ne dépendront que des coefficients de P_{n-1} , Q_{n-1} . Cela est clair de diverses façons : la plus simple consiste à remarquer que le développement de Y en fonction de x , jusqu'au terme en x^{2n} exclu, ne dépend que de P_{n-1} , Q_{n-1} .

Ainsi, on peut se borner à dire que pour toute indicatrice (1) il existe une courbe :

$$(3) \quad x^n - YP_{n-1}(x) + Y^2Q_{n-1}(x) = 0,$$

telle que (1) et (3) aient en commun $3n$ points confondus, puisque $3n$ est le degré du premier terme qu'on a négligé.

Inversement, à toute courbe (3) correspond un cycle (1) dont le point $x = 0$, $y = 0$ est l'origine, et les coefficients des $2n$ premiers termes du développement de x s'obtiennent en exprimant que l'expression (3) est d'ordre $3n$ en t , ce qui donne $2n$ équations. Nous allons donner une méthode rapide qui permettrait d'effectuer ce calcul ; mais ce point est établi dès maintenant : les formes (1) et (3) sont équivalentes.

Limitons-nous donc à une équation (3) et voyons ce que deviennent les trois intégrales à calculer. Nous rappellerons d'abord un résultat bien connu de cette théorie, savoir qu'il faut et il suffit que soient analytiques les trois intégrales suivantes⁽¹⁾ :

$$\int \frac{dx}{(x-y)^2}, \quad \int \frac{y dx}{(x-y)^2}, \quad \int \frac{y^2 dx}{(x-y)^2};$$

(1) Darboux, T. S., tome IV, p. 431.

elles deviennent :

$$\int \frac{dx}{Y^2}, \quad \int \frac{(x-y)dx}{Y^2}, \quad \int \frac{(x-y)^2 dx}{Y^2}.$$

Or on a pour la courbe (3) :

$$\frac{1}{Y^2} = \frac{(P_{n-1} - YQ_{n-1})^2}{Y^2(P_{n-1} - YQ_{n-1})^2} = \frac{(P_{n-1} - YQ_{n-1})^2}{x^{2n}}.$$

On voit immédiatement que la valeur de Y est :

$$Y = \left\{ P_{n-1} - P_{n-1} \left[1 - 4x^n \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \frac{1}{2Q}.$$

Nous aurons donc, si nous le désirons, par simple multiplication ou division, le développement de Y. Il nous suffit ici de savoir que :

$$Y = \frac{x^n}{P} + \theta x^{2n},$$

$$\frac{1}{Y^2} = \frac{P^2 - 2Qx^n}{x^{2n}} + \lambda(x),$$

$\theta(x), \lambda(x)$ étant holomorphes. On obtient ensuite successivement

$$\frac{x-y}{Y^2} = \frac{x(P^2 - 2Qx^n) - Px^n}{x^{2n}} + \omega(x),$$

$$\frac{(x-y)^2}{Y^2} = \frac{x^2(P^2 - 2Qx^n) - 2Px^{n+1}}{x^{2n}} + \gamma(x),$$

ω, γ étant des fonctions holomorphes.

On a donc immédiatement les conditions que pour ces fonctions aient leurs résidus nuls.

Posons :

$$P = \sum_0^{n-1} \alpha_k x^k, \quad Q = \sum_0^{n-1} \beta_k x^k.$$

Les trois résidus sont :

$$\rho_1 = -2\beta_{n-1},$$

$$\rho_2 = \alpha_{n-1}^2 - 2\beta_{n-2} - \alpha_{n-1},$$

$$\rho_3 = 2\alpha_{n-1}\alpha_{n-2} - 2\beta_{n-3} - 2\alpha_{n-2}.$$

On a donc les conditions :

$$\beta_{n-1} = 0, \quad \beta_{n-2} = \frac{\alpha_{n-1}(\alpha_{n-1} - 1)}{2}, \quad \beta_{n-3} = \alpha_{n-2}(\alpha_{n-1} - 1).$$

avec des notations un peu différentes :

$$\begin{aligned} \alpha_{n-1} &= -c, & \alpha_{n-2} &= -b, \\ \beta_{n-1} &= 0, & \beta_{n-2} &= \frac{c(c+1)}{2}, & \beta_{n-3} &= b(c+1). \end{aligned}$$

C'est le résultat énoncé au début du présent paragraphe, résultat qui se trouve ainsi complètement démontré.

[3] Étudions quelques cas particuliers. Si $c = -1$, les coefficients β_i étant nuls, on trouve la réduite :

$$x^n = (x - \gamma)[a_1^n + \alpha_1 x + \dots - bx^{n-2} + x^{n-1}].$$

Cette équation est celle d'une courbe sphérique de degré n , coupée en $n - 1$ points par les génératrices de paramètre γ , en un point par les génératrices de paramètre x . Elle possède à l'infini un seul point comptant pour n , et peut servir d'indicatrice à une courbe unicursale à torsion constante de degré $2n - 1$, n'ayant qu'un point à l'infini.

En faisant $c = -2$, on trouve la courbe

$$\begin{aligned} x^n - (x - \gamma)(a_1^n + \alpha_1 x + \dots - bx^{n-2} - cx^{n-1}) \\ + (x - \gamma)^2 [\beta_0 + \beta_1 x \dots bx^{n-3} + x^{n-2}] = 0; \end{aligned}$$

on constatera que cette équation représente une courbe sphérique de degré n , coupée en $n - 2$ points par les génératrices de paramètre γ et en deux points par les génératrices de paramètre de x . Ces courbes sont en général hyperelliptiques; nous déterminerons toutes celles qui sont unicursales et qui nous fourniront des courbes à torsion constante de degré $2n - 1$, n'ayant qu'un point à l'infini.

[4] Passons maintenant au cas où $k = 0$, $p + 1$ étant impair; nous aurons, avec les notations déjà employées :

$$\begin{aligned} (1) \quad & \begin{cases} x = t^{2n+1} + \sum_1^{\infty} a_i t^{2i}, \\ y = -t^{2n+1} + \sum_1^{\infty} a_i t^{2i}. \end{cases} \\ (2) \quad & \begin{cases} x_1 = \frac{x + y}{2} = \sum_1^{\infty} a_i t^i, \\ y_1^2 = \left(\frac{x - y}{2}\right)^2 = t^{2n+1}; \end{cases} \end{aligned}$$

On peut dire que les équations (1) sont celles de l'indicatrice, exprimables analytiquement en fonction de θ ; les équations (2) sont les équations du cône des binormales exprimables analytiquement en t .

Je dis que la condition nécessaire et suffisante pour que l'indicatrice (1) fournisse une courbe à torsion constante analytique dans le domaine du point $t = 0$ est que cette indicatrice ait, en commun avec la courbe :

$$(3) \quad x_1^n - \gamma_1^2 \left[x_0 + x_1 x_1 \dots + x_{2n-3} x_1^{2n-3} + \frac{2n+1}{2} x_1^{2n-1} \right] = 0,$$

$4(2n+1)$ points confondus en $x_1 = 0, \gamma_1 = 0$.

Nous allons d'abord montrer que si l'on se borne, dans le développement de x , aux termes de degré au plus égal à $2n+1$, on peut représenter une indicatrice (1) par une équation :

$$(3') \quad x_1^{2n+1} - \gamma_1^2 P_{2n}(x_1) = 0,$$

P étant un polynôme de degré $2n$.

Nous montrerons ensuite que pour la courbe (3), et pour cette forme seulement, les intégrales n'ont pas de singularités logarithmiques.

Il est clair d'abord que l'équation (2) devient, par élimination de t :

$$\prod_{2n+1} (x_1 - \Sigma a_i t^i) = 0,$$

t étant une quelconque des racines de

$$t^{2n+1} = \gamma_1^2.$$

On a donc l'équation

$$x_1^{2n+1} - \gamma_1^2 P_{2n}(x_1) + \gamma_1^4 \varphi_{2n}(x_1) \dots = 0.$$

Il est clair que le développement de Y_1^2 en fonction de x , déduit de cette équation, ne dépend que de P_{2n} pour les termes de degré inférieur à $4n+2$.

$$\gamma_1^2 = \frac{x_1^{2n+1}}{P_{2n}} + \dots = x_1^{2n+1} [m_0 + \dots + m_{2n} x_1^{2n}].$$

Donc l'expression de x_1 en fonction de t ne dépend que de P_{2n} pour les termes de degré inférieur ou égal à $2n+1$.

Calculons maintenant les intégrales relatives à (3') :

$$\int \frac{dx}{y_1^2}, \quad \int \frac{d(x_1^2 - y_1^2)}{y_1^2}, \quad \int \frac{d\left(\frac{x_1}{x_1^2 - y_1^2}\right)}{\frac{y_1^2}{(x_1^2 - y_1^2)^2}}.$$

Ce sont, à des constantes près :

$$\int \frac{d(x-y)}{(x-y)^2}, \quad \int \frac{(x-y)}{d(xy)^2}, \quad \int \frac{d\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)}{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2}.$$

On trouve pour résidus de ces trois intégrales :

$$\begin{aligned} \rho_3 &= \alpha_{2n}, \\ \rho_1 &= 2\alpha_{2n-1} - (2n+1), \\ \rho_5 &= -\alpha_{2n-2}, \end{aligned}$$

et les conditions cherchées deviennent :

$$\alpha_{2n-2} = 0, \quad \alpha_{2n-1} = \frac{2n+1}{2}, \quad \alpha_{2n} = 0.$$

C'est le résultat énoncé au début du paragraphe.

[6] Il est clair que notre démonstration s'applique à une équation :

$$(4) \quad x_1^{2n} - y_1^2 P_{2n-1}(x_1) = 0.$$

La valeur de y_1 en fonction de x_1 se présente sous la forme :

$$y_1 = \pm x_1^n Q_{2n-1}(x_1) + \theta x_1^{2n},$$

Les termes à partir de x^{2n} étant sans intérêt pour nous.

Une équation de la forme (4) est donc apte à représenter les deux branches d'une indicatrice telle que celles que nous avons considérées au paragraphe 2, et nous pouvons énoncer ce résultat qui renferme ceux des paragraphes 2 et 5.

Si le cône des binormales coupe le cône isotrope suivant une génératrice comptant pour $N=p+1$, $k=0$, la courbe à torsion constante sera analytique dans le domaine du point à l'infini sur cette génératrice si celle-ci compte pour $2N$ dans l'intersection du cône des binormales et du cône suivant :

$$x_1^N - y_1^2 \left(x_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{N-1} x_1^{N-1} + \frac{N}{2} x_1^{N-2} \right) = 0.$$

On raccorde aisément ce résultat à celui du paragraphe 2, en remarquant que pour obtenir l'équation du cône, symétrique en x, y , il suffit de multiplier l'une par l'autre deux équations obtenues en permutant x, y :

$$\begin{aligned} x'' - YP_{n-1}(x) + Y^2Q_{n-2}(x) &= 0. \\ y'' + YP_{n-1}(y) + Y^2Q_{n-2}(y) &= 0. \end{aligned}$$

Le résultat devient une fonction de x', y_1^2 dont les termes utiles ont nécessairement la forme (3), car en effet si on se déplace sur une des branches de l'indicatrice, un des facteurs est d'ordre $3n$, l'autre d'ordre n . L'ensemble est donc d'ordre $4n = 2n$. On voit qu'on retrouve bien le résultat énoncé, et nous démontrons ce que nous avons promis au paragraphe 15, chapitre III.

Nous avons donc, dans le cas où $p + 1$ est pair et $k = 0$, deux méthodes à notre disposition pour exprimer géométriquement les conditions du problème.

[7] Nous allons maintenant traiter le cas général où k est différent de zéro, en envisageant successivement les hypothèses où $p + 1 + k$ est pair ou impair. Prenons la première hypothèse. Nous avons :

$$\begin{cases} x = a_{k+1}t^{k+1} + \dots + a_{2n}t^{2n} + \dots, \\ x - y = t^n. \end{cases}$$

Nous changerons de variables en posant :

$$\begin{cases} x = x_1^{k+1}, \\ x - y = Y. \end{cases}$$

Le cycle (1), avec ces nouvelles variables, devient :

$$(2) \quad \begin{aligned} x &= x_1^{k+1}, \\ Y &= x_1^n [a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_{2n-k-1} x_1^{2n-k-1}] + \theta x_1^{3n-k}. \end{aligned}$$

Les seuls termes utiles sont ceux de degré $3n - k - 1$ au plus. Or, la relation entre Y et x peut être remplacée, la chose est claire après ce que nous avons dit dans les cas analogues, par une équation :

$$(3) \quad x_1^n - YP_{n-1}(x_1) + Y^2Q_{n-k-1}(x_1) = 0.$$

Inversement une équation de la forme (3) donne pour la racine Y qui s'annule avec x , un développement :

$$Y = \left\{ P_{n-1}(x_1) - P_{n-1}(x_1) \left(1 - \frac{4x^n Q}{P^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \frac{1}{2Q},$$

qui est bien de la forme requise. Il nous suffit ici de savoir que

$$Y = \frac{x_1^n}{P} + \theta x_1^{2n}$$

où θ est holomorphe.

Nous allons, ayant établi l'équivalence des formes (1) et (3), chercher à quelles conditions les intégrales attachées à (3) sont dépourvues de singularités logarithmiques.

Nous avons pour les quantités à intégrer :

$$\frac{dx}{Y^2}, \quad y \frac{dx}{Y^2}, \quad y^2 \frac{dx}{Y^2}.$$

Dès lors, en calculant ces quantités on trouve à des termes holomorphes près, en supprimant le facteur $k + 1$,

$$\frac{P^2 - 2Qx_1^n}{x_1^{2n-k}}, \quad \frac{P^2 - 2Qx_1^n - Px_1^{n-k-1}}{x_1^{2n-2k-1}}, \quad \frac{P^2 - 2Qx_1^n - 2Px_1^{n-k-1}}{x_1^{2n-3k-2}}.$$

Posons maintenant :

$$P = \sum \alpha_i x_1^i, \quad Q = \sum \beta_i x_1^i.$$

En exprimant que les trois résidus sont nuls, nous obtenons toujours au moins deux conditions, puisque

$$2n - 2k - 1 > 0.$$

Mais la troisième condition ne se présente que si

$$K \geq \frac{2(n-1)}{3}.$$

On a successivement :

$$\begin{aligned} \sum_r \sum_s \alpha_{n-r} \alpha_{n-s} &= 2\beta_{n-k-1}, & r+s &= k+1, \\ \sum_r \sum_s \alpha_{n-r} \alpha_{n-s} &= 2\beta_{n-2k-2} + \alpha_{n-k-1}, & r+s &= 2(k+1), \\ \sum_r \sum_s \alpha_{n-r} \alpha_{n-s} &= 2\beta_{n-3k-3} + 2\alpha_{n-2k-2}, & r+s &= 3(k+1). \end{aligned}$$

L'équation dépend en général de $2n - k$ constantes liées par trois ou deux relations, suivant la valeur de k .

[8] Il nous faut maintenant parvenir à une interprétation de ces résultats où ne figurent plus que les variables x, y . Or, l'indicatrice est représentée dans ses termes utiles par :

$$\begin{cases} x = x_1^k, \\ x_1^n - YP(x_1) + Y^2Q(x_1) = 0. \end{cases}$$

Les conditions (4) étant vérifiées par les coefficients de P, Q .

Pour obtenir l'équation entre x, Y , il suffit d'éliminer x . Pour cela on formera le produit de $k + 1$ facteurs.

$$\Pi [x_1^n - YP(x_1) + Y^2Q(x_1)],$$

où x prend successivement pour valeur les $k + 1$ racines de :

$$x_1^{k+1} = x.$$

Cette équation se présente sous la forme :

$$(5) \quad x^n - YP_1(x) + Y^2P_2(x) + Y^3P_3(x) \dots + Y^{2(k+1)}P_{2(k+1)}(x) = 0,$$

où les coefficients des puissances de Y sont les polynômes en x . Nous nous proposons de chercher quels sont les termes à conserver dans cette équation, et de montrer que les polynômes P_1 et P_2 , quand ils existent, conservent les propriétés qu'ils avaient pour $k=0$, c'est-à-dire que le terme en x^{n-1} de P_2 est nul, et les termes précédents ont la forme :

$$b(c + 1)x^{n-3} + \frac{c(c + 1)}{2}x^{n-2},$$

les deux derniers termes de P étant :

$$-bx^{n-2} - cx^{n-1}.$$

Autrement dit, les trois conditions du problème conservent cette interprétation que le dernier coefficient de P n'existe pas et que les deux précédents sont connus en fonction de b, c .

Le calcul de P_1 et P_2 se fait sans difficulté. On a :

$$P_1(x) = X^n \Sigma \left(\frac{x_0}{x_1^n} + \frac{x_1}{x_1^{n-1}} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_1} \right),$$

où la somme est étendue aux $k + 1$ racines. Si l'on pose :

$$n = q_1(k + 1) + r, \quad r < k + 1,$$

$$P_1(x) = (k + 1) \left[x^{n-q_1} \alpha_{n-q_1(k+1)} + \dots + x^{n-2} \alpha_{n-2k-2} + x^{n-1} \alpha_{n-k-1} \right].$$

Pour $P_2(x)$, on a une fonction symétrique à deux variables.

On trouve aisément pour le coefficient de x^{n-1} :

$$\beta_{n-k-1} - \frac{\Sigma_1}{2} = 0$$

en appelant $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ les sommes à deux indices qui figurent dans les conditions (4).

En vertu de la première condition, ce coefficient est nul.

Le coefficient de x^{n-2} est

$$(k + 1) \left(-\frac{\Sigma_2}{2} + \beta_{n-2k-2} \right) + \frac{(k + 1)^2}{2} \alpha_{n-k-1}^2.$$

ou

$$\frac{c(c + 1)}{2}$$

en posant

$$c = -(k + 1) \alpha_{n-k-1}.$$

Le coefficient de x^{n-3} est

$$(k + 1) \left(-\frac{\Sigma_3}{2} + \beta_{n-3k-3} \right) + (k + 1)^2 \alpha_{n-k-1} \alpha_{n-2k-2}$$

ou

$$b(c + 1).$$

Ainsi ces propriétés sont établies. Indiquons en passant que le terme du plus bas degré du polynôme P est de degré $n - q$, en appelant q le quotient de la division de $2n$ par $k + 1$.

Conformément à la méthode suivie jusqu'ici, demandons-nous maintenant de quel ordre est l'expression (5) par rapport à x_i quand on remplace x, Y par des expressions de la forme (2) ayant en commun, avec le cycle d'où dérive (5), les termes d'ordre inférieur ou égal à $3n - k - 1$.

Il est clair que l'un des facteurs du produit II est d'ordre $3n-k$, les autres facteurs étant de la forme :

$$x_1^n - x_2^n [a_0 + a_1 x_2 + \dots] \left[\frac{1}{a_0} x_1 x_2 + x_2 x_1^2 \dots \right],$$

où x est une deuxième racine de $x^{k+1} = x$.

On voit que si n n'est pas multiple de $k+1$, tous ces facteurs sont d'ordre n , et le produit d'ordre $3n-k+kn=3n+k(n-1)$.

Si n est multiple de $k+1$, ces facteurs sont d'ordre $n+1$, et le produit est d'ordre $3n-k+k(n+1)=3n+kn$.

[9] Ces résultats conviennent au cas général. Nous allons les éclaircir par des exemples et les compléter par les réciproques, mais il faut examiner à part le cas où $k+1=n$.

