SUR LE PROBLÈME DE BÄCKLUND

ET LES SYSTÈMES DE DEUX ÉQUATIONS DE PFAFF

PAR E. GOURSAT.

Dans un Mémoire [1] antérieur, j'avais montré comment la recherche de certaines transformations de Bäcklund conduisait à l'étude d'une expression de Pfaff, et à la réduction de cette expression à une forme canonique. En essayant d'étendre ce résultat aux transformations de Bäcklund les plus générales, on est conduit à remplacer le problème de Bäcklund lui-même par un problème équivalent, l'intégration d'un système de deux équations de Pfaff à six variables. Les diverses transformations de Bäcklund B_1, B_2, B_3 se trouvent ainsi rattachées à leur véritable origine, c'est-à-dire aux différentes façons dont il est possible de ramener l'intégration d'un système de Pfaff de cette espèce à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du second ordre. La liaison entre ces diverses transformations, entre les caractéristiques de deux équations qui se déduisent l'une de l'autre par l'une de ces transformations, se trouvent ainsi établies d'une façon presque intuitive.

Les systèmes de Pfaff à un nombre quelconque de variables indépendantes n'ont été l'objet jusqu'à présent que d'un petit nombre de travaux. Les résultats les plus importants sont dus à M. Cartan [2], qui a introduit dans cette théorie un certain nombre de notions fondamentales. La considération des éléments singuliers permet de faire très simplement l'étude des systèmes de deux équations à six variables. Cette étude détaillée fait l'objet de la première partie du Mémoire. La plupart des résultats avaient déjà été obtenus directement par M. Duport [3] à l'aide d'une méthode toute différente exigeant d'assez longs calculs, que la théorie des éléments singuliers du système permet d'abréger beaucoup, et dont elle fournit une interprétation très simple. Ces résultats pourraient sans doute être rattachés à des résultats

(1) *Sur quelques transformations des équations aux dérivées partielles du second ordre.* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* 2e série, t. 4; pp. 299-340.)

(2) Voir en particulier le Mémoire *Sur l'intégration des systèmes d'équations aux différentielles totales.* (*Annales de l'École Normale supérieure,* 3e série, t. 18, 1901; pp. 241-311.)

(3) *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* série V, t. 3, 1897; p. 17.

plus généraux dus aussi à M. Cartan [1]; mais il m'a semblé que l'étude détaillée, et même un peu minutieuse, que l'on peut pousser jusqu'au bout, d'un système particulier d'équations de Pfaff, pouvait contribuer à la diffusion d'une théorie importante et trop peu connue jusqu'ici.

Dans la seconde partie, je fais l'application des résultats obtenus au problème de Bäcklund. Les théorèmes connus sur les transformations de Bäcklund, et plusieurs autres qui semblent nouveaux, se présentent d'eux-mêmes. Les autres questions, qui se posent au sujet de ces transformations, se rattachent aussi d'une façon très naturelle à des problèmes relatifs aux systèmes de Pfaff, où interviennent en particulier les systèmes de quatre équations de Pfaff à six variables qui définissent les éléments singuliers d'un système de deux équations.

Tout système de quatre équations de Pfaff à six variables peut être considéré, d'une infinité de manières, comme définissant une famille d'éléments singuliers d'un système S de deux équations à six variables. Dans la troisième partie de ce Mémoire, je montre que la recherche de ces systèmes S se ramène à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du second ordre à six variables indépendantes. J'indique comment on peut former cette équation, et je traite quelques cas où la question se simplifie.

Enfin, dans la quatrième partie, je montre rapidement comment la méthode suivie dans la première partie s'étend aux systèmes de deux équations de Pfaff à n variables. Les résultats sont essentiellement différents suivant la parité de n.

Pour la définition des éléments qui interviennent dans l'étude d'un système de Pfaff, je renverrai le lecteur au Mémoire fondamental de Cartan cité plus haut.

I

[**1**] Soit S un système de deux équations de Pfaff à six variables x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6,

$$(1) \qquad \begin{cases} \omega_1 = A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + \ldots + A_6 dx_6 = 0, \\ \omega_2 = B_1 dx_1 + B_2 dx_2 + \ldots + B_6 dx_6 = 0, \end{cases}$$

les coefficients A_i, B_i étant des fonctions quelconques des variables x_i. Si ces deux équations sont distinctes, on peut les résoudre par rapport à deux des différentielles qui y figurent; pour fixer les idées, nous supposerons qu'on peut les résoudre par rapport à dx_5 et dx_6. Cela posé, si dans les covariants bilinéaires ω'_1, ω'_2, on rem-

(1) *Sur l'intégration de certains systèmes de Pfaff de caractère deux.* (*Bulletin de la Société Mathématique*, t. 29, 1901; pp. 233-302.)

place dx_5, dx_6, δx_5, δx_6 par leurs expressions au moyen de dx_1, dx_2, dx_3, dx_4, δx_1, δx_2, δx_3, δx_4, les deux équations $\omega'_1 = 0$, $\omega'_2 = 0$ prennent la forme

$$(2)\qquad \begin{cases} \omega'_1 = \sum \mathrm{A}_{ik}(dx_i \delta x_k - dx_k \delta x_i) = 0, \\ \omega'_2 = \sum \mathrm{B}_{ik}(dx_i \delta x_k - dx_k \delta x_i) = 0, \end{cases} \qquad (\text{mod } \omega_1, \omega_2)$$
$$(i, k = 1, 2, 3, 4),$$

les coefficients A_{ik}, B_{ik} s'exprimant au moyen des fonctions A_i, B_i et de leurs dérivées partielles du premier ordre.

Tout système de valeurs (dx_1, dx_2, dx_3, dx_4) définit un élément linéaire intégral e_1 issu d'un point déterminé $(x_1, x_2, \ldots, x_6)$ de l'espace à six dimensions. Ce point étant regardé comme fixe et de situation générale, les éléments linéaires intégraux qui en sont issus forment une multiplicité à trois dimensions. Si l'on considère dx_1, dx_2, dx_3, dx_4 comme les coordonnées homogènes d'un point dans l'espace à trois dimensions, on peut dire qu'à tout point m de l'espace à trois dimensions correspond un élément linéaire intégral e_1 à une dimension du système S, et réciproquement. Soient e_1, ε_1 deux éléments linéaires intégraux en involution du système S, m, m' les points correspondants de l'espace à trois dimensions; les coordonnées (dx_1, dx_2, dx_3, dx_4), $(\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3, \delta x_4)$ de ces deux points doivent satisfaire aux deux relations (2). Nous dirons aussi, pour abréger, que ces deux points m et m' sont en involution. Le point m étant donné, les coordonnées du point m' doivent vérifier les deux équations linéaires (2) qui sont en général distinctes. Le lieu des points en involution avec un point donné m de l'espace est donc en général une droite D issue de ce point. D'après la forme bilinéaire des relations (2), deux points quelconques de cette droite D sont aussi en involution, et les éléments linéaires intégraux qui correspondent aux différents points de D forment un élément linéaire intégral e_2, qui a pour image la droite D dans l'espace à trois dimensions, Tout élément linéaire intégral e_1 appartient donc en général à un élément intégral e_2 *et à un seul*. Le système S est donc du *second genre* et admet des intégrales M_2, de telle sorte que toute intégrale M_1 appartient à une intégrale M_2 et à une seule [1].

Ces conclusions ne s'appliquent pas à certains éléments linéaires exceptionnels. Les relations (2) expriment que la droite D qui joint deux points en involution m, m' appartient à une congruence linéaire. Cela étant, plusieurs cas peuvent se présenter.

1° Les deux directrices Δ_1, Δ_2 de la congruence sont distinctes et ne se coupent pas, ce qui est évidemment le cas général. Un élément intégral e_2 est représenté par

---

[1] Cartan, *Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. 18, p. 254 et suivantes.

une droite D rencontrant Δ_1 et Δ_2, et il est évident que tout élément linéaire intégral e_1, représenté par un point m, qui n'appartient à aucune des deux droites Δ_1, Δ_2, appartient à un élément e_2 et à un seul. Il y a exception pour les éléments e_1 qui correspondent aux points des deux droites Δ_1, Δ_2; ces éléments linéaires sont des *éléments singuliers*, et nous voyons qu'il y a en général pour un système S *deux familles distinctes d'éléments linéaires singuliers*. La représentation géométrique rend encore intuitives les propriétés suivantes :

a) Soit m_1 un point de la droite Δ_1 par exemple, et soit P_1 le plan passant par m_1 et par Δ_2; l'élément linéaire e_1 représenté par le point m_1 est en involution avec tous les autres éléments linéaires intégraux qui correspondent aux différents points de P_1, mais l'ensemble de ces éléments (*élément polaire de* e_1) ne forme pas un élément intégral e_3.

b) *Deux éléments singuliers de familles différentes sont toujours en involution.*

c) *Tout élément intégral* e_2 *renferme un élément singulier* e_1 *de chaque famille.*

Voici une conséquence importante de cette propriété. Les éléments singuliers de chaque famille sont définis par un système de quatre équations de Pfaff à six variables. Il y a donc une infinité de multiplicités intégrales à une dimension du système S, dépendant d'une fonction arbitraire d'une variable, dont tous les éléments linéaires sont des éléments singuliers; ce sont les *caractéristiques de Monge* du système S. *Toute intégrale* M_2 *de* S *est un lieu de caractéristiques de Monge de chaque famille.* En effet, puisque tout élément intégral e_2 de M_2 contient un élément singulier de chaque espèce, les multiplicités M_1 situées sur M_2, qui admettent en chaque point un élément singulier pour élément linéaire, sont déterminées par l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre : il en passe donc une de chaque espèce par chaque point de M_2. L'analogie avec la théorie des caractéristiques d'une équation aux dérivées partielles du second ordre est évidente et sera expliquée plus loin.

2° Si les deux directrices Δ_1, Δ_2 sont confondues, il y a un seul système d'éléments singuliers représentés par les points d'une droite Δ. L'élément singulier e_1 représenté par un point m de Δ est en involution avec tout élément linéaire représenté par un point quelconque d'un plan P passant par Δ et tangent en m à un paraboloïde dont Δ est une génératrice. Tout élément non singulier e_1 appartient à un seul élément e_2, qui renferme un élément singulier. Il n'y a plus qu'une famille de caractéristiques de Monge, dépendant d'une fonction arbitraire d'une variable, et toute intégrale M_2 du système de Pfaff est encore un lieu de caractéristiques de Monge de ce système.

3° Si les deux droites Δ_1, Δ_2 sont situées dans un même plan P sans être confondues, la congruence linéaire est formée des droites qui passent par le point O commun aux deux droites Δ_1, Δ_2, et des droites situées dans le plan P. Les deux directrices Δ_1, Δ_2 peuvent être remplacées par tout autre système de deux droites du plan P passant en O. Ces deux droites ne jouent donc aucun rôle dans les propriétés de la congruence, où interviennent seulement le plan P et le point O. Dans ce cas, l'élément linéaire intégral figuré par le point O est en involution avec tous les autres éléments linéaires intégraux du système, c'est donc *un élément caractéristique à une dimension*. Il s'ensuit que le système S admet des *caractéristiques de Cauchy* à une dimension; il est donc de cinquième classe, et l'on peut, par un changement de variables convenable, le ramener à une forme où ne figurent que cinq variables et leurs différentielles. Toute intégrale M_2 est le lieu des caractéristiques de Cauchy issues des divers éléments d'une intégrale M_1, et le problème de l'intégration est ramené à la détermination des caractéristiques de Cauchy de ce système.

On reviendra plus loin sur cette question dont M. Cartan [1] a fait une étude approfondie. Nous indiquerons encore ici quelques propriétés du système S, que la représentation géométrique rend évidentes. Tout élément linéaire intégral e_1 représenté par un point m, non situé dans le plan P, appartient à un élément intégral e_2 représenté par la droite Om. Mais les éléments linéaires intégraux figurés par des points du plan P sont des éléments singuliers. Tous ces éléments sont deux à deux en involution et forment un élément intégral du troisième ordre e_3, de sorte que chaque point de l'espace à six dimensions est l'origine d'un élément intégral e_3 du système S. Il ne s'ensuit pas que par chaque point de l'espace il passe une intégrale M_3 de ce système. Lorsqu'il en est ainsi, on peut choisir les variables de façon que ces intégrales M_3 soient représentées par les équations

$$y_1 = C_1, \qquad y_2 = C_2, \qquad y_3 = C_3,$$

et les équations (1) peuvent être ramenées à la forme

$$dy_2 = y_4 dy_1, \qquad dy_3 = y_5 dy_1, \tag{3}$$

mais ce n'est là qu'un cas tout particulier.

Dans le cas général, en ajoutant aux deux équations $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$ l'équation du plan P, $\omega_3 = 0$, on a un système de trois équations de Pfaff à six variables *et de cinquième classe*, dont les intégrales M_2 sont des *intégrales singulières* du système S, car tout élément linéaire intégral de M_2 est un élément singulier de S. La détermination de ces intégrales se ramène à l'intégration d'un système en involution de deux équations du second ordre et inversement; cette proposition a été établie par M. Cartan dans le Mémoire déjà cité.

[2] Nous avons supposé jusqu'ici que les deux équations

$$\omega'_1 = 0, \qquad \omega'_2 = 0 \qquad (\text{mod } \omega_1, \omega_2)$$

[1] *Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. 27, 1910; pp. 109-192.

étaient distinctes. Il peut arriver, pour certains systèmes de Pfaff, que ces deux équations se réduisent à une seule. On peut alors déterminer deux coefficients λ et μ tels que l'on ait identiquement

$$\lambda\omega'_1 + \mu\omega'_2 = 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \omega_1,\ \omega_2)$$

ou, ce qui revient au même,

$$(\lambda\omega_1 + \mu\omega_2)' = 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \omega_1,\ \omega_2),$$

de sorte que deux éléments linéaires intégraux quelconques du système e_1, ε_1 sont toujours en involution relativement à l'équation $\lambda\omega_1 + \mu\omega_2 = 0$. Il est évidemment permis de supposer que l'on a pris cette équation pour l'une des équations du système S, par exemple que l'on a

$$\omega'_1 = 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \omega_1,\ \omega_2).$$

Pour que deux éléments linéaires intégraux (dx_1, dx_2, dx_3, dx_4), $(\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3, \delta x_4)$ soient en involution relativement au système S, il suffira donc que l'on ait

$$\omega'_2 = 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \omega_1,\ \omega_2).$$

Cette équation, qui est de la forme

$$\sum B_{ik}(dx_i\delta x_k - dx_k\delta x_i) = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4),$$

exprime que la droite qui joint les points figuratifs des deux éléments appartient à un complexe linéaire. Il peut encore se présenter deux cas :

1° Si ce complexe n'est pas un complexe singulier, il n'y a ni éléments caractéristiques, ni éléments singuliers pour le système. Tout élément intégral e_1 appartient à ∞^1 éléments e_2, mais la représentation géométrique prouve qu'il n'existe pas d'éléments e_3. Il résulte d'une propriété générale des systèmes de Pfaff de *caractère un* (¹) que *l'équation* $\omega_1 = 0$ *est, dans ce cas, complètement intégrable*, ce qu'il est aisé d'établir directement. En effet, supposons cette équation de classe cinq et mise sous la forme normale

$$\omega_1 = dx_5 + x_2 dx_1 + x_4 dx_3 = 0;$$

on peut supposer que la seconde équation $\omega_2 = 0$ ne renferme pas dx_5, mais elle

(¹) *Bulletin de la Société Mathématique*, t. 29, 1901; p. 257.

renferme certainement une des différentielles dx_1, dx_2, dx_3, dx_4. Admettons, par exemple, qu'elle contient dx_2,

$$\omega_2 = dx_2 + X_1 dx_1 + X_3 dx_3 + X_4 dx_4 + X_6 dx_6 = 0.$$

Le covariant $\omega'_1 = dx_2\,\delta x_1 - dx_1\,\delta x_2 + dx_4\,\delta x_3 - dx_3\,\delta x_4$ ne peut être identiquement nul quand on y remplace dx_2 et δx_2 par leurs expressions tirées de $\omega_2 = 0$, car les termes $dx_4\,\delta x_3 - dx_3\,\delta x_4$ ne se réduisent avec aucun autre. L'équation $\omega_1 = 0$ ne peut donc être de classe cinq.

Si cette équation était de classe trois, on pourrait la supposer mise sous la forme normale

$$\omega_1 = dx_5 + x_2 dx_1 = 0,$$

l'équation $\omega_2 = 0$ étant la même que tout à l'heure. On a alors

$$\begin{aligned}\omega'_1 \equiv{} &(X_1\delta x_1 + X_3\delta x_3 + X_4\delta x_4 + X_6\delta x_6)dx_1\\ &-(X_1 dx_1 + X_3 dx_3 + X_4 dx_4 + X_6 dx_6)\delta x_1 \qquad (\mathrm{mod}\ \omega_1,\ \omega_2)\end{aligned}$$

et ce covariant ne peut être nul identiquement que si l'on a

$$X_3 = X_4 = X_6 = 0.$$

Le système de Pfaff serait de classe *quatre,* ce qui est contraire à l'hypothèse, puisqu'il n'y a pas dans ce cas d'élément caractéristique.

L'équation $\omega_1 = 0$ étant mise sous la forme $dx_1 = 0$, la seconde équation $\omega_2 = 0$ est nécessairement de classe cinq et peut être ramenée à la forme normale

$$\omega_2 = dx_2 + x_3 dx_4 + x_5 dx_6 = 0.$$

On vérifie aisément sur cette forme canonique du système S qu'il n'y a pas d'éléments singuliers.

2° Si le complexe est formé de droites rencontrant une droite fixe Δ, tous les points de cette droite représentent des éléments linéaires caractéristiques. Il y a donc ∞^1 éléments de cette espèce issus de tout point de l'espace à six dimensions. Le système de Pfaff admet des caractéristiques de Cauchy à deux dimensions, et par suite ce système est de quatrième classe. Il y a encore deux cas à distinguer, suivant que l'équation $\omega_1 = 0$ est de classe trois ou de classe un.

Enfin, si l'on a $\omega'_1 = \omega'_2 = 0$ (mod ω_1, ω_2), le système de Pfaff est complètement intégrable.

[3] Après ces généralités, nous allons montrer comment on obtient les équations qui définissent les deux familles d'éléments singuliers. Nous supposerons d'abord, pour fixer les idées, que l'on peut résoudre les deux équations $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$ par rapport à dx_5 et dx_6, de sorte que les covariants bilinéaires ω'_1, ω'_2 peuvent être ramenés à la forme (2), et que les deux équations $\omega'_1 = 0$, $\omega'_2 = 0$ sont distinctes, c'est-à-dire que le système S n'admet pas de système dérivé.

Pour qu'un élément linéaire intégral (dx_1, dx_2, dx_3, dx_4) soit un élément singulier, il faut et il suffit que les deux équations $\omega'_1 = 0$, $\omega'_2 = 0$, considérées comme définissant δx_1, δx_2, δx_3, δx_4, ne soient pas distinctes, ou que l'on ait identiquement, pour un système de valeurs des coefficients λ, μ,

$$\lambda\omega'_1 + \mu\omega'_2 = 0,$$

quels que soient $\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3, \delta x_4$. Les coordonnées homogènes d'un point m de l'espace correspondant à un élément singulier doivent donc vérifier les quatre relations

$$(4)\quad (\lambda A_{i1} + \mu B_{i1})dx_1 + (\lambda A_{i2} + \mu B_{i2})dx_2 + (\lambda A_{i3} + \mu B_{i3})dx_3 + (\lambda A_{i4} + \mu B_{i4})dx_4 = 0,$$
$$(i = 1, 2, 3, 4),$$

où les coefficients A_{ik}, B_{ik} vérifient les conditions

$$A_{ik} + A_{ki} = 0, \qquad B_{ik} + B_{ki} = 0, \qquad A_{ii} = B_{ii} = 0.$$

Pour que les équations (4) soient vérifiées par des valeurs non toutes nulles de dx_1, dx_2, dx_3, dx_4, il est nécessaire que le déterminant symétrique gauche

$$(5)\quad \Delta(\lambda, \mu) = \begin{vmatrix} \lambda A_{11} + \mu B_{11} & \lambda A_{12} + \mu B_{12} & \lambda A_{13} + \mu B_{13} & \lambda A_{14} + \mu B_{14} \\ \lambda A_{21} + \mu B_{21} & \lambda A_{22} + \mu B_{22} & \lambda A_{23} + \mu B_{23} & \lambda A_{24} + \mu B_{24} \\ \lambda A_{31} + \mu B_{31} & \lambda A_{32} + \mu B_{32} & \lambda A_{33} + \mu B_{33} & \lambda A_{34} + \mu B_{34} \\ \lambda A_{41} + \mu B_{41} & \lambda A_{42} + \mu B_{42} & \lambda A_{43} + \mu B_{43} & \lambda A_{44} + \mu B_{44} \end{vmatrix}$$

soit nul. Or ce déterminant est le carré d'une forme quadratique $F(\lambda, \mu)$ en λ, μ, et l'on voit que le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ doit satisfaire à l'équation du second degré

$$(6)\qquad F(\lambda, \mu) = 0;$$

il y a donc en général deux systèmes d'éléments singuliers, comme on l'avait reconnu par une discussion géométrique.

Soit (λ, μ) un système de deux nombres, dont l'un au moins n'est pas nul, vérifiant l'équation (6). *Les quatre relations* (4) *se réduisent alors à deux relations* *distinctes qui, jointes aux deux équations* $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, *définissent une famille d'éléments singuliers*. Le cas où, pour une valeur convenable du rapport $\frac{\lambda}{\mu}$, les quatre équations (4) seraient vérifiées identiquement, correspond à une hypothèse qui a été examinée au paragraphe précédent, et que nous avons écartée. Pour qu'il en fût ainsi, il faudrait en effet que tous les rapports $\frac{B_{ik}}{A_{ik}}$ fussent égaux, et les deux équations $\omega'_1 = 0$, $\omega'_2 = 0$ se réduiraient à une seule. Remarquons que, dans ce cas, l'équation $F(\lambda, \mu) = 0$ a une racine double, car tous les éléments du déterminant $\Delta(\lambda, \mu)$ sont divisibles par un même facteur linéaire en λ, μ.

Ce cas singulier étant écarté, à un couple de valeurs (λ_1, μ_1) non toutes nulles, satisfaisant à l'équation (6), correspond une équation du système de Pfaff considéré

$$\Omega_1 = \lambda_1 \omega_1 + \mu_1 \omega_2 = 0, \tag{7}$$

telle que l'on ait

$$(\lambda_1 \omega_1 + \mu_1 \omega_2)' = \lambda_1 \omega'_1 + \mu_1 \omega'_2 = 0 \qquad (\text{mod } \omega_1, \omega_2)$$

pour tous les éléments singuliers de la famille correspondante, quel que soit l'autre élément intégral $(\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3, \delta x_4)$. En d'autres termes, tous les éléments singuliers correspondant à un système de solutions (λ_1, μ_1) de l'équation (6) sont en involution avec tous les autres éléments linéaires intégraux du système de Pfaff, relativement à l'équation (7).

On peut évidemment supposer que cette équation (7) est l'une des équations qui définissent le système de Pfaff, par exemple que c'est l'équation $\omega_1 = 0$ elle-même, ce qui revient à supposer que l'équation (6) est vérifiée par les valeurs $\lambda = 1$, $\mu = 0$. Si cette équation $\omega_1 = 0$ est de classe *cinq*, ce qui est le cas général, supposons-la ramenée à une forme canonique par un changement de variables

$$\omega_1 = dy_5 + y_2 dy_1 + y_4 dy_3 = 0.$$

On peut encore supposer que la seconde équation du système ne renferme pas dy_5, mais elle renferme forcément l'une au moins des différentielles dy_1, dy_2, dy_3, dy_4, par exemple dy_2. Soit

$$\omega_2 = dy_2 + Y_1 dy_1 + Y_3 dy_3 + Y_4 dy_4 + Y_6 dy_6 = 0$$

cette équation. On a

$$\begin{aligned} \omega'_1 &= dy_1 \delta y_2 - dy_2 \delta y_1 + dy_3 \delta y_4 - dy_4 \delta y_3 \\ &= (Y_3 dy_3 + Y_4 dy_4 + Y_6 dy_6)\delta y_1 - (Y_3 \delta y_3 + Y_4 \delta y_4 + Y_6 \delta y_6) dy_1 + dy_3 \delta y_4 - dy_4 \delta y_3 \\ &= (Y_3 dy_3 + Y_4 dy_4 + Y_6 dy_6)\delta y_1 - (Y_3 dy_1 + dy_4)\delta y_3 + (dy_3 - Y_4 dy_1)\delta y_4 - Y_6 dy_1 \delta y_6 \\ &\qquad (\text{mod } \omega_1, \omega_2). \end{aligned}$$

Pour que les quatre équations

$$Y_3 dy_3 + Y_4 dy_4 + Y_6 dy_6 = 0, \quad Y_3 dy_1 + dy_4 = 0, \quad Y_4 dy_1 - dy_3 = 0, \quad Y_6 dy_1 = 0,$$

qui, dans l'hypothèse adoptée, doivent définir un des systèmes d'éléments singuliers, admettent un système de solutions non toutes nulles, il faut et il suffit que l'on ait $Y_6 = 0$. Les quatre équations précédentes se réduisent alors aux deux équations

$$(8) \qquad dy_3 = Y_4 dy_1, \qquad dy_4 = - Y_3 dy_1,$$

et le système d'éléments singuliers correspondants est défini par les quatre équations

$$(9) \qquad \frac{dy_1}{1} = \frac{dy_3}{Y_4} = \frac{dy_4}{-Y_3} = \frac{dy_2}{-Y_1} = \frac{dy_5}{-y_2 - Y_4 y_4}.$$

La condition $Y_6 = 0$ exprime que les éléments linéaires caractéristiques de l'équation $\omega_1 = 0$,

$$dy_1 = 0, \qquad dy_2 = 0, \qquad dy_3 = 0, \qquad dy_4 = 0, \qquad dy_5 = 0$$

vérifient aussi la seconde équation du système de Pfaff $\omega_2 = 0$. Cette propriété est évidemment indépendante du choix des variables, et nous voyons qu'*à un couple de solutions* (λ_1, μ_1) *de l'équation* $F(\lambda, \mu) = 0$ *correspond* EN GÉNÉRAL *une équation de classe cinq*

$$(10) \qquad \lambda_1 \omega_1 + \mu_1 \omega_2 = 0$$

dont les éléments caractéristiques satisfont aux deux équations $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$ *du système de Pfaff.*

Le même calcul prouve qu'inversement, si l'équation (10) est de classe cinq et si tous ses éléments caractéristiques satisfont aux deux relations $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, on a $F(\lambda_1, \mu_1) = 0$, et à cette équation correspond une famille d'éléments singuliers du système de Pfaff.

Il peut aussi arriver qu'à un système de solutions (λ_1, μ_1) de l'équation (6) corresponde une équation de classe trois, qui, réduite à la forme canonique, s'écrit

$$\omega_1 = dy_2 + y_3 dy_1 = 0.$$

Toutes les fois que l'on peut trouver une équation de classe trois dans les équations $\lambda_1 \omega_1 + \mu_1 \omega_2 = 0$ du système de Pfaff, (λ_1, μ_1), est un couple de solutions de l'équation (6). En effet, quelle que soit la seconde équation $\omega_2 = 0$, l'équation précédente $\omega_1 = 0$ correspond toujours à une famille d'éléments singuliers du système, et par suite à une racine de l'équation (6). Il suffit, pour le démontrer, d'observer que les éléments linéaires intégraux définis par les relations

$$dy_1 = 0, \qquad dy_2 = 0, \qquad dy_3 = 0, \qquad \omega_2 = 0$$

sont en involution relativement à l'équation $\omega_1 = 0$ avec tous les autres éléments linéaires intégraux du système.

Enfin, nous avons remarqué que, lorsque le système de Pfaff admet une combinaison intégrable, l'équation (6) a une racine double à laquelle correspond précisément une équation de la forme $dx_1 = 0$. Il n'y a plus dans ce cas d'éléments singuliers.

On peut résumer tous ces résultats comme il suit :

A tout système de solutions (λ_1, μ_1) *de l'équation* $\Delta(\lambda, \mu) = 0$ *correspond une équation* $\lambda_1 \omega_1 + \mu_1 \omega_2 = 0$, *dont tous les éléments caractéristiques vérifient les deux équations* $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, *si elle est de classe* cinq, *mais qui peut être de classe* trois ou *un*.

Réciproquement, *si l'équation* $\lambda_1 \omega_1 + \mu_1 \omega_2 = 0$ *est de classe* cinq *et si tous ses éléments caractéristiques vérifient les deux relations* $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, *ou si cette équation est de classe* trois *ou* un, *on a* $\Delta(\lambda_1, \mu_1) = 0$.