On peut alors écrire :

$$(1) \quad \begin{cases} x = a_{n+1} t^{n+1} + \dots + a_{2n} t^{2n} + \dots, \\ x - y = t^n \end{cases}$$

et la seule condition du problème est $a_{2n} = 0$.

On constate aisément qu'en général on peut prendre une réduite

$$(2) \quad x^n = \lambda_2 y^2 x^{n-1} + \lambda_3 y^3 x^{n-2} + \dots + \lambda_{n+1} y^{n+1} x^{-1},$$

où $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{n+1}$ sont des constantes.

La condition du problème est alors $\lambda_2 = 0$, et les coordonnées d'une indicatrice substituées dans une équation de la forme (2) doivent donner un résultat d'ordre $2n$ pour l'un des facteurs, d'ordre n pour les n autres, soit en tout $n(n+2)$.

Autrement dit, les polynômes P_1, P_2 , sont ici identiquement nuls. L'ordre de la réduite doit être $n(n+2)$ au lieu de n^2+n+1 que fournirait le résultat général.

La courbe représentée par l'équation (2) est d'ailleurs unicursale, rien n'est plus facile que de vérifier que les trois intégrales de notre problème, attachées à cette courbe, sont des fonctions algébriques, si $\lambda_2 = 0$.

[10]. Les derniers résultats relatifs à l'ordre de la réduite nous permettent de supprimer dans l'équation (5) les termes d'ordre supérieur à l'un ou l'autre des nombres obtenus. Commençons par un exemple.

Nous allons donner successivement les résultats relatifs à $n=5$ avec les différentes valeurs possibles de k , et nous inscrirons en regard de l'équation réduite le

nombre entier que doit être l'ordre de cette fonction quand on y substitue les coordonnées d'une indicatrice :

$$k = 0 \quad x^5 - Y(x_0 + x_1x + x_2x^2 - bx^3 - cx^4) + Y^2 \left[\beta_0 + \beta_1x + b(c+1)x^2 + \frac{c(c+1)}{2}x^3 \right] = 0 \quad 15$$

$$k = 1 \quad x^5 + Y(bx^3 + cx^4) + Y^2 \left[\beta_0 + \beta_1x + b(c+1)x^2 + \frac{c(c+1)}{2}x^3 \right] + Y^3(\gamma_0 + \gamma_1x) = 0 \quad 19$$

$$k = 2 \quad x^5 + Y(cx^4) + Y^2 \left[\frac{c(c+1)}{2}x^3 \right] + Y^3[\gamma_0 + \gamma_1x + \gamma_2x^2] + Y^4\delta_0 = 0 \quad 23$$

$$k = 3 \quad x^5 + Y(cx^4) + Y^2 \frac{c(c+1)}{2}x^3 + Y^3[\gamma_2x^2] + Y^4(\delta_0 + \delta_1x) + Y^5\varepsilon_0 = 0 \quad 27$$

$$k = 4 \quad x^5 + \lambda_3x^3Y^3 + \lambda_4x^2Y^4 + \lambda_5xY^5 + \lambda_6Y^6 = 0 \quad 35$$

Nous n'avons gardé dans ces diverses équations que les termes d'ordre inférieur au nombre écrit à l'extrémité de la ligne. Ces réduites dépendent donc de 7, 6, 5, 5, 4 constantes.

C'est précisément le nombre qui figure dans les termes utiles des équations paramétriques de l'indicatrice, compte tenu des conditions du problème. Ce nombre est le même pour $k = 2$, $k = 3$, parce qu'il disparaît pour $k = 3$ une condition et un paramètre.

Il résulte de ce que nous venons de dire que nos équations réduites ne contiennent pas de constantes en trop. Elles ont autant de généralité que les équations paramétriques. C'est ce résultat important que nous allons généraliser. Il n'est pas évident en effet que dans les termes conservés on puisse considérer tous les coefficients de la réduite comme des paramètres indépendants. Nous démontrerons même que cette vue serait inexacte quand n est divisible par $k + 1$.

[11] Nous allons d'abord appliquer la méthode à n quelconque, k étant égal à 1. L'équation réduite doit acquérir l'ordre $4n - 1$ si n est impair, $4n$ si n est pair. Supposons d'abord n impair $= 2q + 1$.

Il n'entre dans la réduite que P_1, P_2, P_3 . P_1 commence par un terme de degré $n - q$. Il comprend donc q termes. P_2 commence par un terme de degré $n - q$, q étant le quotient de $2n$ par 2. P_2 commence donc par une constante. P_3 commence aussi par une constante. P_2 étant de degré $n - 1 = 2q$, comprend $2q + 1$ termes. P_3 se termine par un terme de degré λ tel que

$$3n + 2\lambda < 4n - 1, \quad \lambda = q - 1.$$

Il comprend donc q termes, soit en tout $4q + 1 = 2n - 1$.

C'est exactement le nombre de coefficients qui figurent dans le développement de x en fonction de t , les termes jusqu'à t^{2n} étant seuls comptés.

Supposons maintenant n pair $= 2q$.

P_1 comprend encore q termes. P_2, P_3 commencent par une constante, P_2 comprend donc $2q$ termes, le dernier terme de P_3 étant tel que

$$2\lambda < n, \quad \lambda = q - 1,$$

on a en tout $4q$ coefficients, c'est-à-dire un de plus que le nombre $2n - 1$.

On constate aisément que dans l'équation de la réduite les termes en

$$x^n = x^{2q}, \quad Yx^q, \quad Y^2$$

constituent le carré

$$(x^q - \alpha Y)^2,$$

où α est une constante. Deux coefficients dépendent donc d'une même constante α .

[12] Généralisons d'abord ce résultat au cas où n est divisible par $k + 1$. Soit q le quotient. Le polynôme P_1 commence par un terme de degré $n - q$; il comprend q termes. Les polynômes $P_2, P_3, P_4, \dots, P_{k+1}$ comprennent tous $2q$ termes, P_{k+1} commençant par une constante. Quant à P_{k+2} il commence aussi par une constante et se limite à q termes, soit en tout $2(k + 1)q = 2n$.

Il y a donc k coefficients de trop ou k relations entre les coefficients de la réduite.

On se rend compte aisément que l'équation contient un terme de la forme :

$$(x^q - \alpha_0 Y)^{k+1}$$

et que c'est ce terme qui fournit, dans la réduite, le premier coefficient de toutes les puissances de Y . Ceci est la conséquence immédiate du fait que l'équation de la réduite peut se mettre sous la forme :

$$\Pi [x^q - Y\varphi(x) + Y^2\varphi^2(x) + x_1(a_1Y + b_1Y^2) + \dots + x_k^k(a_kY + b_kY^2)] = 0$$

en remplaçant partout où c'est possible x_i^{k+1} par x .

On voit alors que les premiers termes des polynômes P_1, P_2, \dots, P_{k+1} sont des fonctions d'un seul paramètre α_0 . Telles sont les k relations cherchées. L'équation réduite à la forme

$$[x^q - \alpha_0 Y]^{k+1} - YP_1(x) + Y^2P_2(x) + \dots + Y^{k+2}P_{k+2}(x) = 0,$$

où P_s commence par un terme de degré $n - qs + 1$, P_{k+1} commençant donc par un terme du premier degré, et P_{k+2} commençant par une constante. Les coefficients de ces derniers polynômes peuvent alors être regardés comme des paramètres indépendants.

[13] Il nous reste à examiner le cas où n n'est pas divisible par $k + 1$. Dans l'équation de la réduite (5) il suffit de conserver les termes jusqu'à $Y^{k+2}P_{k+2}$. Rappelons alors que le polynôme P_h commence par un terme en x^{n-q_h} , q_h étant le quotient de hn par $k + 1$. Le dernier terme de P est d'un degré λ tel que

$$h_n + \lambda(k + 1) \leq n(k + 3) - (k + 1).$$

Supposons maintenant que l'on ait :

$$n = q(k + 1) + r$$

q, r étant le quotient et le reste de la division de n par $k + 1$. Les quotients de hn par $k + 1$ seront successivement :

$$q, 2q, 3q, \dots, h_1q + 1, \dots, h_2q + 2, \dots, h_3q + 3, \dots, (k + 1)q + r.$$

Ces quotients augmentent d'une unité à chaque fois que hr devient égal ou supérieur à $k + 1, 2(k + 1), 3(k + 1)$. Le nombre de ces sauts est évidemment égal à r . Quant au nombre λ il est la partie entière de

$$\frac{n(k + 3 - h)}{k + 1} - 1.$$

Le nombre de termes de P_h est donc la partie entière de

$$2q - \frac{r(h - 2)}{k + 1},$$

P_2 a donc $2q$ termes, P_3 en a $2q - 1$, et ce nombre se maintient jusqu'à P_{h_1} qui en a $2q$, P_{h_1+1} a $2q$ termes, mais P_{h_1+2} en a $2q - 1$, et ce nombre $2q - 1$ reste le même jusqu'à P_{h_2} qui en a de nouveau $2q$. Quant au dernier polynôme P_{k+2} , il a q termes. Finalement, on trouve $P_1, P_2, P_{k+1}, P_{k+2}$ qui donnent $6q$ termes, les $k - 2$ autres polynômes ont tous $2q - 1$ termes, sauf $r - 1$ groupes de deux polynômes qui en ont seulement $2q$. Le nombre total N

$$N = 6q + (2q - 1)(k - 2) + 2(r - 1),$$

$$N = 2q(k + 1) + 2r - k = 2n - k.$$

[14] Ainsi, pour une indicatrice donnée, il existe une réduite :

$$F(x, Y) = x^n - YP_1(x) + Y^2P_2(x) + \dots + Y^{k+1}P_{k+1}(x) + Y^{k+2}P_{k+2}(x) = 0.$$

Les derniers termes des polynômes P_1, P_2 sont liés très simplement quand les

intégrales n'ont pas de singularités logarithmiques. Le polynôme P_{k+1} commence par une constante.

1° Quand n est divisible par $k + 1$, le terme en x^n et ceux qui proviennent de premiers coefficients de P_1, P_2, \dots, P_{k+1} doivent constituer la puissance $k + 1$ exacte d'une expression de la forme :

$$(x^q - \alpha_0 Y).$$

Tous les autres coefficients sont à considérer comme indépendants.

2° Quand n n'est pas divisible par $k + 1$, on peut considérer comme indépendants les coefficients de tous les polynômes P .

Cette équation réduite étant formée, si l'on y substitue les coordonnées d'un point de l'indicatrice, on a :

$$F(x_1 Y) \equiv t^m H(t) \equiv x_1^m K(x_1),$$

H, K étant holomorphes

$$M = n(3 + k) \quad \text{dans le premier cas,}$$

$$M = n(3 + k) - K \quad \text{dans le deuxième cas.}$$

[15] Nous allons établir les réciproques de ces propositions. Une équation réduite à $2n - k$ paramètres étant donnée, il est facile de trouver les équations du cycle dont le point $x = 0, Y = 0$ est l'origine.

Dans le premier cas, on posera :

$$\alpha_0 Y = x^q (1 + \tau_1);$$

on trouve une équation de la forme :

$$\begin{aligned} \tau_1^{k+1} - x[a_0 + a_1 x + b_1 \tau_1 + \dots] &= 0, \\ \begin{cases} x = \tau_1^{k+1} p(\tau_1), \\ Y = \tau_1^n q(\tau_1). \end{cases} \end{aligned}$$

Dans le deuxième cas, on posera immédiatement :

$$x = x_1^{k+1}$$

et l'on aura :

$$Y = x_1^n g(x_1).$$

Il est clair que les singularités logarithmiques relatives à l'indicatrice que représente l'équation réduite disparaissent, car, d'après le paragraphe 8, les conditions que les trois derniers coefficients de $P_2(x)$ soient respectivement

$$b(c+1), \quad \frac{c(c+1)}{2}, \quad 0,$$

entraînent le fait que les trois résidus sont nuls.

Prenons maintenant une indicatrice pour laquelle est vérifiée la condition :

$$F(xY) \equiv t^m H(t) \equiv x_1^m K(x_1).$$

Cela veut dire tout simplement que les $2n$ premiers coefficients du développement de Y en fonction de x_1 peuvent être choisis les mêmes pour cette courbe et pour la réduite. Si en effet pour l'indicatrice on a :

$$\begin{cases} x = x_1^{k+1}, \\ Y = x_1^n (a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_{2n-k-1} x_1^{2n-k-1}), \end{cases}$$

les $2n - k$ coefficients a sont bien déterminés, sauf changement de x_1 en ωx_1 , ω étant racine de $\omega^{k+1} = 1$.

Or les coefficients de la réduite sont une solution; nous pouvons l'adopter. Il en résulte que pour l'indicatrice les résidus sont nuls.

En résumé :

Pour chaque valeur des entiers n, k , on peut construire une équation réduite :

$$F(xY) = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une indicatrice fournisse une courbe à torsion constante analytique dans le domaine du point à l'infini considéré est que cette indicatrice ait, avec la réduite, M points communs confondus au point considéré, M étant un entier déterminé en fonction de n, k .

[16] Nous allons examiner plus rapidement le deuxième cas où $p + 1 + k$ est impair. Appelons dans ce paragraphe n ce nombre impair. Nous avons alors, avec les notations du paragraphe 5 de ce chapitre :

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 = a_{k+1} t^{k+1} + \dots + a_n t^n + \dots, \\ y_1^2 = t^n. \end{cases}$$

Posons

$$x_1 = x_2^{k+1},$$

y_1^2 devient une fonction holomorphe de x_1 , et on peut représenter l'indicatrice en ses termes utiles par la relation suivante :

$$(2) \quad x_2^n - y_1^2 P(x_2) = 0,$$

P étant un polynôme de degré $n-k-1$ au plus. Nous allons considérer les trois intégrales attachées à la courbe (2)

$$\int \frac{d(x_2^{k+1})}{y_1^2}, \quad \int \frac{d(x_2^{2k+2} - y_1^2)}{y_1^2}, \quad \int \frac{d\left(\frac{x_2^{k+1}}{x_2^{k+1} - y_1^2}\right)}{\frac{y_1^2}{(x_2^{2k+2} - y_1^2)^2}}.$$

Les résidus sont ceux des trois fonctions

$$P(x_2) \frac{x_2^k}{x_2^n}, \quad \frac{P(x_2) x_2^{2k+1}}{x_1^n} - \frac{(y_1^2)^2}{y_1^2}, \quad \frac{P(x_2) x_2^{3k+2}}{x_2^n};$$

on obtient ainsi les trois conditions

$$\begin{aligned} a_{n-k-1} &= 0, \\ a_{n-2k-2} &= \frac{n}{2k+2}, \\ a_{n-3k-3} &= 0, \end{aligned}$$

où l'on appelle a_i le coefficient de x^i dans $P(x)$.

[17] La formation de la réduite se fera par élimination de x_2 , c'est-à-dire en formant le produit :

$$\Pi[(x_i^n - y_1^2 P(x_i))],$$

où x_i prend successivement pour valeurs les racines de :

$$x_1^{k+1} = x_1.$$

On obtient finalement une équation :

$$F(x_1, y_1) \equiv x_1^n - y_1^2 P_1(x_1) + y_1^4 P_2(x_1) \dots = 0.$$

Nous ne répéterons pas les raisonnements relatifs à ce cas.

On supprimera de la réduite les termes qui sont d'ordre supérieur ou égal à M :

$$M = n(k + 2).$$

Quand n est divisible par $k + 1$

$$M = n(k + 2) - k.$$

Quand n n'est pas divisible par $k + 1$.

Il résulte immédiatement de là que le dernier polynôme qui apparaisse est P_{k+1} .

Les trois conditions du problème se traduisent sur le polynôme P_1 . Celui-ci devrait être normalement de degré $n - 1$. On constatera immédiatement que le coefficient de x^{n-3} est nul, que le coefficient de x^{n-2} est $\frac{n}{2}$, que le coefficient de x^{n-1} est nul. Ainsi nous voyons se conserver les propriétés simples obtenues au paragraphe 5.

[18]. Donnons un exemple détaillé. Nous prendrons $n = 7$

$$\begin{aligned} k = 0 & \quad x_1^7 - \gamma_1^2 \left(a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 + \frac{7}{2} x_1^3 \right) & \quad M = 14 \\ k = 1 & \quad x_1^7 - \gamma_1^3 \left(\frac{7x_1^3}{2} \right) + \gamma_1^4 (a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2) & \quad 20 \\ k = 2 & \quad x_1^7 - \gamma_1^2 \left(\frac{7x_1^3}{2} \right) + \gamma_1^4 (a_2 x_1^3) + \gamma_1^6 (b_0 + b_1 x_1) & \quad 26 \end{aligned}$$

Ces réduites dépendent de 4, 3, 3 paramètres. C'est le nombre $n - k - 3$ pour les deux premières lignes, $n - k - 2$ pour la dernière. C'est bien le nombre qu'il nous faut.

[19] Nous terminerons en donnant simplement le résultat complet, obtenu par les mêmes méthodes.

On peut, pour chaque valeur des entiers n, k , construire une équation réduite :

$$F(x_1, \gamma_1) = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une indicatrice fournisse une courbe à torsion constante analytique dans le domaine du point à l'infini est que cette indicatrice ait, avec la réduite, $2M$ points communs confondus, M étant connu en fonction de n, k .

[20] Comme nous l'avons fait remarquer au paragraphe 6, ce dernier résultat est valable quand n est pair et constitue alors une deuxième forme de la condition. Autrement dit quand l'indicatrice a deux branches analytiquement distinctes, on peut, soit exprimer que cette indicatrice a en commun avec une courbe déterminée $n(k+3)$ ou $n(k+3)-k$ points communs confondus, soit exprimer que le cône des binormales a en commun avec un cône déterminé $n(k+2)$ ou $n(k+2)-k$ génératrices communes confondues.

[21] Le problème de la recherche des courbes à torsion constante analytiques au voisinage d'un point à l'infini est donc entièrement résolu par les résultats du présent chapitre.

CHAPITRE V

Application des résultats généraux à la détermination effective de toutes les courbes unicursales à torsion constante ayant un ou deux points à l'infini.

[1] Nous consacrerons ce chapitre à la détermination effective et complète de certaines classes de courbes unicursales. Nous reprendrons d'abord le problème, résolu par M. Lyon, des courbes n'ayant qu'un point à l'infini. L'indicatrice, d'après les résultats généraux, n'a elle aussi qu'un point à l'infini. D'ailleurs, elle est unicursale. Les coordonnées symétriques x, y doivent donc être des fonctions rationnelles d'un paramètre t :

$$x = \frac{\alpha(t)}{\beta(t)}, \quad y = \frac{\gamma(t)}{\delta(t)};$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont quatre polynômes entiers en t , α et β , γ et δ étant premiers entre eux. Nous supposons que le point à l'infini s'obtienne pour la valeur $t = \infty$. Les coordonnées c, c', c'' doivent être des polynômes entiers en t . On se convainc aisément que les numérateurs de c, c', c'' ne sauraient avoir de facteur commun avec le dénominateur $\alpha\delta - \beta\gamma$ qui doit, par conséquent, se réduire à une constante. Ainsi, on doit avoir :

$$(1) \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Et l'indicatrice est donnée par :

$$\begin{cases} c = \beta\delta - \alpha\gamma, \\ c' = i(\beta\delta + \alpha\gamma), \\ c'' = \alpha\delta + \beta\gamma. \end{cases}$$

Toute la difficulté du problème est dans la résolution générale de l'équation (1). Or, cette équation est bien connue. Il suffit, pour en avoir la solution générale, de se donner arbitrairement α et β premiers entre eux. Les opérations du plus grand commun diviseur fournissent une solution γ_0, δ_0 , et la solution est

$$\begin{aligned} \alpha &= \gamma_0 + \lambda\alpha \\ \beta &= \delta_0 + \lambda\beta. \end{aligned}$$

En appelant λ un polynôme arbitraire en t .