Les deux derniers cas ne peuvent se présenter que pour des systèmes de Pfaff particuliers. Dans le dernier cas, l'équation (6) a une racine double, mais ce n'est pas le seul cas où il en est ainsi.

Remarque. — Reprenons le cas général où l'équation (7) est de genre cinq. Cette équation étant ramenée à une forme canonique par un changement de variables, si l'on regarde dy_1, dy_3, dy_4, dy_6 comme les coordonnées homogènes d'un point dans l'espace, les équations (8) représentent une droite Δ_1, et l'équation $\omega'_1 = 0$, ou

$$Y_3(dy_3\delta y_1 - dy_1\delta y_3) + Y_4(dy_4\delta y_1 - dy_1\delta y_4) + dy_3\delta y_4 - dy_4\delta y_3 = 0$$

exprime que la droite D qui joint les deux points (dy_1, dy_3, dy_4, dy_6) et $(\delta y_1, \delta y_3, \delta y_4, \delta y_6)$ rencontre la droite Δ_1.

D'une façon générale, quelles que soient les valeurs des coefficients λ, μ, l'équation

$$(\lambda\omega_1 + \mu\omega_2)' = 0 \qquad \text{mod}\,(\omega_1, \omega_2)$$

représente, avec les conventions expliquées plus haut, un complexe de droites passant par la congruence définie par les deux équations $\omega'_1 = 0$, $\omega'_2 = 0$. Si l'on a choisi λ et μ de façon que $F(\lambda, \mu) = 0$, ce complexe est formé des droites qui rencontrent une des directrices Δ_1, Δ_2 de la congruence.

[**4**] Il nous reste à examiner si l'équation $F(\lambda, \mu) = 0$ peut se réduire à une identité. Il en est certainement ainsi toutes les fois que le système de Pfaff proposé est de classe inférieure à six, ou admet des éléments caractéristiques, c'est-à-dire des éléments linéaires intégraux en involution avec tous les autres éléments linéaires intégraux du système, relativement aux deux équations $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$. Les huit équations

$$(11) \qquad \begin{cases} A_{i1}dx_1 + A_{i2}dx_2 + A_{i3}dx_3 + A_{i4}dx_4 = 0, \\ B_{i1}dx_1 + B_{i2}dx_2 + B_{i3}dx_3 + B_{i4}dx_4 = 0, \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

sont alors vérifiées par des valeurs non toutes nulles de dx_1, dx_2, dx_3, dx_4. Tous les déterminants à quatre lignes déduits du tableau des coefficients A_{ik}, B_{ik} sont donc nuls, et par suite il en est de même du déterminant $\Delta(\lambda, \mu)$, quels que soient λ et μ.

Réciproquement, supposons que l'on ait identiquement $\Delta(\lambda, \mu) = 0$. En supposant d'abord $\lambda = 1$, $\mu = 0$, nous voyons que l'équation $\omega_1 = 0$ correspond à une famille d'éléments singuliers représentés par les points d'une droite Δ_1, et de même l'équation $\omega_2 = 0$, obtenue en supposant $\lambda = 0$, $\mu = 1$, correspond à une autre famille d'éléments singuliers représentés par les points d'une autre droite Δ_2. Si ces deux droites ne sont pas dans un même plan, il est impossible, d'après l'étude faite au début, que l'équation $\lambda\omega_1 + \mu\omega_2 = 0$ corresponde à une famille d'éléments singuliers, quels que soient λ et μ, puisqu'il n'y a que les deux familles précédentes d'éléments singuliers. Il faut donc que les droites Δ_1, Δ_2 soient dans un même plan P. Soit O le point d'intersection de ces deux droites; ce point O correspond à un élément caractéristique du système qui est alors de cinquième classe. Remarquons que toute droite du plan P passant par O représente une famille d'éléments singuliers du système de Pfaff, correspondant à une équation de la forme $\lambda\omega_1 + \mu\omega_2 = 0$. Les éléments caractéristiques de toute équation de classe cinq, appartenant à un système de Pfaff à six variables et de classe cinq, vérifient donc les deux équations de ce système, résultat évident *a priori*.

Si les huit équations (11) se réduisent à deux équations distinctes, la famille d'éléments singuliers correspondant à l'équation $\lambda\omega_1 + \mu\omega_2 = 0$ reste la même, quels que soient λ et μ. Cette famille d'éléments est représentée par une droite Δ_1, dont tous les points figurent des éléments caractéristiques du système de Pfaff, qui est alors de quatrième classe.

Il est évident que l'équation (6) se réduit aussi à une identité si le système de Pfaff est complètement intégrable.

[**5**] Lorsque les coefficients du système (1) ne satisfont à aucune condition d'égalité, ce système est évidemment de classe six, et l'équation $F(\lambda, \mu) = 0$ a deux racines distinctes en $\dfrac{\lambda}{\mu}$, à chacune desquelles correspond une famille d'éléments

singuliers et une équation $\lambda\omega_1 + \mu\omega_2 = 0$ de classe cinq, dont tous les éléments caractéristiques vérifient les deux équations du système.

Tout système de Pfaff de deux équations à six variables peut donc, EN GÉNÉRAL, *être ramené de deux façons différentes, et de deux seulement, à la forme suivante, par un changement de variables,*

$$(12)\qquad \begin{cases} dy_5 + y_2 dy_1 + y_4 dy_3 = 0, \\ Y_1 dy_1 + Y_2 dy_2 + Y_3 dy_3 + Y_4 dy_4 = 0, \end{cases}$$

Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 *étant des fonctions des six variables indépendantes* $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_6$.

Cette réduction exige d'abord la résolution d'une équation du second degré, puis la réduction d'une expression de Pfaff à sa forme canonique. Remarquons que les variables y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 ne sont déterminées qu'à une transformation de contact près, et que l'on peut aussi remplacer la dernière variable y_6 par une fonction arbitraire de y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 et d'une autre variable.

D'une façon générale, à tout système de solutions (λ, μ) de l'équation $F(\lambda, \mu) = 0$ correspond une équation $\lambda\omega_1 + \mu\omega_2 = 0$ du système de Pfaff, que nous appellerons une *équation singulière de ce système.* A chaque famille d'éléments singuliers correspond une équation singulière du système et une seule. Dans le cas général, un système de Pfaff possède deux équations singulières de classe cinq, mais l'une de ces équations, ou même les deux à la fois, peuvent être de classe inférieure à cinq. Il peut aussi arriver qu'il n'y ait qu'une seule équation singulière, ou que $F(\lambda, \mu)$ soit un carré parfait. Tous ces cas particuliers seront discutés plus loin.

Le résultat qui précède a été établi par M. Duport, dans le travail cité plus haut, à l'aide d'assez longs calculs. On voit, par ce qui précède, comment il se rattache naturellement à l'étude des éléments singuliers. L'équation du second degré considérée par M. Duport est équivalente à l'équation (6) et peut être obtenue de la même façon en laissant les équations du système de Pfaff sous la forme générale

$$(1)\qquad \begin{cases} \omega_1 = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \ldots + a_6 dx_6 = 0, \\ \omega_2 = b_1 dx_1 + b_2 dx_2 + \ldots + b_6 dx_6 = 0, \end{cases}$$

Tout revient à démontrer que l'on peut de deux façons différentes ramener le système (1) à la forme

$$(13)\qquad \begin{cases} \Omega_1 = A_1 dy_1 + A_2 dy_2 + \ldots + A_5 dy_5 = 0, \\ \Omega_2 = B_1 dy_1 + B_2 dy_2 + \ldots + B_5 dy_5 = 0, \end{cases}$$

les coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_5$ ne dépendant que de $y_1, y_2, \ldots, y_5$. Les équations

$$(14)\qquad y_1 = C_1, \qquad y_2 = C_2, \qquad y_3 = C_3, \qquad y_4 = C_4, \qquad y_5 = C_5$$

définissent une famille de caractéristiques à une dimension de l'équation $\Omega_1 = 0$ dans l'espace à six dimensions $(y_1, y_2, \ldots, y_6)$, et tous les éléments linéaires de ces caractéristiques satisfont aussi à la seconde équation du système $\Omega_2 = 0$.

Réciproquement, soit

$$\Omega_1 = \lambda\omega_1 + \mu\omega_2 = 0$$

une combinaison des deux équations (1) admettant une famille de caractéristiques à une dimension dont tous les éléments linéaires vérifient les deux équations $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$. Nous pouvons faire un changement de variables tel que cette famille de caractéristiques soit représentée par le système des cinq relations (14), $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$ étant six fonctions distinctes des variables x_i. L'équation $\Omega_1 = 0$ devient, avec ce nouveau système de variables,

$$\Omega_1 = A_1 dy_1 + A_2 dy_2 + \ldots + A_5 dy_5 = 0,$$

tandis qu'une autre équation du système (1), distincte de celle-là, se change en une autre équation

$$\Omega_2 = B_1 dy_1 + B_2 dy_2 + \ldots + B_5 dy_5 = 0;$$

la différentielle dy_6 ne peut figurer dans les équations du système, puisque par hypothèse ces équations doivent être vérifiées quand on y fait $dy_1 = dy_2 = \ldots = dy_5 = 0$.

De plus, ces éléments linéaires doivent satisfaire aux équations différentielles qui définissent les caractéristiques de l'équation $\Omega_1 = 0$,

$$A_{i1} dy_1 + A_{i2} dy_2 + \ldots + A_{i6} dy_6 = A_i dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6)$$

où

$$A_{ik} = \frac{\partial A_i}{\partial y_k} - \frac{\partial A_k}{\partial y_i}.$$

Il faut et il suffit pour cela que l'on ait

$$\frac{A_{16}}{A_1} = \frac{A_{26}}{A_2} = \ldots = \frac{A_{56}}{A_5},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial \log A_1}{\partial y_6} = \frac{\partial \log A_2}{\partial y_6} = \ldots = \frac{\partial \log A_5}{\partial y_6}.$$

Le rapport de deux coefficients quelconques A_i doit donc être indépendants de y_6, et par conséquent on peut supposer que ces coefficients eux-mêmes sont indépendants de y_6. Le système est ainsi ramené à la forme (13). Il suffit donc, pour pouvoir ramener le système de Pfaff à la forme (13), et par suite à la forme réduite (12), de déterminer une équation $\lambda\omega_1 + \mu\omega_2 = 0$ admettant une famille d'éléments linéaires caractéristiques satisfaisant à la fois aux deux équations $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$. Cherchons d'abord à quelles conditions doivent satisfaire les coefficients a_i, b_i pour que l'équation $\omega_1 = 0$ elle-même possède cette propriété. Les huit équations

$$\begin{gathered} a_{i1}dx_1 + a_{i2}dx_2 + \ldots + a_{i6}dx_6 = a_i dt, \quad (i = 1, 2, \ldots, 6) \\ a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \ldots + a_6 dx_6 = 0, \qquad a_{ik} = \frac{\partial a_i}{\partial x_k} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \\ b_1 dx_1 + b_2 dx_2 + \ldots + b_6 dx_6 = 0, \end{gathered}$$

doivent admettre un système de solutions en $dx_1, \ldots, dx_6, dt$, où tous les dx_i ne soient pas nuls. Il faut et il suffit pour cela que tous les déterminants à sept lignes contenus dans le tableau

$$\mathrm{T} \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{16} & a_1 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \ldots & a_{26} & a_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & \ldots & 0 & a_6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_6 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & b_6 & 0 \end{array} \right\|$$

soient nuls. Ces conditions se réduisent à une seule. Considérons en effet le déterminant Δ obtenu en ajoutant une colonne au tableau précédent

$$\Delta = \left| \begin{array}{ccccccc} 0 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{16} & a_1 & b_1 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \ldots & a_{26} & a_2 & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & \ldots & 0 & a_6 & b_6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_6 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & b_6 & 0 & 0 \end{array} \right|$$

qui devient identique à un déterminant symétrique gauche quand on change le signe des deux dernières lignes ou des dernières colonnes. Si tous les déterminants d'ordre sept déduits du tableau T sont nuls, le déterminant Δ est nul, comme on le voit immédiatement en le développant par rapport aux éléments de la dernière colonne. Réciproquement, si $\Delta = 0$, tous ses mineurs du premier ordre sont nuls aussi, puisque c'est un déterminant symétrique gauche d'ordre pair. En particulier, tous les mineurs correspondant aux éléments de la dernière colonne, c'est-à-dire tous les déterminants à sept lignes du tableau T sont nuls. La relation $\Delta = 0$

exprime donc la condition *nécessaire et suffisante* pour que l'équation $\omega_1 = 0$ admette une famille d'éléments linéaires caractéristiques satisfaisant aux deux équations $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$.

Cherchons maintenant la condition pour que cette propriété appartienne à l'équation $\lambda\omega_1 + \mu\omega_2 = 0$, où l'on a par exemple $\lambda \neq 0$. On obtient évidemment cette condition en remplaçant dans Δ le coefficient a_i par $\lambda a_i + \mu b_i$, et a_{ik} par

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(\lambda a_i + \mu b_i) - \frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda a_{ik} + \mu b_{ik} + a_i \frac{\partial \lambda}{\partial x_k} + b_i \frac{\partial \mu}{\partial x_k} - a_k \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} - b_k \frac{\partial \mu}{\partial x_i}.$$

En retranchant dans le nouveau déterminant les éléments de la dernière colonne multipliés par μ des éléments correspondants de la colonne précédente, et en opérant de même sur les deux dernières lignes, puis en divisant par λ^2, on ramène le nouveau déterminant à un autre où les deux dernières lignes et les deux dernières colonnes sont identiques aux lignes et aux colonnes de même rang de Δ. Si l'on retranche ensuite de la $k^{\text{ième}}$ colonne les éléments correspondants de la septième colonne multipliés par $\frac{\partial \lambda}{\partial x_k}$ et ceux de la dernière multipliés par $\frac{\partial \mu}{\partial x_k}$, on fait disparaître les termes $a_i \frac{\partial \lambda}{\partial x_k} + b_i \frac{\partial \mu}{\partial x_k}$ de chaque élément. On fait de même disparaître de chaque élément la somme $a_k \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} + b_k \frac{\partial \mu}{\partial x_i}$ en ajoutant aux éléments de la $i^{\text{ième}}$ ligne les éléments correspondants de la septième ligne multipliés par $\frac{\partial \lambda}{\partial x_i}$ et ceux de la dernière multipliés par $\frac{\partial \mu}{\partial x_i}$. Après toutes ces transformations, on arrive en définitive au résultat suivant :

Pour que l'équation de Pfaff

$$\lambda\omega_1 + \mu\omega_2 = 0 \tag{15}$$

admette une famille d'éléments linéaires caractéristiques qui vérifient les deux équations $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, il faut et il suffit que l'on ait

$$\Delta(\lambda, \mu) = \begin{vmatrix} 0, & \lambda a_{12} + \mu b_{12} & \dots\dots & \lambda a_{16} + \mu b_{16}, & a_1, & b_1 \\ \lambda a_{21} + \mu b_{21}, & 0, & \dots\dots & \lambda a_{26} + \mu b_{26}, & a_2, & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{61} + \mu b_{61}, & \lambda a_{62} + \mu b_{62}, & \dots\dots & 0, & a_6, & b_6 \\ a_1, & a_2, & \dots\dots & a_6, & 0, & 0 \\ b_1, & b_2, & \dots\dots & b_6, & 0, & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{16}$$

Il est clair que l'on obtiendrait la même condition en supposant $\mu \neq 0$. L'équation (16) est identique à l'équation du second degré considéré par M. Duport.

On est encore conduit à l'équation (16) dans la recherche des éléments linéaires singuliers. Pour qu'un élément linéaire intégral e_1 $(dx_1, dx_2, \ldots, dx_6)$ soit singulier, il faut et il suffit que les quatre équations

$$(17) \qquad \begin{cases} \sum a_i \delta x_i = 0, & \sum b_i \delta x_i = 0, \\ \omega'_1 = \sum a_{ik} dx_k \delta x_i = 0, & \omega'_2 = \sum b_{ik} dx_k \delta x_i = 0, \end{cases}$$

qui déterminent les éléments linéaires $(\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_6)$ en involution avec l'élément e_1, se réduisent à moins de quatre équations distinctes. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'on ait, pour des valeurs convenables, des coefficients λ, μ, ν, ρ, et quels que soient les δx_i,

$$\lambda \sum a_{ik} dx_k \delta x_i + \mu \sum b_{ik} dx_k \delta x_i + \nu \sum a_i \delta x_i + \rho \sum b_i \delta x_i = 0,$$

ou encore

$$(18) \qquad (\lambda a_{i1} + \mu b_{i1}) dx_1 + \ldots + (\lambda a_{i6} + \mu b_{i6}) dx_6 + \nu a_i + \rho b_i = 0$$
$$i = 1, 2, \ldots, 6;$$

si nous ajoutons à ces six équations les deux relations

$$\omega_1 = \sum a_i dx_i = 0, \qquad \omega_2 = \sum b_i dx_i = 0,$$

nous obtenons un système de huit équations homogènes en $dx_1, \ldots, dx_6, \nu, \rho$. Pour qu'elles admettent un système de solutions où les valeurs des dx_i ne soient pas toutes nulles, il est nécessaire que le déterminant $\Delta(\lambda, \mu)$ soit nul, et cette condition est évidemment suffisante si les deux équations $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$ sont distinctes.

Remarque. — Lorsque, pour un système de valeurs (λ, μ), l'équation (15) est de classe trois, il est à peu près évident que l'on doit avoir $\Delta(\lambda, \mu) = 0$. En effet, cette équation (15) étant ramenée à une forme canonique $dy_1 + y_2\, dy_3 = 0$, il est clair que les équations

$$dy_1 = 0, \qquad dy_2 = 0, \qquad dy_3 = 0, \qquad \lambda' \omega_1 + \mu' \omega_2 = 0, \qquad \omega_3 = 0,$$

où $\lambda'\mu - \lambda\mu'$ n'est pas nul, et où ω_3 est une équation choisie arbitrairement de façon à former avec les précédentes un système de cinq relations distinctes, définissent une famille d'éléments linéaires caractéristiques de l'équation (15) qui vérifient les deux équations $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$.

• **[6]** Reprenons un système de Pfaff de sixième classe ramené à la forme réduite (12), que nous écrirons, en modifiant un peu les notations en vue de la suite,

$$(19)\qquad \begin{cases} \omega_1 = dz - p\,dx - q\,dy = 0, \\ \omega_2 = X\,dx + Y\,dy + P\,dp + Q\,dq = 0, \end{cases}$$

X, Y, P, Q étant des fonctions de x, y, z, p, q et d'une sixième variable u. Nous pouvons écarter le cas, sur lequel on reviendra plus loin, où les rapports de ces fonctions ne dépendraient pas de u; le système de Pfaff serait alors de classe inférieure à six.

On peut aussi supposer, en effectuant au besoin sur les variables x, y, z, p, q une transformation de contact (transformation de Legendre ou d'Ampère), que P n'est pas nul, et prendre par conséquent $P = 1$. Si Q dépend de u, on peut prendre ce coefficient Q pour la variable $-u$ elle-même. Si Q est indépendant de u, cette variable figure nécessairement dans X ou dans Y. Si u figure dans Y, on effectuera une transformation d'Ampère en écrivant l'équation $\omega_1 = 0$

$$\omega_1 = d(z - qy) - p\,dx + y\,dq,$$

ce qui permute les variables q et y, et l'on sera ramené au cas précédent. Si Y ne dépend pas de u, sans être nul, X contient forcément la variable u, et la transformation de Legendre ramène encore au premier cas. Si Y est nul et Q différent de zéro, la transformation d'Ampère ramène encore au premier cas. Il ne reste donc à examiner que l'hypothèse où l'on aurait $Y = 0$, $Q = 0$; on peut alors poser $X = -u$. Le système (19) est alors

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0, \qquad dp - u\,dx = 0;$$

la transformation de contact définie par les formules

$$x = q', \quad y = p', \quad p = p' - y', \quad q = q' - x', \quad z = z' + p'q' - p'x' - q'y$$

le remplace par le système

$$dz' - p'dx' - q'dy' = 0, \qquad dp' + dy' - u\,dq' = 0.$$

On peut donc toujours écrire les équations (19) du système de Pfaff sous la forme réduite

$$(20)\qquad \begin{cases} \omega_1 = dz - p\,dx - q\,dy = 0, \\ \omega_2 = dp - u\,dq - a\,dx - b\,dy = 0, \end{cases}$$

où figurent deux fonctions arbitraires a et b des six variables x, y, z, p, q, u. On ne peut obtenir pour un système de Pfaff *quelconque* de deux équations à six variables une forme réduite où figurent moins de deux coefficients arbitraires. En effet, le système, étant supposé résolu par rapport à deux des différentielles, contient huit coefficients arbitraires. Quand on effectue un changement de variables, on dispose de six fonctions arbitraires que l'on peut choisir de façon que six des coefficients du système transformé aient des expressions données à l'avance; il restera donc deux coefficients indéterminés dans le nouveau système d'équations.

Il est facile de former directement les équations des deux familles d'éléments singuliers du système (20). Nous avons

$$\omega'_1 = -[udq + bdy]\delta x + [bdx - dq]\delta y + [udx + dy]\delta q,$$

$$\begin{aligned}\omega'_2 = &-\left[\left(\frac{da}{dy} - \frac{db}{dx}\right)dy + \left(\frac{\partial a}{\partial q} + u\frac{\partial a}{\partial p}\right)dq + \frac{\partial a}{\partial u}du\right]\delta x \\ &+\left[\left(\frac{da}{dy} - \frac{db}{dx}\right)dx - \left(\frac{\partial b}{\partial q} + u\frac{\partial b}{\partial p}\right)dq - \frac{\partial b}{\partial u}du\right]\delta y \\ &+\left[\left(u\frac{\partial a}{\partial p} + \frac{\partial a}{\partial q}\right)dx + \left(u\frac{\partial b}{\partial p} + \frac{\partial b}{\partial q}\right)dy - du\right]\delta q \\ &+\left[\frac{\partial a}{\partial u}dx + \frac{\partial b}{\partial u}dy + dq\right]\delta u,\end{aligned} \qquad \bmod (\omega_1, \omega_2)$$

en posant

$$\frac{da}{dy} = \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial z}q + \frac{\partial a}{\partial p}b,$$

$$\frac{db}{dx} = \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial z}q + \frac{\partial b}{\partial p}a.$$

Les deux équations $\omega'_1 = 0$, $\omega'_2 = 0$, considérées comme déterminant les rapports des $\delta x, \delta y, \delta q, \delta u$, peuvent se réduire à une seule de deux façons différentes :

1° En supposant que l'on a $\omega'_1 = 0$, ce qui donne le premier système d'éléments singuliers définis par les relations

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-u} = \frac{dq}{b} = \frac{dp}{a} = \frac{dz}{p - qu}, \tag{21}$$

correspondant à l'équation singulière $\omega_1 = 0$;

2° Ce cas écarté, les deux équations $\omega'_1 = 0$, $\omega'_2 = 0$ ne peuvent être identiques que si le coefficient de δu dans ω'_2 est nul

$$dq + \frac{\partial a}{\partial u}dx + \frac{\partial b}{\partial u}dy = 0. \tag{22}$$

En tenant compte de cette condition, les deux équations $\omega'_1 = 0$, $\omega'_2 = 0$ deviennent

$$\omega'_1 = \left[u\frac{\partial a}{\partial u}\,dx + \left(u\frac{\partial b}{\partial u} - b\right) dy \right]\delta x + \left[\left(b + \frac{\partial a}{\partial u}\right) dx + \frac{\partial b}{\partial u}\,dy \right]\delta y + (u\,dx + dy)\delta q = 0,$$

$$\begin{aligned}\omega'_2 = {} & \left[\left(\frac{db}{dx} - \frac{da}{dy}\right) dy + \left(\frac{\partial a}{\partial q} + u\frac{\partial a}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial a}{\partial u}\,dx + \frac{\partial b}{\partial u}\,dy\right) - \frac{\partial a}{\partial u}\,du \right]\delta x \\ & + \left[\left(\frac{da}{dy} - \frac{db}{dx}\right) dx + \left(\frac{\partial b}{\partial q} + u\frac{\partial b}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial a}{\partial u}\,dx + \frac{\partial b}{\partial u}\,dy\right) - \frac{\partial b}{\partial u}\,du \right]\delta y \\ & + \left[\left(u\frac{\partial a}{\partial p} + \frac{\partial a}{\partial q}\right) dx + \left(u\frac{\partial b}{\partial p} + \frac{\partial b}{\partial q}\right) dy - du \right]\delta q = 0.\end{aligned}$$

Pour que ces deux équations se réduisent à une seule, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{A\,dy + B\left(\frac{\partial a}{\partial u}\,dx + \frac{\partial b}{\partial u}\,dy\right) - \frac{\partial a}{\partial u}\,du}{u\left(\frac{\partial a}{\partial u}\,dx + \frac{\partial b}{\partial u}\,dy\right) - b\,dy} = \frac{-A\,dx + C\left(\frac{\partial a}{\partial u}\,dx + \frac{\partial b}{\partial u}\,dy\right) - \frac{\partial b}{\partial u}\,du}{b\,dx + \left(\frac{\partial a}{\partial u}\,dx + \frac{\partial b}{\partial u}\,dy\right)}$$
$$= \frac{B\,dx + C\,dy - du}{u\,dx + dy},$$

où l'on a posé

$$A = \frac{db}{dx} - \frac{da}{dy}, \qquad B = \frac{\partial a}{\partial q} + u\frac{\partial a}{\partial p}, \qquad C = \frac{\partial b}{\partial q} + u\frac{\partial b}{\partial p}.$$

Ces deux conditions se réduisent à une seule, car si l'on ajoute aux deux termes du premier et du second rapport ceux du troisième multipliés respectivement par $-\frac{\partial a}{\partial u}$ et $-\frac{\partial b}{\partial u}$, elles deviennent

$$\frac{\left(A + B\frac{\partial b}{\partial u} - C\frac{\partial a}{\partial u}\right) dy}{\left(u\frac{\partial b}{\partial u} - b - \frac{\partial a}{\partial u}\right) dy} = \frac{\left(-A - B\frac{\partial b}{\partial u} + C\frac{\partial a}{\partial u}\right) dx}{\left(b + \frac{\partial a}{\partial u} - u\frac{\partial b}{\partial u}\right) dx} = \frac{B\,dx + C\,dy - du}{u\,dx + dy}.$$

On obtient donc une seule condition

$$\left(A + B\frac{\partial b}{\partial u} - C\frac{\partial a}{\partial u}\right)(u\,dx + dy) = \left(u\frac{\partial b}{\partial u} - b - \frac{\partial a}{\partial u}\right)(B\,dx + C\,dy - du)$$

et l'on a un second système d'éléments singuliers déterminés par les quatre équations

$$
(23)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\left(A + B\frac{\partial b}{\partial u} - C\frac{\partial a}{\partial u}\right)(udx + dy) = \left(u\frac{\partial b}{\partial u} - b - \frac{\partial a}{\partial u}\right)(Bdx + Cdy - du),\\
&dq + \frac{\partial a}{\partial u}dx + \frac{\partial b}{\partial u}dy = 0,\\
&\omega_1 = 0, \qquad \omega_2 = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

L'équation singulière correspondante du système de Pfaff est

$$
(24)\qquad \left(u\frac{\partial b}{\partial u} - b - \frac{\partial a}{\partial u}\right)\omega_2 - \left(A + B\frac{\partial b}{\partial u} - C\frac{\partial a}{\partial u}\right)\omega_1 = 0.
$$

Si $u\frac{\partial b}{\partial u} - b - \frac{\partial a}{\partial u}$ est différent de zéro, les deux familles d'éléments singuliers sont distinctes, ainsi que les équations singulières correspondantes du système de Pfaff.

Lorsque $u\frac{\partial b}{\partial u} - b - \frac{\partial a}{\partial u}$ est nul, sans que $A + B\frac{\partial b}{\partial u} - C\frac{\partial a}{\partial u}$ soit nul, les deux familles d'éléments singuliers sont confondues, ainsi que les équations singulières correspondantes. Enfin, si l'on a à la fois

$$
(25)\qquad u\frac{\partial b}{\partial u} - b - \frac{\partial a}{\partial u} = 0, \qquad A + B\frac{\partial b}{\partial u} - C\frac{\partial a}{\partial u} = 0,
$$

nous sommes dans le cas où le problème est indéterminé, et où le système de Pfaff est de cinquième classe. On voit en effet que dans ce cas les équations obtenues, en égalant à zéro les coefficients de δx, δy, δq, δu dans ω'_1 et ω'_2, se réduisent à deux

$$
udx + dy = 0, \qquad dq + \frac{\partial a}{\partial u}dx + \frac{\partial b}{\partial u}dy = 0,
$$

ce qui est bien d'accord avec les propriétés générales démontrées au n° **4**.