[2] Nous obtiendrons sans effort la solution générale à l'aide des remarques suivantes. On peut écrire l'équation (1)

$$(2) \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 1.$$

Il est alors évident que si nous avons deux solutions :

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{vmatrix} = 1$$

nous en déduisons une autre par l'identité

$$(3) \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{vmatrix} = 1 = \begin{vmatrix} \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 & \alpha_1 \gamma_2 + \beta_1 \delta_2 \\ \gamma_1 \alpha_2 + \delta_1 \beta_2 & \gamma_1 \gamma_2 + \delta_1 \delta_2 \end{vmatrix}.$$

De même que nous conviendrons de prendre, comme indicatrice correspondant à l'équation (2), la courbe dont les coordonnées sont $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta}$, alors qu'on peut en considérer une autre distincte :

$$\frac{\alpha}{\gamma}, \quad \frac{\beta}{\delta},$$

de même nous conviendrons que parmi les huit manières distinctes d'écrire le produit des deux déterminants, de choisir celle qui est fixée dans l'équation (3). Ainsi d'une première solution et d'une deuxième solution nous en déduisons une troisième. Par exemple, λ étant un polynôme arbitraire en t :

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 + \lambda \beta_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 + \lambda \delta_1 & \delta_1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \beta_1 & \delta_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 + \lambda \alpha_1 \\ \beta_1 & \delta_1 + \lambda \beta_1 \end{vmatrix} = 1,$$

dont la dernière est au fond identique au résultat de la remarque finale du paragraphe précédent, la première étant une forme différente.

Nous pouvons construire ainsi une infinité de solutions nouvelles.

En général, les degrés des polynômes ainsi obtenus vont en augmentant, et nous aurons des courbes à torsion constante de degré aussi élevé que nous voudrons.

Ce procédé nous donnera-t-il toutes les solutions?

Nous allons démontrer qu'il les donne en effet.

On peut le voir simplement de la manière suivante. Supposons, ce qui est permis, que α et β soient d'un même degré q , γ et δ d'un même degré r . Je dis qu'on peut trouver quatre polynômes solutions du premier degré, tels que l'on ait

$$\alpha_2 \delta_2 - \beta_2 \gamma_2 = 1$$

et

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix},$$

α_1 et β_1 étant de degré $q - 1$, γ_1 et δ_1 de degré $r - 1$.

En effet, on peut prendre, à des constantes près,

$$\begin{cases} \alpha = t^q - At^{q-1} \dots, & \alpha_2 = t - t_1, \\ \beta = t^q - Bt^{q-1} \dots, & \beta_2 = t - t_2, \\ \gamma = t^r - Ct^{r-1} \dots, & \gamma_2 = t - t_3, \\ \delta = t^r - Dt^{r-1} \dots, & \delta_2 = t - t_4. \end{cases}$$

et les conditions suivantes sont remplies :

$$A + D = B + C, \quad t_1 + t_4 = t_2 + t_3.$$

Pour que les polynômes $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ soient du degré prescrit, il faut :

$$\begin{aligned} A + t_4 &= B + t_2, & C + t_4 &= D + t_2, \\ A + t_3 &= B + t_1, & C + t_3 &= D + t_1, \\ t_4 - t_2 &= t_1 - t_3 = C - D = A - B. \end{aligned}$$

Les conditions sont compatibles, et le choix est possible d'une infinité de manières. Ainsi, en recommençant l'opération, on abaissera jusqu'à zéro le degré commun le plus bas de l'un des couples $\alpha\beta_1, \gamma_1, \delta$, et l'on sera ramené à résoudre une équation de la forme :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 1.$$

La méthode de la composition des solutions est donc apte à fournir une solution quelconque.

Ce résultat avait été communiqué, en 1913, à M. Darboux. Celui-ci engagea M. Gambier, en 1917, à chercher une utilisation de la propriété de la composition des solutions.

On pourra lire dans les nouvelles *Annales de 1919* la solution simple et élégante que M. Gambier a tirée de cette idée.

[2] Sans la développer complètement, nous remarquerons qu'on peut la rattacher à la propriété classique des quatre polynômes de pouvoir se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \alpha &= \gamma_i + \lambda_i \alpha, \\ \beta &= \delta_i + \lambda_i \beta, \end{aligned}$$

où γ_i, δ_i sont de degrés inférieurs à α, β respectivement. Ainsi, quand les polynômes γ et δ sont de degrés supérieurs à α, β , les quotients de γ par α , de δ par β sont les mêmes, soit λ et les restes sont des polynômes qui satisfont à :

$$\alpha \delta_i - \beta \gamma_i = 1.$$

On peut, nous l'avons remarqué, traduire ce résultat classique par

$$\begin{vmatrix} \alpha & \gamma_i \\ \beta & \delta_i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_i & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix}.$$

Les polynômes α, β sont cette fois de degrés supérieurs à γ_i, δ_i :

$$\begin{aligned} \alpha &= \mu_i \gamma_i + \alpha_i, \\ \beta &= \mu_i \delta_i + \beta_i, \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & \gamma_i \\ \beta & \delta_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_i & \gamma_i \\ \beta_i & \delta_i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \mu_i \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_i & \gamma_i \\ \beta_i & \delta_i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \mu_i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_i & 1 \end{vmatrix}.$$

On peut continuer tant qu'on ne rencontre pas une constante pour l'un des quatre polynômes.

Si β_i par exemple est une constante, on pourra écrire :

$$\begin{vmatrix} \alpha_i & \gamma_i \\ \beta_i & \delta_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_i & -\frac{1}{\beta_i} \\ \beta_i & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\delta_i}{\beta_i} & 1 \end{vmatrix}.$$

Et la solution générale s'obtiendra par l'identité :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_i & -\frac{1}{R} \\ R & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_i & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \mu_{i-1} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \dots \begin{vmatrix} 1 & \mu_1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_1 & 1 \end{vmatrix},$$

où l'on multiplie le premier déterminant par le deuxième, le produit ainsi obtenu par le troisième, et ainsi de suite.

[4] Ainsi, nous obtiendrons sans effort les polynômes les plus généraux satisfaisant à l'équation (1). Soit q l'ordre de la fraction rationnelle $\frac{\alpha}{\beta}$, r l'ordre de $\frac{\gamma}{\delta}$. L'indicatrice est de degré $q + r = m$.

Il est évident, d'après ce que nous avons dit au début de ce travail, que les trois fractions rationnelles X, Y, Z ont un seul pôle d'ordre $2m - 1$.

La courbe à torsion constante est donc d'ordre $2m - 1 = M$, du moins en général. Cette méthode nous fournira donc des courbes de degrés impairs. L'indicatrice de second degré, conique tangente au plan de l'infini, fournit la cubique gauche à torsion constante.

On a pour cette courbe :

$$q = 1, \quad r = 1, \quad M = 3.$$

Si l'indicatrice est une cubique, on a

$$\begin{array}{ll} q = 1 & q = 2 \\ r = 2 & r = 1 \end{array} \quad M = 5.$$

En somme, une seule famille de courbes du cinquième degré, puisque le deuxième cas dérive du premier par échange de x, y .

Au contraire, si l'indicatrice est du quatrième degré, on peut en avoir de deux espèces différentes :

$$\begin{array}{ll} q = 1 & q = 2 \\ r = 3 & r = 2 \end{array} \quad M = 7.$$

On voit qu'il y a deux espèces bien distinctes de courbes à torsion constante du septième degré ayant un seul point à l'infini.

De même, il en existe deux espèces du neuvième degré, trois espèces du onzième, en général le plus grand entier contenu dans $\frac{m}{2}$.

Cette méthode nous fournit donc des courbes à torsion constante de tous les degrés impairs.

[5] Fournit-elle toujours des courbes de degrés impairs $2m - 1$?

Nous savons qu'il peut en être autrement si le nombre K est différent de zéro. L'ordre de la courbe est alors $2m - 1 - K$. D'après les résultats généraux, il en sera ainsi quand les développements

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + \frac{a_1}{t} + \frac{a_2}{t^2} \dots, \\ y = x_0 + \frac{b_1}{t} + \frac{b_2}{t^2} \dots \end{array} \right.$$

de x, y , suivant les puissances de $\frac{1}{t}$, commenceront par un terme en $\left(\frac{1}{t}\right)^{k+1}$ au lieu de $\frac{1}{t}$.

Nous pouvons supposer que x, y s'annulent au point à l'infini, c'est-à-dire que le degré de x est inférieur au degré de β , le degré de γ inférieur au degré de δ .

Il faut alors que q et r , étant les degrés de γ, δ , les degrés de α, β , soient $q - k - 1, r - k - 1$.

Ainsi, la valeur la plus grande que puisse prendre K est le plus petit des nombres $q - 1, r - 1$.

Par exemple, l'indicatrice du troisième degré nous a fourni des courbes du cinquième degré. Ici K ne peut qu'être nul. Nous ne pouvons obtenir par ce moyen de courbes du quatrième degré. L'indicatrice du quatrième degré permet de faire $k = 1$, ce qui donnerait des courbes du sixième degré, mais il faudrait avoir :

$$x = \frac{1}{\beta(t)}, \quad y = \frac{1}{1 + \beta(t)},$$

ce qui n'est qu'une représentation impropre de la conique indicatrice de la cubique gauche. On obtiendrait cette cubique comptée deux fois.

L'indicatrice du cinquième degré $q = 3, r = 2$ permet de faire $k = 1$, ce qui donne

$$x = \frac{\alpha_1}{\beta_3}, \quad y = \frac{1}{\delta_2},$$

avec la condition :

$$\beta_3 = \alpha_1 \delta_2 - 1.$$

On obtient par ce procédé une courbe du huitième degré, dont le point à l'infini est singulier d'ordre 2.

On peut ainsi obtenir des courbes de tous les degrés pairs à partir de 8.

Les courbes de degrés impairs correspondant à $k = 2$ s'obtiennent par le même procédé; on voit d'abord que l'indicatrice du sixième degré donne bien une courbe d'ordre 9, mais c'est la cubique gauche à torsion constante comptée trois fois. A partir de $q = 4, r = 3$, qui pour $k = 2$ fournit une courbe du onzième degré, on peut obtenir ainsi toutes les courbes de degrés impairs, ayant à l'infini un seul point. Ce point est ici singulier d'ordre 3.

Ces résultats sont généraux. L'indicatrice $q = k + 1, r = k + 1$ donne une courbe d'ordre $3(k + 1)$ qui est la cubique gauche comptée $k + 1$ fois. Mais on peut obtenir les courbes à partir de l'ordre $3(k + 1) + 2$. Elles ont à l'infini un seul point singulier d'ordre $k + 1$.

[6] Nous avons obtenu pour la cubique gauche ce résultat remarquable qu'elle dépend d'un seul paramètre réel.

De combien de paramètres dépendent les courbes que nous venons d'obtenir ?

Supposons que x, y s'annulent pour $t = \infty$. Les quatre polynômes dépendent de $2(q + r)$ paramètres. L'équation (1) équivaut à $q + r - 1$ conditions. Il reste : $q + r - 1 = m + 1$ paramètres imaginaires.

Mais la variable t peut être soumise à une substitution homographique; nos courbes dépendent de $m - 1$ paramètres complexes, et nous pouvons encore soumettre ces courbes à une rotation autour de oz .

Tout compte fait, il y a donc :

$$2m - 3 \text{ paramètres réels.}$$

Si le nombre k est différent de zéro, on trouve par la même méthode

$$\begin{aligned} 2m - 3 - 2K \text{ paramètres réels, ou} \\ m - 1 - K \text{ paramètres complexes avant la rotation.} \end{aligned}$$

Les indicatrices $q = 2, r = 3$ nous ont fourni des courbes du neuvième degré. Si l'on fait $k = 1$, on aura :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{a + bt + ct^2}, \\ y &= \frac{h + kt}{(a + bt + ct^2)(h + kt) + l}. \end{aligned}$$

Par un changement de paramètre t , nous aurons :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{a(1 + t^2)}, \\ y = \frac{1 + bt}{a(1 + t^2)(1 + bt) + c}, \end{cases}$$

qui dépend de trois paramètres complexes, conformément au résultat général.

Si nous effectuons la rotation, nous pouvons supposer de plus que a est réel, et nous avons ainsi cinq paramètres réels pour cette famille de courbes à torsion constante du huitième degré.

[7] M. Lyon signale dans sa thèse la forme simple qui prend l'élément linéaire des courbes que nous venons d'obtenir. Il est clair en effet que pour toute courbe à torsion constante, l'élément linéaire est proportionnel à celui de l'indicatrice des binormales :

$$d\sigma^2 = \frac{4 dx dy}{(x-y)^2}.$$

Pour les courbes qui nous occupent, on aura :

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = 4(\alpha'\beta - \alpha\beta')(\gamma'\delta - \gamma\delta').$$

Le second membre est un polynôme de degré $2(q+r) - 4 = 2m - 4$.

Pour la cubique gauche en particulier, s étant l'arc de cette courbe, on aura :

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = k.$$

La variable t peut donc être choisie égale à l'arc de la courbe.

Nous signalerons rapidement les résultats analogues relatifs aux courbes que nous allons obtenir.

[8] Nous avons déterminé les courbes à torsion constante dont les coordonnées s'expriment par des polynômes en t . On peut se proposer, plus généralement, de chercher celles dont les coordonnées sont des fonctions entières d'un paramètre. (L'hélice circulaire appartient à cette catégorie.) Il est évident que l'indicatrice doit être, elle aussi, une courbe dont les coordonnées sont des fonctions entières, et qu'on est en somme ramené à la résolution de l'équation :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 1,$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont quatre fonctions entières d'un paramètre t .

On peut trouver aisément autant de solutions qu'on le voudra à cette équation, dès qu'on en possède une, car il suffit de la combiner, par multiplication de déterminants, avec une solution quelconque où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des polynômes. Or, on connaît une solution très simple :

$$\begin{vmatrix} \cos \lambda t & l \sin \lambda t \\ -\frac{\sin \lambda t}{l} & \cos \lambda t \end{vmatrix} = 1.$$

On peut également combiner deux solutions de cette forme, avec de nouvelles valeurs des constantes.

Les indicatrices qu'on obtient en continuant l'application de cette méthode peuvent, dans certains cas, être algébriques si les nombres λ sont commensurables. On voit qu'on en obtiendra sans effort d'aussi compliquées qu'on le voudra. Les courbes à torsion constante qu'on obtient ainsi sont naturellement toujours transcendantes si leur indicatrice l'est; même si l'indicatrice est algébrique, elles sont généralement transcendantes, mais dans certains cas particuliers on peut en obtenir d'algébriques. Cette méthode permet de retrouver les résultants de M. Fabry (Introduction, § 4 et d'autres différents).

Donnons-en un exemple simple :

$$\begin{vmatrix} \cos \lambda t & l \sin \lambda t \\ -\frac{\sin \lambda t}{l} & \cos \lambda t \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos \mu t & m \sin \mu t \\ -\frac{\sin \mu t}{m} & \cos \mu t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}.$$

On trouve successivement, en faisant $\lambda + \mu = a$, $\lambda - \mu = b$:

$$c = [\sin 2at(lm-1)^2 + \sin 2bt(lm+1)^2] \left(1 + \frac{1}{l^2}\right) - 2(l^2m^2 - 1) \left(1 - \frac{1}{l^2}\right) \sin(a+b)t,$$

$$c' = i[\sin 2at(lm-1)^2 + \sin 2bt(lm+1)^2] \left(-1 + \frac{1}{l^2}\right) + 2i(l^2m^2 - 1) \left(1 + \frac{1}{l^2}\right) \sin(a+b)t,$$

$$c'' = -2 \left(\frac{lm-1}{l}\right)^2 \cos 2at + \left(\frac{lm+1}{l}\right)^2 \cos 2bt.$$

On trouve aisément que, des trois intégrales qui donnent la courbe à torsion constante, une seule peut fournir des termes qui ne soient pas des fonctions trigonométriques. La condition pour que le terme en t disparaisse est alors :

$$\left(\frac{lm+1}{lm-1}\right)^4 = \frac{a}{b}.$$

On peut prendre l'arbitrairement, puis :

$$\frac{lm-1}{\sqrt[4]{a}} = \frac{lm+1}{\sqrt[4]{b}} = \frac{2}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}}.$$

L'indicatrice et la courbe à torsion constante seront algébriques si a et b sont commensurables. On peut supposer que ce sont des entiers.

[9] Toutes les courbes unicursales à torsion constante ayant deux points à l'infini appartiennent à la catégorie qui nous occupe. Il suffit, pour le voir, d'imaginer que l'un des points à l'infini correspond à la valeur $\theta = 0$, l'autre à la valeur $\theta = \infty$ du paramètre. La substitution $\theta = e^{it}$ nous ramène par x, y, z à des fonctions entières.

Il n'est peut-être pas sans intérêt de remarquer que la proposition inverse est vraie. Voici ce qu'il faut entendre par là. Celles de nos courbes qui sont algébriques sont nécessairement unicursales et ne peuvent avoir que deux points à l'infini. Qu'elles soient unicursales est un point qui résulte immédiatement d'un théorème de M. Picard (1). Le paramètre θ de la représentation est une fonction méromorphe de t . Si l'on considère alors les valeurs de θ qui correspondent aux points à l'infini, cette fonction méromorphe ne doit pas pouvoir prendre ces valeurs, puisque x, y, z restent finies pour toute valeur finie de t . Donc, ce sont des valeurs exceptionnelles pour cette fonction. Il résulte alors du célèbre théorème de M. Picard sur les fonctions uniformes à un point singulier essentiel, qu'il ne peut y avoir que deux de ces valeurs au plus. Donc, nos courbes n'ont au plus que deux points à l'infini.

Les courbes obtenues par M. Fabry vérifient bien ces propriétés. Elles sont unicursales et possèdent dans le plan de l'infini deux points imaginaires conjugués comptant chacun pour p , l'ordre de la courbe étant $2p$.

[10] Nous allons déterminer maintenant toutes les courbes unicursales n'ayant à l'infini que deux points distincts dont l'un compte pour un.

D'après les théorèmes généraux, l'indicatrice sphérique des binormales doit être une courbe unicursale n'ayant que deux points à l'infini dont l'un compte pour un, et si l'on suppose que ces deux points correspondent aux valeurs 0 et x du paramètre, on pourra prendre :

$$c = \frac{P(t)}{t}, \quad c' = \frac{Q(t)}{t}, \quad c'' = \frac{R(t)}{t},$$

P, Q, R étant trois polynômes en t .

Il sera suffisant que les résidus relatifs à $t = 0$ soient nuls.

Or, nous savons que la condition est la suivante :

L'indicatrice doit être rencontrée en trois points confondus au point $t = 0$ par une des génératrices rectilignes de la sphère. Nous supposons que la génératrice en question est $y = 0$, de sorte qu'on aura pour les équations de l'indicatrice :

$$\begin{cases} x = t \frac{\alpha}{\beta}, \\ y = t^3 \frac{\gamma}{\delta}. \end{cases}$$

(1) B. S. M., 2^e série, t. VII, 1883.

En supposant que le point à l'infini soit $x = y = 0$.

Alors les coordonnées de l'indicatrice deviennent :

$$\begin{aligned} c &= \frac{\beta\delta - t^2\alpha\gamma}{t}, \\ c' &= \frac{i(\beta\delta + t^2\alpha\gamma)}{t}, \\ c'' &= \alpha\delta + t^2\beta\gamma \end{aligned}$$

à condition que :

$$(1) \quad \alpha\delta - t^2\beta\gamma = 1.$$

Les numérateurs ne pouvant avoir de facteur commun avec $\alpha\delta - t^2\beta\gamma$, le problème est ramené à la solution de l'équation (1).

Il suffira de se donner deux polynômes premiers entre eux, par exemple α, β , pour en déduire par les opérations classiques, γ et δ qui dépendront d'un polynôme arbitraire.

[11] La méthode de composition des solutions est encore applicable; on peut en effet utiliser l'identité :

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ t^2\gamma_1 & \delta_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_2 & t^2\gamma_2 \\ \beta_2 & \delta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1\alpha_2 + t^2\beta_1\gamma_2 & \alpha_1\beta_2 + \beta_1\delta_1 \\ t^2(\alpha_2\gamma_1 + \gamma_2\delta_1) & t^2\gamma_1\beta_2 + \delta_1\delta_2 \end{vmatrix},$$

qui donne directement une troisième solution du problème quand on en connaît deux. On obtiendra donc sans effort un nombre illimité de ces courbes.

On peut d'ailleurs utiliser le fait qu'on connaît les solutions de l'équation :

$$\alpha\delta_1 - \beta_1\gamma = 1.$$

Choisissons un couple α, γ d'un système de quatre polynômes, et cherchons à déterminer β, δ pour satisfaire à l'équation (1). On aura :

$$\begin{aligned} \alpha(\delta - \delta_1) &= \gamma(t^2\beta - \beta_1), \\ \delta &= \delta_1 + \lambda\gamma, \\ t^2\beta &= \beta_1 + \alpha\lambda. \end{aligned}$$

La deuxième équation fournira β si les deux premiers coefficients du polynôme $\lambda(t)$ sont déterminés de manière à rendre le second membre divisible par t^2 . Les autres termes de $\lambda(t)$ sont arbitraires.

[12] Supposons obtenue une solution, et soit q l'ordre de la fraction rationnelle $\frac{t\alpha}{\beta}$, r l'ordre de $\frac{t^3\gamma}{\delta}$.

L'indicatrice est d'ordre $q + r = m$. Le point à l'infini $t = 0$ donne un point comptant pour un dans la courbe à torsion constante. Le point $t = \infty$ compte pour $m - 1$ dans l'indicatrice, donc en général pour $2m - 3$ dans l'intersection de la courbe A_7 et du plan de l'infini.

Plus généralement, si k est le nombre relatif à ce deuxième point à l'infini, il compte pour $2m - 3 - k$. L'ordre total est donc $2m - 2 - k$.

En général nous obtiendrons des courbes de degrés pairs. Pour avoir le degré le plus bas, remarquons que l'ordre q est au moins égal à 1, r au moins égal à 3. Donc m est au moins égal à 4. Pour qu'il lui soit effectivement égal, il faut que α et γ soient des constantes qu'on peut supposer égales à l'unité, β et δ étant respectivement du premier et du troisième degré, et liées par :

$$\delta - t^3\beta = 1.$$

On obtient ainsi des courbes A_7 du sixième degré, et ensuite les courbes de tous les degrés pairs.

[13] Que se passe-t-il quand le nombre k est différent de zéro? Il faut pour cela que x, y développés suivant les puissances de $\frac{1}{t}$ aient la forme :

$$x_0 + a\left(\frac{1}{t}\right)^{k+1} \dots,$$

$$y_0 + b\left(\frac{1}{t}\right)^{k+1} \dots;$$

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{\alpha_{q-k-1}}{\beta_q}, \\ y = y_0 + \frac{\gamma_{r-k-1}}{\delta_r}. \end{cases}$$

Il est évident encore que le minimum de k est le plus petit des nombres $q - 1$, $r - 1$. Donc, si q n'est pas nul, puisque r est au moins égal à 3, q devra être au moins égal à 2. On peut trouver de telles indicatrices $q = 2$, $r = 3$, $k = 1$.

La solution la plus générale est fournie par les équations :

$$x = \frac{t(t+1)}{at(t+1)+c}, \quad y = \frac{t^3}{at^3+ct-c}.$$

Ces indicatrices du cinquième degré fournissent des courbes A_r du septième degré ayant deux points à l'infini. On peut ensuite obtenir des courbes de tous les degrés impairs de cette classe. Le point correspondant à $t = \infty$ est, pour ces courbes, singulier d'ordre 2. De même, si l'on cherche les courbes de degré le plus bas correspondant à $k = 2$, il faut au moins $q = 3$, $r = 3$.

La solution la plus générale peut prendre la forme :

$$x = \frac{t(t^2 + 1)}{at(t^2 + 1) + b}, \quad y = \frac{t^3}{at^3 + b}.$$

Elle fournit une courbe A_r du huitième degré, et à partir de ce degré on obtient des courbes de tous les degrés pairs.

En général, on obtient avec facilité des indicatrices $q = r = k + 1$ qui fournissent des courbes A_r de degré :

$$4(k + 1) - 2 - k,$$

A partir de ce degré, on peut obtenir toutes les courbes pour lesquelles le point $t = \infty$ est singulier d'ordre $k + 1$.

[14] De combien de paramètres dépendent ces courbes? α et β dépendent ensemble de $2q$, γ δ de $2r - 2$, en tout $2m - 2$. L'équation (1) introduit $q + r - 1$ conditions? Il reste $m - 1$ paramètres. Le paramètre t n'étant déterminé qu'à une substitution près qui conserve les valeurs 0 et ∞ , on peut encore faire disparaître un paramètre. Il en reste donc $m - 2$, et nous avons encore le droit d'effectuer une rotation autour de oz , ce qui donne un paramètre réel. Tout compte fait, les courbes A_r dépendent de $2m - 5$ paramètres réels.

La vérification de ce résultat est aisée sur les courbes du sixième degré qu'on peut représenter par :

$$x = \frac{t}{a(t + 1)}, \quad y = \frac{t^3}{at^2(t + 1) + b},$$

b étant imaginaire et a réel.

Quand k est différent de zéro, il est facile de voir que les polynômes α , β , γ , δ dépendent de $2k$ paramètres en moins, mais que l'équation (1) fournit k conditions en moins. Le nombre des paramètres est diminué de k , ce qui, évalué en paramètres réels, donne :

$$2m - 5 - 2k.$$

[15] L'élément linéaire de ces courbes, proportionnel à celui de l'indicatrice des binormales, se calcule aisément :

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 4\tau^2[(tx)'\beta - t\alpha\beta'][\delta(3\gamma + t\gamma') - \delta't\gamma].$$

Le second membre est le produit de deux polynômes, l'un de degré $2q - 2$, l'autre de degré $2r - 4$. Finalement

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = P_{2m-c}(t),$$

où P est un polynôme de degré $2m - 6$.

En particulier, pour la courbe du sixième degré, on a :

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 4\tau^2 a^2 \left(t^2 + \frac{3b}{a^2}\right).$$

[16] Nous passons maintenant à la détermination des courbes ayant deux points à l'infini, l'un de ces points étant caractérisé par :

$$p_1 = 2, \quad k_1 = 1.$$

Les indicatrices sont unicursales, et avec les conventions habituelles sur t , on peut écrire :

$$\begin{cases} x = t^2 \frac{\alpha}{\beta}, \\ y = t^3 \frac{\gamma}{\delta}. \end{cases}$$

La condition nécessaire et suffisante :

$$(1) \quad \alpha\delta - t\beta\gamma = 1$$

exprimera que l'indicatrice n'a que deux points à l'infini $t = 0, t = \infty$. Pour exprimer que les résidus relatifs à $t = 0$ sont nuls, nous appliquerons le résultat du paragraphe 17, chapitre II, en exprimant qu'une certaine fonction de x, y :

$$a_s^2(x - y)^3 - y^2$$

doit être du huitième ordre par rapport à t .

On voit immédiatement qu'il faut et il suffit que $\beta^3 \gamma^2 \delta - a_x^3$ soit du deuxième ordre, soit

$$(2) \quad \beta^3 \gamma^2 \delta - a_x^3 = kt^2.$$

Le problème est ramené aux conditions (1) et (2). Nous savons résoudre de la façon la plus générale l'équation (1) en nous aidant au besoin de la solution de :

$$\alpha \delta - \beta \gamma = 1.$$

Supposons comme une solution de (1). La solution plus générale où est un polynôme arbitraire convient également :

$$\begin{aligned} \alpha &= \gamma + \lambda x, \\ \beta &= \delta + \lambda t \beta. \end{aligned}$$

C'est cette solution plus générale que nous allons astreindre à vérifier la condition (2). Pour cela, il suffit de disposer des deux premiers coefficients de λ , les autres restant arbitraires. Nous aurons ainsi ce qu'on peut appeler la solution générale des équations (1) et (2).

Prenons par exemple $\alpha = \gamma = 1$. On aura immédiatement :

$$x = \frac{t^2}{at^2 + bt + c}, \quad y = \frac{t^2}{t(at^2 + bt + c) + d}.$$

Il faut que

$$(c + bt + at^2)^3 (d + ct + bt^2 + at^3) = a_x^3 + kt^2,$$

ce qui donne :

$$d = -\frac{c^2}{3b}.$$

Cette indicatrice dépend de trois paramètres en apparence, en réalité de deux, dont l'un a peut être supposé réel.

Si l'on applique la méthode précédente, on voit que

$$\begin{aligned} \alpha &= 1, & \gamma &= 1 + \lambda, \\ \beta &= at^2 + bt + c, & \delta &= t(at^2 + bt + c) - \frac{c^2}{3b} + \lambda t(at^2 + bt + c) \end{aligned}$$

fournira une infinité de solutions nouvelles, λ étant un polynôme arbitraire divisible par t^2 .

[17] L'évaluation du degré des courbes A_r est immédiate. Des deux points à l'infini, l'un compte pour 2, l'autre pour $2(m-2)-1 = k = 2m-5+k$. Le degré est donc :

$$2m - 3 - k.$$

Le degré minimum dans l'hypothèse $k = 0$ est obtenu pour $q = 2, r = 3$. On a une famille d'indicatrices du cinquième degré (nous venons de les obtenir) qui fournissent des courbes A_r du septième degré, et, parti de là, on peut avoir toutes les courbes de degré impair.

Le nombre k , quand il existe, est inférieur au plus petit des deux nombres $q-1, r-1$. On pourrait espérer, avec l'indicatrice $q = 2, r = 3$, obtenir pour $k = 1$ des courbes du sixième degré. On voit immédiatement qu'il faudrait

$$x = \frac{t^3}{at^2 + c}, \quad y = \frac{t^3}{t(at^2 + c) + d},$$

mais, puisque $b = 0$, l'équation

$$3bd + c^2 = 0.$$

donne $c = 0$, c'est-à-dire que l'indicatrice disparaît. Ce cas n'est donc pas possible. En revanche, nous allons montrer que pour $q = 3, r = 3, k = 1$, on obtient des courbes du huitième degré :

$$x = \frac{t^3(t+h)}{at^2(t+h) + kt + l}, \quad y = \frac{t^3}{at^2 + mt + n},$$

$$m = k, \quad n = l - hk$$

fournit une indicatrice qui n'a que deux points à l'infini, $k = 1$ au point $t = \infty$. Il faut maintenant exprimer la condition (2).

$$(l + kt + aht^2 + at^3)^3 (n + mt + at^2) = a_2^2 + kt^2,$$

$$mt^3 + 3l^2kn = 0 \quad \text{ou} \quad 4l - 3hk = 0,$$

$$x = \frac{t^3(t+h)}{at^2(t+h) + kt + \frac{3hk}{4}}, \quad y = \frac{t^3}{at^2 + kt - \frac{hk}{4}}.$$

Cette indicatrice du sixième degré fournit des courbes A_r du huitième degré. A partir de 8, tous les degrés pairs peuvent être obtenus.

Si l'on fait dans ces équations $a = 0$, $h = 0$, on obtient l'indicatrice :

$$x = t^2(t + h), \quad y = t^3$$

pour laquelle $k = 2$ au point $t = \infty$. Elle nous fournirait une courbe A_2 du septième degré. A partir de 7, on peut obtenir des courbes de tous les degrés impairs, présentant au point $t = \infty$ un point singulier d'ordre 3.

[18] De combien de paramètres dépendent ces courbes ?

On trouve $2m - 7 - 2k$ paramètres réels, si l'on tient compte de la rotation réelle permise autour de oz .

Par exemple, l'indicatrice que nous avons déterminée est du cinquième degré, elle dépend en apparence de a , b , c ; en réalité, la substitution de λt à t permet par exemple de prendre $b = 1$. Quant à a , il peut être supposé réel.

L'indicatrice du sixième degré $m = 6$, $k = 1$ que nous avons obtenue doit dépendre de deux paramètres complexes. C'est bien vrai, car on peut se fixer la valeur des paramètres h ou k .

L'indicatrice du cinquième degré $m = 5$, $k = 2$ doit dépendre d'un seul paramètre. Or celle que nous avons obtenue et qui n'est, au fond, pas autre chose que :

$$(x - y)^3 = h^2 y^2.$$

dépend d'un paramètre. Elle est la plus générale.

[19] L'arc de ces courbes est donné par :

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{P_{2m-3}}{t},$$

où P est un polynôme de degré $2m - 5$.

[20] Recherchons maintenant les courbes n'ayant que deux points à l'infini, l'un étant caractérisé par :

$$p = 3, \quad k = 0.$$

Les indicatrices doivent être unicursales, et leurs équations ont la forme :

$$x = t \frac{\alpha}{\beta}, \quad y = t \frac{\gamma}{\delta}.$$

Il faut d'abord exprimer que l'indicatrice n'a que deux points à l'infini $t=0$ et $t=\infty$, ce qui donne la condition :

$$(1) \quad \alpha\delta - \beta\gamma = t.$$

Il faut exprimer ensuite qu'au point $t=0$, elle a six points communs avec la courbe.

$$(2) \quad \begin{aligned} xy - a_1^2(x - y) &= 0, \\ \alpha\gamma - a_1^2 &\equiv kt^4. \end{aligned}$$

Telles sont les deux conditions du problème. Nous obtiendrons la solution générale par des méthodes identiques à celles des paragraphes précédents. Étant donnés deux polynômes α, β , premiers entre eux, nous savons construire la solution générale de (1). Elle se met sous la forme :

$$\begin{aligned} \gamma_0 + \lambda\alpha, \\ \delta_0 + \lambda\beta, \end{aligned}$$

γ_0 et δ_0 étant une solution particulière, λ un polynôme arbitraire. Il suffit de choisir convenablement les coefficients des quatre premiers termes du polynôme λ pour satisfaire à (2), les autres coefficients de λ resteront arbitraires. On peut présenter cette solution sous une autre forme. Les premiers termes de γ sont évidemment les mêmes que ceux de la solution γ_1 de :

$$\alpha\gamma_1 = a_1^2.$$

Il suffit donc de faire le développement de $\frac{a_1^2}{\alpha}$.

Les quatre premiers termes donneront les quatre premiers de λ .

[21] Pour obtenir le degré des courbes A_r correspondantes, il suffit de remarquer qu'elles ont deux points seulement à l'infini, dont l'un compte pour trois, l'autre pour $2m - 5 - k$, ou $m = q + r$.

Donc l'ordre de A_r est $2m - 2 - k$. Si $k=0$, nous obtiendrons des courbes de degrés pairs. La courbe du quatrième degré n'existe pas, car elle aurait été obtenue dans la recherche des courbes (1, 3), si nous représentons par ce schéma les courbes ayant à l'infini deux points comptant pour un et trois. La courbe du sixième degré doit avoir une indicatrice du quatrième degré. Or une telle courbe ne peut avoir six points communs avec la parabole sphérique qui sert de réduite sans être confondue avec cette parabole.

Il faut au moins une indicatrice $q=3$, $r=3$. Ainsi, α et γ sont du deuxième degré, β et δ du 3^e degré. On obtient ainsi la courbe de degré minimum, et ce degré est 10.

On obtient aisément la forme nécessaire de $\alpha\gamma, \beta\delta$:

$$\begin{aligned}\alpha &= a_1 + ht^2, \\ \gamma &= a_1 - ht^2, \\ \beta &= -t + (m + nt)(a_1 + ht^2), \\ \delta &= t + (m + nt)(a_1 - ht^2).\end{aligned}$$

Il est facile de voir qu'au point $t=\infty$, $k=0$. Si $m=0$, $k=1$, et l'on obtient une famille de courbes du neuvième degré dépendant en apparence de trois paramètres, en réalité de deux, ou encore de trois paramètres réels, si l'on suppose a_1 réel. Cette méthode fournira des courbes de tous les degrés pairs à partir de 10, de schéma

$$\left\{ \begin{array}{cc} 3 & M-3 \\ 0 & 0 \end{array} \right\},$$

le schéma général (chap. II, § 6) étant

$$\left\{ \begin{array}{c} p_1, p_2, \dots, p_\delta \\ k_1, k_2, \dots, k_\delta \end{array} \right\}$$

et des courbes de tous les degrés impairs M à partir de 9 de schéma :

$$\left\{ \begin{array}{cc} 3 & M-3 \\ 0 & 1 \end{array} \right\}.$$

[22] On pourrait obtenir autrement des courbes du neuvième degré.

Prenons dans α, γ , $h=0$, on aura

$$\begin{aligned}\beta &= -t + a_1\varphi_3(t), \\ \delta &= t + a_1\varphi_3(t),\end{aligned}$$

où φ_3 est un polynôme arbitraire du troisième degré. On doit prendre φ_3 du troisième degré; s'il était seulement du deuxième, on voit aisément que l'on n'aurait qu'une représentation impropre de la parabole sphérique.

On obtient une indicatrice du sixième degré qui a deux points à l'infini pour $t=0$, $t=\infty$, confondus géométriquement en $x=y=0$. Ceci est la singularité dont nous avons parlé au paragraphe 1 du chapitre II. On a donc une courbe

du neuvième degré qui a deux points à l'infini géométriquement confondus. Une des branches de courbe ne présente pas de singularité ponctuelle, mais coupe le plan de l'infini en trois points confondus; l'autre branche présente la singularité étudiée pour $k=1$, et coupe le plan de l'infini en six points confondus.

Une circonstance identique se présente si, α et γ étant donnés premiers entre eux et satisfaisant à l'équation (2), on prend des polynômes β et δ de degré supérieur de deux unités à ceux de α , γ .

Par exemple, si nous avons pris :

$$\begin{aligned}\beta &= -t + \varphi_2(a_1 + ht^2), \\ \delta &= t + \varphi_2(a_1 - ht^2).\end{aligned}$$

L'indicatrice du huitième degré ainsi obtenue nous donnait une courbe du quatorzième degré dont les deux points à l'infini sont géométriquement confondus.

Ainsi, ces problèmes ne présentent pas de difficultés spéciales; au contraire, ils sont en général plus faciles à résoudre que ceux où les points à l'infini sont géométriquement distincts.