Remarque. — Connaissant une première famille d'éléments singuliers, on peut obtenir aisément les équations de la seconde famille en s'appuyant sur ce que deux éléments singuliers appartenant à deux familles différentes sont en involution.

Soient (dx, dy, dz, dp, dq, du) un élément singulier de la famille qui correspond à l'équation singulière $\omega_1 = 0$, $(\delta x, \delta y, \ldots, \delta u)$ un élément singulier de la seconde famille. Si dans l'équation $\omega'_2 = 0$ on remplace dy, dz, dp, dq par leurs expressions tirées des formules (21), il reste seulement un terme en dx et un terme en du. En égalant leurs coefficients à zéro, on a deux relations en $\delta x, \ldots, \delta u$, qui définissent les éléments singuliers de la seconde famille. En effectuant les calculs, on retrouve bien les deux premières équations (23).

[7] D'une façon générale, quelles que soient les fonctions X, Y, P, Q, l'équation $\omega_1 = 0$ est une équation singulière pour le système (19), et les éléments singuliers correspondants sont définis par les relations

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{-dp}{X} = \frac{-dq}{Y} = \frac{dz}{Pp + Qq}. \tag{26}$$

Les équations différentielles qui définissent une famille d'éléments singuliers d'un système de Pfaff de classe six, correspondant à une équation singulière de classe cinq, admettent au plus deux combinaisons intégrables distinctes.

Soit $dF = 0$ une combinaison intégrable des équations (26). La fonction F doit satisfaire aux deux équations simultanées

$$P\frac{\partial F}{\partial x} + Q\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}(Pp + Qq) - X\frac{\partial F}{\partial p} - Y\frac{\partial F}{\partial q} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial u} = 0,$$

dont la dernière montre que la fonction F ne dépend que des variables caractéristiques de l'équation singulière $\omega_1 = 0$.

S'il existe une intégrale commune à ces deux équations, on peut donc supposer que l'on a effectué sur les variables x, y, z, p, q une transformation de contact de façon que cette intégrale soit $y = C$. Cette transformation étant faite, on aura donc $Q = 0$. Si P n'est pas nul, ce que nous supposerons tout d'abord, on peut prendre $P = 1$, et l'un au moins des coefficients X; Y contient la variable u. Nous supposerons tout d'abord que X dépend de u; on peut prendre ce coefficient lui-même pour la variable u, et écrire le système de Pfaff

$$\omega_1 = dz - pdx - qdy = 0, \qquad \omega_2 = dp - udx - f(x, y, z, p, q, u)dy = 0.$$

La famille d'éléments singuliers correspondant à l'équation singulière $\omega_1 = 0$ est définie par le système d'équations

$$dy = 0, \qquad dp = udx, \qquad dq = fdx, \qquad dz = pdx;$$

pour que $dF = 0$ soit une combinaison intégrable de ces équations, la fonction F doit satisfaire aux relations

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}p + \frac{\partial F}{\partial p}u + \frac{\partial F}{\partial q}f = 0.$$

En différentiant la seconde par rapport à u, on voit que F doit aussi satisfaire aux deux conditions

$$\frac{\partial F}{\partial p}+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial u}=0, \qquad \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}=0;$$

si $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$ n'est pas nul, on en tire successivement

$$\frac{\partial F}{\partial q}=0, \qquad \frac{\partial F}{\partial p}=0, \qquad \frac{\partial F}{\partial z}=0, \qquad \frac{\partial F}{\partial x}=0,$$

et il n'y a pas d'autre intégrale première que $dy=0$. Si f est une fonction linéaire de u, $f=\alpha u+\beta$, la fonction F doit être une intégrale du système

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}p+\frac{\partial F}{\partial q}\beta=0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial p}+\frac{\partial F}{\partial q}\alpha=0,$$

qui se présente aussi quand on cherche les combinaisons intégrales des équations différentielles

$$dy=0, \qquad dz=pdx, \qquad dq-\alpha dp-\beta dx=0,$$

d'un des systèmes de caractéristiques de l'équation $s=\alpha r+\beta$. Ce résultat sera expliqué plus loin (n° **13**). Cette équation ayant deux familles distinctes de caractéristiques, le système précédent admet au plus deux intégrales distinctes.

Si X ne dépend pas de u [1], Y dépend nécessairement de u, pour que le système soit de sixième classe, et l'on peut écrire ce système

$$\omega_1=dz-pdx-qdy=0, \qquad \omega_2=dp-f(x,y,z,p,q)dx-udy=0.$$

Les équations différentielles de la famille d'éléments singuliers qui correspond à $\omega_1=0$, sont

$$dy=0, \qquad dp=fdx, \qquad dq=udx, \qquad dz=pdx.$$

Si $dF=0$ est une combinaison intégrable, on doit avoir

$$\frac{\partial F}{\partial u}=0, \qquad \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}p+\frac{\partial F}{\partial p}f+\frac{\partial F}{\partial q}u=0,$$

---

[1] Il est à remarquer que, dans ce cas, les deux familles d'éléments singuliers ne sont pas distinctes, car on peut écrire la seconde équation, grâce à une transformation d'Ampère, $dp-udq-fdx=0$. On a $a=f$, $b=0$, et la première des conditions (25) est vérifiée.

et par suite

$$\frac{\partial F}{\partial q} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} p + \frac{\partial F}{\partial p} f = 0.$$

En différentiant la seconde par rapport à q, on obtient la nouvelle condition

$$\frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial q} = 0.$$

Si $\frac{\partial f}{\partial q}$ n'est pas nul, on aura aussi

$$\frac{\partial F}{\partial p} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

et par suite, il n'y a pas d'autre combinaison intégrable que $dy = 0$.

Si $\frac{\partial f}{\partial q} = 0$, on vérifie aisément que le système de Pfaff est de cinquième classe. De même, lorsque $P = 0$, le système de Pfaff est encore de cinquième classe, car si le rapport $\frac{Y}{X}$ dépend de u, on peut écrire la seconde équation du système $dy = u\,dx$, et la première $dz = (p + uq)dx$; il n'y figure que les cinq variables $x, y, z, u, q + qu$.

[**8**] Prenons maintenant le cas où l'une des équations du système de Pfaff est de classe trois. Si l'on suppose cette équation ramenée à une forme canonique, on peut écrire le système de Pfaff

$$(27) \qquad \begin{cases} \omega_1 = dy_3 - y_2 dy_1 = 0, \\ \omega_2 = Y_1 dy_1 + Y_2 dy_2 + Y_4 dy_4 + Y_5 dy_5 + Y_6 dy_6 = 0. \end{cases}$$

Écartons le cas où Y_4, Y_5, Y_6 seraient nuls à la fois; le système serait alors de classe inférieure à *six*. L'équation auxiliaire

$$Y_4 dy_4 + Y_5 dy_5 + Y_6 dy_6 = 0,$$

où l'on regarde y_1, y_2, y_3 comme des paramètres, peut être de classe *trois* ou de classe *un*. Si cette équation est de classe trois, on peut, par un nouveau changement de variables effectué sur y_4, y_5, y_6, la ramener à une forme canonique, et le système (27) s'écrit sous la forme réduite

$$(28) \qquad \begin{cases} \omega_1 = dy_3 - y_2 dy_1 = 0, \\ \omega_2 = dy_5 - y_6 dy_4 + Y_1 dy_1 + Y_2 dy_2 = 0, \end{cases}$$

Y_1 et Y_2 n'ayant plus la même expression que dans les formules (27). Si l'équation auxiliaire est de classe un, on peut de même, par un changement de variables effectué sur y_4, y_5, y_6, ramener l'équation $\omega_2 = 0$ à la forme

$$\omega_2 = dy_4 + Y_1 dy_1 + Y_2 dy_2 = 0.$$

Les fonctions Y_1 Y_2 doivent former avec y_1, y_2, y_3, y_4 un système de six fonctions distinctes; autrement le système de Pfaff serait de classe *quatre* ou *cinq*. On peut donc poser

$$Y_1 = y_5, \qquad Y_2 = y_6,$$

et le système de Pfaff prend la forme canonique

$$(29) \qquad \begin{cases} \omega_1 = dy_3 - y_2 dy_1 = 0, \\ \omega_2 = dy_4 + y_5 dy_1 + y_6 dy_2 = 0. \end{cases}$$

Les deux formes (28) et (29) sont essentiellement distinctes. En effet, les équations différentielles de la famille d'éléments singuliers correspondant à l'équation $\omega_1 = 0$ du système (28) sont

$$dy_1 = 0, \qquad dy_2 = 0, \qquad dy_3 = 0, \qquad dy_5 - y_6 dy_4 = 0,$$

et admettent *trois* combinaisons intégrables seulement.

Au contraire, pour le système (29), les équations différentielles de cette famille d'éléments singuliers sont

$$dy_1 = 0, \qquad dy_2 = 0, \qquad dy_3 = 0, \qquad dy_4 = 0$$

et admettent *quatre* combinaisons intégrables distinctes.

Dans ce dernier cas, les deux familles d'éléments singuliers du système (29) sont confondues. On a en effet

$$\omega'_2 = dy_5 \delta y_1 - dy_1 \delta y_5 + dy_6 \delta y_2 - dy_2 \delta y_6;$$

pour que l'élément $(\delta y_1, \ldots, \delta y_6)$ soit en involution avec un élément singulier du premier système, il faut que l'on ait, quels que soient dy_5 et dy_6, $dy_6\,\delta y_2 + dy_5\,\delta y_1 = 0$, ce qui exige que δy_1 et δy_2 soient nuls. La seconde famille se confond donc avec la première.

Il est d'ailleurs facile de vérifier que l'équation $\Delta(\lambda, \mu) = 0$ se réduit dans ce cas à $\mu^4 = 0$.

Au contraire, les deux familles d'éléments singuliers du système (28) sont toujours distinctes. Si en effet dans l'équation

$$\omega'_2 = dy_4 \delta y_6 - dy_6 \delta y_4 + dY_1 \delta y_1 - \delta Y_1 dy_1 + dY_2 \delta y_2 - \delta Y_2 dy_2 = 0,$$

on remplace dy_1, dy_2, dy_3 par zéro et dy_5 par $y_6\, dy_4$, en égalant à zéro les coefficients de dy_4 et de dy_6, on obtient une équation où figure δy_6.

Dans le particulier où $Y_1 = Y_2 = 0$, les équations (28) deviennent

$$(30) \qquad \omega_1 = dy_3 - y_2 dy_1 = 0, \qquad \omega_2 = dy_5 - y_6 dy_4 = 0;$$

les deux équations singulières du système sont alors de troisième classe.

[**9**] Classification. — En définitive, lorsque le système de Pfaff S est de classe *six*, on peut toujours, par un changement de variables, le ramener à l'une des formes suivantes :

1° *Cas général.* — L'équation $F(\lambda, \mu) = 0$ a deux racines distinctes, et à chacune d'elles correspond une équation $\lambda\omega_1 + \mu\omega_2 = 0$ de classe cinq. Le système peut être ramené, de deux façons différentes, à la forme réduite,

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} \Omega_1 = dz - p dx - q dy = 0, \\ \Omega_2 = dp - u dq - a dx - b dy = 0, \end{cases}$$

a et b étant des fonctions de x, y, z, p, q, u. L'expression $\dfrac{\partial a}{\partial u} + b - u\dfrac{\partial b}{\partial u}$ n'est pas nulle, et les équations différentielles qui définissent les éléments singuliers de chaque système admettent au plus deux combinaisons intégrables.

2° L'équation $F(\lambda, \mu) = 0$ a deux racines simples, l'une qui correspond à une équation de classe cinq, l'autre à une équation de classe trois. Le système peut être ramené à la forme (I) et aussi à la forme suivante

$$(\mathrm{II}) \qquad \begin{cases} \Omega_1 = dy_3 - y_2 dy_1 = 0, \\ \Omega_2 = dy_5 - y_6 dy_4 - a dy_1 - b dy_2, \end{cases}$$

a et b étant des fonctions de $y_1, y_2, \ldots, y_6$, et n'étant pas nuls à la fois. L'un des systèmes d'équations différentielles qui définissent les éléments singuliers admet au plus deux combinaisons intégrables, l'autre en admet trois.

3° L'équation $F(\lambda, \mu) = 0$ a deux racines simples, à chacune desquelles correspond une équation singulière de classe trois.

On peut donc trouver dans le système deux équations distinctes de classe trois, et les variables caractéristiques de ces deux équations sont évidemment indépendantes, puisque le système est de classe six. On peut donc le ramener à une forme canonique

$$\text{(III)}\qquad \begin{cases} \Omega_1 = dy_3 - y_2 dy_1 = 0, \\ \Omega_2 = dy_5 - y_6 dy_4 = 0. \end{cases}$$

Les équations différentielles de chaque famille d'éléments singuliers admettent trois combinaisons intégrables distinctes.

4° L'équation $F(\lambda, \mu) = 0$ admet une racine double à laquelle correspond une équation de classe cinq. Le système peut être ramené d'une seule façon à la forme (I). L'expression $u\frac{\partial b}{\partial u} - b - \frac{\partial a}{\partial u}$ est nulle, mais la seconde des conditions (25) n'est pas satisfaite.

5° L'équation $F(\lambda, \mu) = 0$ a une racine double à laquelle correspond une équation singulière de classe trois. Le système peut être ramené à une forme canonique

$$\text{(IV)}\qquad \begin{cases} \Omega_1 = dy_3 - y_2 dy_1 = 0, \\ \Omega_2 = dy_4 + y_5 dy_1 + y_6 dy_2 = 0; \end{cases}$$

il y a une seule famille d'éléments singuliers, dont les équations différentielles admettent quatre combinaisons intégrables.

6° L'équation $F(\lambda, \mu) = 0$ a une racine double, à laquelle correspond une équation de classe un. Le système est réductible à une forme canonique

$$\text{(V)}\qquad \begin{cases} \Omega_1 = du = 0, \\ \Omega_2 = dz - p\,dx - q\,dy = 0. \end{cases}$$

Il n'y a pas d'éléments singuliers (*voir* n° **2**).

[**10**] Pour compléter l'énumération des formes réduites auxquelles on peut ramener un système de deux équations de Pfaff à six variables, nous devons encore examiner le cas où le système est de classe inférieure à six. Soit

$$\omega_1 = 0, \qquad \omega_2 = 0,$$

un système de classe cinq à six variables, et soient λ, μ deux coefficients quelconques choisis de telle façon que l'équation $\lambda\omega_1 + \mu\omega_2 = 0$ soit de classe cinq. Cette équation étant mise sous forme canonique, on peut remplacer le système proposé par un système équivalent

$$\omega'_1 = dz - p\,dx - q\,dy = 0,$$
$$\omega'_2 = X\,dx + Y\,dy + P\,dp + Q\,dq + U\,du = 0,$$

u étant la dernière variable. Si U n'est pas nul, on a

$$\omega'_1 = dp\,\delta x - dx\,\delta p + dy\,\delta q - dq\,\delta y \qquad (\bmod\ \omega_1, \omega_2)$$

et les éléments caractéristiques devraient vérifier les relations

$$dx = dy = dp = dq = 0$$

et par suite $dz = du = 0$. Il n'y a donc pas d'élément caractéristique pour le système, si U n'est pas nul. On a donc $U = 0$, si le système est de cinquième classe, et ce système peut être ramené d'une infinité de manières à la forme (19). Il suffit pour cela de prendre une équation quelconque du système $\lambda\omega_1 + \mu\omega_2 = 0$, qui soit de cinquième classe. A chacune de ces équations correspond une famille d'éléments singuliers du système, qui ont pour image une droite du plan P passant par le point O qui représente l'élément caractéristique (n° **1**). Si l'on met le système sous la forme réduite (20), les deux coefficients a et b vérifient les deux conditions (25).

Mais on a aussi pour les systèmes de deux équations de Pfaff de cinquième classe des formes réduites où ne figurent que cinq variables et une fonction arbitraire. On peut faire pour ces systèmes une étude des éléments singuliers analogue à celle qui a été faite au n° **1** pour les systèmes à six variables, mais les résultats sont tout différents. Soit S un système de deux équations de Pfaff à cinq variables x_1, x_2, x_3, x_4, x_5,

$$\omega_1 = 0, \qquad \omega_2 = 0,$$

que l'on peut supposer résolues, pour fixer les idées, par rapport à x_4 et x_5. Dans les équations

$$\omega'_1 = 0, \qquad \omega'_2 = 0 \qquad (\bmod\ \omega_1, \omega_2)$$

on peut ne laisser que $dx_1, dx_2, dx_3, \delta x_1, \delta x_2, \delta x_3$, et ces équations deviennent

$$\omega'_1 = A_1(dx_2\,\delta x_3 - dx_3\,\delta x_2) + B_1(dx_3\,\delta x_1 - dx_1\,\delta x_3) + C_1(dx_1\,\delta x_2 - dx_2\,\delta x_1) = 0,$$
$$\omega'_2 = A_2(dx_2\,\delta x_3 - dx_3\,\delta x_2) + B_2(dx_3\,\delta x_1 - dx_1\,\delta x_3) + C_2(dx_1\,\delta x_2 - dx_2\,\delta x_1) = 0.$$

Considérons (dx_1, dx_2, dx_3), $(\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3)$ comme les coordonnées homogènes de deux points m, m' d'un plan, et soient P_1, P_2 les points du même plan de coordonnées homogènes (A_1, B_1, C_1), (A_2, B_2, C_2). La relation $\omega'_1 = 0$ exprime que les trois points m, m', P_1 sont en ligne droite, et $\omega'_2 = 0$ exprime de même que les trois points m, m', P_2 sont en ligne droite. Si les points P_1 et P_2 sont distincts, tout point m non situé sur la droite P_1P_2 représente un élément intégral e_1 qui n'appartient pas à un élément e_2, tandis que les points de la droite P_1P_2 représentent des éléments singuliers ε_1 qui forment un élément intégral ε_2. De tout point de l'espace à cinq dimensions il part donc un élément intégral ε_2. Mais ces éléments à deux dimensions ne peuvent pas en général être associés de façon à former des intégrales à deux dimensions du système.

Ceci ne s'applique plus si les deux points P_1, P_2 sont confondus; ce point représente alors un *élément caractéristique* du système, qui est de quatrième classe. Il en est de même si l'une des équations $\omega'_1 = 0$, $\omega'_2 = 0$ est vérifiée identiquement ou si ces deux équations se réduisent à des identités. Le système est alors de classe deux, c'est-à-dire complètement intégrable.

Revenons au cas général d'un système de classe cinq. Parmi les équations $\lambda\omega_1 + \mu\omega_2 = 0$ il y en a toujours une infinité de classe trois, car la condition pour qu'une équation de Pfaff à cinq variables

$$\Omega = a_1 dx_1 + \ldots + a_5 dx_5 = 0$$

soit de classe trois est que le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{15} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{25} & a_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{51} & a_{52} & \ldots & a_{55} & a_5 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_5 & 0 \end{vmatrix}$$

soit nul. En prenant pour Ω la forme $\lambda\omega_1 + \mu\omega_2$, on est conduit à une équation où figurent les deux fonctions λ, μ, et leurs dérivées partielles du premier ordre. Si, par exemple, λ figure dans cette condition, on pourra prendre μ arbitrairement, et l'on a pour déterminer λ une équation aux dérivées partielles du premier ordre.

On peut donc toujours supposer que l'équation $\omega_1 = 0$ est de classe trois, et ramenée à une forme canonique. Le système proposé peut donc être écrit comme il suit, par un choix convenable des variables,

$$\omega_1 = dy_3 - y_2 dy_1 = 0, \qquad \omega_2 = Y_1 dy_1 + Y_2 dy_2 + Y_4 dy_4 + Y_5 dy_5 = 0;$$

les deux fonctions Y_4, Y_5 ne peuvent pas être nulles à la fois, car le système serait de quatrième classe. Soit K un facteur tel que l'on ait

$$K(Y_4 dy_4 + Y_5 dy_5) = \frac{\partial U}{\partial y_4} dy_4 + \frac{\partial U}{\partial y_5} dy_5 = dU - \frac{\partial U}{\partial y_1} dy_1 - \frac{\partial U}{\partial y_2} dy_2 - \frac{\partial U}{\partial y_3} dy_3;$$

en prenant la fonction U pour la variable indépendante y_4, on voit que la seconde équation du système peut s'écrire

$$\omega_2 = dy_4 - U_1 dy_1 - U_2 dy_2 = 0,$$

l'un au moins des deux coefficients U_1, U_2 dépendant de la variable y_5. Comme on peut permuter y_1 et y_2, on peut prendre le coefficient U_2 pour cette variable, et le système de Pfaff est mis sous la forme réduite

$$\text{(VI)} \qquad \begin{cases} \omega_1 = dy_3 - y_2 dy_1 = 0, \\ \omega_2 = dy_4 - f dy_1 - y_5 dy_2 = 0, \end{cases}$$

f étant une fonction quelconque de y_1, y_2, y_3, y_4, y_5. La démonstration prouve d'ailleurs que le système de Pfaff peut être ramené à cette forme d'une infinité de manières.

Inversement, quelle que soit la fonction f, le système (VI) est de classe cinq. On a en effet

$$\omega'_1 = dy_2 \delta y_1 - dy_1 \delta y_2,$$

$$\omega'_2 = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y_2} + y_5 \frac{\partial f}{\partial y_4}\right) dy_2 + \frac{\partial f}{\partial y_5} dy_5\right] \delta y_1 + \left[dy_5 - \left(\frac{\partial f}{\partial y_2} + y_5 \frac{\partial f}{\partial y_4}\right) dy_1\right] \delta y_2$$
$$- \left(dy_2 + \frac{\partial f}{\partial y_5} dy_1\right) \delta y_5 \qquad \text{mod } (\omega_1, \omega_2).$$

Tout élément caractéristique devrait donc satisfaire aux relations $dy_1 = 0$, $dy_2 = 0$, $dy_5 = 0$, et par suite aux relations $dy_3 = dy_4 = 0$.

Pour que les équations $\omega'_1 = 0$, $\omega'_2 = 0$ soient compatibles, il faut et il suffit, on le voit aisément que l'on ait

$$\omega_3 = dy_2 + \frac{\partial f}{\partial y_5} dy_1 = 0.$$

Les éléments singuliers du système (VI) sont donc définis par le système S_1 des trois équations $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0$, ou par le système équivalent

$$\Omega_1 = dy_3 - y_2 dy_1 = 0, \qquad \Omega_2 = dy_4 + \left(y_5 \frac{\partial f}{\partial y_5} - f\right) dy_1 = 0, \qquad \Omega_3 = dy_2 + \frac{\partial f}{\partial y_5} dy_1 = 0.$$

On a

$$\Omega'_1 = 0, \qquad \Omega'_2 = y_5 \frac{\partial^2 f}{\partial y_5^2} (dy_5 \delta y_1 - dy_1 \delta y_5), \qquad \Omega'_3 = \frac{\partial^2 f}{\partial y_5^2} (dy_5 \delta y_1 - dy_1 \delta y_5)$$
$$\text{mod } (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3);$$

si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y_5^2} = 0$, ce système S_1 est complètement intégrable, comme on le vérifie immédiatement, et le système S admet une famille d'intégrales M_2 à deux dimensions dépendant de deux constantes arbitraires, de telle sorte qu'il passe une de ces intégrales par un point quelconque de l'espace. Soient

$$Y_1 = C_1, \qquad Y_2 = C_2, \qquad Y_3 = C_3$$

les équations qui définissent ces intégrales; si l'on a pris pour variables Y_1, Y_2, Y_3 et deux autres variables indépendantes des premières, il est clair que les différentielles dY_1, dY_2, dY_3 figureront seules dans les équations du système S, et, en choisissant convenablement les deux dernières variables, et remplaçant les grandes lettres par des petites lettres, le système est ramené à une forme canonique

$$\text{(VII)} \qquad dy_2 - y_4 dy_1 = 0, \qquad dy_3 - y_5 dy_1 = 0.$$

Quoique ce système soit de genre un, il admet une famille d'intégrales à deux dimensions M_2, mais ces intégrales M_2 sont des *intégrales singulières*, car tous leurs éléments intégraux sont des éléments singuliers.

En dehors de ce cas, les équations du système S_1 ne peuvent admettre de combinaison intégrable. En effet, pour que $dF = 0$ soit une combinaison des équations de S_1, la fonction F doit satisfaire aux deux relations

$$\frac{\partial F}{\partial y_5} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{\partial f}{\partial y_5}\frac{\partial F}{\partial y_2} + y_2 \frac{\partial F}{\partial y_3} + \left(f - y_5 \frac{\partial f}{\partial y_5}\right)\frac{\partial F}{\partial y_4} = 0$$

et par suite à la relation

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial y_5^2}\frac{\partial F}{\partial y_2} - y_5 \frac{\partial^2 f}{\partial y_5^2}\frac{\partial F}{\partial y_4} = 0.$$

Si $\frac{\partial^2 f}{\partial y_5^2}$ n'est pas nul, on a donc

$$\frac{\partial F}{\partial y_2} + y_5 \frac{\partial F}{\partial y_4} = 0.$$

et par suite

$$\frac{\partial F}{\partial y_4} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y_2} = 0;$$

de la seconde condition

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial F}{\partial y_3} = 0$$

on tire alors les deux autres relations

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y_3} = 0.$$

Remarque. — Lorsque f n'est pas une fonction linéaire de y_5, on a

$$\Omega'_1 = 0, \qquad (\Omega_2 - y_5 \Omega_3)' = 0 \qquad \mathrm{mod}\,(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3).$$

Or on a

$$\Omega_1 = \omega_1, \qquad \Omega_2 - y_5 \Omega_3 = dy_4 - f dy_1 - y_5 dy_2 = \omega_2,$$

de sorte que *le système* S *est le système dérivé de* S_1.

[**11**] Lorsque le système S est de quatrième classe, on sait qu'il peut être ramené, par un changement de variables [1], à l'une des formes suivantes :

$$\text{(VIII)} \qquad \omega_1 = dy_2 - y_3 dy_1 = 0, \qquad \omega_2 = dy_3 - y_4 dy_1 = 0,$$

$$\text{(IX)} \qquad \omega_1 = dy_1 = 0, \qquad \omega_2 = dy_3 - y_4 dy_2 = 0.$$

Ce théorème peut aussi s'établir de la même façon que le théorème du n° **5** relatif aux systèmes de classe six. Soit

$$\begin{aligned} \omega_1 &= a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3 + a_4 dx_4 = 0, \\ \omega_2 &= b_1 dx_1 + b_2 dx_2 + b_3 dx_3 + b_4 dx_4 = 0 \end{aligned}$$

un système de deux équations à quatre variables. Pour que les éléments caractéristiques de l'équation $\lambda\omega_1 + \mu\omega_2 = 0$ vérifient les deux équations $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, on démontre, comme au n° **5**, qu'il faut que λ, μ vérifient la condition

$$\begin{vmatrix} 0, & \lambda a_{12} + \mu b_{12}, & \lambda a_{13} + \mu b_{13}, & \lambda a_{14} + \mu b_{14}, & a_1, & b_1 \\ \lambda a_{21} + \mu b_{21}, & 0, & \lambda a_{23} + \mu b_{23}, & \lambda a_{24} + \mu b_{24}, & a_2, & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{41} + b_{41}, & \cdots & \cdots & 0, & a_4, & b_4 \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & 0, & 0 \\ b_1, & b_2, & b_3, & b_4, & 0, & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

on a ainsi une équation dont le premier membre est un carré parfait $(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)^2 = 0$. Si l'équation $\lambda_1 \omega_1 + \mu_1 \omega_2 = 0$ est de classe trois, le système peut être ramené à la forme canonique (VIII), tandis que le système peut être ramené à la forme (IX) lorsque cette équation est de première classe.

Enfin, lorsque le système donné S est de deuxième classe, il peut être mis sous la forme canonique

$$\text{(X)} \qquad dy_1 = 0, \qquad dy_2 = 0.$$

[1] Voir, par exemple, un article de M. Cartan *Sur quelques quadratures dont l'élément différentiel contient des fonctions arbitraires.* (*Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. 29, p. 118.)

La réduction du système S à l'une des formes réduites n'exige, d'après la méthode même qui a servi à établir la possibilité de cette réduction, que l'intégration d'équations différentielles ordinaires. Par exemple, pour réduire le système à la forme (I) qui convient au cas général, on doit ramener une équation de Pfaff de classe cinq à une forme canonique.

[**12**] L'intégration d'un système de deux équations de Pfaff à six variables, c'est-à-dire la détermination de toutes les multiplicités intégrales de ce système, n'exige que l'intégration d'équations différentielles ordinaires, lorsque ce système peut être ramené à une forme canonique. Il en est ainsi en particulier lorsque ce système est de classe deux ou quatre, car il suffit de le mettre sous une des formes canoniques (VIII), (IX) ou (X). Si le système est de classe deux, toute multiplicité intégrale est représentée par le système des deux relations

$$y_1 = C_1, \qquad y_2 = C_2$$

jointe à $4 - p$ relations arbitraires entre les variables primitives; y_1 et y_2 sont supposées exprimées au moyen de ces variables x_i. Le nombre p peut avoir les valeurs 1, 2, 3, 4, et il existe des intégrales M_1, M_2, M_3, M_4.