[23] Les polynômes α_{q-1} , β_q , γ_{r-1} , δ_r dépendent de $2(q+r)$ paramètres, $2(q+r) - 2k$ si l'entier k existe. L'équation (1) introduit $q+r-1-k$ conditions. L'équation (2) en introduit trois. Il reste donc :

$$m - 2 \text{ paramètres.}$$

Comme on peut changer t en λt , il n'en reste que $m-3$, et, comme nous l'avons fait remarquer fréquemment, on peut supposer réel l'un de ces paramètres complexes.

Les courbes du dixième degré obtenues dépendent bien de trois paramètres, car on peut par exemple supposer $h=1$; de plus, a_1 peut être supposé réel.

Si k est différent de zéro, on trouve

$$m - 3 - k.$$

L'élément linéaire devient ici :

$$ds^2 = \frac{P_{2m-4}(t)}{t^4} dt^2.$$

[24] Cherchons toutes les courbes A_7 dont le schéma des points à l'infini soit :

$$\left\{ \begin{array}{cc} 5 & M-5 \\ 0 & k \end{array} \right\}.$$

Les indicatrices unicursales ont pour équation :

$$\begin{cases} x = t \frac{\alpha}{\beta}, \\ y = t \frac{\gamma}{\delta} \end{cases}$$

avec la condition :

$$(1) \quad \alpha\delta - \beta\gamma = t^2.$$

Et, pour que les résidus soient nuls au point $t = 0$, il faut et il suffit (paragraphe 12, chapitre III) qu'en appelant $\Phi(xy)$ une certaine équation réduite, on ait :

$$\Phi(xy) \equiv kt^p.$$

Or, ici la coordonnée Y qui figure dans l'équation réduite est $\frac{t^3}{\beta\delta}$, et l'on a finalement l'égalité :

$$(2) \quad \alpha^3\delta^3 - \delta(\alpha_1^3 - btx\beta - ct^2\alpha^2) + t^3\left(b(c+1)\beta + \frac{c(c+1)}{2}tx\right) \equiv 4t^6.$$

Cette dernière égalité introduit trois nouvelles constantes et doit être remplacée par six équations exprimant que le premier nombre a comme terme de plus bas degré un terme de degré 6.

Nous allons donner la solution générale des équations (1) et (2). Deux polynômes premiers entre eux $\alpha\beta$ étant donnés, les polynômes les plus généraux $\gamma\delta$ sont de la forme :

$$\begin{aligned} \gamma_0 + \lambda x, \\ \delta_0 + \lambda\beta. \end{aligned}$$

Dans l'équation (2) ne figure que le polynôme δ . Nous allons déterminer les premiers coefficients de λ , ou, ce qui revient au même, les premiers coefficients de δ , de manière à satisfaire l'équation (2).

Pour les obtenir aisément, remarquons que les coefficients cherchés, qui sont ceux des six premiers termes, sont les mêmes que ceux de la fonction δ_1 , solution de l'équation du second degré :

$$A\delta_1^2 - B\delta_1 + t^3C = 0,$$

ABt^3c sont les coefficients de δ_1^2, δ_1 et le terme indépendant.

A vrai dire, il y a deux solutions; mais une seule ne s'annule pas avec t . Elle est développable en série entière, suivant les puissances de t :

$$\delta_1 = \frac{1}{2A} \left[B + B \left(1 - 4t^3 \frac{Ac}{B^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right].$$

On peut même, puisque les termes à partir de t^6 ne nous intéressent pas, se borner à prendre

$$\delta_1 = \frac{B}{A} - t^3 \frac{C}{B}.$$

Ainsi, on fera les divisions indiquées, et l'on aura les six premiers termes du développement de δ, δ . Appelons δ_2 le polynôme du cinquième degré ainsi obtenu; l'égalité

$$\lambda_1 \delta = \delta_2 - \delta_0$$

détermine par une simple division les six premiers termes de λ .

Soit λ_2 le polynôme du cinquième degré obtenu. La solution la plus générale s'obtient en remplaçant dans les expressions de γ, δ le polynôme λ par

$$\lambda_2 + t^6 Q(t),$$

$Q(t)$ étant un polynôme absolument arbitraire. On voit que cette solution est obtenue uniquement par des opérations rationnelles.

En somme, quand on se donne la fraction rationnelle x , on détermine par ces opérations la fraction rationnelle y . Elle dépend d'un polynôme arbitraire.

[24] Soient q, r l'ordre des fractions rationnelles x, y .

Le point $t = 0$ de l'indicatrice fournit pour la courbe A_r un point $p_1 = 5, k = 0$; le point $t = \infty$ fournit un point $p = 2m - 7 - k$. L'ordre de A_r est donc $2m - 2 - k$. Si k est nul, cette méthode fournit donc des courbes de degrés pairs. La première à

obtenir a pour schéma $\left\{ \begin{matrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}$; elle existe effectivement; nous l'avons obtenue.

En revanche, la courbe $\left\{ \begin{matrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}$ n'existe pas; à partir de la courbe du dixième

degré $\left\{ \begin{matrix} 5 & 5 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}$ on aura des courbes de tous les degrés pairs.

Supposons pour simplifier que les deux points à l'infini de cette courbe du dixième ordre soient imaginaires conjugués, on pourra prendre pour ces deux

points $\lambda = 0$, $\mu = 0$, et $\lambda = \infty$, $\mu = \infty$, de sorte que l'indicatrice aura pour équations :

$$\begin{cases} x = t \frac{\alpha_z}{\beta_z}, \\ y = t \frac{\gamma_z}{\delta_z}. \end{cases}$$

La solution générale ne présente pas de difficultés. Cherchons à obtenir une solution simple :

$$\begin{aligned} \alpha_z &= a_0 + a_1 t^2, & \gamma_z &= c_0 + c_1 t^2, \\ \beta_z &= b_0 + b_1 t^2, & \delta_z &= d_0 + d_1 t^2. \end{aligned}$$

On aura d'abord :

$$\begin{aligned} a_0 d_0 - b_0 c_0 &= 0, \\ a_1 d_1 - b_1 c_1 &= 0. \end{aligned}$$

On exprimera ensuite que la condition (2) est satisfaite; il est facile de voir que le coefficient b de cette formule doit être nul; nous supposons en outre $c = -1$. On obtient alors, sans aucune difficulté, les quatre polynômes

$$\begin{aligned} \alpha &= a_0 + a_1 t^2, & \gamma &= \frac{a_0}{6a_1 b_0} + \frac{a_1}{2a_0 b_1} t^2, \\ \beta &= b_0 + b_1 t^2, & \delta &= \frac{1}{6a_1} + \frac{1}{2a_0} t^2. \end{aligned}$$

qui nous fournissent une infinité de courbes du dixième degré à torsion constante. Si l'on s'astreint en outre aux conditions :

$$\begin{aligned} b_0 &= -i a_0, & d_0 &= i c_0, & a_0^2 &= 3a_1^2 \\ b_1 &= i a_1, & d_1 &= -i c_1, \end{aligned}$$

on a l'indicatrice :

$$\begin{aligned} x &= it \frac{a_0 + a_1 t^2}{a_0 - a_1 t^2}, \\ y &= it \frac{\frac{1}{6a_1} - \frac{1}{2a_0} t^2}{\frac{1}{6a_1} + \frac{1}{2a_0} t^2}. \end{aligned}$$

qui est une courbe réelle; les points imaginaires conjugués s'obtiennent en changeant t en $\frac{-1}{t}$.

Nous retrouverons plus tard des courbes réelles plus générales de tous les degrés.

[25] Donnons encore une application simple des méthodes générales.

Prenons pour α et β deux constantes égales à l'unité. La fonction δ , déterminée par l'équation :

$$\delta_1^2 - \delta_1(a - bt - ct^2) + t^3 b(c + 1) + t^4 \frac{c(c + 1)}{2} = 0$$

fournit pour le polynôme du cinquième degré δ_2 :

$$\delta_2 = a - bt - ct^2 - \frac{b(c + 1)}{a} t^3 - \frac{c + 1}{a} \left(\frac{b^2}{a} + \frac{c}{2} \right) t^4 - \frac{b(c + 1)}{a^2} \left[\frac{b^2}{a} + \frac{3c}{2} \right] t^5.$$

Le polynôme γ est déterminé par :

$$\gamma = \delta - 4t^2.$$

On obtient ainsi une indicatrice du septième degré qui fournit une courbe A_7 du douzième degré.

[26] On trouvera aisément de combien de constantes doivent dépendre ces courbes. Nous ne reprendrons pas le raisonnement qui fournit $m - 2$ paramètres, dont l'un peut être considéré comme réel. C'est le résultat trouvé pour les courbes $\left\{ \begin{matrix} 1 & M - 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}$. La courbe $\left\{ \begin{matrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}$ qui est commune aux deux catégories dépend bien de 2 paramètres, un complexe, l'autre réel.

Si k est différent de zéro, on trouve $m - 2 - k$.

[27] Dans tous les exemples traités jusqu'ici, le paramètre t qui sert à représenter l'indicatrice unicursale donne une représentation propre de la courbe. Autrement dit, toutes les courbes ainsi déterminées sont de première classe, ou simples. Nous allons étudier maintenant les courbes de seconde classe qui se présentent les premières. Il faut qu'elles aient deux points à l'infini au moins, et si les nombres k relatifs à ces deux points sont nuls, les nombres p sont tous deux pairs. Nous avons

démontré que p ne peut être égal à deux. Nous allons donc d'abord rechercher toutes les courbes A_7 figurées par le schéma.

$$\left\{ \begin{array}{cc} 4 & M-4 \\ 0 & 0 \end{array} \right\} \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{cc} 4 & M-4 \\ 0 & k \end{array} \right\}.$$

Les indicatrices sont encore unicursales, mais ce résultat s'obtient en posant :

$$\frac{t-t_1}{t-t_2} = \theta^2,$$

t_1, t_2 correspondant aux deux points à l'infini. Ainsi, l'indicatrice est représentée par des équations de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\theta^2 a - \theta^3}{b} = \theta^2 \frac{\alpha}{\beta}, \\ y = \frac{\theta^2 a - \theta^3}{b} = \theta^2 \frac{\gamma}{\delta}. \end{array} \right.$$

Les deux points à l'infini devant correspondre à $\theta = 0, \theta = \infty$, a, b sont des polynômes en θ^2 , $\alpha\beta$ sont des polynômes en θ , $\gamma\delta$ ne sont autres que les polynômes $\alpha(-\theta), \beta(-\theta)$. On aura donc :

$$(1) \quad \begin{aligned} a + \theta^3 &= \alpha\delta, \\ a - \theta^3 &= \beta\gamma, \\ \alpha\delta - \beta\gamma &= 2\theta^3. \end{aligned}$$

Il faut d'abord résoudre l'équation (1). Nous poserons :

$$\begin{aligned} \alpha &= a_1 + \theta a_2, & \gamma &= a_1 - \theta a_2, & a &= a_1 b_1 - \theta^2 a_2 b_2, \\ \beta &= b_1 + \theta b_2, & \delta &= b_1 - \theta b_2, & b &= b_1^2 - \theta^2 b_2^2. \end{aligned}$$

a_1, a_2, b_1, b_2 sont quatre polynômes en θ^2 , astreints uniquement à vérifier l'équation :

$$(1') \quad a_2 b_1 - a_1 b_2 = \theta^2.$$

dont nous savons construire la solution la plus générale.

Il faut maintenant satisfaire à la condition des résidus (paragraphe 22, chapitre III).

Si l'on pose :

$$\Phi(x_1, y_1) \equiv x_1^3 - y_1^2 \left(x_0 + x_1 x_1 + \frac{5x_1^3}{2} \right),$$

$$x_1 = \frac{x+y}{2}, \quad y_1 = \frac{x-y}{2}, \quad t^2 = t$$

on doit avoir :

$$\Phi(x_1, y_1) \equiv kt^0,$$

ce qui donne immédiatement

$$(2) \quad a^3 - \left(x_0 b^3 + x_1 t a b^2 + \frac{5}{2} t^3 a^3 \right) \equiv kt^3.$$

Nous allons résoudre de la manière la plus générale les équations (1') et (2). Pour cela, donnons une solution de (1'); on peut en déduire la solution plus générale :

$$\begin{aligned} a_1 + \lambda b_1, & \quad b_1, \\ a_2 + \lambda b_2, & \quad b_2; \end{aligned}$$

b ne dépend pas de λ , le polynôme a devient $a + \lambda b$, et il faut déterminer les premiers coefficients de λ pour satisfaire à la condition (2). Cela revient à déterminer les six premiers termes du développement suivant les puissances de t , de la fonction A , solution de :

$$A^3 - x_0 b^3 - x_1 t A b^2 - \frac{5}{2} t^3 A^3 = 0.$$

Cette opération faite, on déterminera les six premiers coefficients de λ ; les autres coefficients resteront arbitraires. Quand on a déjà déterminé une solution particulière de (2), on obtient une infinité de solutions nouvelles en prenant la fonction λ divisible par t^6 .

[27] Donnons tout de suite un exemple :

$$x = t^2 \frac{m + nt^3}{p + qt^3}, \quad y = t^2 \frac{m - nt^3}{p - qt^3};$$

mn, pq sont des constantes, avec la condition :

$$(3) \quad np - mq = 1.$$

On a :

$$x_1 = t \frac{mp - nqt^3}{p^2 - q^2 t^3},$$

$$y_1 = \frac{t^5}{(p^2 - q^2 t^3)^2}.$$

Et la condition (2) devient :

$$(mp - nqt^3)^5 - \alpha_0 (p^2 - q^2 t^3)^3 - \alpha_1 t (mp - nqt^3) (p^2 - q^2 t^3)^2 - \frac{5}{2} t^3 (mp - nqt^3)^3 \equiv kt^5.$$

Il faut évidemment que α_1 soit nul, et l'on n'a plus que deux conditions :

$$m^5 - \alpha_0 p = 0,$$

$$-5mnpq + 3m^4 q^2 - \frac{5}{2} = 0.$$

Si l'on tient compte de (3), on trouve pour la deuxième condition :

$$(4) \quad m^2 q^2 - 5n^2 p^2 = 0.$$

Cette condition est la seule importante.

On voit aisément que les courbes que nous avons obtenues peuvent être réelles.

Il suffit que m et q , n et p soient imaginaires conjugués :

$$m = \rho e^{i\alpha}, \quad n = \rho e^{i\beta},$$

$$q = \rho e^{-i\alpha}, \quad p = \rho e^{-i\beta},$$

$$\rho^4 - 5\tau^4 = 0.$$

On obtient ainsi une famille de courbes réelles, les points imaginaires conjugués correspondant aux valeurs θ et $\frac{-1}{\theta}$.

Ce résultat sera généralisé, ainsi que celui du paragraphe 24.

[28] Si $2m$ est le degré de l'indicatrice, la courbe A_7 a deux points à l'infini ; l'un compte pour 4, l'autre pour $m - 6 - k$. Donc, l'ordre total est $2m - 2 - k$. Pour l'exemple que nous avons traité, les courbes à torsion constante sont du dixième degré.

[29] Nous pouvons maintenant traiter immédiatement le cas général de la courbe dont le schéma est

$$\left\{ \begin{array}{cc} 2n-1 & M-2n+1 \\ 0 & k \end{array} \right\}.$$

Les indicatrices sont unicursales; des deux points à l'infini, l'une compte pour n . On a donc :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = t \frac{\alpha}{\beta}, \\ y = t \frac{\gamma}{\delta}, \\ \alpha\delta - \beta\gamma = t^{n-1}. \end{array} \right.$$

Et de plus, pour que les résidus soient nuls en $t = 0$, on doit avoir une identité de la forme :

$$(2) \quad \alpha^n \delta^2 - \delta(a_1^n \beta^{n-1} + \alpha_1 t \beta^{n-2} \alpha + \dots - b t^{n-2} \beta \alpha^{n-2} - c t^{n-1} \alpha^{n-1}) + \dots \equiv k t^{2n},$$

qu'on obtient en exprimant la condition du paragraphe 3, chapitre IV.

Nous écrivons cette équation :

$$(3) \quad A\delta^2 - B\delta + t^n C \equiv k t^{2n}.$$

Les méthodes que nous avons données s'appliquent à la solution complète des équations (1) et (3). Partant d'une solution $\alpha, \beta, \gamma, \delta_0$ de (1) que nous savons construire, nous prenons pour γ, δ les polynômes :

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_0 + \lambda \alpha, \\ \delta &= \delta_0 + \lambda \beta. \end{aligned}$$

Le polynôme δ satisfaisant à l'équation (3) a ses $2n$ premiers coefficients identiques à ceux de la fonction δ_1 , solution de :

$$\begin{aligned} A\delta_1^2 - B\delta_1 + t^n C &= 0, \\ \delta_1 &= \frac{B}{A} - t^n \frac{C}{B} + t^{2n} P(t). \end{aligned}$$

Les deux premiers termes donneront par divisions un polynôme δ_2 du degré $2n-1$ qui sera le début de δ . On déterminera par une nouvelle division le polynôme λ . Ceci est tout à fait identique à ce que nous avons dit au paragraphe 23.

[30] Si $m = q + \tau$ est le degré de l'indicatrice, les courbes à torsion constante sont de degré $M = 2m - 2 - k$, les deux points à l'infini comptant respectivement pour $2n_1 - 1$, $2n_2 - 1 - k$, $k_1 + n_2 = m$.

En général, on aura $k = 0$, et cette méthode fournira des courbes de degrés pairs. Si $k \neq 0$, on aura des courbes de degrés pairs ou impairs, mais ayant à l'infini un point singulier d'ordre $k + 1$. Nous avons vu directement que cette méthode est capable de fournir des courbes (à partir du sixième degré) :

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right\} \begin{array}{c} 5 \\ 0 \end{array}, \quad \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right\} \begin{array}{c} 7 \\ 0 \end{array}, \quad \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right\} \begin{array}{c} 9 \\ 0 \end{array}.$$

Ainsi, pour toutes les valeurs de $2n - 1$, à partir de 5 on doit retrouver au début de l'échelle les courbes de degré $2n$, et c'est le degré minimum qu'on puisse obtenir, bien évidemment.

[31] Ces courbes dépendent, comme on le voit aisément, de $m - 2 - k$ paramètres complexes, dont l'un peut être supposé réel.

[32] Nous obtiendrons avec la même facilité toutes les courbes A_2 de schéma

$$\left\{ \begin{array}{cc} 2n & M - 2n \\ 0 & k \end{array} \right\}.$$

L'indicatrice sera représentée par les équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\theta^2 a + \theta^{2n-1}}{b}, \\ y = \frac{\theta^2 a - \theta^{2n-1}}{b}. \end{array} \right.$$

On aura :

$$\begin{aligned} a + \theta^{2n-1} &= x\delta, \\ a - \theta^{2n-1} &= \zeta\gamma, \\ x\delta - \zeta\gamma &= 2\theta^{2n-1}, \end{aligned}$$

ce qui se résout par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} x &= a_1 + \theta a_2, & \gamma &= a_1 - \theta a_2, \\ \zeta &= b_1 + \theta b_2, & \delta &= b_1 - \theta b_2, \\ (1) \quad & & a_2 b_1 - a_1 b_2 &= \theta^{2n-2}; \end{aligned}$$

a_1, a_2, b_1, b_2 sont des polynômes en $\theta^2 = t$. Enfin la condition relative aux résidus s'exprime sous la forme suivante :

$$(2) \quad a^{2n+1} - \left(\alpha_0 b^{2n-1} + \alpha_1 t a b^{2n-2} + \frac{2n+1}{2} t^{2n-1} a^{2n-1} \right) = k t^{2n-1}.$$

La solution générale des équations (1) et (2) s'obtient sans aucune difficulté par les méthodes indiquées.

[33] Si $2m$ est le degré de l'indicatrice, le degré des courbes est $2m - 2 - k$. Nous avons trouvé directement des courbes $\begin{Bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$, et, à partir de là, on peut trouver toutes les courbes $\begin{Bmatrix} 4 & M-4 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$. Il en résulte que les courbes $\begin{Bmatrix} 2n & M-2n \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$ existent certainement à partir du degré $2n + 4$, et c'est évidemment le degré minimum.

[34] Donnons un exemple simple et général. Soit :

$$\begin{cases} x = \theta^2 \frac{p + q\theta^{m-2}}{r + s\theta^{m-2}}, \\ y = \theta^2 \frac{p - q\theta^{m-2}}{r - s\theta^{m-2}}. \end{cases}$$

La condition (2) où $m = 2n + 1$ prend la forme :

$$(pr - qst^{m-2})^m - (qr - ps)^2 \left[\alpha_0 (r^2 - s^2 t^{m-2})^{m-2} \dots + \frac{m}{2} t^{m-2} (pr - qst^{m-2})^{m-2} \right] = k t^m.$$

On voit que α_1, α_2 sont nuls, et qu'il suffit en somme d'annuler le coefficient du terme en t^{m-2} et le terme constant.

Finalement, on obtient la condition nécessaire et suffisante :

$$(m - 4)p^2 s^2 - m q^2 r^2 = 0.$$

Nous obtenons une infinité de courbes à torsion constante de tous les degrés pairs à partir de 8, puisque les indicatrices ont tous les degrés à partir de 10.

Remarquons que ce calcul est parfaitement applicable au cas où m est pair. Les indicatrices sont alors de degré $\frac{m}{2}$.

Ainsi, les courbes A_r sont de première ou de deuxième classe, suivant que m est pair ou impair.

Il est facile de voir que ces courbes sont réelles si p et s , q et r sont imaginaires conjugués.

Les courbes d'un degré déterminé dépendent d'un paramètre. Ainsi, nous avons des courbes de tous les degrés pairs pouvant être réelles, et nous en avons une infinité pour chaque degré.

[35] Ces résultats sont analogues à ceux de M. Fabry; pour lesquels, comme nous l'avons vu, les points à l'infini sont singuliers, le nombre k étant différent de zéro. Ici les points à l'infini sont ordinaires. On peut donner les équations sous une autre forme en calculant les valeurs de α , β , γ , coordonnées d'un point du cône des binormales.

$$\begin{cases} \alpha = a_1 t + a_{m-1} t^{m-1}, \\ \beta = b - \frac{a_1^2}{4b} t^2 - \frac{a_{m-1}^2}{4b_m} t^{m-2} + b_m t^m, \\ \gamma = ib + \frac{ia_1^2}{4b} t^2 - \frac{ia_{m-1}^2}{4b_m} t^{m-2} - ib_m t^m. \end{cases}$$

Le cône des binormales est de degré m . Si la relation suivante est vérifiée,

$$16mb^2b_m^2 = (m-4)a_1^2a_{m-1}^2,$$

on obtient des courbes à torsion constante de degré $2m-2$, et ces courbes sont réelles si a_{m-1} est imaginaire conjugué de a_1 , b_m conjugué de b .

Cette méthode ne saurait fournir de courbes du sixième degré, puisqu'il faudrait que $m=4$. Nous avons d'ailleurs vu que les courbes unicursales $\begin{Bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$ n'existaient pas.

Nous savons aussi que les courbes $\begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$ ne peuvent exister.

[36] Si nous voulons maintenant déterminer de la manière la plus générale les courbes ayant seulement deux points à l'infini, de schéma $\begin{Bmatrix} p_1 & p_2 \\ k_1 & k_2 \end{Bmatrix}$, il nous suffit d'appliquer les résultats du chapitre IV. On aura toujours des indicatrices unicursales de première ou deuxième classe.

Supposons par exemple qu'elles soient de première classe. Alors, les équations sont les suivantes :

$$\begin{cases} x = t^{k_1+1} \frac{\alpha}{\beta}, \\ \gamma = t^{k_1+1} \frac{\gamma}{\delta}. \end{cases}$$

Avec la condition

$$(1) \quad \alpha\delta - \beta\gamma = t^{\frac{p_1-1-k_1}{2}}.$$

Et l'on doit avoir :

$$(2) \quad \Phi(xy) \equiv kt^M,$$

Φ étant une fonction connue, M un entier déterminé en fonction de n, k .

La solution générale des équations (1) et (2) s'obtient par les méthodes générales que nous avons indiquées. Le cas où l'indicatrice serait de seconde classe est tout à fait analogue.

On peut dire que nous savons déterminer toutes les courbes à torsion constante ayant seulement un ou deux points à l'infini. Nous allons comme application rechercher quelles sont les courbes unicursales à torsion constante, de degré au plus égal à six, ayant un ou deux points à l'infini.

[37] La cubique $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 0 \end{matrix} \right\}$ existe, c'est la seule.

Pour le quatrième degré $\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 0 \end{matrix} \right\}$ n'existe pas, $\left\{ \begin{matrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}$ non plus; nous savons qu'il ne peut exister de couple $\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix} \right\}$, il faudrait avoir $\left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\}$; nous avons déterminé toutes les $\left\{ \begin{matrix} 2 & M-2 \\ 1 & k \end{matrix} \right\}$. En résumé, pas de courbe du quatrième degré ayant un ou deux points à l'infini.

Pour le cinquième degré $\left\{ \begin{matrix} 5 \\ 0 \end{matrix} \right\}$ existe; nous avons à examiner ensuite

$$\left\{ \begin{matrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\}$$

aucune n'existe.

Pour le sixième degré, nous savons que $\left\{ \begin{matrix} 6 \\ 1 \end{matrix} \right\}$ n'existe pas. Il nous reste à examiner :

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{matrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}, & \left\{ \begin{matrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{matrix} \right\}, & \left\{ \begin{matrix} 1 & 5 \\ 0 & 4 \end{matrix} \right\}, \\ \left\{ \begin{matrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\}, & \left\{ \begin{matrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{matrix} \right\}, & \left\{ \begin{matrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{matrix} \right\}, \\ \left\{ \begin{matrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}, & \left\{ \begin{matrix} 3 & 3 \\ 0 & 2 \end{matrix} \right\}, & \\ \left\{ \begin{matrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\}. & & \end{array}$$

Nous avons vu que la première ligne fournit seulement $\begin{Bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$.

Aucune de la deuxième et de la troisième ligne n'existent.

Comme nous n'avons pas fait la recherche générale des courbes $\begin{Bmatrix} 3 & M-3 \\ 1 & k \end{Bmatrix}$, nous ne pouvons rien dire. Pour simplifier la recherche nous ferons l'hypothèse, non essentielle, que les deux points à l'infini sont imaginaires conjugués, ce qui permet de supposer que l'un est $x = y = 0$, l'autre $x = y = \infty$. On prendra

$$\begin{cases} x = t^4 \frac{a+t}{b+t}, & x_1 = t^2 \frac{ab-t}{b^2-t^2}, \\ y = t^4 \frac{a+t}{b+t}, & y_1 = t^2 \frac{(a-b)_2}{(b^2-t^2)^2}. \end{cases}$$

On constate immédiatement que des trois intégrales, ξ et η ont leurs résidus nuls. La condition pour ζ est

$$3a^2 + 5b^2 = 0.$$

Aussi ces courbes existent et dépendent d'un paramètre.

En résumé, nous trouvons :

$$\begin{aligned} & \text{une famille de cubiques } \begin{Bmatrix} 3 \\ 0 \end{Bmatrix}, \\ & \text{une famille du 5° degré } \begin{Bmatrix} 5 \\ 0 \end{Bmatrix}, \\ & \text{deux familles du 6° degré } \begin{Bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \text{ et } \begin{Bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

[38] Nous terminerons ce chapitre, consacré à la recherche effective de courbes A, les plus générales de leur définition, en cherchant toutes les courbes ayant seulement trois points à l'infini et de schéma

$$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & M-2 \\ 0 & 0 & k \end{Bmatrix}.$$

Nous supposons que ces trois points correspondent aux valeurs $0 \ 1 \ \infty$ du paramètre t . Nous supposons également que les points à l'infini ont pour valeurs communes de leurs coordonnées symétriques $0 \ \infty$ et 1 par exemple. Cette dernière hypothèse revient à admettre que les deux premiers points sont imaginaires conjugués. On peut toujours se ramener à ce cas en faisant au préalable un déplacement imaginaire. Nous savons qu'en appelant A, B, C les trois points à l'infini, l'indicatrice a pour tangente stationnaire en A, B une génératrice rectiligne de la sphère. Deux cas sont à distinguer, suivant que ces tangentes en A et B sont ou non du même système. Examinons successivement ces deux cas.

1° Nous avons pour équation de l'indicatrice :

$$x = \frac{t}{t-1} \frac{\alpha}{\beta},$$

$$y = \frac{t^3}{(t-1)^3} \frac{\gamma}{\delta}.$$

Avec la condition nécessaire et suffisante :

$$(1) \quad (t-1)^2 \alpha \delta - t^2 \beta \gamma = k.$$

Le problème est ramené à la résolution de l'équation (1) dont nous savons trouver la solution générale.

Signalons la solution très simple

$$\gamma = 1, \quad \alpha = t + \frac{1}{2},$$

$$\delta = 1, \quad \beta = t - \frac{3}{2}$$

qui fournit une indicatrice du cinquième degré. La courbe à torsion constante a trois points à l'infini, dont les deux premiers comptent pour 1, le troisième comptant pour 5. Ainsi, nous obtenons une courbe à torsion constante du septième degré qui ne dépend d'aucun paramètre.

2° Les équations de l'indicatrice sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{t}{(t-1)^3} \frac{\alpha}{\beta}, \\ y = \frac{t^3}{t-1} \frac{\gamma}{\delta}. \end{array} \right.$$

Avec la condition :

$$\alpha \delta - t^2 (t-1)^2 \beta \gamma = k$$

et nous saurons trouver les solutions les plus générales de cette équation. Signalons la solution particulièrement simple :

$$\beta = 1, \quad \alpha = t(t-1) + k,$$

$$\gamma = 1, \quad \delta = t(t-1) - k.$$

qui fournit une indicatrice du sixième degré. La courbe A, correspondante à deux points à l'infini comptant pour un, le troisième comptant pour 7. Nous obtenons donc une famille de courbes à torsion constante du neuvième degré dépendant d'un paramètre arbitraire.

CHAPITRE VI

Propriétés générales des courbes algébriques à torsion constante. — Recherche de l'équation de l'indicatrice ou du cône des binormales. — Limitation du genre. — Applications.

[1] Le présent chapitre sera consacré à la démonstration de quelques propriétés des courbes algébriques A , les plus générales. Nous allons voir d'abord qu'on peut trouver la forme que doit nécessairement avoir l'équation algébrique de l'indicatrice ou du cône des binormales pour que les singularités logarithmiques disparaissent des intégrales. Nous commencerons par les courbes n'ayant qu'un point à l'infini. Étudions d'abord celles qui sont de la première classe, c'est-à-dire dont l'équation est algébrique, non symétrique en x, y . Les courbes d'un même degré se distinguent par leur espèce, si nous entendons par là le nombre de points où elles sont coupées par les génératrices rectilignes des deux systèmes de la sphère. L'espèce sera représentée par $|q, r|$, q étant l'ordre de x , r l'ordre de y .

L'espèce $|1, r|$ sera unicursale, et nous l'avons obtenue; nous avons trouvé toutes les indicatrices où les polynômes α, β sont du premier degré.

L'espèce $|2, r|$ comprend des courbes unicursales, que nous avons obtenues. Je dis qu'on aura immédiatement la forme de l'équation, qu'elles soient ou non unicursales. L'équation est évidemment :

$$(1) \quad x^{r+2} - (x-y)P_{r+1}(x) + (x-y)^2Q_r(x) = 0.$$

Il faut que cette courbe rencontre en $3(r+2)$ points confondus une courbe d'équation analogue. Il en résulte que les polynômes P et Q des équations de ces courbes sont identiques. On en déduit immédiatement la valeur $c = -2$, et l'on a :

$$\begin{aligned} P &= a_0 + a_1x + \dots - bx^2 + 2x^{2-r}, \\ Q &= b_0 + b_1x + \dots - bx^{2-r} + x^2. \end{aligned}$$

Cette forme de P et Q était d'ailleurs nécessaire pour que l'équation (1) soit de degré r seulement en x . Il en résulte qu'elle était suffisante puisque le point à l'infini étant seul, son résidu devait être nul.

Ainsi, cette équation (1) est une forme nécessaire. Nos courbes unicursales avaient en particulier une équation de cette forme. En général, ces courbes sont hyperelliptiques. Nous écrirons l'équation

$$x^m - (x-y)P + (x-y)^2Q = 0.$$

L'expression de $x - y$ dépend alors de la racine du polynôme $R(x)$:

$$R(x) = P^2 - 4x^m Q.$$

Il est facile de voir, d'après la forme de P, Q , que ce polynôme est du degré $2m - 4$.

Ainsi, le genre de l'indicatrice est en général $m - 3$. Il s'abaisse si le polynôme $R(x)$ a des racines multiples. En particulier, s'il a $m - 3$ racines doubles, l'indicatrice est unicursale.

[2] Nous avons trouvé des indicatrices du quatrième degré $[x, 2]$ nous fournissant des courbes A_7 unicursales du septième degré. Il est naturel de se demander si l'on pourrait trouver des courbes simples non unicursales n'ayant qu'un point à l'infini, et de l'espèce que nous étudions. On voit aisément que les trois intégrales qui doivent être algébriques se ramènent aux suivantes :

$$\int \frac{P\sqrt{R}}{x^{2m}} dx, \quad \int \frac{(P - x^{m-1})\sqrt{R}}{x^{2m-1}} dx, \quad \int \frac{(P - 2x^{m-1})\sqrt{R}}{x^{2m-2}} dx.$$

Si ces intégrales sont algébriques, elles ont nécessairement la forme $\frac{A\sqrt{R}}{x^{p-1}}$, A étant un polynôme, p l'exposant de x au dénominateur de la fonction à intégrer. Le degré de A est $m - 1$ pour les deux premières intégrales, $m - 2$ pour la troisième.

Si R avait des racines multiples

$$R = R_1^2 R_2,$$

R_2 n'ayant qu'un nombre pair σ de racines simples, il faudrait prendre $\frac{A\sqrt{R_2}}{x^{p-1}}$. On a donc en général des identités :

$$\frac{SR_1\sqrt{R_2}}{x^p} = \frac{d}{dx} \left[\frac{A\sqrt{R_2}}{x^{p-1}} \right],$$

les polynômes S étant $P, P - x^{m-1}, P - 2x^{m-1}$, A, B, C étant des degrés $2m - 3 - \frac{\sigma}{2}$, $2m - 3 - \frac{\sigma}{2}$, $2m - 4 - \frac{\sigma}{2}$. On tire de là :

$$\frac{R_2'}{2R_2} Ax = SR_1 + (p - 1)A - xA';$$

A est donc divisible par R_2 , ce qui impose la condition :

$$2m - 3 - \frac{\sigma}{2} \geq \sigma.$$

On posera :

$$A = \alpha R_2$$

et on aura trois identités :

$$\begin{cases} \frac{3\alpha x R_2^4}{2} + R_2[\alpha'x - (2m-1)\alpha] = R_1 P, \\ \frac{3\beta x R_2^4}{2} + R_2[\beta'x - (2m-3)\beta] = R_1(P - x^{m-1}), \\ \frac{3\gamma x R_2^4}{2} + R_2[\gamma'x - (2m-3)\gamma] = R_1(P - 2x^{m-1}), \end{cases}$$

On en déduit une combinaison :

$$\frac{3}{2} \alpha R_2^4 (2\beta - \alpha - \gamma) + R_2 [x(2\beta' - \alpha' - \gamma') - (2m-2)(2\beta - \alpha - \gamma) + \alpha - \gamma] \equiv 0.$$

D'où résulte que R_2 doit diviser $2\beta - \alpha - \gamma$, ce qui fournit une nouvelle condition :

$$\begin{aligned} 2m - 3 - \frac{3\sigma}{2} &\geq \sigma, \\ \sigma &\leq 2 \frac{2m-3}{5}; \end{aligned}$$

or le nombre σ doit être au moins égal à 4. Donc m doit être au moins égal à 7. Nous sommes assurés déjà qu'il n'existe pas de courbes à torsion constante, de la classe que nous étudions, au-dessous du treizième degré. La courbe est alors de genre 1, si elle existe.

Le dénombrement des constantes, par une voie moins rigoureuse, va nous donner un résultat plus intéressant. L'ensemble des polynômes P et Q dépend de $2m - 4$ paramètres. Un polynôme de la forme $R_1^2 R_2$ dépend de $m - 2 - \frac{\sigma}{2} + \sigma + 1$ paramètres. L'indicatrice fournit $2m - 3$ conditions. Il reste donc $m - 2 + \frac{\sigma}{2}$ paramètres, qui doivent satisfaire aux trois équations où figurent les polynômes α, β, γ . On peut avoir immédiatement le nombre de conditions ainsi obtenues. Le genre de la courbe est ici $\frac{\sigma}{2} - 1$. Chaque intégrale donne $\sigma - 2$ conditions. En tout $3\sigma - 6$. Donc il reste finalement

$$m + 4 - \frac{5\sigma}{2} \text{ paramètres.}$$

Il faut donc que :

$$\sigma \leq \frac{2(m+4)}{5}.$$

Nous avons une vérification en faisant $\sigma = 2$, auquel cas la courbe est unicursale. Nous trouvons alors $m - 1$ paramètres; c'est le résultat obtenu directement.

Remarquons que les $3\sigma - 6$ conditions pouvaient s'obtenir en partant de nos trois équations et comptant les coefficients de α, β, γ , ainsi que le nombre des équations. Cette limite ainsi obtenue est meilleure que la première quand m est grand; elle nous montre que le genre de nos indicatrices de degré m est au plus $\frac{m-1}{5}$; ainsi les indicatrices jusqu'au neuvième degré inclus auront au plus le genre 1, jusqu'au dix-neuvième inclus, au plus, le genre 2, etc...

Si l'on part du fait que $\sigma \geq 4$, on trouve comme limite inférieure de m la valeur 6 moins bonne que celle trouvée tout à l'heure. Autrement dit, les courbes $\left\{ \begin{matrix} M \\ 0 \end{matrix} \right\}$ du troisième, cinquième, septième, neuvième, onzième degré sont forcément unicursales.

S'il existe une courbe du treizième degré non unicursale, elle est du genre 1 et dépend de 1 paramètre.