Si le système proposé est de classe trois et réductible à la forme canonique (VIII), toutes les intégrales M_i de ce système sont définies en ajoutant zéro, une ou deux relations à l'un des systèmes d'équations

$$\begin{array}{lll} y_2 = f(y_1), & y_3 = f'(y_1), & y_4 = f''(y_1), \\ y_1 = C_1, & y_2 = C_2, & y_3 = C_3; \end{array}$$

il y a des intégrales M_1, M_2, M_3.

Enfin, si le système est réductible à la forme canonique (IX), toutes les intégrales M_i du système sont définies de même en ajoutant zéro, une ou deux relations à l'un des systèmes

$$\begin{array}{lll} y_1 = C_1, & y_3 = f(y_2), & y_4 = f'(y_2), \\ y_1 = C_1, & y_2 = C_2, & y_3 = C_3; \end{array}$$

il y a encore des intégrales M_1, M_2, M_3.

Lorsque le système est de classe cinq, on peut obtenir sans aucune intégration toutes les multiplicités intégrales, toutes les fois que le système est ramené à la forme réduite (VI) ou à la forme canonique (VII). Dans le premier cas, en effet, toutes les intégrales du système (VI) sont définies par l'un des systèmes de relations

$$\begin{array}{lllll} (\alpha) & y_3 = f(y_1), & y_2 = f'(y_1), & y_4 = \varphi(y_1), & \varphi'(y_1) - f - y_5 f'(y_1) = 0, \\ (\beta) & y_1 = C_1, & y_3 = C_3, & y_4 = \varphi(y_2), & y_5 = \varphi'(y_2), \\ (\gamma) & y_1 = C_1, & y_2 = C_2, & y_3 = C_3, & y_4 = C_4. \end{array}$$

Si l'on suppose $y_1, \ldots, y_5$ exprimées au moyen des variables x_i, on obtient ainsi une intégrale M_2 du système de Pfaff à six variables. Pour obtenir une intégrale M_1, il suffira d'établir entre les six variables x_i une autre relation de forme arbitraire.

De même, toutes les intégrales du système canonique (VII) sont définies par l'un des systèmes de relations

$$
\begin{array}{lllll}
(\alpha) & y_2 = f(y_1), & y_4 = f'(y_1), & y_3 = \varphi(y_1), & y_5 = \varphi'(y_1), \\
(\beta) & y_1 = C_1, & y_2 = C_2, & y_3 = C_3 &
\end{array}
$$

dont le second ne contient que trois relations. En revenant aux variables x_i, on voit que l'on peut ajouter aux équations (α) une relation nouvelle, tandis qu'on peut en ajouter une ou deux au système (β). Le système de Pfaff admet, dans ce cas, comme on l'a déjà remarqué, une famille d'intégrales M_3 dépendant de trois constantes arbitraires.

On peut aussi obtenir l'intégrale générale d'un système de classe cinq sans ramener ce système à la forme réduite (VI). L'intégration se ramène à la détermination des caractéristiques, comme l'a montré M. Cartan dans le Mémoire déjà cité plusieurs fois.

Considérons maintenant un système de Pfaff de classe six. Lorsque ce système peut être ramené à la forme canonique (V), son intégration est ramenée à celle d'une équation de Pfaff à cinq variables et de forme canonique. Il y a des intégrales à une et à deux dimensions. Si le système est réductible à la forme canonique (III), toutes les intégrales M_2 sont définies par un des systèmes de relations

$$
\begin{array}{lllll}
(\alpha) & y_3 = f(y_1), & y_2 = f'(y_1), & y_5 = \varphi(y_4), & y_6 = \varphi'(y_4), \\
(\beta) & y_3 = f(y_1), & y_2 = f'(y_1), & y_4 = C_4, & y_5 = C_5, \\
(\gamma) & y_1 = C_1, & y_3 = C_3, & y_5 = \varphi(y_4), & y_6 = \varphi'(y_4), \\
(\delta) & y_1 = C_1, & y_3 = C_3, & y_4 = C_4, & y_5 = C_5
\end{array}
$$

f et φ étant des fonctions arbitraires, et les C_i des constantes arbitraires.

Une intégrale M_1 s'obtiendra en ajoutant une relation de forme arbitraire à l'un des systèmes précédents.

Dans le cas où le système peut être mis sous la forme canonique (IV), toutes les intégrales M_2 sont définies par un des deux systèmes de relations

$$
\begin{array}{lllll}
(\alpha) & y_3 = f(y_1), & y_2 = f'(y_1), & y_4 = \varphi(y_1), & \varphi'(y_1) + y_5 + y_6 f''(y_1) = 0, \\
(\beta) & y_1 = C_1, & y_3 = C_3, & y_4 = \varphi(y_2), & y_6 + \varphi'(y_2) = 0, \\
(\gamma) & y_1 = C_1, & y_3 = C_3, & y_2 = C_2, & y_4 = C_4,
\end{array}
$$

et on obtient les intégrales M_1 en ajoutant une relation arbitraire à l'un des systèmes d'équations précédentes.

Dans tous les cas que nous venons d'examiner, le problème admet une solution générale explicite; toute multiplicité intégrale M_i est définie par un système de relations où figurent explicitement une ou plusieurs fonctions arbitraires et quelques-unes de leurs dérivées. Il n'en est pas de même en général dans les autres cas qui restent à étudier. Prenons d'abord un système de la forme (II) :

$$\Omega_1 = dy_3 - y_2 dy_1 = 0, \qquad \Omega_2 = dy_5 - y_6 dy_4 - a dy_1 - b dy_2 = 0.$$

On tire de la première

$$y_3 = f(y_1), \qquad y_2 = f'(y_1),$$

et la dernière devient

$$dy_5 = y_6 dy_4 + F dy_1,$$

F étant une fonction de y_1, y_4, y_5, y_6, où figurent une fonction arbitraire $f(y_1)$, et ses dérivées $f'(y_1)$, $f''(y_1)$. On est ramené à résoudre une équation de Pfaff de classe trois, ce qui exige l'intégration d'un système d'équations différentielles où figure une fonction arbitraire et ses dérivées.

[**13**] Enfin, dans le cas général, l'intégration d'un système de Pfaff de la forme générale (I) se ramène à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du second ordre d'une forme particulière. D'une façon générale, soit

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \tag{31}$$

une équation quelconque du second ordre, permettant d'exprimer les dérivées r, s, t au moyen de x, y, z, p, q, et de deux paramètres auxiliaires u et v. L'intégration de l'équation (31) revient à la recherche des intégrales M_2 d'un système de Pfaff de trois équations à sept variables x, y, z, p, q, u, v,

$$(\Sigma) \quad \omega_1 = dz - p dx - q dy = 0, \quad \omega_2 = dp - r dx - s dy = 0, \quad \omega_3 = dq - s dx - t dy = 0,$$

où l'on suppose r, s, t remplacées par leurs expressions au moyen de x, y, z, p, q, u, v. Ce système Σ n'est pas d'ailleurs le plus général de son espèce.

Supposons que l'équation (31), où l'on regarde x, y, z, p, q comme des paramètres, et r, s, t comme les coordonnées d'un point de l'espace à trois dimensions, représente une surface réglée dont les génératrices sont parallèles à celles du cône

$rt - s^2 = 0$. On peut alors prendre pour r, s, t des expressions de la forme suivante

$$r = f_1 + \varphi^2 v, \qquad s = f_2 + \varphi\psi v, \qquad t = f_3 + \psi^2 v,$$

$f_1, f_2, f_3, \varphi, \psi$ étant des fonctions de x, y, z, p, q, u. Les deux dernières équations du système $\left(\sum\right)$ deviennent

$$\omega_2 = dp - (f_1 + \varphi^2 v)dx - (f_2 + \varphi\psi v)dy = 0,$$
$$\omega_3 = dq - (f_2 + \varphi\psi v)dx - (f_3 + \psi^2 v)dy = 0.$$

On en déduit immédiatement une combinaison où ne figure plus la variable v

$$\omega_4 = \psi\omega_2 - \varphi\omega_3 = \psi\, dp - \varphi\, dq - (f_1\psi - f_2\varphi)dx - (f_2\psi - f_3\varphi)dy = 0,$$

et l'on peut remplacer le système $\left(\sum\right)$ par un système de deux équations de Pfaff à six variables ([1])

$$\left(\sum{}'\right) \qquad \omega_1 = 0, \qquad \omega_4 = 0.$$

Une fois qu'on aura trouvé les intégrales M'_2 de $\sum'$, c'est-à-dire exprimé x, y, z, p, q, u au moyen de deux variables indépendantes, l'une où l'autre des équations $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0$ donnera v.

Le système $\left(\sum'\right)$ est de la forme (19) que nous avons rencontrée dans l'étude du système de Pfaff le plus général à six variables,

$$\text{S} \quad \begin{cases} \Omega_1 = dz - pdx - qdy = 0, \\ \Omega_2 = \text{X}dx + \text{Y}dy + \text{P}dq + \text{Q}dq = 0, \end{cases}$$

où X, Y, P, Q sont des fonctions quelconques de x, y, z, p, q, u.

([1]) Il est à remarquer qu'une intégrale M_2 du système Σ ne donne pas forcément une intégrale à deux dimensions M'_2 de Σ'. Considérons par exemple le système

$$\omega_1 = dz - pdx - qdy = 0, \qquad \omega_2 = dp - sdy = 0, \qquad \omega_3 = dq - sdx - tdy = 0.$$

Les équations

$$y = C_1, \qquad s = C_2, \qquad p = C_3, \qquad q - sx = C_4, \qquad z - px = C_5,$$

représentent bien une intégrale à deux dimensions du système Σ, les deux variables indépendantes étant x et t; mais les mêmes équations ne représentent qu'une intégrale à une dimension du système formé par les deux équations $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, avec les six variables x, y, z, p, q, s.

Ce fait est à rapprocher du suivant. Le système Σ n'admet pas d'éléments caractéristiques, tandis que le second système est de cinquième classe, car on peut l'écrire

$$d(z - px) + (xs - q)dy = 0, \qquad dp - sdy = 0.$$

Inversement, tout système de cette forme conduit à une équation aux dérivées partielles du second ordre ayant un système de caractéristiques du premier ordre. Soit en effet M_2 une intégrale de ce système, où x, y, z sont liées par une seule relation. Si l'on prend x et y pour variables indépendantes, cette multiplicité M_2 est définie par quatre relations de la forme

$$z = f(x, y), \qquad p = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad u = \varphi(x, y).$$

De l'équation $\Omega_2 = 0$, on déduit que la fonction $u = \varphi(x, y)$ doit satisfaire aux deux relations

$$\text{(32)} \qquad \mathrm{P}r + \mathrm{Q}s + \mathrm{X} = 0, \qquad \mathrm{P}s + \mathrm{Q}t + \mathrm{Y} = 0,$$

r, s, t étant les dérivées partielles du second ordre de $f(x,y)$. Avec les conventions précédentes, ces deux relations représentent une droite parallèle à une génératrice du cône $rt - s^2 = 0$, et l'élimination du paramètre u conduira bien à une équation aux dérivées partielles du second ordre ayant une famille de caractéristiques du premier ordre [1].

En rapprochant ce résultat de celui qui a été obtenu plus haut (n° **5**), nous sommes conduits à la proposition suivante : *La recherche des intégrales M_2 d'un système de forme générale de deux équations de Pfaff à six variables se ramène de deux façons différentes à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du second ordre ayant une famille de caractéristiques du premier ordre, de telle façon qu'à toute intégrale de cette équation corresponde une intégrale M_2 du système et une seule.*

Nous dirons par la suite que ces équations E_1, E_2 sont les *équations résolvantes* du système de Pfaff. Chaque équation résolvante correspond à un système d'éléments singuliers. Soit E_1 l'équation obtenue en éliminant le paramètre u entre les deux équations (32). En éliminant ce paramètre u entre les quatre équations qui définissent les éléments singuliers correspondant à la forme réduite (19),

$$\text{(26')} \qquad \frac{dx}{\mathrm{P}} = \frac{dy}{\mathrm{Q}} = \frac{-dp}{\mathrm{X}} = \frac{-dq}{\mathrm{Y}} = \frac{dz}{\mathrm{P}p + \mathrm{Q}q},$$

---

[1] Nous laissons de côté les intégrales M_2 du système, pour lesquelles il existerait plus d'une relation entre les variables x, y, z. On satisfait par exemple à la première équation en posant

$$(\alpha) \qquad y = f(x), \qquad z = \varphi(x), \qquad p = \varphi'(x) - qf'(x)$$

et la seconde équation du système devient

$$[\mathrm{Q} - \mathrm{P}f'(x)]\,dq + [\mathrm{P}\varphi''(x) - \mathrm{P}qf''(x) + \mathrm{X} + \mathrm{Y}f'(x)]\,dx = 0.$$

Cette équation de Pfaff, où figurent x, q, u, doit être de première classe, pour qu'il suffise d'ajouter une seule relation aux trois relations (α) pour obtenir une intégrale M_2 du système.

on est conduit à un système de trois équations

$$(33)\quad dz = p\,dx + q\,dy,\quad \Phi_1\left(x, y, z, p, q, \frac{dy}{dx}, \frac{dp}{dx}, \frac{dq}{dx}\right) = 0,\quad \Phi_2\left(x, y, \ldots, \frac{dq}{dx}\right) = 0,$$

qui définissent précisément les caractéristiques du premier ordre de l'équation E_1 (¹).

Les deux équations E_1, E_2 ne sont d'ailleurs déterminées qu'à une transformation de contact près, puisque la forme réduite (I) ne change pas quand on effectue sur les variables x, y, z, p, q une transformation de cette espèce.

Inversement, toute équation aux dérivées partielles du second ordre E qui possède une famille de caractéristiques du premier ordre est une équation résolvante pour un système de deux équations de Pfaff à six variables. En effet, si l'on regarde, dans cette équation, x, y, z, p, q comme des constantes, r, s, t comme des coordonnées courantes, elle représente une surface réglée engendrée par une droite qui reste parallèle dans toutes ses positions à une génératrice du cône $rt - s^2 = 0$. Soient

$$X + Pr + Qs = 0, \qquad Y + Ps + Qt = 0$$

les équations de cette génératrice, où X, Y, P, Q sont des fonctions de x, y, z, p, q et d'un paramètre u. L'équation E obtenue par l'élimination de u entre ces deux équations est identique à l'équation du second ordre à laquelle nous avons ramené l'intégration du système de Pfaff

$$(\mathrm{I})\qquad dz - p\,dx - q\,dy = 0, \qquad X\,dx + Y\,dy + P\,dp + Q\,dq = 0.$$

On voit que ce système de Pfaff est complètement déterminé, à cela près qu'on peut y remplacer la variable u par une fonction arbitraire de x, y, z, p, q et d'une nouvelle variable, ce qui revient à changer le paramètre u dont dépend la génératrice mobile. Si l'on peut choisir ce paramètre u de façon que X, Y, P, Q soient des fonctions linéaires de u, l'équation E est une équation de Monge-Ampère. Si les deux familles de caractéristiques sont distinctes, cette équation peut se déduire de deux façons différentes d'un système de Pfaff, et ces deux systèmes de Pfaff ne peuvent en général se ramener l'un à l'autre par un changement de variables.

Pour certains systèmes de Pfaff il n'existe qu'une équation résolvante. C'est ce qui arrive lorsque l'équation (6) a une racine double, à laquelle correspond une forme réduite (I). Les deux familles d'éléments singuliers sont confondues, et l'équation singulière E_1 a aussi ses deux familles de caractéristiques confondues (n° **14**).

(¹) Voir mon Mémoire des *Acta Mathematica*, t. 19, 1895, p. 295 et suivantes.

Il n'existe encore qu'une seule équation résolvante E_1 pour le système de Pfaff, lorsque ce système peut être ramené à la forme (I) et à la forme (II). Lorsqu'il en est ainsi, *l'équation résolvante admet une intégrale intermédiaire dépendant d'une fonction arbitraire*. Supposons en effet que du système (I) on puisse déduire une équation de classe trois

$$dU - W dV = 0,$$

U, V, W étant des fonctions de x, y, z, p, q, u

$$U = f_1(x, y, z, p, q; u), \quad V = f_2(x, y, z, p, q; u), \quad W = f_3(x, y, z, p, q; u).$$

Pour une intégrale quelconque du système (I), on a deux relations de la forme

$$U = F(V), \qquad W = F'(V),$$

ou

$$f_1 = F(f_2), \qquad f_3 = F'(f_2),$$

F étant une fonction qui peut être choisie arbitrairement.

L'élimination de u conduit à une intégrale intermédiaire de l'équation E_i, dépendant d'une fonction arbitraire F.

Inversement, supposons qu'une équation du second ordre E admette une intégrale intermédiaire dépendant d'une fonction arbitraire. Elle en admet alors une infinité dépendant de deux constantes arbitraires. Soit

$$b = V(x, y, z, p, q, a)$$

une de ces intégrales intermédiaires, a et b étant deux constantes arbitraires. L'équation E s'obtient en éliminant le paramètre a entre les deux relations

$$\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial p} r + \frac{\partial V}{\partial q} s = 0,$$
$$\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial p} s + \frac{\partial V}{\partial q} t = 0;$$

elle provient donc du système de Pfaff

$$\omega_1 = dz - p\,dx - q\,dy = 0,$$
$$\omega_2 = \left(\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z}\right)dx + \left(\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z}\right)dy + \frac{\partial V}{\partial p}dp + \frac{\partial V}{\partial q}dq = 0,$$

où figurent les six variables x, y, z, p, q, a. Or on déduit immédiatement de ce système une équation de troisième classe

$$dV - \frac{\partial V}{\partial a} da = 0.$$

Prenons par exemple le système

$$\omega_1 = dz - p dx - q dy = 0, \qquad \omega_2 = dp + u dq - \sqrt{\frac{u}{x}} dx = 0;$$

l'équation $\omega_2 = 0$ est de troisième classe, car on peut l'écrire

$$dp_1 + u dq_1 = 0,$$

où

$$p_1 = p - \sqrt{ux}, \qquad q_1 = q - \sqrt{\frac{x}{u}}.$$

En éliminant u entre les deux relations $r + us - \sqrt{\frac{u}{x}} = 0$, $s + ut = 0$, on est conduit à l'équation considérée par Ampère

$$st + x(rt - s^2)^2 = 0$$

qui admet l'intégrale intermédiaire

$$p = 2a\sqrt{x} - a^2 q + b$$

avec deux constantes arbitraires a et b.

La conclusion précédente est en défaut si l'équation E est une équation de Monge-Ampère. Nous avons remarqué en effet que cette équation, ayant deux familles de caractéristiques du premier ordre, peut être regardée comme la résolvante de deux systèmes de Pfaff distincts, et il peut se faire que le système considéré tout à l'heure, qui admet bien l'équation E comme résolvante, ne soit pas celui dont on est parti.

En définitive, lorsqu'une résolvante E d'un système de Pfaff de sixième classe admet une intégrale intermédiaire dépendant d'une fonction arbitraire, deux cas peuvent se présenter :

1° Il peut se faire que les équations différentielles de la famille d'éléments singuliers correspondant à cette résolvante admettent deux combinaisons intégrables distinctes. C'est le cas qui a été signalé au n° **7** ; l'équation E est alors nécessairement une équation de Monge-Ampère.

2° Il peut arriver aussi, comme on vient de le montrer, que les équations différentielles de la seconde famille d'éléments singuliers admettent trois combinaisons intégrables distinctes. L'équation résolvante E n'est pas forcément dans ce cas une équation de Monge-Ampère.

Les deux espèces d'intégrales intermédiaires peuvent se présenter pour un système de Pfaff. Prenons par exemple le système

$$dz - pdx - qdy = 0, \qquad dp = udx,$$

qui admet la résolvante $s = 0$. Les équations différentielles des deux familles d'éléments singuliers

$$\begin{array}{llll} dy = 0, & dp = udx, & dq = 0, & dz = pdx, \\ dx = 0, & dp = 0, & du = 0, & dz = qdy \end{array}$$

admettent respectivement deux et trois combinaisons intégrables.

[**14**] Lorsque l'équation (6) se réduit à une identité, le système S admet une infinité de résolvantes. Nous avons vu en effet (n° **10**) que ce système peut être ramené d'une infinité de manières à la forme réduite (I), et à chacune d'elles correspond une équation résolvante E. Les équations du second ordre auxquelles on est ainsi conduit forment une classe d'équations intégrables, qui ont déjà été étudiées.

Reprenons un système de la forme (20)

$$(20) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = dz - pdx - qdy = 0, \\ \omega_2 = dp - udq - adx - bdy = 0, \end{array} \right.$$

où a et b sont des fonctions de x, y, z, p, q, u satisfaisant aux deux conditions

$$(25) \qquad u\frac{\partial b}{\partial u} - b - \frac{\partial a}{\partial u} = 0, \qquad A + B\frac{\partial b}{\partial u} - C\frac{\partial a}{\partial u} = 0,$$

A, B, C ayant la même signification qu'au n° **6**. La première des équations (25) peut s'écrire

$$\frac{\partial(ub - a)}{\partial u} = 2b.$$

En posant $ub - a = 2\psi(x, y, z, p, q; u)$, on a donc

$$(34) \qquad a = u\frac{\partial\psi}{\partial u} - 2\psi, \qquad b = \frac{\partial\psi}{\partial u},$$

et la résolvante du système (20) s'obtient en éliminant le paramètre u entre les deux équations

$$r - us + 2\psi - u\frac{\partial\psi}{\partial u} = 0, \qquad s - ut - \frac{\partial\psi}{\partial u} = 0.$$

Si l'on conserve les mêmes conventions qu'au n° **13**, ces équations représentent une droite dépendant d'un paramètre variable u, qui est précisément la caractéristique du plan mobile représenté par l'équation

$$(35) \qquad r - 2us + u^2 t + 2\psi(x, y, z, p, q; u) = 0.$$

L'équation (E) représente donc une surface développable dont chaque génératrice est parallèle à une génératrice du cône $s^2 - rt = 0$. Cette conclusion s'applique à toutes les équations résolvantes des systèmes de Pfaff pour lesquels la première des conditions (25) est vérifiée, c'est-à-dire aux systèmes dont les deux familles d'éléments singuliers sont confondues. On voit que les deux familles de caractéristiques de la résolvante d'un système de cette espèce sont aussi confondues, ce qu'il était aisé de prévoir *a priori*. Toutes les équations de cette espèce, et par suite tous les systèmes de Pfaff correspondants s'obtiennent en prenant pour ψ une fonction arbitraire de x, y, z, p, q, u.

Pour que l'équation (6) se réduise à une identité, la fonction ψ doit en outre satisfaire à une équation aux dérivées partielles du second ordre que l'on obtient en remplaçant a et b par leurs expressions (34) dans la seconde des conditions (25). J'ai étudié (1) les équations du second ordre E qui proviennent d'une fonction ψ de cette espèce, montré qu'elles admettent une intégrale générale explicite, et donné le moyen de les former. M. Cartan (2) les a étudiées depuis lors à un autre point de vue, en les rattachant précisément à un système de deux équations de Pfaff de cinquième classe. Je n'y reviendrai pas.

Remarquons seulement que toute équation E de cette espèce admet une infinité d'intégrales intermédiaires dépendant de deux constantes arbitraires. Il existe donc une infinité d'équations $\lambda\omega_1 + \mu\omega_2 = 0$ qui sont de la troisième classe, ce que nous avions déjà établi directement (n° **10**).

[**15**] On peut employer directement, pour l'intégration d'un système de Pfaff de deux équations à six variables, la méthode de Monge, lorsqu'il existe deux combinaisons intégrables pour les équations différentielles de l'un des systèmes d'éléments singuliers. Nous nous appuierons pour cela sur la proposition suivante : *Si $df = 0$ est une combinaison intégrable des équations différentielles de l'un des systèmes d'éléments singuliers, la classe du système de Pfaff s'abaisse de deux unités, quand on y fait $f = C$, $df = 0$.*

---

(1) E. Goursat, *Sur une classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre, et sur la théorie des intégrales intermédiaires.* (*Acta Mathematica*, t. 19, 1895; pp. 285-340.)

(2) E. Cartan, *Les systèmes de Pfaff à cinq variables et les équations aux dérivées partielles du second ordre.* (*Annales de l'École normale supérieure*, 3e série, t. 27, 1910; pp. 109-192.)

Cet énoncé signifie que si l'on a fait un changement de variables de façon à prendre la fonction f pour une des nouvelles variables, y par exemple, le système de Pfaff, où l'on fait $y = C$, $dy = o$, est de quatrième classe.

Pour le démontrer, supposons d'abord que $df = o$ soit une combinaison intégrable des équations différentielles d'un système d'éléments singuliers, correspondant à une équation singulière de classe cinq. Comme on l'a remarqué plus haut (nº **7**), on peut supposer que cette combinaison intégrable est $dp = o$, et le système de Pfaff peut être ramené à la forme

$$dz - pdx - qdy = o, \qquad Pdp + Qdq + Ydy = o;$$

le système obtenu en posant $p = C$, $dp = o$,

$$d(z - Cx) - qdy = o, \qquad Qdq + Ydy = o$$

est bien de quatrième classe, car il n'y figure que les quatre variables $q, y, z - Cx, \frac{Y}{Q}$.

Si le système de Pfaff peut être ramené à la forme (II), on sait que les équations différentielles du système d'éléments singuliers correspondants admettent trois combinaisons intégrables distinctes. Ayant pris l'une de ces combinaisons intégrables pour $dx = o$, le système de Pfaff peut être ramené à la forme

$$dz - pdx = o, \qquad Xdx + Ydy + Pdp + Qdq = o;$$

si l'on y fait $x = C$, $dx = o$, le système obtenu

$$dz = o, \qquad Ydy + Pdp + Qdq = o$$

est bien de quatrième classe, car la dernière équation, où ne figurent que quatre variables y, p, q, u, est de troisième classe.

Réciproquement, supposons qu'en posant $f = C$, $df = o$ dans les équations $\omega_1 = o$, $\omega_2 = o$ d'un système de Pfaff de sixième classe, on obtienne un nouveau système de quatrième classe; $df = o$ *est alors une combinaison intégrable des équations différentielles de l'une des familles d'éléments singuliers du système de Pfaff.* Pour la démonstration, nous pouvons supposer que l'on a effectué un changement de variables de telle façon que l'on ait $f = y$. Le système obtenu en faisant $y = C$, $dy = o$ dans les équations du système donné $\omega_1 = o$, $\omega_2 = o$ étant de quatrième classe, ce système auxiliaire peut être ramené à l'une des formes canoniques (VIII) ou (IX), par un choix convenable des variables autres que y. Le système de Pfaff lui-même pourra donc être ramené à l'une des formes

(VIII′) $\qquad \omega_1 = dz - pdx - fdy = o, \qquad \omega_2 = dp - \varphi dx - \psi dy = o,$

(IX′) $\qquad \omega_1 = dz - fdy = o, \qquad \omega_2 = dp - \varphi dx - \psi dy = o.$

Le système de Pfaff étant de la forme (VIII′), si x, y, z, p, f forment un système de cinq variables indépendantes, on peut poser $f = q$, et l'on a un système de Pfaff ramené à la forme (19)

$$dz - pdx - qdy = 0, \qquad dp - \varphi dx - \psi dy = 0;$$

les équations correspondantes (26) admettent bien la combinaison intégrable $dy = 0$. Si f ne dépend que de x, y, z, p, on voit immédiatement que les équations

$$dx = 0, \qquad dy = 0, \qquad dp = 0, \qquad dz = 0$$

définissent une famille d'éléments singuliers, et le système est réductible à la forme canonique (IV).

Lorsque le système de Pfaff est de la forme (IX′), l'équation $\omega_1 = 0$ est de troisième classe, et il lui correspond une famille d'éléments singuliers qui admet les trois combinaisons intégrables $dy = 0$, $dz = 0$, $df = 0$.

Cela étant, supposons que les équations différentielles de l'une des familles d'éléments singuliers admettent deux combinaisons intégrables distinctes $du = 0$, $dv = 0$. Toute intégrale M_2 du système est un lieu de caractéristiques de Monge, c'est-à-dire de multiplicités M_1 dont tous les éléments linéaires sont singuliers; u et v conservant la même valeur tout le long d'une de ces caractéristiques, il s'ensuit que l'intégrale M_2 satisfait à une relation de la forme $v = \varphi(u)$. Quelle que soit la fonction $\varphi(u)$, $d(v - \varphi(u)) = 0$ est aussi une combinaison intégrable des équations différentielles des éléments singuliers. Si donc on pose, dans les équations $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$ du système de Pfaff, $v = \varphi(u) + w$, et que l'on fasse ensuite dans les équations transformées $w = 0$, $dw = 0$, on est conduit à un système de quatrième classe, dont toutes les intégrales s'obtiennent par la réduction à une forme canonique, ce qui n'exige que l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires.

[**16**] Soit S un système de Pfaff de sixième classe, possédant deux familles distinctes d'éléments singuliers, telles que les équations différentielles de chacune d'elles admette au moins une combinaison intégrable; si l'on ajoute aux deux équations du système S les deux équations $df_1 = 0$, $df_2 = 0$, qui définissent ces deux combinaisons intégrables, *le système obtenu*

$$\omega_1 = 0, \qquad \omega_2 = 0, \qquad df_1 = 0, \qquad df_2 = 0$$

est complètement intégrable.

La propriété est évidente si le système S est réductible à la forme canonique (III).

Prenons le cas où l'une au moins des équations singulières du système est de cinquième classe, les équations différentielles du système d'éléments singuliers correspondant admettant une combinaison intégrable. Ce système peut alors (n° **7**) être ramené à la forme

$$\omega_1 = dz - p\,dx - q\,dy = 0,$$
$$\omega_2 = dp - u\,dx - f\,dy = 0,$$

et les équations différentielles des éléments singuliers

$$dy = 0, \qquad dz = p\,dx, \qquad dp = u\,dx, \qquad dq = f\,dx$$

admettent l'intégrale $y = C$.

Pour avoir les équations différentielles du second système d'éléments singuliers, il suffit d'écrire que les éléments $(dx, 0, p\,dx, u\,dx, f\,dx, du)$ et $(\delta x, \delta y, p\delta x + q\delta y, u\delta x + f\delta y, \delta q, \delta u)$ sont en involution, quels que soient dx et du, ce qui conduit aux relations

$$(36) \quad \left\{ \begin{aligned} &\delta x + \frac{\partial f}{\partial u}\delta y = 0, \quad \delta z = \left(q - p\frac{\partial f}{\partial u}\right)\delta y, \quad \delta p = \left(f - u\frac{\partial f}{\partial u}\right)\delta y, \\ &\delta u = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + u\frac{\partial f}{\partial p} + f\frac{\partial f}{\partial q}\right)\delta y. \end{aligned} \right.$$

Toute intégrale première de ce système $F = C$ doit être indépendante de q. Les quatre équations

$$(37) \qquad dz - p\,dx = 0, \qquad dp - u\,dx = 0, \qquad dy = 0, \qquad dF = 0$$

ne renferment que cinq varirbles x, y, z, p, u, et leurs différentielles, et par suite forment bien un système complètement intégrable.

Remarque I. — La proposition ne serait pas exacte si $df_1 = 0$, $df_2 = 0$ étaient deux combinaisons intégrables du même système. Supposons par exemple que le système (35) admette une intégrale première $F = C^{te}$ différente de y. Ainsi qu'on l'a vu au n° **7**, la fonction F, indépendante de u, contient la variable q, et par suite le système (36) ne peut être complètement intégrable, car le covariant bilinéaire de $(dp - u\,dx)$ ne peut être identiquement nul en tenant compte de ces équations elles-mêmes.

Remarque II. — Il est évident que les équations (36) ne peuvent admettre l'intégrale $y = C$. Toute autre intégrale de ce système est indépendante de q, et par conséquent ne peut être une intégrale pour le premier système d'éléments singuliers.

II

[**17**] En étudiant certaines transformations des surfaces à courbure totale constante, M. Bäcklund a été conduit à l'étude du problème suivant, que j'appelle pour abréger le *Problème de Bäcklund* (¹) :

Trouver deux multiplicités à deux dimensions d'éléments de contact $m_2(x, y, z, p, q)$, *et* $M_2(X, Y, Z, P, Q)$ *se correspondant élément par élément, de telle façon que les éléments correspondants vérifient quatre relations données à l'avance*

$$F_i(x, y, z, p, q; X, Y, Z, P, Q) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{38}$$

Nous supposerons que l'on ne peut déduire de ces quatre équations une ou plusieurs relations ne contenant que les variables (x, y, z, p, q), ou les variables X, Y, Z, P, Q, c'est-à-dire que les mineurs à quatre lignes déduits du tableau

$$\left\| \begin{array}{ccccc} \frac{\partial F_1}{\partial X} & \frac{\partial F_1}{\partial Y} & \frac{\partial F_1}{\partial Z} & \frac{\partial F_1}{\partial P} & \frac{\partial F_1}{\partial Q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_4}{\partial X} & \frac{\partial F_4}{\partial Y} & \frac{\partial F_4}{\partial Z} & \frac{\partial F_4}{\partial P} & \frac{\partial F_4}{\partial Q} \end{array} \right\|$$

ne sont pas tous nuls identiquement, ni les déterminants à quatre lignes déduits du tableau analogue au précédent, où l'on aurait remplacé les grandes lettres par les petites lettres correspondantes. Soit $F_5(x, y, z, p, q;$ X, Y, Z, P, Q) une fonction telle que le jacobien

$$\frac{D(F_1, F_2, F_3, F_4, F_5)}{D(X, Y, Z, P, Q)}$$

soit différent de zéro. Si l'on adjoint aux relations (38) une nouvelle relation $F_5 = u$, on peut remplacer le système (38) par un système équivalent

$$X = f_1(x, y, z, p, q; u), \quad Y = f_2(\ldots), \quad \ldots, \quad Q = f_5(x, y, z, p, q; u), \tag{39}$$

u étant une variable auxiliaire, et il est évident que cette transformation peut être effectuée d'une infinité de manières, car on peut dans les formules (39) remplacer u par une fonction arbitraire de x, y, z, p, q et d'un nouveau paramètre.

De même, si l'on adjoint aux relations (38) une nouvelle relation $F_6 = U$, F_6 étant une fonction de x, y, z, p, q, X, Y, Z, P, Q, telle que le jacobien

$$\frac{D(F_1, F_2, F_3, F_4, F_6)}{D(x, y, z, p, q)}$$

(¹) Bäcklund (A. V.). *Om ytor med konstant negativ krökning* (*Lunds Universitets Arsskrift*, t. 19; 1883).

ne soit pas nul, on peut remplacer le système (38) par un autre système équivalent

$$(40) \qquad x = \varphi_1(X, Y, Z, P, Q; U), \qquad \ldots, \qquad q = \varphi_5(X, Y, Z, P, Q; U),$$

U désignant une variable auxiliaire. On peut prendre par exemple la même fonction $F_5 = F_6$ dans les deux cas, et l'on a alors $U = u$, mais cette hypothèse n'est pas nécessaire.

Inversement, les formules (39) conduisent à un système de quatre relations distinctes entre x, y, z, p, q et X, Y, Z, P, Q pourvu que u figure dans l'une au moins des fonctions f_i.

Pour définir un problème de Bäcklund, on peut donc partir de l'un quelconque des systèmes de formules (38), (39) ou (40). Pour passer d'un système de la forme (39) à un système de la forme (40), il suffit d'ajouter à ce système (39) une autre relation

$$U = f_6(x, y, z, p, q; u),$$

la fonction f_6 étant choisie de telle façon que le jacobien

$$\frac{D(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)}{D(x, y, z, p, q, u)}$$

ne soit pas nul, et de résoudre ensuite le système des six équations

$$(39') \qquad X = f_1, \quad Y = f_2, \quad Z = f_3, \quad P = f_4, \quad Q = f_5, \quad U = f_6,$$

par rapport à x, y, z, p, q, u, ce qui conduit à un système de la forme (40), avec une équation de plus où figurent les deux variables auxiliaires u et U,

$$(40') \quad x = \varphi_1(X, Y, Z, P, Q; U), \quad y = \varphi_2, \quad z = \varphi_3, \quad p = \varphi_4, \quad q = \varphi_5, \quad u = \varphi_6.$$

Cela étant, considérons le problème de Bäcklund défini par les formules (39); les coordonnées x, y, z, p, q et X, Y, Z, P, Q de deux éléments correspondants des multiplicités m_2 et M_2, ainsi que le paramètre u, doivent être des fonctions de deux variables indépendantes, vérifiant les relations (39) et les équations

$$(41) \qquad dz = p\,dx + q\,dy,$$

$$(42) \qquad dZ = P\,dX + Q\,dY.$$

Si on remplace, dans l'équation (42), X, Y, Z, P, Q par leurs expressions tirées des formules (39), on est conduit à une équation linéaire par rapport aux différentielles dx, dy, dz, dp, dq, du, où l'on peut remplacer dz par $pdx + qdy$, et finalement on est conduit à un système de deux équations de Pfaff à six variables

$$S \begin{cases} (41) \qquad \omega_1 = dz - pdx - qdy = 0, \\ (43) \qquad \omega_2 = hdu + adp + bdq + cdx + edy = 0, \end{cases}$$

a, b, c, e, h étant des fonctions de x, y, z, p, q, u. Toute intégrale à deux dimensions du système S donne évidemment une solution du problème de Bäcklund, et réciproquement.

En partant du système de formules (40) équivalent au système (39), on ramènerait de même le problème de Bäcklund à l'intégration d'un système de Pfaff

$$S_1 \begin{cases} (44) \qquad \Omega_1 = dZ - PdX - QdY = 0, \\ (45) \qquad \Omega_2 = HdU + AdX + BdY + CdP + EdQ = 0; \end{cases}$$

mais les deux systèmes de Pfaff S et S_1 sont évidemment équivalents, et se ramènent l'un à l'autre par les formules de transformation (39) ou (40).

La résolution du problème de Bäcklund se ramène donc à la recherche des intégrales à deux dimensions d'un système de deux équations de Pfaff à six variables.

Ce problème admet donc toujours une infinité de solutions dépendant de fonctions arbitraires. Pour fixer les idées, supposons que h ne soit pas nul. Si l'on se donne trois fonctions arbitraires $y = \varphi_1(x)$, $p = \varphi_2(x)$, $q = \varphi_3(x)$, l'intégration du système S, où l'on considère z et u comme fonctions de la variable x, donne deux autres fonctions

$$z = \varphi_4(x, C_1, C_2), \qquad u = \varphi_5(x, C_1, C_2)$$

qui, jointes aux précédentes, représentent une intégrale à une dimension m_1 du système S. On sait que cette intégrale m_1 appartient en général à une intégrale m_2 et à une seule. A cette intégrale m_2 correspond une solution du problème de Bäcklund.

Réciproquement, à tout système de deux équations de Pfaff à six variables correspondent une infinité de problèmes de Bäcklund, *pourvu que ce système soit au moins de quatrième classe.*

Soient en effet $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$ deux équations quelconques distinctes de ce système, dont chacune est de cinquième classe. Supposons-les ramenées à une forme canonique

$$\omega_1 = dz - pdx - qdy = 0, \qquad \omega_2 = dZ - PdX - QdY = 0,$$

X, Y, Z, P, Q étant fonctions de x, y, z, p, q et d'une sixième variable u, indépendante des premières,

$$X = f_1(x, y, z, p, q; u), \qquad Y = f_2, \qquad \ldots, \qquad Q = f_5(x, y, z, p, q; u).$$

L'élimination de u entre ces cinq équations conduira en général à quatre relations distinctes entre X, Y, Z, P, Q, x, y, z, p, q, et il est clair que l'intégration du système $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$ fournira la solution du problème de Bäcklund correspondant. Nous dirons que tous les problèmes de Bäcklund qui conduisent à des systèmes de Pfaff équivalents forment une seule *classe*. Pour que deux problèmes de Bäcklund appartiennent à la même classe, il suffit, d'après cela, que les deux systèmes de Pfaff correspondants puissent se ramener l'un à l'autre par un changement des variables.

[**18**] Nous allons appliquer ces généralités à quelques exemples :

Exemple I. — Considérons le système de quatre équations

$$X = x, \qquad Y = y, \qquad P = \sin(Z - z) - p, \qquad Q = \sin(Y + z) + q,$$

qui se présente dans l'étude des transformations des surfaces à courbure totale constante. Le système de Pfaff correspondant est ici, en prenant $u = Z$,

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$
$$dZ = [\sin(Z - z) - p]\,dx + [\sin(Z + z) + q]\,dy;$$

nous reviendrons plus loin sur ce système, qui peut être ramené de deux façons différentes à la forme (I).

Exemple II. — Le système de quatre équations

$$X = x, \qquad Y = y, \qquad Z = z + p, \qquad Q = q,$$

auquel on ajoute la relation $P = p + u$, conduit à un système de Pfaff

$$dz = p\,dx + q\,dy, \qquad dp = u\,dx,$$

qui admet une seule résolvante $s = 0$. La solution générale du problème de Bäcklund est donnée par les formules

$$z = f(x) + \varphi(y), \quad p = f'(x), \quad q = \varphi'(y), \quad Z = f(x) + f'(x) + \varphi(y),$$
$$P = f'(x) + f''(x), \qquad Q = \varphi'(y),$$

f et φ étant deux fonctions arbitraires.

Exemple III. — Le système classique de la théorie des fonctions analytiques

$$X = x, \qquad Y = y, \qquad P = q, \qquad Q = -p,$$

conduit au système de Pfaff

$$dz = pdx + qdy, \qquad dZ = qdx - pdy,$$

que l'on peut mettre sous la forme canonique (III)

$$d(Z + iz) = (q + ip)d(x + iy),$$
$$d(Z - iz) = (q - ip)d(x - iy).$$

C'est, sous une autre forme, le résultat classique.

Exemple IV. — Le système

$$X = x, \qquad Y = y, \qquad Q = q, \qquad P = y + p$$

est de même équivalent au système de Pfaff

$$dz = pdx + qdy, \qquad d(Z - z) = ydx,$$

qui est de la forme canonique (IV). L'intégrale générale est représentée par les formules

$$Z - z = f(x), \qquad y = f'(x), \qquad z = \varphi(x), \qquad p + qf''(x) = \varphi'(x),$$

les variables indépendantes étant x et q. On remarquera que dans ce cas les multiplicités m_2 et M_2 ont pour supports ponctuels deux courbes; m_2 par exemple est définie par les formules

$$y = f'(x), \qquad z = \varphi(x), \qquad p = \varphi'(x) - qf''(x).$$

Il suffirait d'une transformation de contact pour les remplacer par deux multiplicités formées des éléments de contact de deux surfaces.

Exemple V. — Soit

$$P = p, \qquad Q = q, \qquad \frac{X - x}{p} = \frac{Y - y}{q} = \frac{Z - z}{-1}$$

les formules définissant un problème de Bäcklund. En désignant par u la valeur commune des derniers rapports, on est conduit à un système de Pfaff de la forme canonique (V)

$$dz = pdx + qdy, \qquad d(u\sqrt{1 + p^2 + q^2}) = 0.$$

La multiplicité m_2 peut donc être choisie arbitrairement, et l'on a ensuite

$$u = \frac{C}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

L'interprétation géométrique est évidente.

Exemple VI. — Le système de quatre équations

$$X = x, \qquad Y = y, \qquad P = p, \qquad Z = z + p.$$

auquel on ajoute la relation $Q = q + u$, conduit au système de Pfaff

$$dz = p\,dx + q\,dy, \qquad dp = u\,dy,$$

qui est de classe cinq et admet la résolvante $r = 0$, car on peut l'écrire

$$d(z - px) - (q - ux)dy = 0, \qquad dp - u\,dy = 0.$$

L'intégrale générale est donnée par les formules

$$z = xf(y) + \varphi(y), \quad p = f(y), \quad q = xf'(y) + \varphi'(y), \quad Z = xf(y) + f(y) + \varphi(y),$$

si l'on a pris x et y pour les variables indépendantes.

Exemple VII. — Considérons le système de quatre équations

$$X = Qy - \frac{x + y}{q}, \qquad Y = z - px, \qquad P = p, \qquad Z = PX + y,$$

d'où l'on peut tirer X, Y, Z, P en fonction de x, y, z, p, q et de $Q = u$. Les relations

$$dz = p\,dx + q\,dy, \qquad dZ = P\,dX + Q\,dY$$

peuvent s'écrire

$$d(z - px) = q\,dy - x\,dp, \qquad d(Z - PX) = Q\,dY - X\,dP.$$

On a donc

$$dy = -X\,dp + Q\left\{q\,dy - x\,dp\right\},$$

$$dy\left\{1 - Qq\right\} = -\left\{Qx + X\right\}dp = -\left\{Q(x + y) - \frac{x + y}{q}\right\}dp$$

ou

$$dy = \frac{x + y}{q}\,dp.$$

On est donc conduit à un système de Pfaff *de quatrième classe* du type (VIII)

$$d(z - px) = y\,dp, \qquad dy = \frac{x+y}{q}\,dp,$$

dont l'intégrale générale est

$$z = px + f(p), \qquad y = f'(p), \qquad x = qf''(p) - f'(p),$$

les deux variables indépendantes étant p et q. On a ensuite

$$X = uf'(p) - f''(p), \quad Y = f(p), \quad Z = upf'(p) + f'(p) - pf''(p), \quad P = p, \quad Q = u.$$

Les deux multiplicités d'éléments m_2 et M_2 ont pour supports ponctuels deux cylindres dont les génératrices $p = C^{te}$ se correspondent. Mais il y a une infinité de façons de faire correspondre les éléments un à un, car on peut choisir pour u une fonction arbitraire de q. Ce résultat s'explique aisément. Toutes les fois que la résolution d'un problème de Bäcklund conduit à un système de Pfaff de quatrième classe, l'intégrale générale de ce système est représentée par trois relations seulement entre x, y, z, p, q, u. On peut donc leur ajouter une relation de forme arbitraire pour avoir une multiplicité m_2. Dans le cas actuel, cette relation ne change pas les multiplicités m_2 et M_2, mais seulement le mode de correspondance entre leurs éléments.

Exemple VIII. — Prenons cinq relations

$$X = x, \quad Y = z, \quad Z = y, \quad P = f(x, y, z, p, q;\, u), \quad Q = \varphi(x, y, z, p, q;\, u);$$

les deux équations de Pfaff

$$dz = p\,dx + q\,dy, \qquad dy = f\,dx + \varphi\,dz$$

nous donnent en général des formules équivalentes

$$dy = F(x, y, z, p, q;\, u)\,dx,$$
$$dz = \Phi(x, y, z, p, q;\, u)\,dx,$$

c'est-à-dire une forme canonique du type (VII). La solution générale est donnée par les formules

$$y = g(x), \qquad z = h(x), \qquad F = g'(x), \qquad \Phi = h'(x),$$

qui permettent d'exprimer p et q et par suite X, Y, Z, P, Q au moyen des deux variables x et u.

Exemple IX. — Le système des quatre relations

$$X = x, \qquad Y = z, \qquad Z = y, \qquad P + Qp = 0$$

conduit à un système de Pfaff de classe quatre du type (IX)

$$dy(1 - Qq) = 0, \qquad dz = pdx.$$

On en tire

$$y = C, \quad z = f(x), \quad p = f'(x), \quad X = x, \quad Y = f(x), \quad Z = C, \quad P + Qf'(x) = 0.$$

Les deux multiplicités m_2 et M_2 se correspondent encore, élément par élément, d'une infinité de manières, comme dans l'exemple VII.

[**19**] Considérons maintenant le cas général où le système de Pfaff correspondant à un problème de Bäcklund donné peut se ramener de deux façons différentes à la forme (I). Ce système admet alors deux résolvantes distinctes E_1, E_2, et nous voyons que, dans le cas général, *la solution d'un problème de Bäcklund se ramène de deux façons différentes à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du second ordre admettant une famille de caractéristiques du premier ordre.*

Inversement, toute équation du second ordre de cette espèce peut être considérée comme la résolvante d'un système de deux équations de Pfaff à six variables. L'intégration de cette équation fournit donc la solution d'une infinité de problèmes de Bäcklund, de la même classe. A une équation de Monge-Ampère, ayant ses deux familles de caractéristiques distinctes, on peut rattacher une double infinité de problèmes de Bäcklund, correspondant aux deux familles de caractéristiques de cette équation.

Soient S un système de deux équations de Pfaff de sixième classe, pouvant être ramené de deux façons différentes à la forme (I), E_1, E_2 les deux résolvantes de ce système. Les intégrales de ces deux équations se correspondent une à une d'une façon univoque, et nous allons étudier ce mode de correspondance. Soient

$$(\mathrm{I})_1 \qquad \begin{cases} dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1 = 0, \\ P_1 dp_1 + Q_1 dq_1 + X_1 dx_1 + Y_1 dy_1 = 0, \end{cases}$$

$$(\mathrm{I})_2 \qquad \begin{cases} dz_2 - p_2 dx_2 - q_2 dy_2 = 0, \\ P_2 dp_2 + Q_2 dq_2 + X_2 dx_2 + Y_2 dy_2 = 0, \end{cases}$$

les deux formes réduites du système S; X_i, Y_i, P_i, Q_i sont des fonctions de x_i, y_i,

z_i, p_i, q_i et d'un paramètre $u_i (i = 1, 2)$. Par hypothèse, on passe du système $(\mathrm{I})_1$ au système $(\mathrm{I})_2$ par un changement de variables

$$(46) \qquad x_2 = f_1(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1, u_1), \quad y_2 = f_2(\ldots), \quad \ldots, \quad u_2 = f_6(x_1, \ldots, u_1)$$

les fonctions f_i étant indépendantes. A une intégrale I_1 de l'équation E_1 correspond une intégrale du système de Pfaff et par suite une intégrale I_2 et une seule de E_2. Pour préciser davantage, à un élément de contact $(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1)$ de I_1 correspond une valeur de u_1, et par suite un système de valeurs de x_2, y_2, z_2, p_2, q_2, u_2, et enfin un élément de contact $(x_2, y_2, z_2, p_2, q_2)$ de I_2. Mais les coordonnées de cet élément s'expriment au moyen de x_1, y_1, z_1, p_1, q_1, u_1; l'élimination du paramètre u_1 conduira donc à *quatre* relations entre les coordonnées de deux éléments correspondants des intégrales I_1 et I_2. On a donc ainsi la solution d'un problème de Bäcklund, pour lequel les multiplicités d'éléments se correspondent une à une d'une façon univoque.

Mais les équations qui définissent le problème de Bäcklund faisant correspondre une à une les intégrales des deux équations E_1, E_2, sont d'une forme particulière. En effet, soient

$$(47) \qquad X = f_1(x, y, z, p, q, u), \quad \ldots, \quad Q = f_5(x, y, z, p, q; u)$$

les équations de définition d'un problème de Bäcklund.

Pour que le système de Pfaff correspondant

$$dz = p\,dx + q\,dy, \qquad dZ = P\,dX + Q\,dY$$

soit de la forme réduite (I), il faut et il suffit que du n'entre pas dans la seconde équation quand on y remplace X, Y, Z, P, Q par leurs expressions (47). S'il en est ainsi, la relation $dZ = P\,dX + Q\,dY$ est une conséquence des relations $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, $p = p_0$, $q = q_0$, et par conséquent à un élément quelconque (x, y, z, p, q) les formules (47) font correspondre ∞^1 éléments (X, Y, Z, P, Q) formant une multiplicité M_1 d'éléments unis.

Inversement, pour que le système de Pfaff

$$dz_1 - p_1\,dx_1 - q_1\,dy_1 = 0, \qquad dz_2 - p_2\,dx_2 - q_2\,dy_2 = 0,$$

où l'on prend x_2, y_2, z_2, p_2, q_2 pour variables soit de la forme $(\mathrm{I})_2$, il faut et il suffit qu'à un élément $(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1)$ correspondent ∞^1 éléments $(x_2, y_2, z_2, p_2, q_2)$ formant une multiplicité M_1 d'éléments unis.

En résumé, étant données quatre relations entre les coordonnées de deux systèmes d'éléments $(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1)$ et $(x_2, y_2, z_2, p_2, q_2)$ tels qu'à chaque élément de l'un des systèmes correspondent ∞^1 éléments de l'autre système formant une multiplicité à une dimension d'éléments unis, le problème de Bäcklund correspondant conduit à une équation aux dérivées partielles du second ordre E_1 pour déterminer les multiplicités engendrées par l'élément $(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1)$, et à une autre équation du second ordre pour déterminer les multiplicités engendrées par l'élément $(x_2, y_2, z_2, p_2, q_2)$. Les intégrales de ces deux équations se correspondent une à une d'une façon univoque.

Nous dirons, suivant la classification de Clairin, que ces deux équations se correspondent par une transformation de Bäcklund B_1. D'après la façon même dont nous avons été conduits à ces transformations, nous pouvons énoncer les propositions suivantes :

a) *Pour qu'une équation aux dérivées partielles du second ordre provienne d'une transformation de Bäcklund* B_1, *il est nécessaire qu'elle admette une famille de caractéristiques du premier ordre.*

b) *Cette condition est en général suffisante.*

Soit en effet E une équation aux dérivées partielles du second ordre ayant deux familles distinctes de caractéristiques, dont une seule est du premier ordre. Cette équation E peut être considérée comme la résolvante E_1 d'un système S de deux équations de Pfaff ayant deux familles distinctes d'éléments singuliers (n° **13**). Si cette équation E_1 n'admet pas d'intégrale intermédiaire dépendant d'une fonction arbitraire, le système S a une autre résolvante E_2 qui n'est définie qu'à une transformation de contact près, et les deux équations E_1, E_2 se correspondent, nous venons de le voir, par une transformation B_1. *De l'équation* E *ou* E_1 *on peut donc déduire par une transformation* B_1 *une autre équation* E_2 *et une seule* [1], si on ne considère pas comme distinctes deux équations qui se déduisent l'une de l'autre par une transformation de contact. La démonstration explique en même temps quelle est la méthode à suivre pour obtenir cette transformation. La seconde famille d'éléments singuliers de S se détermine par un calcul linéaire, et l'on a ensuite à ramener une équation de Pfaff à une forme canonique. Ce dernier problème admet bien une infinité de solutions qui se déduisent toutes d'une solution particulière par une transformation de contact.

c) A une équation de Monge-Ampère, ayant deux familles de caractéristiques distinctes, on peut faire correspondre deux autres équations aux dérivées partielles du second ordre par deux transformations de Bäcklund essentiellement distinctes.

---

[1] J. Clairin avait démontré, dans sa thèse (*Annales de l'École normale*, 1902) que si l'on peut déduire de E deux équations E′, E″ par des transformations B_1 déduites du même système de caractéristiques, on passe de E′ à E″ par une transformation de contact. Il a établi aussi depuis d'une façon générale l'existence de la transformation B_1 pour toute équation admettant une famille de caractéristiques du premier ordre, par une méthode toute différente de celle de ce Mémoire. (*Annales de l'École normale*, 1913.)

Une de ces transformations, ou même les deux à la fois, peuvent disparaître, si l'équation de Monge-Ampère admet une ou deux intégrales intermédiaires.

d) Si l'équation E a ses deux familles de caractéristiques confondues, ces caractéristiques sont forcément du premier ordre, et le système S correspondant n'admet pas d'autre résolvante que l'équation E, à moins que cette équation E n'appartienne à la classe particulière considérée au n° **14**. Le système S admet alors une infinité de résolvantes, mais toutes ces équations peuvent se déduire de l'une d'elles par une transformation de contact, comme l'a démontré M. Cartan dans le Mémoire déjà cité.

Remarque. — Tout système de deux équations aux dérivées partielles du premier ordre, à deux variables indépendantes x, y, et à deux fonctions inconnues z et Z,

$$F_1(x, y, z, Z; p, q, P, Q) = 0, \quad F_2(x, y, z, Z; p, q, P, Q) = 0, \quad P = \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial Z}{\partial y},$$

se ramène à un système de quatre relations de la forme (38), si on lui ajoute les deux relations $X = x$, $Y = y$. L'intégration de ce système peut donc se ramener en général de deux manières différentes à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du second ordre.

On peut, dans certains cas, obtenir une résolvante par un calcul d'élimination, si le système proposé est d'une forme particulière. Si l'on remplace dans les relations précédentes x, y, z, p, q par des constantes x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, on obtient ∞^1 éléments (X, Y, Z, P, Q) définis par les quatre équations

$$X = x_0, \qquad Y = y_0, \qquad F_1(x_0, y_0, z_0, Z; p_0, q_0, P, Q) = 0, \qquad F_2 = 0;$$

pour que ces ∞^1 éléments forment une multiplicité M_1, il faut et il suffit que l'on ait aussi $dZ = 0$, puisque $dX = dY = 0$, c'est-à-dire que Z puisse s'exprimer uniquement au moyen de x, y, z, p, q. S'il en est ainsi, le système proposé peut s'écrire sous la forme équivalente

$$Z = \Phi(x, y, z, p, q), \qquad \Psi(x, y, z, p, q; P, Q) = 0,$$

et il est évident qu'en remplaçant dans la seconde équation P et Q par leurs expressions déduites de la première

$$P = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} p + \frac{\partial \Phi}{\partial p} r + \frac{\partial \Phi}{\partial q} s, \quad Q = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} q + \frac{\partial \Phi}{\partial p} s + \frac{\partial \Phi}{\partial q} t,$$

on obtient une équation aux dérivées partielles du second ordre pour déterminer z, les variables indépendantes étant x, y. C'est une des résolvantes du système.