[3] Il nous reste à examiner le cas où l'indicatrice est de deuxième classe. Pour les courbes ayant un seul point à l'infini, l'indicatrice est toujours de première classe si le genre est zéro. Mais dès que le genre est différent, les deux cas sont possibles. Nous avons vu au paragraphe 16, chapitre III, que les courbes algébriques A , du cinquième degré ont un cône des binormales du troisième degré et une indicatrice représentée par :

$$x^3 y^3 + (x - y)^2 [A(x + y) + Bxy + C] = 0.$$

Cette indicatrice se décompose en deux cubiques si le genre du cône est zéro. Elle est de genre 1 dans le cas général.

Il n'y a aucune difficulté à trouver l'équation d'une indicatrice de degré $2n$, symétrique en x, y , et n'ayant qu'un point à l'infini.

Proposons-nous d'abord de chercher s'il existe des courbes du cinquième degré, de deuxième classe, n'ayant qu'un point à l'infini.

Il est facile de prévoir que ces courbes dépendant de trois paramètres, astreintes à 6 conditions qui expriment que les périodes des trois intégrales sont nulles, ne doivent pas exister. On le démontre en toute rigueur ainsi qu'il suit :

On peut exprimer

$$x_1 = \frac{x + y}{2}, \quad y_1 = \frac{x - y}{2}$$

en fonctions rationnelles d'un paramètre θ et de la racine carrée d'un polynôme du quatrième degré; il suffit de poser :

$$xy = \theta \frac{x - y}{2},$$

on trouve alors :

$$\frac{1}{y_1} = P_3(\theta) + \sqrt{R(\theta)}.$$

Si l'on exprime que les trois intégrales sont algébriques, on est ramené à exprimer que :

$$\int c^3 d\sqrt{R} \int \theta^2 d\sqrt{R} \int \theta d\sqrt{R}$$

ou

$$\int \theta^2 \sqrt{R} d\theta \int \theta \sqrt{R} d\theta \int \sqrt{R} d\theta$$

sont algébriques; or, il est évident que la dernière n'est algébrique que si R a une racine double, auquel cas le cône est unicursal.

[4] La méthode d'énumération des constantes conduit à étendre à ces courbes le résultat précédemment obtenu que le genre d'un cône de degré m est au plus $\frac{m-1}{5}$.

Il est facile de voir que l'équation générale d'un cône de degré m n'ayant qu'une génératrice isotrope est la suivante :

$$(x + iy)^m = (x^2 + \beta^2 + \gamma^2) \varphi_{m-2}(x, \beta, \gamma).$$

Il dépend donc de $\frac{m(m-1)}{2}$ constantes. Si son genre est g , il est assujéti à $\frac{(m-1)(m-2)}{2} - g$ conditions, et dépend donc en général de $m-1+g$ paramètres.

Or, les conditions pour que les intégrales soient algébriques sont au nombre de $6g$. Il en résulte que :

$$6g \leq m-1+g, \quad g \leq \frac{m-1}{5}.$$

Sous cette forme, le raisonnement est général et s'applique aux courbes de première ou deuxième classe; il ne permet pas d'affirmer qu'il n'existe pas de courbe $(2, m - 2)$ du onzième degré, mais il démontre qu'il n'existe pas de courbes A_7 ayant un seul point à l'infini, de genre non nul et de degré inférieur à onze.

[5] Tout ce que nous venons de dire est sans doute en accord avec les résultats des chapitres III et IV, mais ces résultats étaient inutiles pour former nos équations. Nous allons passer maintenant à un cas tout différent, celui où la courbe A_7 a tous ses points à l'infini comptant pour un. Nous allons voir qu'on peut trouver aisément l'équation de l'indicatrice ou du cône. Supposons d'abord une courbe de première classe, l'indicatrice sera d'espèce (q, r) . En chacun des points à l'infini, une génératrice rectiligne de la sphère est tangente stationnaire. Supposons qu'en q_1 de ces points, la tangente soit la génératrice $x = x_i$, en r_1 points la génératrice $y = y_k$.

L'équation a évidemment la forme :

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{q_1})(y - y_1) \dots (y - y_{r_1}) = (x - y)\psi(xy),$$

$x = x_i$ doit couper cette courbe en trois points confondus au point $x = y = x_i$. Donc ψ doit contenir en facteur $(y - x_i)^2$. Il en résulte que

$$\Psi = (y - x)^2 \Phi(xy) + \lambda(x - x_i) \dots (x - x_{q_1})(y - y_1) \dots (y - y_{r_1}).$$

Finalement on obtient :

$$\Pi(x - x_i)(y - y_k) = (y - x)^2 \Phi(x, y).$$

Il résulte de là que $q = q_1$, $r = r_1$ et que $\Phi(xy)$ est un polynôme de degré $r - 3$ en x , $q - 3$ en y . Telle est l'équation générale cherchée. Elle dépend de :

$$q + r + (q - 2)(r - 2) \text{ paramètres,}$$

et l'on peut y faire sur xy une substitution à trois constantes. Il reste finalement :

$$(q - 1)(r - 1) \text{ paramètres.}$$

Le genre de cette courbe est au maximum :

$$(q - 1)(r - 1).$$

C'est le genre maximum d'une courbe de degré $q + r$ ayant à l'infini deux points multiples d'ordre q et r . Si g est le genre réel, il faut $(q - 1)(r - 1) - g$ conditions supplémentaires, de sorte que le nombre total de constantes d'une telle équation

est g . Comme il faut $6g$ conditions pour que les intégrales soient algébriques, on voit qu'il n'existera pas de telles courbes A_τ , quel que soit d'ailleurs leur genre supposé différent de zéro. Nous démontrerons, par une méthode toute différente et plus rigoureuse, qu'il n'en existe pas d'unicursales.

[6] Envisageons maintenant le cas de courbes de deuxième classe, n'ayant à l'infini que des points comptant pour un. On montrera par une méthode analogue que l'indicatrice a pour équation :

$$(x - x_1)(y - x_1) \dots (x - x_m)(y - x_m) = (x - y)^4 \Phi(xy),$$

où $\Phi(xy)$ est symétrique en xy et d'espèce $(m - 4, m - 4)$.

Le cône des binormales possède une équation qui se déduit de celle-là. C'est la suivante :

$$D_1 D_2 \dots D_m = (x^2 + y^2 + z^2)^3 \Phi(x, y, z),$$

où $D_1 D_2 \dots D_m$ sont les équations de m plans isotropes, Φ étant une fonction entière homogène de degré $m - 4$.

On compte facilement les constantes d'une telle équation.

On arrive au même résultat que plus haut. Si g est le genre du cône, le nombre de constantes est g . Le résultat est donc le même.

Il n'y a pas de courbes à torsion constante algébriques ayant leurs points à l'infini comptant pour un.

[7] On peut trouver avec la même facilité les équations générales des indicatrices des courbes de première classe $\left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 3 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \end{matrix} \right\}$ où tous les points comptent pour un, sauf l'un d'eux qui compte pour trois. On trouvera l'équation :

$$\Pi (x - x_i)(y - y_k)[xy - k(y - x)] = (x - y)^3 \Phi(xy).$$

Le point qui compte pour trois est $x = y = 0$; Φ est d'ordre $r - 3$ en x , d'ordre $q - 3$ en y ; le nombre des facteurs $x - x_i$ est $r - 1$, $y - y_k$, $q - 1$.

Le nombre de paramètres d'une telle équation est encore $(q - 1)(r - 1)$ quand son genre g est maximum, ou g dans le cas général.

Les mêmes démonstrations établissent qu'il n'existe pas de courbes à torsion constante appartenant à cette catégorie, et de genre différent de zéro. Dans la recherche qui termine le chapitre V, nous avons trouvé une courbe $\left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\}$, des courbes $\left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\}$, mais pas de courbes du cinquième degré $\left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\}$, pas plus que nous n'avons trouvé de courbe du quatrième degré $\left\{ \begin{matrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}$. Nous avons démontré, pour cette dernière, qu'elle n'existait pas.

[8] Il paraît indiqué de chercher dans la voie des courbes $\left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 5 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \end{matrix} \right\}$, dont nous possédons deux exemplaires de genre 0, les courbes

$$\left\{ \begin{matrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\} \text{ et } \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\}.$$

Nous allons développer un peu la méthode par laquelle on arrive à l'équation générale de ces courbes, supposées de première classe. Supposons qu'elles soient de l'espèce (q, r) , leur équation est d'ordre r en x , q en y .

Écrivons-la :

$$F(xy) = F(xx) + (y - x) \frac{\partial F}{\partial y}(xx) \dots + \frac{(y - x)^q}{q!} \frac{\partial^q F}{\partial y^q}(x, x) = 0.$$

Les coefficients de $(x - y)^h$ sont des polynômes P_h de degré $q + r - h$. Supposons que les points à l'infini soient répartis de la manière suivante : r_1 d'entre eux ont comme tangente stationnaire une génératrice $x = x_i$, q_1 une génératrice $y = Y_k$; le dernier, qui compte pour trois, sera le point $x = y = 0$.

Alors on doit avoir :

$$F(xx) = \Pi_1(x) \Pi_2(x) x^3,$$

Π_1 étant le produit des $x - x_i$, Π_2 le produit des $x - y_k$, $x = x_i$ doit couper en trois points confondus. Donc les polynômes P_1, P_2 contiennent Π_1 en facteur; on a :

$$F(xy) = \Pi_1 \left(x^3 \Pi_2 + (y - x) p_1 + \frac{(y - x)^2}{2} p_2 \right) + (y - x)^3 \lambda(xy),$$

p_1 et p_2 sont des degrés respectifs

$$q + r - 1 - r_1 = q_1 + 2,$$

$$q + r - 2 - r_1 = q_1 + 1,$$

puisque :

$$q_1 + r_1 + 3 = q + r.$$

Il faut maintenant que les génératrices $y = y_k$ coupent à leur tour en trois points confondus.

La parenthèse coefficient de Π_1 doit s'annuler, ainsi que ses deux dérivées premières, quand $x = y = y_k$. On en déduit que :

$$p_1 = \frac{d}{dx} (x^3 \Pi_2) + \Pi_2 R_2,$$

$$p_2 = \frac{d^2}{dx^2} (x^3 \Pi_2) + 2 \frac{d}{dx} (\Pi_2 R_2) + \Pi_2 R_1,$$

où R_1 et R_2 sont des polynômes du premier et du deuxième degré. Il résulte de cette forme de p_1, p_2 que la parenthèse peut être considérée, à des termes près contenant $(x - y)^3$, comme la fonction :

$$\Pi_2(y) \left[y^3 + (y - x) R_2 + \frac{(y - x)^2}{2} R_1 \right].$$

Ainsi l'équation prend la forme :

$$\Pi_1(x) \Pi_2(y) \left[y^3 + (y - x) R_2 + \frac{(y - x)^2}{2} R_1 \right] = (y - x)^3 \Phi(xy).$$

Cette équation doit être d'ordre r en x , q en y . A cette condition, les résidus relatifs au dernier point à l'infini seront nuls. Mais nous pouvons écrire tout de suite la forme des polynômes R_2 et R_1 .

On a nécessairement :

$$-R = a - by - cy^2,$$

$$\frac{R_1}{2} = b(c + 1) + \frac{c(c + 1)}{2} y^2.$$

Si cette condition est remplie, quelle que soit l'équation, on aura peut-être un autre point à l'infini, correspondant à des valeurs infinies de xy , mais les résidus seront nuls en ce point. Pour ce que nous voulons, il faut ajouter la condition que l'ordre $q + r$ soit égal à $q_1 + r_1 + 3$. Dans les exemples traités précédemment, il ne pouvait y avoir de réduction entre les termes de plus haut degré du premier et du deuxième membre de l'équation. Le fait devient possible ici.

Un exemple simple est fourni par la courbe

$$(y + 1)[x^3 + (x - y)(x + 1) + (x - y)^2] + (x - y)^3 = 0,$$

qui n'est autre que :

$$x^3(y + 1) + (x + 1)^2(x - y) = 0,$$

indicatrice $(1 \quad 3)$ d'une courbe à torsion constante $\left\{ \begin{array}{l} 1 \quad 5 \\ 0 \quad 0 \end{array} \right\}$.

Nous allons voir que cette réduction peut se présenter dans le cas général.

Dans notre équation y figure au degré maximum $q_1 + 3$, x au degré maximum, $r_1 + 2$. Il est impossible que xy figurent effectivement à ces degrés.

Voyons s'il est possible d'avoir le degré $q_1 + 3$ pour y , r_1 pour x .

Il faut pour cela que les polynômes en y , coefficients des termes en x^{r_1+2} , x^{r_1+1} disparaissent. Au premier membre, nous trouvons pour x^{r_1+2} :

$$\Pi_2(y) \left(b(c+1) + \frac{c(c+1)}{2} y \right).$$

Au second membre, $\Phi(xy)$ doit être d'ordre $r_1 - 1$ en x , q en y :

$$\Phi(xy) \equiv x^{r_1+1} P_1(y) + x^{r_1-2} P_2(y) + \dots$$

On trouve la condition :

$$P_1 = \Pi_2(y) \left(b(c+1) + \frac{c(c+1)}{2} y \right).$$

Or P_1 doit être du degré q_1 , il faut donc que c soit égal à zéro ou à -1 . Si $c = -1$, il n'y a pas de terme en y^{q_1+3} , et ce cas sera examiné. Donc c est nul.

$$P_1 = b \Pi_2(y).$$

Si on désigne par Σx_i la somme des r_1 quantités x_i , on trouve ensuite pour déterminer P_2 :

$$P_2 = (a - b \Sigma x_i) \Pi_2(y).$$

Et ces conditions sont suffisantes. Ainsi l'équation de nos courbes en apparence d'espèce $(r_1 + 2, q_1 + 3)$ est en réalité $(r_1, q_1 + 3)$ et nous avons une première solution du problème.

Si x figure à degré supérieur à r_1 , il faut que y figure au plus au degré $q_1 + 2$. On trouve aisément la condition $c = -1$ ou $c = -2$. Ces conditions se ramènent l'une à l'autre par l'échange de xy .

Prenons $c = -1$. Alors, le premier membre de notre équation est d'espèce $r_1 + 1, q_1 + 2$. Il suffit donc que $\Phi(xy)$ soit d'espèce $r_1 - 2, q_1 - 1$.

Et nous avons ainsi la deuxième solution du problème entièrement distincte de la première.

Nous allons évaluer les constantes dont ces solutions dépendent.

[9] La première dépend au premier membre de $q_1 + r_1$ constantes. Au second membre $r_1(q_1 + 1) - 2q_1 - z_1$ puisque deux des polynômes sont déterminés. On trouve finalement :

$$(r_1 - 1)(q_1 + 2) = (r - 1)(q - 1) = y.$$

Ainsi pour ces courbes également, le nombre des constantes est égal au genre g , car cette relation se maintient si le genre n'a pas sa valeur la plus grande.

Ainsi il n'existe pas de telles courbes de genre non nul. Si leur genre est nul, elles ne dépendent d'aucune constante. Il y a là contradiction avec ce fait que la courbe $\begin{Bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$ que nous avons trouvée dépend de deux constantes. Cela tient à ce qu'il faut considérer à part le cas où $r_1 = 1$, $r_2 = 2$.

Si $r_1 = 1$, on trouve que l'équation se réduit à :

$$(x + 1)[y^3 - (y - x)(a - by) + b(y - x)^2] = b(x - y)^3.$$

Courbe du quatrième degré unicursale $g = (q - 1)(r - 1) = 0$ dépendant d'une constante. C'est au fond le résultat que nous avons trouvé. Cette dernière courbe ne dépend que d'une constante, puisqu'on dispose encore d'une substitution conservant les points $x = y = -1$, $x = y = 0$, mais cette substitution n'est pas un déplacement réel. En tenant compte de cette remarque on voit bien que nos résultats sont les mêmes.

Nos indicatrices (1 3) dépendent de trois paramètres réels. $r = 2$ donne une courbe à deux paramètres et du genre 2, ne pouvant fournir elle aussi que des courbes de genre 0, sans paramètre.

En résumé, cette première solution ne saurait donner aucune courbe de genre non nul. Elle fournit une courbe du sixième degré à trois paramètres réels. Si elle peut donner les courbes unicursales de degré supérieur, celles-ci ne dépendront d'aucun paramètre.

Les résultats sont analogues pour la deuxième solution qui ne fournit elle aussi que des courbes unicursales ne dépendant d'aucun paramètre.

Le raisonnement est le même. Il est remarquable que nous ayons obtenu une de ces courbes, c'est précisément la courbe $\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$, ne dépendant d'aucun paramètre. On se rend compte aisément qu'elle est d'espèce (2, 3). On a ici $r_1 = 0$, $q_1 = 2$. En effet, les deux tangentes stationnaires sont du système $y = y_k$.

[10] La méthode que nous avons suivie s'étend immédiatement aux courbes $\left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 7 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \end{matrix} \right\}$. L'équation générale des indicatrices est

$$\begin{aligned} & \Pi_1(x)\Pi_2(y)[y^4 - (y-x)(x_0 + x_1y - by^2 - cy^3)] \\ & + (y-x)^2 \left(\frac{c}{2} + b(c+1) + \frac{c(c+1)}{2} y^2 \right) = (x-y)^3 \Phi(xy). \end{aligned}$$

Une telle équation est en général d'ordre $r_1 + 2$ en x , $q_1 + 4$ en y . Il faut que l'ordre total soit $q_1 + r_1 + 4$. Nous aurons donc à examiner si l'ordre en y restant $q_1 + 4$, les termes en x^{r_1+2} , x^{r_1+1} peuvent disparaître. On trouve que $\Phi(xy)$ doit être :

$$\begin{aligned} \Phi(xy) &= x^{r_1-1} P_1(y) + x^{r_1-2} P_2(y) + \dots, \\ P_1(y) &= \Pi_2(y)Q, \\ P_2(y) &= \Pi_2(y)(P + Qy - \Sigma Q). \end{aligned}$$

En conservant la signification de Σ et désignant par P, Q les coefficients de $-(y-x)$, $(y-x)^2$ dans la parenthèse du premier membre.

Il faut encore que Q soit seulement du premier degré, ce qui donne $c=0$, en réservant $c=-1$. P_1 et P_2 sont bien alors d'ordre $q+1$ et nous avons une solution.

Si l'ordre en y est inférieur à $q_1 + 4$, il faut $c=-1$ ou $c=-2$. Si $c=-1$, l'ordre en y est en général $q_1 + 3$, il faut que le terme en x^{r_1+2} disparaisse ou

$$P_1 = \Pi_2 Q,$$

P_1 , est bien d'ordre q seulement.

Si $c=-2$, l'ordre en y est $q_1 + 2$, en x $r_1 + 2$. Le polynôme $\Phi(xy)$ est alors arbitraire, d'ordre $q_1 - 1$ en y , $r_1 - 1$ en x . Telles sont les trois solutions que l'on trouve par le même raisonnement dans le cas général.

Si $r_1 = 1$, la première solution fournit des indicatrices unicursales dépendant de trois paramètres. Nous en avons trouvé de telles, ce sont celles des courbes $\left\{ \begin{matrix} 1 & 7 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}$, les résultats sont bien les mêmes.

Si $r_1 = 2$, on obtient des indicatrices d'espèce (4 2), de genre 3, incapables de fournir des courbes de genre non nul, pouvant fournir des courbes unicursales à un paramètre. Si $r_1 > 2$, on trouve que la courbe dépend de $g + 1$ paramètres, g étant le genre. Elle ne peut donc fournir que des courbes unicursales à un paramètre.

Passons à la deuxième solution, $q_1 + 3$, $r_1 + 1$. Si $r_1 = 1$, elle fournit des courbes Λ_7 de genre 2, à trois paramètres.