Si les équations proposées peuvent se mettre sous la forme

$$Z = \Phi(x, y, z, p, q), \qquad z = \Psi(x, y, Z, P, Q),$$

l'élimination de z conduira de même à une équation aux dérivées partielles du second ordre pour déterminer Z. On obtient ainsi directement les deux résolvantes du système, qui se correspondent bien par une transformation B_1.

[**20**] Nous allons appliquer la théorie à quelques exemples.

Exemple I. — L'équation du second ordre

$$(E_1) \qquad s = f(x, y, z, p, q)$$

peut être considérée comme une résolvante du système S

$$\omega_1 = dz - pdx - qdy = 0, \qquad \omega_2 = dp - udx - fdy = 0.$$

Pour trouver la seconde résolvante E_2 du système, cherchons d'abord les deux familles d'éléments singuliers. On a

$$\omega'_1 = fdy\,\delta x + (dq - fdx)\,\delta y - dy\,\delta q,$$

$$\omega'_2 = \left[du - \left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + u\frac{\partial f}{\partial p}\right)dy\right]\delta x + \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + u\frac{\partial f}{\partial p}\right)dx + \frac{\partial f}{\partial q}dq\right]\delta y$$

$$- \frac{\partial f}{\partial q}dy\,\delta q - dx\,\delta u, \qquad (\text{mod } \omega_1, \omega_2).$$

Les deux équations $\omega'_1 = 0$, $\omega'_2 = 0$ peuvent se réduire à une seule de deux façons :

1° En supposant $\omega'_1 = 0$, ce qui donne le premier système d'éléments singuliers

$$dy = 0, \qquad dq = fdx, \qquad dz = pdx, \qquad dp = udx,$$

correspondant à la résolvante E_1;

2° Si ω'_1 n'est pas identiquement nul, quels que soient δx, δy, δq, les deux équations $\omega'_1 = 0$, $\omega'_2 = 0$ ne peuvent se réduire à une seule que si l'on a $dx = 0$, et $\omega'_2 - \dfrac{\partial f}{\partial q}\omega'_1$ devra être identiquement nul, ce qui donne les équations différentielles du second système d'éléments singuliers

$$dx = 0, \quad dz = qdy, \quad dp = fdy, \quad du = \left[\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + u\frac{\partial f}{\partial p} + f\frac{\partial f}{\partial q}\right]dy.$$

La seconde équation singulière du système S est

$$\omega_3 = \omega_2 - \frac{\partial f}{\partial q}\omega_1 = dp - \frac{\partial f}{\partial q}dz - \left(u - p\frac{\partial f}{\partial q}\right)dx - \left(f - q\frac{\partial f}{\partial q}\right)dy = 0,$$

qu'il faudra réduire à une forme canonique pour en déduire la seconde résolvante E_2.

Si par exemple f ne contient pas q, on a immédiatement ω_3 sous la forme canonique

$$\omega_3 = dp - u dx - f dy = 0.$$

Le problème de Bäcklund défini par les formules

$$X = x, \qquad Y = y, \qquad Z = p, \qquad Q = f(x, y, z, p), \qquad P = u$$

conduit bien à l'équation E_1 pour déterminer z en fonction des variables indépendantes x et y. Si f contient z, on tire aussi de ces équations

$$x = X, \qquad y = Y, \qquad z = \varphi(X, Y, Z, Q), \qquad q = U, \qquad p = Z$$

et le système S peut aussi s'écrire

$$dZ - P dX - Q dY = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial X}dX + \frac{\partial\varphi}{\partial Y}dY + \frac{\partial\varphi}{\partial Z}(P dX + Q dY) + \frac{\partial\varphi}{\partial Q}(S dX + T dY) = Z dX + U dY$$

et la seconde résolvante E_2 s'obtient en égalant les coefficients de dX dans les deux membres

$$\frac{\partial\varphi}{\partial X} + \frac{\partial\varphi}{\partial Z}P + \frac{\partial\varphi}{\partial Q}S = Z,$$

équation de la forme

$$S = A(X, Y, Z, Q)P + B(X, Y, Z, Q).$$

Exemple II. — Si la fonction f est linéaire en p, q, z;

$$f = -a(x, y)p - b(x, y)q - c(x, y)z,$$

E_1 est identique à l'équation de Laplace

$$s + ap + bq + cz = 0,$$

et l'équation $\omega_3 = 0$ devient

$$\omega_3 = dp + b dz - (u + bp)dx + (ap + cz)dy = 0.$$

On la met facilement sous une forme canonique

$$d(p+bz)-\left[z\frac{\partial b}{\partial y}-ap-cz\right]dy-\left[z\frac{\partial b}{\partial x}+bp+u\right]dx=0.$$

Il suit de là que l'équation linéaire donnée provient du problème de Bäcklund définie par les relations

$$X=x, \qquad Y=y, \qquad Z=p+bz, \qquad Q=z\frac{\partial b}{\partial y}-ap-cz;$$

d'où l'on tire inversement, si $k=\frac{\partial b}{\partial y}+ab-c$ n'est pas nul,

$$z=\frac{Q+aZ}{k}, \qquad p=Z-\frac{b(Q+aZ)}{k}.$$

L'élimination de Z conduit bien à l'équation $s+ap+bq+cz=0$, tandis que l'élimination de z conduit à l'une des transformées de Laplace.

Les généralisations de la transformation de Laplace, dues à Imschenetsky, Gomes Teixeira, J. Clairin, s'obtiennent aisément de la même façon.

Exemple III. — L'équation d'Imschenetsky

$$(E_1) \qquad s=A(x,y,z,p)q+B(x,y,z,p)$$

peut être considérée comme une résolvante du système de Pfaff

$$S\begin{cases}\omega_1=dz-pdx-qdy=0,\\ \omega_2=dp-udx-(Aq+B)dy=0.\end{cases}$$

On a dans ce cas $f=Aq+B$, et l'équation $\omega_3=0$ est

$$\omega_3=\omega_2-A\omega_1=dp-Adz-(u-Ap)dx-Bdy=0.$$

Pour avoir la seconde résolvante du système S, il faut d'abord ramener cette équation à une forme canonique. Soit $\varphi(x, y, z, p)$ une intégrale de l'équation

$$A\frac{\partial\varphi}{\partial p}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0,$$

et μ la valeur de

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p}=-\frac{1}{A}\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

L'équation ω_3 peut s'écrire

$$\mu dp + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz - \mu(u - Ap)dx - \mu B dy = 0,$$

ou

$$d\varphi - \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu(u - Ap)\right] dx - \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu B\right] dy = 0,$$

et l'on obtient un problème de Bäcklund qui conduit au système de Pfaff S en posant

$$X = x, \qquad Y = y, \qquad Z = \varphi(x, y, z, p), \qquad Q = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu B.$$

L'élimination de Z conduit bien à l'équation d'Imschenetsky, tandis que l'élimination de z conduit en général à une autre équation du second ordre, qui est la seconde résolvante de S. Supposons en effet que les deux dernières équations du système précédent puissent être résolues par rapport à z et à p

$$z = \psi(x, y, Z, Q), \qquad p = \chi(x, y, Z, Q);$$

en éliminant z on est conduit à l'équation

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial Z} P + \frac{\partial \psi}{\partial Q} S = \chi,$$

qui est de même forme que la première

$$S = M(x, y, Z, Q)P + N(x, y, Z, Q),$$

sauf la permutation des dérivées du premier ordre.

Dans le cas particulier où l'on ne peut résoudre le système écrit plus haut par rapport à z et à p, la fonction Z satisfait à une équation aux dérivées partielles du premier ordre, et par suite l'équation E_1 admet une intégrale intermédiaire dépendant d'une fonction arbitraire.

Exemple IV. — L'équation de M. Gomes Teixeira

$$(E_1) \qquad s = A(x, y, z, p)q + B(x, y, z, p, r)$$

est une résolvante pour le système de Pfaff

$$S \begin{cases} \omega_1 = dz - pdx - qdy = 0, \\ \omega_2 = dp - udx - (Aq + B)dy = 0, \end{cases}$$

r étant remplacée par u dans $B(x, y, z, p, r)$. L'équation

$$\omega_3 = \omega_2 - A\omega_1 = dp - A dz - (u - Ap)dx - B dy = 0$$

est encore une équation singulière pour le système S. En effet, la variable q ne figurant pas dans cette équation, les variables caractéristiques ne dépendent que de x, y, z, p, u, et par suite les éléments caractéristiques annulent bien ω_1 et ω_2. Pour obtenir la seconde résolvante du système S, il suffira donc de ramener l'équation $\omega_3 = 0$ à une forme canonique. Soit, comme tout à l'heure, $\varphi(x, y, z, p)$ une intégrale de l'équation

$$A\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0,$$

et μ la valeur de

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p} = -\frac{1}{A}\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

L'équation $\omega_3 = 0$ peut encore s'écrire, en multipliant tous les termes par μ,

$$d\varphi - \left[\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mu(u - Ap)\right]dx - \left[\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mu B\right]dy = 0.$$

La seconde équation singulière du système S est donc ramenée à une forme canonique, et l'on en déduira la seconde résolvante du système par un calcul d'élimination. On peut former directement cette équation en observant que le système S correspond au problème de Bäcklund défini par les relations

$$X = x, \quad Y = y, \quad Z = \varphi(x, y, z, p), \quad P = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mu(u - Ap), \quad Q = \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mu B,$$

où figure le paramètre u. L'élimination de Z conduit bien à l'équation E_1. Nous savons *a priori* que Z satisfait aussi en général à une équation du second ordre. Pour l'obtenir, il suffit de résoudre les trois dernières relations

$$Z = \varphi, \qquad P = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mu(u - Ap), \qquad Q = \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mu B$$

par rapport à z, p, u; soient

$$z = \psi(x, y, Z;\ P, Q),$$
$$p = \chi(x, y, Z;\ P, Q)$$

les expressions ainsi obtenues. La fonction Z satisfait à l'équation du second ordre

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial Z}P + \frac{\partial\psi}{\partial P}R + \frac{\partial\psi}{\partial Q}S = \chi,$$

qui est linéaire en R et S. Si on ne pouvait résoudre les équations de la transformation de Bäcklund par rapport à z, p, u, on verrait, comme dans l'exemple précédent, que l'équation E_1 admet une intégrale intermédiaire dépendant d'une fonction arbitraire, et Z serait une intégrale d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre.

Exemple V. — Prenons encore l'équation de Clairin

$$(E_1) \qquad s = A(x, y, z, p, r)q + B(x, y, z, p, r),$$

où r figure dans A et B. Cette équation est une résolvante du système de Pfaff

$$S \begin{cases} \omega_1 = dz - pdx - qdy = 0, \\ \omega_2 = dp - udx - (Aq + B)dy = 0, \end{cases}$$

où r est remplacé par u dans A et B. Pour la même raison que plus haut, l'équation

$$\omega_3 = \omega_2 - A\omega_1 = dp - Adz - (u - Ap)dx - Bdy = 0$$

est la seconde équation singulière du système S, et il suffira de ramener cette équation à une forme canonique pour avoir la seconde résolvante.

En appliquant la méthode générale à cette équation, on retrouve les résultats obtenus directement par J. Clairin.

[**21**] L'intégration d'un système de Pfaff de deux équations à six variables peut, dans certains cas, se ramener d'une autre façon à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du second ordre. Étant donné le système S de deux équations $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, soit $\Omega_1 = \lambda\omega_1 + \mu\omega_2 = 0$ une équation non singulière de ce système; elle est nécessairement de classe cinq. Supposons qu'on l'ait ramenée à une forme canonique

$$\Omega_1 = dz - pdx - qdy = 0;$$

la seconde équation du système contient nécessairement la différentielle du de la dernière variable u, puisque par hypothèse $\Omega_1 = 0$ n'est pas une équation singulière du système. On peut donc supposer que ce système S est de la forme

$$(48) \qquad \begin{cases} \Omega_1 = dz - pdx - qdy = 0, \\ \Omega_2 = du - Xdx - Ydy - Pdp - Qdq = 0, \end{cases}$$

X, Y, P, Q étant des fonctions de x, y, z, p, q, u. Soit M_2 une multiplicité intégrale à deux dimensions de ce système, telle qu'il existe une seule relation entre x, y, z; si l'on prend x et y pour variables indépendantes, cette multiplicité M_2 est donc représentée par un système de quatre équations

$$(49) \qquad z = f(x, y), \qquad p = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad u = \varphi(x, y).$$

Remplaçons, dans $\Omega_2 = 0$, dp et dq par $r dx + s dy$, $s dx + t dy$ respectivement, r, s, t étant les dérivées secondes de $f(x, y)$; nous voyons que la fonction $u = \varphi(x, y)$ doit être une intégrale de l'équation aux différentielles totales

$$(50) \qquad du = (X + Pr + Qs)\,dx + (Y + Ps + Qt)\,dy.$$

En développant la condition d'intégrabilité, on obtient la relation

$$(51) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{\partial P}{\partial q} + Q\frac{\partial P}{\partial u} - \frac{\partial Q}{\partial p} - P\frac{\partial Q}{\partial u}\right](rt - s^2) \\ & + \left[\frac{dP}{dy} - \frac{\partial Y}{\partial p} + Y\frac{\partial P}{\partial u} - P\frac{\partial Y}{\partial u}\right] r \\ & + \left[\frac{\partial X}{\partial q} + Q\frac{\partial X}{\partial u} - \frac{dQ}{dx} - X\frac{\partial Q}{\partial u}\right] t \\ & + \left[\frac{\partial X}{\partial p} + P\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{dQ}{dy} + Y\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial Y}{\partial q} - Q\frac{\partial Y}{\partial u} - \frac{dP}{dx} - X\frac{\partial P}{\partial u}\right] s \\ & + \frac{dX}{dy} + Y\frac{\partial X}{\partial u} - \frac{dY}{dx} - X\frac{\partial Y}{\partial u} = 0, \end{aligned} \right.$$

où

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}p, \qquad \frac{d}{dy} = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}q.$$

En général, l'équation (51) contient l'inconnue u; en tirant u de cette relation, et en écrivant que u est une intégrale de l'équation (50), on obtient deux équations renfermant x, y, z, et les dérivées partielles de z jusqu'au troisième ordre. La fonction $f(x, y)$ doit être une intégrale de ce système de deux équations simultanées du troisième ordre; ce système n'est pas quelconque, puisque nous savons *a priori* qu'il admet une infinité d'intégrales.

C'est là le cas général où les fonctions X, Y, P, Q ne satisfont à aucune condition particulière. Mais il peut arriver que les rapports des coefficients de r, s, t, $rt - s^2$ et du terme indépendant de r, s, t ne contiennent pas la variable u. Dans ce cas, nous voyons que la condition (51) est une équation de Monge-Ampère E′, à laquelle doit satisfaire la fonction $f(x, y)$. A toute intégrale de E′ correspondent une infinité de fonctions $u = \varphi(x, y)$, *dépendant d'une constante arbitraire*, que l'on obtiendra par l'intégration de l'équation complètement intégrable (50), et par suite une infinité d'intégrales à deux dimensions du système de Pfaff (48). Nous dirons que l'équation de Monge-Ampère E' est une *résolvante de seconde espèce* du système de Pfaff. Les équations E_1 et E_2 déjà définies sont les *résolvantes de première espèce*.

Ainsi qu'on l'a déjà remarqué (n° **10**), le système (48) est toujours de sixième classe; par conséquent, un système de Pfaff de classe inférieure à six ne peut admettre de résolvante de seconde espèce.

Tout système de Pfaff provenant d'un problème de Bäcklund est mis immédiatement sous la forme (48). La condition d'intégrabilité (51) [1] a été mise sous une forme élégante par M. Darboux lorsque le problème de Bäcklund est défini par les relations (38).

[**22**] Soit S un système de Pfaff de sixième classe admettant une résolvante de première espèce E_1 et une résolvante de seconde espèce E'. Ce système peut d'une part être ramené à la forme

$$S_1 \begin{cases} dz - p\,dx - q\,dy = 0, \\ X\,dx + Y\,dy + P\,dp + Q\,dq = 0, \end{cases}$$

X, Y, P, Q étant des fonctions de x, y, z, p, q, u, et d'autre part à la forme

$$S' \begin{cases} dz' - p'dx' - q'dy' = 0, \\ du' - X'dx' - Y'dy' - P'dp' - Q'dq' = 0, \end{cases}$$

X', Y', P', Q' étant des fonctions de x', y', z', p', q', u', telles que la condition d'intégrabilité de

$$du' = (X' + P'r' + Q's')dx' + (Y' + P's' + Q't')dy'$$

ne renferme pas u'; cette condition d'intégrabilité est précisément une résolvante de seconde espèce E'. Soit E_1 la résolvante de première espèce obtenue en éliminant u entre les deux équations

$$X + Pr + Qs = 0, \qquad Y + Ps + Qt = 0;$$

à toute intégrale de E_1 correspond une multiplicité intégrale à deux dimensions du système de Pfaff et par suite une intégrale de E'. Au contraire, à une intégrale de E' correspondent ∞^1 intégrales du système de Pfaff, et par suite ∞^1 intégrales de E_1,

(1) *Leçons sur la Géométrie*, tome III, p. 439.

dépendant d'une constante arbitraire. *A toute intégrale de* E_1 *correspond par conséquent une intégrale et une seule de* E', *tandis qu'à une intégrale de* E' *correspondent* ∞^1 *intégrales de* E_1, *dépendant d'une constante arbitraire.*

Il est facile de voir comment sont liés les éléments correspondants des deux intégrales. Par hypothèse, on passe des équations de S_1 aux équations de S' par un changement de variables

$$(52) \quad x' = f_1(x, y, z, p, q, u), \quad y' = f_2(\ldots), \quad \ldots, \quad q' = f_5(\ldots), \quad u' = f_6,$$

d'où l'on tire inversement

$$(52') \quad x = \varphi_1(x', y', z', p', q', u'), \quad y = \varphi_2(\ldots), \quad \ldots, \quad q = \varphi_5(\ldots), \quad u = \varphi_6.$$

En éliminant u entre les cinq premières relations (52), ou u' entre les cinq premières relations (52'), on obtient un système de quatre équations distinctes entre les éléments correspondants (x, y, z, p, q), (x', y', z', p', q') des intégrales de E_1 et de E'

$$(53) \qquad F_i(x, y, z, p, q; x', y', z', p', q') = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4);$$

les formules (52), (52'), (53) définissent un même problème de Bäcklund, conduisant aux deux systèmes de Pfaff équivalents S_1 et S'. Nous dirons, avec M. Clairin, que l'on passe de l'équation E_1 à l'équation E', ou inversement, par *une transformation de Bäcklund* B_2.

La famille d'éléments singuliers du système S, qui correspond à la forme réduite S_1, donne une famille de caractéristiques de l'équation E_1 et aussi de l'équation E'. Nous dirons que la transformation B_2 correspond à cette famille de caractéristiques de E'.

Supposons que le systèmes S admette deux résolvantes distinctes de seconde espèce, c'est-à-dire qu'on puisse le ramener à la forme

$$S'' \begin{cases} dz'' - p''dx'' - q''dy'' = 0, \\ du'' - X''dx'' - Y''dy'' - P''dp'' - Q''dq'', \end{cases}$$

par un changement de variables qui ne se réduise pas à une transformation de contact effectuée sur les variables x', y', z', p', q', combinée avec un changement du paramètre u'. Si la condition d'intégrabilité de l'équation aux différentielles totales

$$du'' = (X'' + P''r'' + Q''s'')dx'' + (Y'' + P''s'' + Q''r'')dy''$$

ne renferme pas u'', cette condition d'intégrabilité donne une équation aux dérivées partielles E'' à laquelle doit satisfaire la fonction $z'' = \psi(x'', y'')$ pour qu'on puisse en déduire une intégrale à deux dimensions du système de Pfaff. C'est encore une résolvante de seconde espèce de ce système. A toute intégrale de E″ correspondent une infinité d'intégrales du système S, et par suite une infinité d'intégrales de E′, dépendant d'une constante arbitraire, et inversement. D'autre part, on voit immédiatement que les éléments correspondants de deux intégrales correspondantes de E′ et de E″ vérifient quatre relations distinctes, indépendantes de u' et de u''. Nous dirons avec Clairin que ces deux équations se déduisent l'une de l'autre par une *transformation de Bäcklund* B_3.

En résumé, deux résolvantes de première espèce d'un système de deux équations de Pfaff à six variables se correspondent par une transformation B_1. Une résolvante de première espèce et une résolvante de seconde espèce se correspondent par une transformation B_2. Deux résolvantes de troisième espèce se correspondent par une transformation B_3.

[**23**] Réciproquement, si deux équations aux dérivées partielles du second ordre se ramènent l'une à l'autre par une transformation de Bäcklund de l'une des trois espèces, ces deux équations sont des résolvantes, de première ou de seconde espèce, d'un même système de deux équations de Pfaff à six variables indépendantes.

Supposons en effet que les formules (38), ou les formules équivalentes (39), fassent correspondre les intégrales de deux équations aux dérivées partielles du second ordre, l'une e définissant z comme fonction des variables indépendantes x et y, l'autre E définissant Z comme fonction des variables X et Y. Les éléments correspondants de deux intégrales correspondantes $z = f(x, y)$, $Z = F(X, Y)$ de ces deux équations e et E doivent vérifier les quatre relations (38). La recherche des fonctions $f(x, y)$ est équivalente (n° **17**) à la recherche des intégrales à deux dimensions d'un système de Pfaff S

$$dz = pdx + qdy, \qquad dZ = PdX + QdY,$$

X, Y, Z, P, Q étant exprimées au moyen de x, y, z, p, q, et d'un paramètre auxiliaire u. Si la seconde relation ne contient pas du, la fonction $f(x, y)$ est une intégrale d'une équation résolvante de première espèce du système de Pfaff S. Si la seconde équation contient du, il faudra que l'élimination de u conduise à une seule équation aux dérivées partielles du second ordre pour déterminer $z = f(x, y)$, et cette équation sera précisément une résolvante de seconde espèce du système S.

De même si la fonction $Z = F(X, Y)$ est déterminée par une seule équation du second ordre, cette équation est une résolvante de première ou de seconde espèce d'un système de Pfaff équivalent au système S.

Comme un système de deux équations de Pfaff à six variables admet en général deux résolvantes distinctes de première espèce, on est conduit aux propositions suivantes :

α) *Si une équation de Monge-Ampère* E′ *peut être déduite d'une équation* E_1 *par une transformation* B_2, *faisant correspondre à une intégrale de* E_1 *une intégrale et une seule de* E′, *cette équation* E′ *peut en général se déduire d'une autre équation* E_2, *distincte de* E_1, *par une autre transformation de Bäcklund* B_2, *faisant correspondre à une intégrale de* E_2 *une intégrale et une seule de* E′.

β) *Si deux équations de Monge-Ampère* E′, E″, *peuvent se déduire l'une de l'autre par une transformation* B_3, *cette transformation* B_3 *peut en général s'obtenir, de deux façons différentes, par une combinaison de deux transformations* B_2.

La démonstration est immédiate. Si le système de Pfaff, dont E′ et E″ sont deux résolvantes de seconde espèce, admet deux résolvantes distinctes de première espèce, la transformation B_3 peut évidemment être obtenue en effectuant les deux transformations B_2 et B'_2 par lesquelles on passe de E′ à E_1, puis de E_1 à E″, ou les deux transformations de même nature qui conduisent de E′ à E_2 et de E_2 à E″.

Les cas où ces propositions sont en défaut se présentent d'eux-mêmes. Il en est ainsi si le système de Pfaff n'admet qu'une résolvante de première espèce, ce qui arrive lorsque les deux familles de caractéristiques de cette équation sont confondues, ou lorsque cette équation admet une intégrale intermédiaire dépendant d'une fonction arbitraire. La seconde proposition est aussi en défaut, lorsque le système de Pfaff n'admet pas de résolvante de première espèce. On a vu (n° **12**) que ce système, et par suite les équations E′, E″, sont alors intégrables explicitement.

Remarquons qu'une équation de Monge-Ampère peut être une résolvante de seconde espèce pour des systèmes de Pfaff essentiellement distincts (*voir* n° **29**).

La correspondance entre les caractéristiques de deux équations du second ordre qui se déduisent l'une de l'autre par une transformation de Bäcklund a été étudiée en détail par J. Clairin dans sa Thèse. On retrouverait aisément ses résultats au moyen des considérations précédentes, en les rattachant aux propriétés des deux familles d'éléments singuliers d'un système de deux équations de Pfaff à six variables.

[**24**] Reprenons par exemple le système de Pfaff de la page 113 (n° **18**)

$$\text{S} \qquad dz = p\,dx + q\,dy, \qquad dZ = [\sin(Z - z) - p]\,dx + [\sin(Z + z) + q]\,dy;$$

on trouve facilement les deux équations singulières de ce système, car il est équivalent au système

$$dz_1 = \sin z_2\,dx + [\sin z_1 + 2q]\,dy,$$
$$dz_2 = [\sin z_2 - 2p]\,dx + \sin z_1\,dy,$$

où l'on a posé $Z + z = z_1$, $Z - z = z_2$, et il est évident que les éléments caractéristiques de chacune de ces équations annulent les deux équations, car les éléments caractéristiques de la première par exemple sont données par les relations

$$dx = 0, \qquad dy = 0, \qquad dz_1 = 0, \qquad dz_2 = 0, \qquad dq = 0.$$

Pour avoir les deux résolvantes de première espèce, il suffit de remarquer que l'on est encore conduit au système de Pfaff qui précède, ou à un système équivalent, en se proposant d'intégrer les deux équations simultanées du premier ordre, de la forme considérée au n° **19**,

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = \sin z_2, \qquad \frac{\partial z_2}{\partial y} = \sin z_1. \tag{54}$$

L'élimination de z_2 conduit à l'équation

$$\mathrm{E}_1 \qquad \frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} = \sin z_1 \sqrt{1 - \left(\frac{\partial z_1}{\partial x}\right)^2},$$

et l'élimination de z_1 à l'équation

$$\mathrm{E}_2 \qquad \frac{\partial^2 z_2}{\partial x \partial y} = \sin z_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\partial z_2}{\partial y}\right)^2}.$$

On a ainsi les deux résolvantes de première espèce du système de Pfaff S, et les intégrales se correspondent une à une par les formules (54).

On est conduit à une résolvante de seconde espèce, en écrivant que l'équation

$$dZ = [\sin(Z - z) - p]\,dx + [\sin(Z + z) + q]\,dy$$

est complètement intégrable; Z ne figure pas dans la condition d'intégrabilité, qui donne l'équation en z

$$(\mathrm{E}') \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\sin 2z}{2}.$$

Le système S peut aussi s'écrire

$$dZ = P\,dx + Q\,dy,$$
$$dz = [\sin(Z - z) - P]\,dx + [Q - \sin(Z + z)]\,dy,$$

et la condition d'intégrabilité de la seconde équation donne une nouvelle résolvante de seconde espèce,

$$(\mathrm{E}'') \qquad \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = \frac{\sin 2Z}{2}$$

qui ne diffère de E′ que par le changement de z en Z.

D'une intégrale z_1 de E_1 on déduit une intégrale $z_2 = \arcsin \frac{\partial z_1}{\partial x}$ de E_2, et par suite une intégrale de chacune des équations E′ et E″,

$$Z = \frac{z_1 + \arcsin \frac{\partial z_1}{\partial x}}{2}, \qquad z = \frac{z_1 - \arcsin \frac{\partial z_1}{\partial x}}{2}.$$

On passe de E′ à E″ par une transformation B_3, et par suite de toute intégrale de E′ on peut déduire, par l'intégration d'une équation aux différentielles totales, une infinité d'intégrales de la même équation dépendant d'une constante arbitraire.

Cette proposition, comme il est bien connu, a de nombreuses applications dans l'étude des surfaces à courbure constante.

Remarque. — L'équation E_1 admet pour *intégrales singulières* toutes les intégrales de l'équation du premier ordre $\left(\frac{\partial z_1}{\partial x}\right)^2 = 1$; à ces intégrales singulières ne correspond aucune intégrale de E_2, ni par suite de E′ et de E″.

[25] Parmi les problèmes qui s'offrent naturellement dans cette théorie, nous allons d'abord examiner le suivant :

Étant donné un système S *de deux équations de Pfaff à six variables, admet il des résolvantes de seconde espèce?*

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'on puisse, par un choix convenable des variables x, y, z, p, q, u, mettre le système sous une forme (48) telle que les rapports des coefficients de $rt - s^2$, r, s, t, et du terme indépendant de r, s, t dans l'équation (51) soient indépendants de la variable u. On est conduit aux mêmes conditions dans l'étude d'une autre question. Le système S étant mis sous la forme (48), cherchons à déterminer les éléments singuliers. On a

$$\Omega'_1 = \delta p\, dx - dp\,\delta x + \delta q\, dy - dq\,\delta y,$$

$$\left.\begin{aligned}\Omega'_2 = {} & \left[\frac{dX}{dy} + Y\frac{\partial X}{\partial u} - \frac{dY}{dx} - X\frac{\partial Y}{\partial u}\right](dx\,\delta y - dy\,\delta x)\\ & + \left[\frac{\partial X}{\partial p} + P\frac{\partial X}{\partial u} - \frac{dP}{dx} - X\frac{\partial P}{\partial u}\right](dx\,\delta p - dp\,\delta x)\\ & + \left[\frac{\partial X}{\partial q} + Q\frac{\partial X}{\partial u} - \frac{dQ}{dx} - X\frac{\partial Q}{\partial u}\right](dx\,\delta q - dq\,\delta x)\\ & + \left[\frac{\partial Y}{\partial p} + P\frac{\partial Y}{\partial u} - \frac{dP}{dy} - Y\frac{\partial P}{\partial u}\right](dy\,\delta p - dp\,\delta y)\\ & + \left[\frac{\partial Y}{\partial q} + Q\frac{\partial Y}{\partial u} - \frac{dQ}{dy} - Y\frac{\partial Q}{\partial u}\right](dy\,\delta q - dq\,\delta y)\\ & + \left[\frac{\partial P}{\partial q} + Q\frac{\partial P}{\partial u} - \frac{\partial Q}{\partial p} - P\frac{dQ}{\partial u}\right](dp\,\delta q - dq\,\delta p).\end{aligned}\right\} \pmod{\Omega_1, \Omega_2}$$

Le système des deux équations $\Omega'_1 = 0$, $\Omega'_2 = 0$ est équivalent au système obtenu en remplaçant, dans Ω'_2, $dy\,\delta q - dq\,\delta y$ par $dp\,\delta x - \delta p\,dx$ (en tenant compte de $\Omega'_1 = 0$), de sorte que dans la nouvelle équation obtenue les coefficients de

$$dx\,\delta y - dy\,\delta x,\quad dx\,\delta p - dp\,\delta x,\quad dx\,\delta q - dq\,\delta x,\quad dy\,\delta p - dp\,\delta y,\quad dp\,\delta q - dq\,\delta p$$

sont identiques aux coefficients de l'équation (51). Les deux équations $\Omega'_1 = 0$, $\Omega'_2 = 0$ peuvent donc être remplacées par deux équations équivalentes dont les coefficients ne dépendent que de x, y, z, p, q, *et où ne figurent ni u ni du*, si le système S admet une résolvante de seconde espèce. Les racines de l'équation en λ, μ (n° **3**) qui déterminent les éléments singuliers du système de Pfaff S ne dépendent donc que de x, y, z, p, q, et par conséquent les équations qu'il faut ajouter à $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ pour avoir les équations différentielles d'une famille d'éléments singuliers ne renferment que les variables x, y, z, p, q et leurs différentielles dx, dy, dz, dp, dq. Comme il en est de même de l'équation $\Omega_1 = 0$, on est conduit à la conclusion suivante :

Pour qu'un système S *de deux équations de Pfaff à six variables admette une résolvante de seconde espèce, il faut que du système de quatre équations différentielles qui définissent une famille d'éléments singuliers de* S *on puisse déduire un système de trois équations de la cinquième classe.*

Cette condition sera d'ailleurs vérifiée pour les deux familles d'éléments singuliers, si elle l'est pour l'une d'elles.

Réciproquement, supposons que, parmi les quatre équations différentielles qui définissent l'une des familles d'éléments singuliers du système de Pfaff S, on puisse en trouver trois de distinctes $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0$, où ne figurent que cinq variables indépendantes et leurs différentielles. Deux de ces équations $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, par exemple, forment avec $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ un système de quatre équations distinctes, et $\omega_3 = 0$ est une combinaison de celles-là

$$\omega_3 = \lambda_1\Omega_1 + \lambda_2\Omega_2 + \mu_1\omega_1 + \mu_2\omega_2,$$

λ_1 et λ_2 n'étant pas nuls à la fois. Réciproquement, on a

$$\Omega_3 = \lambda_1\Omega_1 + \lambda_2\Omega_2 = \omega_3 - \mu_1\omega_1 - \mu_2\omega_2.$$

Supposons de plus que, dans l'équation $\Omega_3 = 0$ réduite à sa forme canonique ne figurent que les variables caractéristiques du système $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0$ et leurs différentielles, ce qui aura lieu si les multiplicateurs μ_1 et μ_2 ne dépendent eux-mêmes que de ces variables. L'équation $\Omega_3 = 0$ étant supposée mise sous forme canonique

$$\Omega_3 = dz - p\,dx - q\,dy = 0,$$

par hypothèse les deux équations $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$ ne renferment que x, y, z, p, q et leurs différentielles

$$\omega_1 = X_1 dx + Y_1 dy + Z_1 dz + P_1 dp + Q_1 dq = 0,$$
$$\omega_2 = X_2 dx + Y_2 dy + Z_2 dz + P_2 dp + Q_2 dq = 0,$$

$X_1, \ldots, Q_2$ ne dépendant que des variables x, y, z, p, q. Quant à la seconde équation du système S, elle contient la sixième variable u et sa différentielle du, puisque le système S doit être de sixième classe.

Toute intégrale à deux dimensions $\mathcal{M}_2$ du système S est donc représentée par des formules telles que

$$z = f(x, y), \qquad p = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad u = \varphi(x, y),$$

x et y étant prises pour variables indépendantes. Cette intégrale contient une multiplicité M_2 d'éléments unis, qui est représentée par les trois premières formules précédentes. Mais la multiplicité $\mathcal{M}_2$ est un lieu de multiplicités à une dimension $\mathcal{M}_1$, dont tous les éléments linéaires sont des éléments singuliers (n° **1**); chacune de ces multiplicités $\mathcal{M}_1$ contient une multiplicité M_1 à une dimension d'éléments de contact (x, y, z, p, q) satisfaisant aux deux relations $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$. La multiplicité M_2 est donc un lieu de multiplicités à une dimension M_1, satisfaisant aux trois relations

$$\Omega_3 = 0, \qquad \omega_1 = 0, \qquad \omega_2 = 0;$$

il en résulte que la fonction $f(x, y)$ est une intégrale d'une équation de Monge-Ampère [1], dont les caractéristiques sont définies par les trois relations précédentes. Cette équation de Monge-Ampère est évidemment une résolvante pour le système de Pfaff, de seconde espèce si la seconde équation du système contient du, de première espèce dans le cas particulier où cette équation ne contiendrait pas du.

Exemple. — Les équations différentielles

$$(\alpha) \qquad dy = 0, \quad dz = p\,dx, \quad dq = \sin z\sqrt{1 - p^2}\,dx, \quad dp = u\,dx,$$

définissent une famille d'éléments singuliers du système S considéré plus haut (n° **24**)

$$(\mathrm{S}) \qquad dz - p\,dx - q\,dy = 0, \qquad dp - u\,dx - \sin z\sqrt{1 - p^2}\,dy = 0,$$

---

[1] Voir, par exemple, mes *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, tome I, page 49.

qui admet la résolvante de première espèce

$$E_1 \qquad s = \sin z \sqrt{1 - p^2}.$$

Des quatre équations (α), on peut déduire un système de trois équations et de cinquième classe,

$$dy = 0, \qquad d(q + \sin z) = [\sin z \sqrt{1 - p^2} + p \cos z]\, dx = \sin(z + \varphi)\, dx,$$
$$d(z + \varphi) = \left[p + \frac{u}{\sqrt{1 - p^2}}\right] dx,$$

où ne figurent que les cinq variables

$$x,\ y, \qquad q + \sin z, \qquad z + \varphi, \qquad p + \frac{u}{\sqrt{1 - p^2}},$$

en posant $\varphi = \arcsin p$. Une combinaison des deux équations du système S ne renferme que ces cinq variables

$$d(z + \varphi) = \left(p + \frac{u}{\sqrt{1 - p^2}}\right) dx + (q + \sin z)\, dy.$$

Si donc on pose

$$z = \frac{Z + U}{2}, \qquad P = p + \frac{u}{\sqrt{1 - p^2}}, \qquad Q = q + \sin z, \qquad \varphi = \frac{Z - U}{2},$$

le système S peut s'écrire sous la forme équivalente

$$dZ = P\, dX + Q\, dy,$$
$$dU = \left[2 \sin \frac{Z - U}{2} - P\right] dx + \left[Q - 2 \sin \frac{Z + U}{2}\right] dy,$$

qui ne diffère que par un changement de notations du système considéré plus haut (n° **24**) et conduit à la résolvante de seconde espèce

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = \sin Z.$$

Les trois équations $dy = 0$, $dz = p\,dx$, $dp = u\,dx$ forment de même un système de trois équations à cinq variables x, y, z, p, u, et la dernière équation du système S ne renferme que ces cinq variables. On retrouve ainsi la seconde résolvante de première espèce du système.

On obtient encore une résolvante de seconde espèce en observant que y ne figure pas dans les trois dernières équations (α), ni dans l'équation

$$dz = \left(p - \frac{qu}{\sin z\sqrt{1-p^2}}\right) dx + \frac{q}{\sin z\sqrt{1-p^2}}\, dp$$

qui est une combinaison des deux équations de S. En posant

$$X = x, \quad Y = p, \quad Z = z, \quad P = p - \frac{qu}{\sin z\sqrt{1-p^2}}, \quad Q = \frac{q}{\sin z\sqrt{1-p^2}},$$

le système S devient

$$dZ = P\,dX + Q\,dY,$$

$$dy = \frac{dZ}{q} - \frac{p}{q}\,dX = \frac{P\,dX + Q\,dY}{q} - \frac{p}{q}\,dX = \frac{P - Y}{Q \sin Z\sqrt{1-Y^2}}\,dX + \frac{dY}{\sin Z\sqrt{1-Y^2}}$$

et il est clair que la condition d'intégrabilité de la dernière équation conduira à une équation de Monge-Ampère pour la fonction Z de X et de Y.

[26] Nous sommes ainsi conduits à rechercher les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système de trois équations à six variables soit de cinquième classe. Ces conditions sont faciles à obtenir. Soit en effet

$$\omega_1 = 0, \qquad \omega_2 = 0, \qquad \omega_3 = 0$$

un système de trois équations de Pfaff à six variables $x_1, x_2, \ldots, x_6$, que nous pouvons supposer résolues par rapport à trois des différentielles, dx_4, dx_5, dx_6 par exemple. On a alors

$$\omega'_i = A_i(dx_1\delta x_2 - dx_2\delta x_1) + B_i(dx_2\delta x_3 - dx_3\delta x_2) + C_i(dx_3\delta x_1 - dx_1\delta x_3)$$
$$i = 1, 2, 3$$

et la relation $\omega'_i = 0$ exprime que les trois points de coordonnées homogènes (A_i, B_i, C_i), (dx_1, dx_2, dx_3), $(\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3)$ sont en ligne droite. Pour qu'il y ait des éléments caractéristiques, il faut évidemment que les trois points (A_i, B_i, C_i) coïncident, ce qui conduit à un système de *quatre* conditions auxquelles doivent satisfaire les coefficients du système proposé.

Cela étant, soient

$$\omega_1 = 0, \qquad \omega_2 = 0, \qquad \omega_3 = 0, \qquad \omega_4 = 0$$

un système Σ de quatre équations de Pfaff à six variables, et Σ_1 un système de trois combinaisons distinctes de ces quatre équations qui soit de cinquième classe. Supposons par exemple que ce système Σ_1 ne renferme aucune relation indépendante de ω_4; on peut alors le mettre sous la forme

$$\omega_1 + \lambda_1 \omega_4 = 0, \qquad \omega_2 + \lambda_2 \omega_4 = 0, \qquad \omega_3 + \lambda_3 \omega_4 = 0,$$

et les *trois* coefficients indéterminés $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ doivent satisfaire à un système de *quatre* équations. Le problème n'admet donc pas en général de solution.

Remarque I. — Si le système Σ renferme un système Σ_1 de trois équations et de cinquième classe, le système dérivé Σ'_1 de Σ_1 est formé de deux équations qui font évidemment partie du système dérivé Σ' de Σ. On pourra donc chercher d'abord dans Σ' un système de deux équations de cinquième classe.

Remarque II. — Dans le cas particulier où le système de Pfaff S admet une transformation infinitésimale, ce système admet toujours une résolvante de seconde espèce [1]. En effet, on peut toujours choisir les six variables x_i de façon que le système admette le groupe de transformations à un paramètre

$$x'_1 = x_1, \qquad \ldots, \qquad x'_5 = x_5, \qquad x'_6 = x_6 + a,$$

de sorte que la variable x_6 ne figurera dans les équations de ce système que par sa différentielle. On peut donc toujours supposer ce système mis sous la forme

$$\Omega_1 = 0, \qquad dx_6 + \Omega_2 = 0,$$

Ω_1 et Ω_2 étant des expressions de Pfaff à cinq variables. La première équation étant ramenée à une forme canonique, on peut encore écrire les équations du système

$$\begin{aligned} &dz - p\,dx - q\,dy = 0, \\ &du - X\,dx - Y\,dy - P\,dp - Q\,dq = 0, \end{aligned}$$

X, Y, P, Q étant des fonctions de x, y, z, p, q. La condition d'intégrabilité de la dernière équation ne renferme pas u, et conduit par conséquent en général à une équation de Monge-Ampère.

[27] Nous avons supposé, dans les paragraphes précédents, que la condition d'intégrabilité (51) n'était pas vérifiée identiquement. Ce cas peut effectivement se présenter pour certains systèmes de Pfaff, que nous allons déterminer.

---

[1] C'est le cas que j'avais étudié dans mon Mémoire *Sur quelques transformations des équations aux dérivées partielles du second ordre*. (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série, t. IV, pp. 299-340.)

Pour qu'il n'y ait pas de terme en $rt - s^2$ dans la condition (51), il faut et il suffit que les fonctions P et Q vérifient la relation

$$\frac{\partial P}{\partial q} + Q\frac{\partial P}{\partial u} - \frac{\partial Q}{\partial p} - P\frac{\partial Q}{\partial u} = 0. \tag{55}$$

Cette relation exprime que l'équation aux différentielles totales

$$du = P dp + Q dq,$$

où l'on regarde x, y, z comme des paramètres, est complètement intégrable. Si $U(x, y, z, p, q; u) = C$ représente l'intégrale générale, on a

$$P = -\frac{\frac{\partial U}{\partial p}}{\frac{\partial U}{\partial u}}, \qquad Q = -\frac{\frac{\partial U}{\partial q}}{\frac{\partial U}{\partial u}}; \tag{56}$$

remarquons que la fonction $U(x, y, z, p, q, u)$ n'est pas unique, mais peut être remplacée par une fonction arbitraire de x, y, z, U.

L'équation (48) qui donne du s'écrit alors

$$\frac{\partial U}{\partial u}du + \frac{\partial U}{\partial p}dp + \frac{\partial U}{\partial q}dq = \frac{\partial U}{\partial u}(X dx + Y dy),$$

ou

$$dU = \left\{ X\frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z}p \right\} dx + \left\{ Y\frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}q \right\} dy;$$

si l'on prend U pour variable à la place de u, on a une équation de la forme

$$du = f(x, y, z, p, q, u)dx + \varphi(x, y, z, p, q, u)dy. \tag{57}$$

Inversement, la condition d'intégrabilité de cette équation ne contient pas de terme en $rt - s^2$, quelles que soient les fonctions f et φ. Pour que la dérivée seconde s figure seule dans cette condition, il est clair que f ne doit pas dépendre de q, ni φ de p, et le système de Pfaff peut être ramené à la forme

$$dz = p dx + q dy, \qquad du = f(x, y, z, p, u)dx + \varphi(x, y, z, q, u)dy. \tag{58}$$

La condition d'intégrabilité est dans ce cas

$$\left(\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \varphi}{\partial q}\right)s = \frac{d\varphi}{dx} - \frac{df}{dy} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}f - \frac{\partial f}{\partial u}\varphi; \tag{59}$$

pour qu'elle se réduise à une identité, il faut et il suffit que les fonctions f et φ vérifient les deux conditions

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\partial \varphi}{\partial q}, \tag{60}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} q + \frac{\partial f}{\partial u} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} p + \frac{\partial \varphi}{\partial u} f. \tag{61}$$

La valeur commune des dérivées $\frac{\partial f}{\partial p}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial q}$ ne doit dépendre que des variables x, y, z, u. On a donc

$$f = A(x, y, z, u)p + B(x, y, z, u),$$
$$\varphi = A(x, y, z, u)q + C(x, y, z, u),$$

et, en portant ces valeurs de f et de φ dans l'équation (61), on obtient les trois relations

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial u} C = \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial u} B, \\ &\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial u} C = \frac{\partial C}{\partial z} + \frac{\partial C}{\partial u} A, \\ &\frac{\partial B}{\partial z} + \frac{\partial B}{\partial u} A = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial u} B \end{aligned} \right. \tag{62}$$

qui expriment que l'équation aux différentielles totales

$$du = B\,dx + C\,dy + A\,dz \tag{63}$$

est complètement intégrable. Soit

$$\mathcal{F}(x, y, z, u) = C^{te}$$

l'intégrale générale de cette équation; on a

$$A = -\frac{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}}{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u}}, \qquad B = -\frac{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}}{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u}}, \qquad C = -\frac{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}}{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u}},$$

et par suite

$$f = -\frac{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} + p\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}}{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u}}, \qquad \varphi = -\frac{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} + q\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}}{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u}}.$$

La seconde des équations (58) est donc

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} (pdx + qdy) = 0$$

et le système de Pfaff proposé peut être ramené à la forme canonique (V)

$$(64) \qquad dz - pdx - qdy = 0, \qquad d\mathcal{F} = 0.$$

Il est évident, dans ce cas, que l'on peut choisir arbitrairement la fonction z des variables x et y, et l'intégrale générale du système dépend d'une fonction arbitraire de deux variables et d'une constante arbitraire.

Supposons qu'un problème de Bäcklund défini par les relations (38), ou les formules équivalentes (39), conduise à un système de Pfaff de la forme (64). Il faut et il suffit pour cela que l'on ait identiquement

$$(65) \qquad dZ - PdX - QdY = \lambda d\mathcal{F} + \mu(dz - pdx - qdy),$$

X, Y, Z, P, Q étant remplacées par les fonctions $f_1, \ldots, f_5$ des variables x, y, z, p, q, u, et les coefficients λ, μ pouvant être des fonctions quelconque de ces variables. Si l'on ajoute aux cinq relations (39) l'équation $\mathcal{F}(x, y, z, p, q, u) = C$, d'où l'on peut tirer u en fonction de x, y, z, p, q et de la constante C, on obtient des formules

$$(66) \qquad X = \varphi_1(x, y, z, p, q; C), \quad \ldots, \quad Q = \varphi_5(x, y, z, p, q; C)$$

où les cinq fonctions X, Y, Z, P, Q satisfont à la relation

$$(65') \qquad dZ - PdX - QdY = \mu(dz - pdx - qdy).$$

Les formules (66) définissent donc une transformation de contact, dépendant d'un paramètre arbitraire C.

Inversement, si les formules (66) définissent une transformation de contact, dépendant d'un paramètre arbitraire C, en remplaçant C par une sixième variable u, les fonctions X, Y, Z, P, Q des six variables x, y, z, p, q, u vérifient une relation de la forme

$$dZ - pdX - QdY = \mu(dz - pdx - qdy) + \lambda du;$$

le problème de Bäcklund défini par les formules (66), où C est remplacé par u, conduit donc à un système de Pfaff de la forme canonique (V)

$$dz - pdx - qdy = 0, \qquad du = 0.$$

Il est évident que l'on peut choisir arbitrairement la multiplicité m_2 ; à chacune d'elles correspondent ∞^1 multiplicités M_2 qui se déduisent de m_2 par une transformation de contact.

Exemple. — Soit

$$X = x + pu, \qquad Y = y + qu, \qquad Z = u - z, \qquad P = -p, \qquad Q = -q;$$

on a

$$\begin{aligned} dZ - PdX - QdY &= du(1 + p^2 + q^2) + u(pdp + qdq) - (dz - pdx - qdy) \\ &= \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, d\left(u\sqrt{1 + p^2 + q^2}\right) - (dz - pdx - qdy). \end{aligned}$$

Le système de Pfaff correspondant est

$$dz - pdx - qdy = 0, \qquad d\left(u\sqrt{1 + p^2 + q^2}\right) = 0.$$

Il est évident, géométriquement, que l'on a ainsi une famille de ∞^1 transformations de contact, mais ces transformations ne forment pas un groupe.

[**28**] Pour que les termes qui contiennent r et t disparaissent dans la condition d'intégrabilité (51), il faut et il suffit, d'après le calcul que nous venons de faire, que le système de Pfaff soit de la forme (58)

$$(58') \qquad dz = pdx + qdy, \qquad du = f(x, y, z, p, u)dx + \varphi(x, y, z, q, u)dy.$$

Il s'ensuit que *toutes les fois qu'une équation du second ordre*

$$(67) \qquad s = \psi(x, y, z, p, q)$$

est une résolvante de seconde espèce pour un système de Pfaff, ce système peut être ramené à la forme (58) *par un choix convenable de la variable* u. Mais les fonctions f et φ ne doivent pas être quelconques pour que la condition d'intégrabilité conduise à une résolvante de seconde espèce de la forme (67). Il faut en outre que le quotient

$$\frac{\dfrac{d\varphi}{dx} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} f - \dfrac{df}{dy} - \dfrac{\partial f}{\partial u} \varphi}{\dfrac{\partial f}{\partial p} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial q}}$$

soit indépendant de u.

Par exemple le système

$$dz = pdx + qdy, \qquad du = p^2 dx + 2f(z)dy$$

admet la résolvante de seconde espèce

$$s=f'(z).$$

Il peut aussi arriver que la condition d'intégrabilité (51) ne renferme aucune dérivée du second ordre de z, sans se réduire à une identité. D'après les calculs du paragraphe précédent, le système de Pfaff peut alors être ramené à la forme (58); pour que le coefficient de s soit nul aussi, il faut de plus que l'on ait $\frac{\partial f}{\partial p}=\frac{\partial \varphi}{\partial q}$, c'est-à-dire que f et φ soient de la forme

$$f=A(x,y,z,u)p+B(x,y,z,u),$$
$$\varphi=A(x,y,z,u)q+C(x,y,z,u).$$

Le système de Pfaff est alors

$$\omega_1=dz-(pdx+qdy)=0,\quad \omega_2=A(x,y,z,u)(pdx+qdy)+Bdx+Cdy-du=0$$

et la condition d'intégrabilité est linéaire en p et q

$$\begin{aligned}H=p\left\{\frac{\partial A}{\partial y}+\frac{\partial A}{\partial u}C-\frac{\partial C}{\partial z}-\frac{\partial C}{\partial u}A\right\}+q\left\{\frac{\partial B}{\partial z}+\frac{\partial B}{\partial u}A-\frac{\partial A}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial u}B\right\}&\\ +\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial B}{\partial u}C-\frac{\partial C}{\partial x}-\frac{\partial C}{\partial u}B=0.&\end{aligned}$$

Dans ce cas particulier, le système de Pfaff renferme une équation

$$\omega_3=du-(Adz+Bdx+Cdy)=0$$

où ne figurent que les quatre variables x, y, z, u; elle est donc de troisième classe, et le système peut être ramené à la forme canonique (IV). On a en effet, comme le prouve un calcul facile,

$$\omega'_1=dp\,\delta x-dx\,\delta p+dq\,\delta y-dy\,\delta q,\qquad \omega'_3=H(dx\,\delta y-dy\,\delta x)\qquad (\text{mod}\ \omega_1,\omega_2),$$

et l'équation $\Delta(\lambda,\mu)=0$ du n° **3** se réduit à $\lambda^4=0$. Dans ce cas, les intégrales qui satisfont à la condition $H=0$ sont des *solutions singulières*, puisque tous leurs éléments annulent ω'_3. Ces solutions dépendent d'une seule fonction arbitraire d'une variable; mais l'intégrale générale du système de Pfaff est représentée par quatre relations dont deux ne renferment que les variables x, y, z. On satisfait en effet à la première relation en posant

$$z=f(x),\qquad y=\varphi(x),\qquad p=f'(x)-q\varphi'(x),$$

x et q étant les deux variables indépendantes, f et φ deux fonctions arbitraires, et u est déterminée par l'équation différentielle

$$du = [A(x, \varphi, f, u) f'(x) + B(x, \varphi, f, u) + C(x, \varphi, f, u)\varphi'] dx.$$

[29] La recherche des transformations de Bäcklund B_2 ou B_3 permettant de passer d'une équation donnée E′ de Monge-Ampère à une autre équation du second ordre peut donc, d'après ce qui précède, se décomposer en deux problèmes distincts :

1° *L'équation* E′ *étant connue, trouver tous les systèmes de Pfaff de deux équations à six variables dont* E′ *est une résolvante de seconde espèce.*

2° *Trouver toutes les résolvantes de seconde espèce d'un système de Pfaff donné* S *de deux équations à six variables.*

On a vu plus haut comment le dernier problème se rattache à une question relative aux systèmes d'équations différentielles qui définissent une famille d'éléments singuliers (n° **25**). Le premier problème peut lui-même se rattacher à une question concernant les éléments singuliers. Supposons, pour fixer les idées, que E′ renferme un terme en $rt - s^2$, et soient

$$\omega_1 = dz - p\,dx - q\,dy = 0, \quad \omega_2 = dp - a\,dx - b\,dy = 0, \quad \omega_3 = dq - \alpha\,dx - \beta\,dy = 0,$$

les équations différentielles d'un des systèmes de caractéristiques de E′, a, b, α, β étant des fonctions de x, y, z, p, q. Pour que E′ soit une résolvante de seconde espèce du système S composé de deux équations

$$\omega_1 = 0, \qquad \omega_4 = du - (X\,dx + Y\,dy + P\,dp + Q\,dp) = 0,$$

il suffira que les quatre équations $\omega_i = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ définissent une famille d'éléments singuliers du système de Pfaff S. En développant les calculs, on trouve bien les conditions obtenues plus haut (n° **21**).

On peut aussi ramener au premier problème la solution de la question suivante :

3° *Étant données deux équations aux dérivées partielles du second ordre* E, E′, *reconnaître si on peut passer de l'une à l'autre par une transformation de Bäcklund* B_2 *ou* B_3.

Supposons que l'on sache résoudre le problème I pour ces deux équations, et soient Σ, Σ' les deux ensembles de systèmes de Pfaff qui admettent respectivement E ou E′ pour résolvante de première ou de seconde espèce. Il faudra, pour que l'on puisse passer de E à E′ par une transformation B_2 ou B_3, que l'on puisse trouver dans Σ un système S équivalent à un système S′ de Σ'.