Si $r_1 = 2$ des courbes de genre 4, à cinq paramètres, en général à $g + 1$ paramètres.

Pour la troisième solution, elle dépend aussi de $g + 1$ paramètres. Donc, pour ces deux dernières catégories on ne peut avoir que des courbes unicursales à un paramètre.

Un exemple de courbe de la troisième catégorie a été obtenu à la fin du précédent chapitre, c'est la courbe $\left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\}$.

[11] Ces résultats sont faciles à généraliser. L'équation générale des indicatrices des courbes $\left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 2n-1 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \end{matrix} \right\}$ a la forme

$$\Pi_1(x)\Pi_2(y)[y^n - (y-x)P(y) + (y-x)^2Q(y)] = (x-y)^3\Phi(xy)$$

ou les polynômes P et Q ont la forme connue (Chap. IV, § 2).

On trouvera trois catégories de courbes :

1° L'espèce $(q_1 + n, r_1)$ correspondant à $c = 0$, les deux premiers polynômes P_1 , P_2 de degrés $q_1 + n - 3$ sont déterminés par :

$$\begin{aligned} P_1 &= \Pi_2 Q, \\ P_2 &= \Pi_2 (P + Qy - \Sigma Q). \end{aligned}$$

2° L'espèce $(q_1 + n - 1, r_1 + 1)$ correspondant à $c = -1$. On a P_1 de degré $q_1 + n - 4$

$$P_1 = \Pi_2 Q.$$

3° L'espèce $(q_1 + n - 2, r_1 + 2)$ correspondant à $c = -2$.

Si $r_1 = 1$, la première catégorie fournit des courbes unicursales dépendant de $2n - 5$ paramètres, ce sont nos courbes $\left\{ \begin{matrix} 1 & 2n-1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}$.

Si $r_1 > 1$, elles dépendent de $g + n - 3$ paramètres, g étant le genre.

Les courbes de deuxième et troisième catégories dépendent de $g + n - 3$ paramètres.

Ainsi, comme on doit vérifier $6g$ conditions, il faut que :

$$g \leq \frac{n-3}{5}.$$

Pour obtenir des courbes non unicursales, il faut au moins $n = 8$. Si ces courbes existent, elles sont du genre 1, leur ordre le moins élevé est 16, ce sont des courbes $\left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}$ correspondant à une indicatrice du neuvième degré; elles ne doivent dépendre d'aucun paramètre.

Au-dessous de $n = 8$, il n'existe que des courbes unicursales dépendant de $n - 3$ paramètres.

[12] Nous nous contenterons de cette application assez large, qui fait suffisamment comprendre la proposition suivante :

Les théorèmes généraux du chapitre IV permettent de trouver la forme générale de l'équation d'une indicatrice quand on connaît le degré de la courbe à obtenir et la nature de ses points à l'infini.

Cette forme d'équation assure la disparition des singularités logarithmiques.

[13] Nous allons compléter les résultats du paragraphe 5, en démontrant que les courbes unicursales n'ayant à l'infini que des points comptant pour un, n'existent pas. Leur indicatrice serait unicursale et on aurait :

$$x = \frac{\alpha}{\beta}, \quad y = \frac{\gamma}{\delta},$$

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \Pi(t - t_i),$$

c est un polynôme de degré $q + r$ dont les racines sont les $q + r$ valeurs t_i qui correspondent aux points à l'infini. Il faut maintenant qu'en chacun de ces points, une génératrice rectiligne soit tangente stationnaire, ce qui exige que $\frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt}$ possèdent l'un q_i racines doubles, l'autre r_i racines doubles, choisies parmi les t_i , et telles que :

$$q_i + r_i = q + r.$$

Or $\frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt}$ ne peuvent avoir au maximum que $q - 1$, $r - 1$ racines doubles, en tout $q + r - 2$. Ainsi, le théorème est démontré et finalement :

Il n'existe aucune courbe à torsion constante, unicursale ou non, ayant tous ses points à l'infini, comptant pour un.

Ce résultat est l'un des plus remarquables de cette théorie.

[14] On peut démontrer par une autre voie, qui paraît féconde, le dernier théorème relatif aux courbes unicursales. Rappelons à cet effet qu'étant donnée une relation algébrique entre x et y , de degré m , par rapport à y ; si on appelle ρ le nombre de branches de la fonction algébrique $y(x)$ qui se permutent en un point de ramification, le genre de cette relation peut être calculé par la formule de Riemann :

$$g = \Sigma \left(\frac{\rho - 1}{2} \right) - m + 1,$$

où la somme Σ est étendue aux différents points de ramification.

Les courbes de première classe et de schéma $\left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & & 0 \end{array} \right\}$ ont une équation générale.

$$\Pi_1(x) \Pi_2(y) = (x - y)^3 \Phi(xy).$$

Nous appellerons r le plus grand des nombres q, r . L'équation est de degré q en y . Or, on connaît à priori r points de ramification, ce sont tous les points $x = x_i$, en ces points trois valeurs de y se permutent, on a donc :

$$g \geq r - q + 1.$$

Il résulte de là que le genre ne peut descendre qu'à la valeur 1.

Il n'y a pas de courbes unicursales (nous avons vu autrement qu'il n'y avait pas non plus d'autres courbes).

[15] On peut appliquer le même raisonnement aux courbes de schéma $\left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & \dots & 3 \\ 0 & 0 & & 0 \end{array} \right\}$ et de première classe. Leur équation est de degré $q + 1$ en y , r points de ramification sont en évidence en la forme :

$$\Pi_1(x) \Pi_2(y) [xy - k(x - y)] = (x - y)^3 \Phi(xy).$$

Ainsi, le genre est limité inférieurement par :

$$g \geq r_1 - q_1.$$

S'il existe des courbes unicursales, ce ne peut être que dans l'hypothèse $r_1 = q_1$. Elles doivent être coupées en même nombre de points par les génératrices rectilignes de l'un et de l'autre système. Nous avons vu qu'elles ne doivent dépendre d'aucun paramètre.

CHAPITRE VII

Transformation des courbes à torsion constante. — Nombre illimité de solutions nouvelles déduites d'une solution particulière. — Les courbes du quatrième degré. — Les courbes unicursales du cinquième et sixième degrés.

[1] Le chapitre précédent nous a montré que des recherches de courbes A_7 ayant un grand nombre de points à l'infini devaient ne pas aboutir dans certains cas. Nous allons voir qu'on peut, par des transformations simples et successives, obtenir des courbes ayant un nombre quelconque de points à l'infini. Supposons connue une courbe unicursale à torsion constante. Nous savons déterminer toutes celles qui ont un ou deux points à l'infini et une classe intéressante ayant trois points à l'infini. On aura, dans le cas le plus général :

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = \frac{A}{C}, \\ xy = \frac{B}{C}, \end{array} \right. \quad (x - y)^2 = \frac{A^2 - 4BC}{C^2},$$

A, B, C étant trois polynômes en t .

Les trois intégrales qui sont algébriques sont ici :

$$\begin{aligned} \xi &= \int \frac{d(x + y)}{(x - y)^2} = \int \frac{CA' - AC'}{A^2 - 4BC} dt, \\ \eta &= \int \frac{d\left(\frac{x + y}{xy}\right)}{\left(\frac{x - y}{xy}\right)^2} = \int \frac{BA' - AB'}{A^2 - 4BC} dt, \\ \zeta &= \int \frac{d(xy)}{(x - y)^2} = \int \frac{CB' - BC'}{A^2 - 4BC} dt, \end{aligned}$$

Je dis qu'on peut obtenir par là une infinité d'autres courbes unicursales. Posons :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x + \lambda(t), \\ y_1 = y + \lambda(t). \end{array} \right.$$

Supposons que la valeur $t = \infty$ n'annule pas $(x - y)^2$ et que les points à l'infini de la première courbe correspondent à des valeurs finies égales de x et y . Alors, la

courbe lieu du point xy , aura pour points à l'infini tous les points de la première, et en outre les points correspondant aux infinis de la fonction λ .

Supposons que λ soit un polynôme en t . La courbe aura un point à l'infini de plus que la première, il sera obtenu pour $t = \infty$.

Il est bien évident que si l'on peut choisir λ , de façon que la deuxième courbe ait un contact assez intime avec la première en chaque point à l'infini, les résidus des intégrales relatives à la deuxième courbe resteront nuls, et le résidu relatif au nouveau point introduit ne pourra qu'être nul lui aussi. C'est ce que le calcul va nous montrer immédiatement. Les nouvelles intégrales

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \xi + 2 \int \frac{C^2 d\lambda}{A^2 - 4BC}, \\ \gamma_1 &= \gamma + 2\lambda\xi + \lambda^2\zeta - 2 \int \zeta d\lambda - 2 \int \xi\lambda d\lambda + \lambda + 2 \int \frac{(xy + \lambda(x+y) + \lambda^2)}{(x-y)^2} d\lambda, \\ \zeta_1 &= \zeta + \lambda\xi - \int \xi d\lambda + \int \frac{AC'}{A^2 - 4BC} d\lambda + 2 \int \frac{\lambda d\lambda}{A^2 - 4BC}\end{aligned}$$

seront évidemment algébriques si le polynôme λ est tel que :

$$\lambda^2 = (A^2 - 4BC)M(t),$$

$M(t)$ étant absolument arbitraire.

On obtient ainsi une infinité de courbes unicursales nouvelles ayant un point à l'infini de plus que la courbe initiale. Il importe de caractériser ces courbes nouvelles.

[2] Pour cela, nous allons étudier ces courbes au voisinage de chacun des points à l'infini. Le polynôme $A^2 - 4BC$ comporte autant de facteurs $t - t_i$ qu'il y avait de points à l'infini distincts dans la courbe initiale, l'ordre de multiplicité est $p_i + 1 + k_i$. Les polynômes A, B, C sont en somme les coordonnées d'un point du cône des binormales; d'une façon précise ce sont les quantités $2\gamma, \alpha + i\beta, \alpha - i\beta$. On peut supposer, pour l'étude au voisinage d'un point que A contient un facteur $(t - t_i)^{2k_i+1}$, B contenant $(t - t_i)^{2k_i+2}$, C ne s'annulant pas. λ contiendra un facteur $(t - t_i)^{p_i+k_i+2}$. Il résulte de là que $x_1 + y_1$ contiendra un facteur $(t - t_i)^{k_i+1}, x_1 y_1, (t - t_i)^{2k_i+2}$. Sur la nouvelle courbe le point aura les mêmes caractéristiques $p_i k_i$.

Il reste à étudier le nouveau point, il suffit de considérer les quantités $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{y_1}$ qu'on appellera pour un instant X_i, Y_i ; $(X_i - Y_i)^2$ est en $\frac{1}{t}$ de l'ordre de λ^4 . Désignons par μ .

le degré de $M(t)$. λ est d'ordre de $2m + 1 + \mu$; m étant l'ordre du cône des binormales. On a donc pour le nouveau point :

$$P + 1 + K = 4(2m + 1 + \mu),$$

$$X_1 + Y_1 \text{ est d'ordre } 2m + 1 + \mu, \quad X_1 Y_1 \text{ d'ordre } 2(2m + 1 + \mu).$$

Donc, les valeurs de P, K , sont :

$$P = 3(2m + 1 + \mu),$$

$$K = 2m + \mu.$$

Nous avons l'ordre de la nouvelle courbe et la nature de ce nouveau point à l'infini.

Appliquons par exemple ce procédé à la cubique gauche $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 0 \end{matrix} \right\}$.

Nous avons ici $m = 2$:

$$P = 3(5 + \mu),$$

$$K = 4 + \mu.$$

Ainsi, nous obtenons une infinité de courbes, la plus simple est $\left\{ \begin{matrix} 3 & 15 \\ 0 & 4 \end{matrix} \right\}$ qui est du dix-huitième degré.

[3] L'hypothèse que $t = \infty$ ne donne pas un point à l'infini n'était pas essentielle, si elle n'est pas vérifiée la méthode s'applique encore, mais donne simplement une courbe nouvelle ayant même nombre de points à l'infini, l'un d'eux ayant changé de caractéristiques, si x et y devenaient infinis pour $t = \infty$. S'ils restaient finis, l'ancien point à l'infini disparaît pour être remplacé par un nouveau.

Nous avons déjà trouvé des transformations changeant les caractéristiques d'un point à l'infini. Dans la détermination des courbes ayant un ou deux points à l'infini, la connaissance d'une solution en fournit une infinité d'autres dépendant d'un polynôme arbitraire.

La transformation générale que nous venons d'indiquer est distincte de ces premières transformations.

[4] Nous sommes en mesure, poursuivant l'application de la méthode, de construire maintenant des courbes ayant autant de points à l'infini que nous le voudrons.

Le degré de ces courbes augmente très vite et les nouveaux points à l'infini présentent des singularités élevées.

Nous ne faisons qu'indiquer ces méthodes qui fournissent des solutions particulières en nombre illimité, l'objet de ce travail étant plutôt la recherche générale de catégories bien déterminées de solutions.

Nous terminerons en faisant une application des méthodes et des résultats à la recherche :

- 1° De toutes les courbes à torsion constante du quatrième degré;
- 2° De toutes les courbes unicursales de degré inférieur ou égal à six.

[5] Aucune des méthodes employées n'a pu fournir de courbes du quatrième degré. Nous allons les chercher directement. Tous les schémas possibles *à priori*, sont les suivants :

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit cinq cas à examiner.

Dans les cas 1, 3 et 4 la courbe est unicursale, nous avons trouvé toutes les courbes n'ayant qu'un ou deux points à l'infini. Il en résulte que 1 et 3 ne sauraient fournir de solution.

Nous avons également trouvé les courbes $\begin{pmatrix} 1 & 1 & M-2 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$; le quatrième cas ne s'est pas présenté.

Dans le cas (2) la courbe est soit unicursale, soit de genre 1.

Nous savons déjà que les courbes unicursales ne donnent pas de solution. Si le genre est 1, le cône Γ des binormales est du troisième ordre, avec deux génératrices isotropes comptant pour 2 et 4 dans l'intersection avec le cône isotrope. Or, d'après le paragraphe 9, chapitre II, le cône Γ doit avoir en commun, avec un certain cône du deuxième ordre, huit génératrices confondues, ce qui est impossible. Il reste à examiner le cas 5.

Si la courbe doit être unicursale, nous savons qu'elle n'existe pas. Si son genre n'est pas nul, le dénombrement des constantes montre qu'elle n'existe pas.

On peut le démontrer autrement, d'une manière intéressante.

Rappelons qu'étant donnés m points sur une surface de Riemann de genre g , les fonctions rationnelles, admettant pour pôles simples tout ou partie de ces m points, dépendent de $m - g + 1 + \sigma$ paramètres. Dans ce résultat, dû à Riemann et Roch, σ signifie le nombre des adjointes d'ordre $N - 3$, N étant l'ordre de la relation algébrique, qui passent par les m points donnés. Or, ici, on connaît *à priori* six solutions. Ce sont les coordonnées des adjointes de la courbe et de l'indicatrice. Ainsi l'on a :

$$m - g + 1 + \sigma \geq 7, \quad g \geq m - 6 + \sigma.$$

Ici le nombre σ est nul, la relation ne peut être vérifiée.

Il n'existe pas de courbe de quatrième degré à torsion constante.

[6] Cherchons toutes les courbes unicursales de degrés $M = 3, 5, 6$.

1° $M = 3$. On a une famille de cubiques $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 0 \end{matrix} \right\}$, c'est tout.

2° $M = 5$. Nous avons obtenu les courbes $\left\{ \begin{matrix} 5 \\ 0 \end{matrix} \right\}$.

$$\left\{ \begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\} \text{ n'existent pas ;}$$

viennent ensuite :

$$\left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix} \right\}.$$

Pour la première, l'équation de l'indicatrice serait :

$$(x - x_1)(y - y_1)[xy - k(x - y)] = (x - y)^3 \Phi(xy).$$

Cette courbe devrait être du quatrième degré, c'est impossible.

Pour la deuxième, l'indicatrice est du cinquième degré, mais on établit aisément que son équation a la forme :

$$(x - x_1)(x - x_2)^2(y - y_1)^2 = H(x - y)^3,$$

qui est au moins du sixième degré. Il reste donc $\delta = 4$, $\delta = 5$;

$$\delta = 4 \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\}.$$

L'indicatrice serait du cinquième degré, elle n'existe pas ;

$$\delta = 5 \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\};$$

nous savons par le théorème général qu'elle n'existe pas.

3° Les courbes du sixième degré :

$$\delta = 1 \left\{ \begin{array}{c} 6 \\ 1 \end{array} \right\};$$

elle dériverait de la courbe du septième degré, nous avons vu qu'elle n'existe pas.

$$\delta = 2 \left\{ \begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{cc} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{array} \right\};$$

les méthodes générales les auraient fournies, elles n'existent pas.

Enfin $\delta = 2 \left\{ \begin{array}{cc} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{array} \right\}$ existe, elle a été trouvée.

$$\delta = 3 \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right\} \text{ indicatrice du } 5^{\circ} \text{ degré,}$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\} \text{ indicatrice du } 5^{\circ} \text{ degré,}$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right\} \text{ indicatrice du } 6^{\circ} \text{ degré.}$$

Nous savons que la deuxième, que fourniraient nos méthodes générales, n'existe pas.

La première, dont l'équation doit être :

$$(x - x_1)(y - y_2)^2 [xy - k(x - y)] = H(x - y)^3$$

est au moins du sixième degré.

La troisième a une équation de la forme :

$$(x - x_1)^2 (x - x_2)^2 (y - y_3)^2 = H(x - y)^3,$$

elle est au moins du septième degré.

$$\delta = 4 \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right\}.$$

La première n'existe pas, car nous avons vu que l'indicatrice d'une telle courbe doit être de degré pair et d'ailleurs au moins du sixième degré.

La deuxième indicatrice doit être du sixième degré, d'équation

$$(x - x_1)(y - y_1)(x - x_2)^2 (y - y_2)^2 = H(x - y)^3.$$

Son espèce est donc (3 3). Il est facile de voir que si les valeurs de t sont 0 et ∞ , pour les deux derniers points à l'infini $x = y = 0$, $x = y = \infty$; on doit avoir :

$$\begin{cases} x = t^2(at + b), \\ y = \frac{t^3}{ct + d} \end{cases}$$

et qu'il est impossible de réaliser les conditions relatives aux premiers points.

$$\delta = 5 \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}.$$

Une telle courbe a, pour équation de l'indicatrice :

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(y - y_1)y^2 = k(y - x)^3.$$

Cette relation est du troisième ordre en y , et trois points de ramification d'ordre 3 sont en évidence. Le genre est donc forcément supérieur à un.

$$\delta = 6 \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}.$$

Nous savons que les courbes unicursales de cette catégorie n'existent pas.

En résumé, les courbes que nous avons cherchées se réduisent à :

1° Une famille de cubiques dépendant d'un paramètre réel, caractérisé par le schéma $\begin{Bmatrix} 3 \\ 0 \end{Bmatrix}$.

2° Une famille de courbes du cinquième degré dépendant de trois paramètres réels, caractérisés par $\begin{Bmatrix} 5 \\ 0 \end{Bmatrix}$.

3° Deux familles de courbes du sixième degré : 1° dépendant de trois paramètres réels, caractérisés par $\begin{Bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$; 2° dépendant de trois paramètres réels $\begin{Bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix}$.