[**30**] Laissant de côté ces problèmes généraux, je me bornerai à quelques remarques sur les systèmes de la forme (58)

$$(58)\quad \omega_1 = dz - p\,dx - q\,dy = 0, \qquad \omega_2 = du - f(x, y, z, p, u)\,dx - \varphi(x, y, z, q, u)\,dy = 0,$$

à laquelle on peut ramener tout système de Pfaff admettant une résolvante de seconde espèce où ne figure que la dérivée du second ordre s. Pour avoir les éléments singuliers de ces systèmes, appliquons la méthode générale du n° **3**; on a ici

$$\left.\begin{aligned} \omega'_1 &= dp\,\delta x - dx\,\delta p + dq\,\delta y - dy\,\delta q, \\ \omega'_2 &= \mathrm{H}(dy\,\delta x - dx\,\delta y) + \frac{\partial f}{\partial p}(dp\,\delta x - dx\,\delta p) + \frac{\partial \varphi}{\partial q}(dq\,\delta y - dy\,\delta q) \end{aligned}\right\} \bmod (\omega_1, \omega_2)$$

en posant

$$\mathrm{H} = \frac{df}{dy} - \frac{d\varphi}{dx} + \frac{\partial f}{\partial u}\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial u} f.$$

Pour que l'on ait identiquement $\lambda\omega'_1 + \mu\omega'_2 = 0$, quels que soient δx, δy, δp, δq, il faut que λ, μ, dx, dy, dp, dq vérifient les quatre conditions

$$\begin{gathered} \mu\mathrm{H}\,dy + \left(\lambda + \mu\frac{\partial f}{\partial p}\right)dp = 0, \\ -\mu\mathrm{H}\,dx + \left(\lambda + \mu\frac{\partial \varphi}{\partial q}\right)dq = 0, \\ \left(\lambda + \mu\frac{\partial f}{\partial p}\right)dx = 0, \\ \left(\lambda + \mu\frac{\partial \varphi}{\partial q}\right)dy = 0; \end{gathered}$$

l'équation $\Delta(\lambda, \mu) = 0$ est, dans ce cas,

$$\left(\lambda + \mu\frac{\partial f}{\partial p}\right)^2\left(\lambda + \mu\frac{\partial \varphi}{\partial q}\right)^2 = 0.$$

Les deux équations singulières du système sont donc

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \omega_2 - \frac{\partial f}{\partial p}\omega_1 = du - f\,dx - \varphi\,dy - \frac{\partial f}{\partial p}(dz - p\,dx - q\,dy) = 0, \\ \Omega_2 &= \omega_2 - \frac{\partial f}{\partial q}\omega_1 = du - f\,dx - \varphi\,dy - \frac{\partial f}{\partial q}(dz - p\,dx - q\,dy) = 0, \end{aligned}$$

et les éléments singuliers correspondants sont définis respectivement par les deux systèmes d'équations

$$dy = 0, \qquad dz = p\,dx, \qquad du = f\,dx, \qquad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial p}\right) dq = \mathrm{H}\,dx,$$

$$dx = 0, \qquad dz = q\,dy, \qquad du = \varphi\,dy, \qquad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial p}\right) dp = \mathrm{H}\,dy.$$

Nous laissons de côté le cas singulier dont il a été question au numéro précédent, où l'on a

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\partial\varphi}{\partial q}.$$

Pour qu'un système de Pfaff S *de deux équations à six variables puisse être ramené à la forme* (58), *il faut et il suffit que ce système possède deux familles distinctes d'éléments singuliers, et que les équations différentielles de chacune de ces familles admettent une combinaison intégrable.*

La condition est évidemment nécessaire. Elle est aussi suffisante. Soient en effet $df_1 = 0$, $df_2 = 0$ les combinaisons intégrables relatives aux deux familles d'éléments singuliers. D'après une proposition établie plus haut (n° **16**), le système des quatre équations

$$\omega_1 = 0, \qquad \omega_2 = 0, \qquad df_1 = 0, \qquad df_2 = 0$$

est complètement intégrable. Soient $d\mathrm{F}_1 = 0$, $d\mathrm{F}_2 = 0$ deux autres combinaisons intégrables de ce système, distinctes de $df_1 = 0$, $df_2 = 0$; le système proposé $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$ peut alors être écrit sous la forme

$$\mathrm{S}\quad \begin{cases} d\mathrm{F}_1 + \mathrm{A}_1\,df_1 + \mathrm{B}_1\,df_2 = 0, \\ d\mathrm{F}_2 + \mathrm{A}_2\,df_1 + \mathrm{B}_2\,df_2 = 0, \end{cases}$$

d'une infinité de manières, car on peut remplacer F_1 et F_2 par deux fonctions arbitraires de $f_1, f_2, \mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2$, pourvu qu'elles soient distinctes quand on les considère comme fonctions de $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2$. Nous pouvons donc supposer qu'aucune des équations précédentes n'est une équation singulière pour le système S. Cela posé, les cinq fonctions $f_1, f_2, \mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1, \mathrm{F}_1$ doivent être indépendantes, car, dans le cas contraire, la première équation serait de classe inférieure à cinq et serait par conséquent une équation singulière du système S. Posons

$$f_1 = x, \qquad f_2 = y, \qquad \mathrm{F}_1 = z, \qquad \mathrm{A}_1 = -p, \qquad \mathrm{B}_1 = -q;$$

la première équation devient

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

La fonction F_2 doit à son tour être indépendante de x, y, z, p, q, car autrement l'équation précédente serait une équation singulière du système. On peut donc poser $F_2 = u$, et le système de Pfaff prend la forme

$$\omega_1 = dz - p\,dx - q\,dy = 0, \qquad \omega_2 = du - f\,dx - \varphi\,dy = 0.$$

Il faut en outre (n° **15**) que ce système se réduise à un système de quatrième classe, quand on y fait $y = C$, $dy = 0$, c'est-à-dire que le système

$$dz - p\,dx = 0, \qquad du - f\,dx = 0$$

soit de quatrième classe, quand on y regarde y comme un paramètre. Il faut évidemment pour cela que f ne dépende que de x, y, z, p, u et soit indépendant de q. On verrait de même que φ doit être indépendant de p, et le système est bien de la forme (58).

Pour avoir les résolvantes de première espèce de ce système (58), il suffit de ramener les deux équations singulières $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ à une forme canonique. Ce problème se simplifie, car si l'on fait par exemple $y = C$, $dy = 0$ dans l'équation $\Omega_1 = 0$, l'équation obtenue

$$du - f\,dx - \frac{\partial f}{\partial p}(dz - p\,dx),$$

ne renfermant que les quatre variables x, z, p, u et leurs différentielles, est de troisième classe. Si l'on réduit cette équation à une forme canonique, l'équation Ω_1 elle-même sera ramenée à une forme canonique

$$\Omega_1 = dZ - P\,dX - Q\,dy = 0.$$

Comme $dy = 0$ est une combinaison intégrable des équations du système correspondant d'éléments singuliers, le système de Pfaff peut être complété par une équation

$$dP + u\,dX + F\,dy = 0,$$

et la résolvante E_1 ne renferme pas la dérivée du second ordre $\dfrac{\partial^2 Z}{\partial y^2}$.

Si $f(x, y, z, p, u)$ est une fonction linéaire de p, l'équation

$$du - \frac{\partial f}{\partial p}\,dz = 0$$

obtenue en faisant $x = C$, $y = C'$, $dx = dy = 0$ dans $\Omega_1 = 0$ est de première classe, car elle ne renferme que u, z, du, dz. Si on la réduit à une forme canonique, l'équation $\Omega_1 = 0$ sera elle-même réduite à une forme canonique

$$\Omega_1 = dZ - P dx - Q dy = 0. \tag{68}$$

On peut encore compléter le système de Pfaff en ajoutant une équation de la forme

$$dP + u dx + F dy = 0.$$

La fonction F ne doit pas dépendre de u, car le système

$$dZ - Q dy = 0, \qquad dP + F dy = 0$$

doit être de quatrième classe quand on y regarde x comme un paramètre. La résolvante E_1 est donc de la forme

$$(E_1) \qquad \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} + F\left(x, y, Z, \frac{\partial Z}{\partial x}, \frac{\partial Z}{\partial y}\right) = 0.$$

Inversement, pour que l'équation $\Omega_1 = 0$ puisse être ramenée à une forme canonique (68), il est nécessaire que cette équation se change en une équation de première classe quand on y fait $x = C$, $y = C'$, $dx = dy = 0$, ce qui exige que $\frac{\partial f}{\partial p}$ ne dépende pas de p, c'est-à-dire que f soit une fonction linéaire de p. Si $\varphi(x, y, z, q, u)$ est aussi une fonction linéaire de q, la seconde résolvante de première espèce est aussi de la forme

$$(E_2) \qquad \frac{\partial^2 Z_1}{\partial x \partial y} + F_1\left(x, y, Z_1, \frac{\partial Z_1}{\partial x}, \frac{\partial Z_1}{\partial y}\right) = 0,$$

les variables x et y étant les mêmes pour les deux équations.

On a vu plus haut (n° **19**) que toute équation de la forme

$$s = f(x, y, z, p, q) \tag{69}$$

est, de deux façons différentes, une résolvante de première espèce pour un système de Pfaff, dont les deux familles d'éléments singuliers admettent chacune une combinaison intégrable, mais ce ne sont pas les systèmes de Pfaff les plus généraux de cette espèce. Si l'on prend un de ces systèmes, la seconde résolvante de première espèce du système ne sera pas en général de la forme (69).

On démontrera facilement, en se reportant à l'expression de la seconde équation singulière (n° **19**), que f doit être linéaire par rapport à p ou à q. Si f est bilinéaire en p et en q, on peut la faire correspondre, de deux façons différentes, par une transformation B_1 à deux équations de la même forme (60), mais qui ne sont plus en général bilinéaires en p et q. Par exemple, l'équation $s = \sin z$ est une résolvante de première espèce pour le système de Pfaff

$$dz = pdx + qdy, \qquad dp = udx + \sin z dy;$$

la seconde équation est précisément une équation singulière, et si l'on pose

$$Z = p, \qquad P = u, \qquad Q = \sin z,$$

le système de Pfaff devient

$$dZ = Pdx + Qdy, \qquad \frac{dQ}{\sqrt{1 - Q^2}} = Zdx + qdy,$$

et la seconde équation résolvante du système est

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = Z\sqrt{1 - \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2},$$

Elle est bien de la forme (60), mais n'est plus bilinéaire par rapport aux dérivées du premier ordre.

Ainsi qu'on l'a déjà remarqué, le système (58) ne change pas de forme quand on remplace z et u par deux fonctions distinctes de x, y, z, u. Si les équations différentielles des deux familles d'éléments singuliers n'admettent pas respectivement d'autres combinaisons intégrables que $dx = 0$, $dy = 0$, on obtient ainsi toutes les transformations qui ne changent pas la forme du système. D'une façon plus précise, supposons que le système (58) puisse s'écrire d'une autre façon

$$(70) \qquad \begin{cases} dZ = PdX + QdY, \\ dU = F(X, Y, Z, P, U)dX + \Phi(X, Y, Z, Q, U)dY; \end{cases}$$

par hypothèse, les équations différentielles des deux familles d'éléments singuliers n'admettent respectivement que les intégrales premières $x = C$, $y = C'$. Il faudra donc, pour que les formes (58) et (70) soient équivalentes, que X par exemple soit une fonction de x seulement, et de même que Y ne dépendeque de y. On peut donc supposer $X = x$, $Y = y$. Le système complètement intégrable

$$dx = 0, \qquad dy = 0, \qquad dz = 0, \qquad du = 0$$

devant être équivalent au système

$$dx = 0, \qquad dy = 0, \qquad dZ = 0, \qquad dU = 0;$$

il faut nécessairement que Z et U soient des fonctions de x, y, z, u.

Cette remarque permet de poser d'une façon un peu différente le problème de la recherche de certaines résolvantes de seconde espèce d'un système de la forme (58), lorsque les équations différentielles des éléments singuliers n'admettent pas d'autre combinaison intégrable que $dx = 0$, ou $dy = 0$. Une intégrale M_2 du système (58) étant représentée par les formules

$$z = \psi(x, y), \qquad u = \theta(x, y), \qquad p = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

les dérivées secondes $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ sont données par les relations

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{df}{dy} + \frac{\partial f}{\partial u}\varphi + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{d\varphi}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} f + \frac{\partial \varphi}{\partial q}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\frac{d\varphi}{dx} - \frac{df}{dy} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} f - \frac{\partial f}{\partial u}\varphi}{\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \varphi}{\partial q}} = \frac{H}{\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \varphi}{\partial q}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{[f, \varphi] + f\frac{df}{\partial p}\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \varphi\frac{\partial \varphi}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial u}}{\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \varphi}{\partial q}} = K(x, y, z, p, q, u).$$

Si le quotient $H : \left(\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \varphi}{\partial q}\right)$ est indépendant de u, z est une intégrale d'une résolvante de seconde espèce. Pour que u soit aussi une intégrale d'une résolvante de seconde espèce, il faut et il suffit que l'on puisse éliminer p, q, z entre les trois équations

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x, y, z, p, u), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi(x, y, z, q, u), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = K(x, y, z, p, q, u),$$

c'est-à-dire que l'on ait

$$(71) \qquad \frac{D(f, \varphi, K)}{D(z, p, q)} = 0.$$

Cela étant, nous pouvons, en posant $v = F(x, y, z, u)$, écrire le système de Pfaff

$$dz = pdx + qdy,$$

$$dv = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}(pdx + qdy) + \frac{\partial F}{\partial u}(fdx + \varphi dy);$$

c'est un nouveau système de même forme que le premier où f et φ sont remplacées respectivement par

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} p + \frac{\partial F}{\partial u} f, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} q + \frac{\partial F}{\partial u} \varphi.$$

En écrivant que la condition (71) est vérifiée pour le nouveau système, on est conduit à une équation aux dérivées partielles du troisième ordre à laquelle doit satisfaire la fonction $F(x, y, z, u)$ pour que l'élimination de z conduise à une résolvante de seconde espèce du système. Comme cette fonction F est indépendante de p et de q, cette équation est équivalente à un certain nombre d'équations distinctes que l'on obtiendra en égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de p et de q dans l'équation (62) développée. Pour que le système admette une résolvante de seconde espèce ne renfermant que la dérivée du second ordre $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$, il faudra que ces équations soient compatibles.

Par exemple, si f est une fonction linéaire de p et φ une fonction linéaire de q, K sera une fonction bilinéaire de p et de q, et la fonction F devra satisfaire à quatre conditions. La résolvante de seconde espèce correspondante sera elle-même bilinéaire en p, q.

Je me bornerai à ces indications, que je développerai dans un autre Mémoire.

III

[**31**] A tout système S de deux équations de Pfaff à six variables, et de classe six, correspondent deux systèmes, distincts en général, de quatre équations de Pfaff à six variables, qui définissent les deux familles d'éléments singuliers de S. Inversement, tout système Σ de quatre équations de Pfaff à six variables peut, d'une infinité de manières, être considéré comme définissant les éléments singuliers d'un système de deux équations de Pfaff à six variables.

Tout système Σ de quatre équations de Pfaff peut être, et d'une infinité de façons, ramené à la forme

$$\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \frac{dx_3}{a_3} = \frac{dx_4}{a_4} = \frac{dx_5}{a_5} = dt, \tag{63}$$

$a_1, a_2, \ldots, a_5$ étant des fonctions des six variables $x_1, \ldots, x_6$, et t désignant une variable auxiliaire introduite uniquement pour plus de symétrie dans les calculs. Il suffit de choisir les variables x_i de façon que les équations

$$x_1 = C_1, \qquad x_2 = C_2, \qquad \ldots, \qquad x_5 = C_5$$

représentent une famille de courbes intégrales du système Σ. Le problème à résoudre peut alors être formulé ainsi : *Déterminer cinq fonctions* $A_1, A_2, \ldots, A_5$ *des variables* x_i, *satisfaisant à la condition*

$$(64) \qquad \sum_{i=1}^{5} A_i a_i = 0$$

telles qu'en posant

$$(65) \qquad \omega_1 = A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + \ldots + A_5 dx_5 = 0$$

l'équation $\omega'_1 = 0$, *où l'on remplace* $dx_1, \ldots, dx_5$ *par* $a_1, \ldots, a_5$ *respectivement, se réduise à une seule relation linéaire entre les* δx_i, *en tenant compte de la condition* $\Sigma A_i \delta x_i = 0$.

Le système formé par l'équation $\omega_1 = 0$, et la nouvelle équation obtenue où l'on remplace δx_i par dx_i, est bien un système de Pfaff admettant une famille d'éléments singuliers définis par les équations (63), et l'équation $\omega_1 = 0$ est l'équation singulière correspondante.

On a

$$\omega'_1 = \sum_{i=1}^{5} \sum_{k=1}^{5} A_{ik}(dx_i \delta x_k - dx_k \delta x_i) + \sum_{1}^{5} \frac{\partial A_i}{\partial x_6}(dx_i \delta x_6 - \delta x_i dx_6)$$

où

$$A_{ik} = \frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_i},$$

la première sommation étant étendue à toutes les combinaisons deux à deux des indices i, k. En remplaçant $dx_1, \ldots, dx_5$ par $a_1 dt, \ldots, a_5 dt$ respectivement, l'équation $\omega'_1 = 0$ devient

$$(66) \qquad \left\{ B_1 \delta x_1 + \ldots + B_5 \delta x_5 \right\} dt + \left(\Sigma a_i \frac{\partial A_i}{\partial x_6} \right) \delta x_6 dt - \sum_{1}^{5} \frac{\partial A_i}{\partial x_6} \delta x_i dx_6 = 0,$$

où l'on a posé

$$(67) \qquad B_i = \sum_{k=1}^{5} A_{ik} a_k.$$

La relation (66) doit être vérifiée, quels que soient dt et dx_6, et ne doit pas renfermer δx_6. Il faut donc que les coefficients A_i vérifient la condition

$$(68) \qquad \sum_{1}^{5} \frac{\partial A_i}{\partial x_6} a_i = 0$$

et de plus que les trois équations

$$(69) \qquad \sum_1^5 B_i \delta x_i = 0, \quad \sum_1^5 \frac{\partial A_i}{\partial x_6} \delta x_i = 0, \quad \sum_1^5 A_i \delta x_i = 0$$

se réduisent à deux relations distinctes.

Supposons d'abord que l'on puisse choisir les coefficients A_i de façon que les deux dernières relations soient identiques. Il faut et il suffit pour cela que l'on ait

$$\frac{\partial \log A_1}{\partial x_6} = \frac{\partial \log A_2}{\partial x_6} = \ldots = \frac{\partial \log A_5}{\partial x_6},$$

c'est-à-dire que le rapport de deux quelconques des coefficients A_i soit indépendant de x_6. Comme on peut multiplier ces coefficients par un même facteur sans changer l'équation $\omega_1 = 0$, on peut donc supposer ces coefficients indépendants de la variable x_6. On aura donc une solution du problème si l'on peut déterminer cinq fonctions A_i, *indépendantes de* x_6, vérifiant la relation (64)

$$A_1 a_1 + \ldots + A_5 a_5 = 0;$$

le système S correspondant est formé des deux équations

$$S \begin{cases} \omega_1 = A_1 dx_1 + \ldots + A_5 dx_5 = 0, \\ \omega_2 = B_1 dx_1 + \ldots + B_5 dx_5 = 0; \end{cases}$$

remarquons que la relation

$$\sum B_i a_i = \sum_{i,k} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \right) a_i a_k = 0$$

est vérifiée identiquement.

Pour qu'il existe une solution de cette espèce, il faut et il suffit, d'après la théorie classique, que le déterminant de Wronski, formé par les cinq fonctions a_i et leurs dérivées par rapport à x_6 jusqu'au quatrième ordre, soit nul identiquement. Si tous les mineurs du premier ordre correspondant aux éléments de la dernière ligne ne sont pas nuls identiquement, il y a un système de fonctions A_i et un seul répondant à la question, abstraction faite d'un facteur indépendant de x_6. Si tous ces mineurs sont nuls, il y a plusieurs solutions distinctes. Nous ne reviendrons pas sur cette théorie qui est exposée en détail dans tous les Cours d'Analyse, à propos des équations différentielles linéaires.

Pour qu'il existe d'autres solutions, il faudra que la première des équations (69) soit une combinaison linéaire des deux autres, c'est-à-dire que l'on ait identiquement

$$B_i = \lambda \frac{\partial A_i}{\partial x_6} + \mu A_i, \tag{70}$$

λ et μ étant deux nouvelles fonctions indéterminées, et l'on est ramené à chercher sept fonctions inconnues $A_1, \ldots, A_5, \lambda, \mu$ des six variables x_i, satisfaisant aux sept équations (64), (68) et (70). Ayant obtenu une solution de ces équations, le système de Pfaff formé des deux équations

$$S \left\{ \begin{aligned} \omega_1 &= \sum A_i dx_i = 0, \\ \omega_2 &= \sum \frac{\partial A_i}{\partial x_6} dx_i = 0 \end{aligned} \right.$$

satisfait à toutes les conditions du problème, *pourvu qu'il soit de sixième classe.*

Nous pouvons évidemment remplacer le système des deux équations (64) et (68) par le système équivalent

$$V = \sum_{i=1}^{5} A_i a_i = 0, \qquad V_1 = \sum_{i=1}^{5} A_i \frac{\partial a_i}{\partial x_6} = 0. \tag{71}$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} B_i &= \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_1} \right) a_1 + \ldots + \left(\frac{\partial A_5}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_5} \right) a_5 \\ &= - \sum_k \frac{\partial A_i}{\partial x_k} a_k + \sum_k a_k \frac{\partial A_k}{\partial x_i}; \end{aligned}$$

on a aussi

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = \sum_k A_k \frac{\partial a_k}{\partial x_i} + \sum_k a_k \frac{\partial A_k}{\partial x_i}$$

et, en tenant compte de la condition $V = 0$, on peut écrire

$$B_i = -\mathcal{A}(A_i) - \sum_k A_k \frac{\partial a_k}{\partial x_i}$$

en posant

$$\mathcal{A}(\ ) = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + a_4 \frac{\partial}{\partial x_4} + a_5 \frac{\partial}{\partial x_5}.$$

Les équations (70) peuvent donc s'écrire

$$(72) \qquad \mathcal{A}(A_i) + \lambda \frac{\partial A_i}{\partial x_6} + \mu A_i + \sum_k A_k \frac{\partial a_k}{\partial x_i} = 0.$$

$$(i = 1, 2, 3, 4, 5),$$

et le système des équations (64), (68) et (70) peut être remplacé par le système équivalent formé des équations (71) et (72). On peut encore, dans ces dernières équations, supposer $\mu = 0$. Si en effet on pose $A_i = \rho\alpha_i$, l'équation (72) devient

$$\rho\mathcal{A}(\alpha_i) + \alpha_i\mathcal{A}(\rho) + \lambda \left\{ \frac{\partial\rho}{\partial x_6}\alpha_i + \rho\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_6} \right\} + \mu\rho\alpha_i + \rho\sum_k \alpha_k \frac{\partial a_k}{\partial x_i} = 0;$$

si l'on prend pour ρ une intégrale non nulle de l'équation

$$\mathcal{A}(\rho) + \lambda \frac{\partial\rho}{\partial x_6} + \mu\rho = 0,$$

on sera conduit à une équation de même forme

$$\mathcal{A}(\alpha_i) + \lambda\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_6} + \sum_k \alpha_k \frac{\partial a_k}{\partial x_i} = 0.$$

Nous supposerons, par la suite, que l'on a fait cette transformation et nous écrirons les équations (72) sous la forme plus simple

$$(73) \qquad \mathcal{A}(A_i) + \lambda\frac{\partial A_i}{\partial x_6} + \sum_k A_k \frac{\partial a_k}{\partial x_i} = 0.$$

$$(i = 1, 2, 3, 4, 5).$$

[32] Nous allons d'abord appliquer ces généralités à quelques cas simples.

1° Si le système Σ est complètement intégrable, on peut supposer

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0, \quad a_5 = 1.$$

On doit alors avoir $A_5 = 0$, et l'équation ω_1 est de la forme

$$\omega_1 = A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3 + A_4 dx_4 = 0.$$

Si les coefficients A_1, A_2, A_3, A_4 ne dépendent pas de x_6, la seconde des équations (69) se réduit à une identité, et la première devient

$$\omega_2 = \frac{\partial A_1}{\partial x_5} dx_1 + \ldots + \frac{\partial A_4}{\partial x_5} dx_4 = 0.$$

Les deux équations $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$ forment un système de cinquième classe, et il semble que le problème proposé n'admet pas de solutions. Mais cette conclusion est en défaut, lorsque les coefficients A_1, A_2, A_3, A_4 ne dépendent pas de x_5. Le système (69) se réduit alors à l'équation $\omega_1 = 0$ qui est de troisième classe, et l'on peut prendre pour $\omega_2 = 0$ une autre équation quelconque

$$\omega_2 = B_1 dx_1 + B_2 dx_2 + B_3 dx_3 + B_4 dx_4 = 0,$$

formant avec $\omega_1 = 0$ un système de sixième classe. L'équation $\omega_1 = 0$ étant de troisième classe, on peut supposer que l'on a choisi les variables x_i de façon qu'elle soit mise sous la forme canonique

$$\omega_1 = dx_3 - x_2 dx_1 = 0;$$

les raisonnements du n° **8** prouvent que la seconde équation peut être ramenée à la forme

$$\omega_2 = dx_4 + x_5 dx_1 + x_6 dx_2 = 0.$$

Nous retrouvons bien la solution évidente *a priori*.

Si tous les coefficients A_1, A_2, A_3, A_4 ne sont pas indépendants de x_6, les équations (73) deviennent

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_5} + \lambda \frac{\partial A_i}{\partial x_6} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

et prouve que les quatre coefficients A_i sont fonctions de x_1, x_2, x_3, x_4 et de l'un d'entre eux, A_1 par exemple. Si l'on prend ce coefficient A_1 pour la variable x_5, on est ramené à l'hypothèse qui vient d'être examinée.

2° Supposons que le système Σ admette trois combinaisons intégrables distinctes $dx_1 = 0$, $dx_2 = 0$, $dx_3 = 0$; la dernière équation du système peut alors être ramenée à la forme canonique $dx_5 = x_6 dx_4$. On peut donc prendre dans ce cas

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0, \qquad a_4 = 1, \qquad a_5 = x_6,$$

Les équations (71) et (73) deviennent

$$A_4 + A_5 x_6 = 0, \qquad A_5 = 0,$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_4} + x_6 \frac{\partial A_i}{\partial x_5} + \lambda \frac{\partial A_i}{\partial x_6} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

On peut trouver une infinité de systèmes de solutions de ces équations; mais le système

$$\omega_1 = A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3 = 0,$$
$$\omega_2 = \frac{\partial A_1}{\partial x_6} dx_1 + \frac{\partial A_2}{\partial x_6} dx_2 + \frac{\partial A_3}{\partial x_6} dx_3 = 0$$

ne peut être de sixième classe, puisqu'il ne renferme que trois différentielles. Pour obtenir une véritable solution du problème, on doit donc supposer que A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 sont des fonctions indépendantes de x_6 satisfaisant aux relations

$$A_4 + A_5 x_6 = 0, \qquad A_5 = 0,$$

d'où l'on tire $A_4 = A_5 = 0$. Le système cherché est alors

$$\omega_1' = A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3 = 0,$$
$$\omega_2 = \frac{\partial A_1}{\partial x_5} dx_1 + \frac{\partial A_2}{\partial x_5} dx_2 + \frac{\partial A_3}{\partial x_5} dx_3 = 0;$$

pour la même raison que tout à l'heure, ce système ne peut être de sixième classe. Il ne reste donc qu'une hypothèse possible; A_1, A_2, A_3 doivent être indépendants de x_5 et de x_6, et l'équation $\omega_1 = 0$ est de troisième classe. Il suffira de lui adjoindre une autre équation

$$\omega_2 = B_1 dx_1 + B_2 dx_2 + B_3 dx_3 + B_5(dx_5 - x_6 dx_4) = 0$$

formant avec $\omega_1 = 0$ un système de sixième classe. On retrouve en poursuivant les résultats du n° **8**.

3° Supposons que le système Σ admette deux combinaisons intégrables distinctes $dx_1 = 0$, $dx_2 = 0$; les deux autres équations du système Σ forment un système de quatrième classe quand on y fait $x_1 = C$, $x_2 = C'$, $dx_1 = 0$, $dx_2 = 0$. On peut donc le ramener à la forme canonique

$$dx_4 = x_5 dx_3, \qquad dx_5 = x_6 dx_3,$$

et prendre pour les a_i les valeurs $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = 1$, $a_4 = x_5$, $a_5 = x_6$. Les équations (71) donnent

$$A_5 = 0, \qquad V = A_3 + A_4 x_5 = 0,$$

tandis que les équations (73) deviennent

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_3} + x_5 \frac{\partial A_i}{\partial x_4} + x_6 \frac{\partial A_i}{\partial x_5} + \lambda \frac{\partial A_i}{\partial x_6} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

On en déduit

$$\frac{\partial V}{\partial x_3} + x_5 \frac{\partial V}{\partial x_4} + x_6 \frac{\partial V}{\partial x_5} + \lambda \frac{\partial V}{\partial x_6} = x_6 A_4 = 0,$$

et par suite $A_4 = 0$, $A_3 = 0$.

On doit donc supposer, pour avoir une véritable solution du problème, que les coefficients A_i sont indépendants de x_6. Ces coefficients doivent vérifier les deux relations

$$A_3 + A_4 x_5 + A_5 x_6 = 0, \qquad A_5 = 0.$$

On peut évidemment prendre $A_4 = 1$, $A_3 = x_5$, et l'équation ω_1 prend la forme

$$\omega_1 = A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + x_5 dx_3 - dx_4 = 0,$$

A_1 et A_2 étant des fonctions arbitraires de x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

La seconde équation du système est alors

$$\omega_2 = \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} + \frac{\partial A_1}{\partial x_4} x_5 + \frac{\partial A_1}{\partial x_5} x_6\right) dx_1 + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_3} + x_5 \frac{\partial A_2}{\partial x_4} + x_6 \frac{\partial A_2}{\partial x_5}\right) dx_2$$
$$+ x_6 dx_3 - dx_5 = 0;$$

la solution obtenue dépend, comme dans les cas précédents, de deux fonctions arbitraires de cinq variables.

[**33**] Après ces cas particuliers, où la solution est bien facile, proposons-nous d'étudier, d'une manière générale, le système des équations (71) et (73) où les inconnues sont A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 et λ. Nous chercherons pour cela à quelles conditions doit satisfaire la fonction λ pour que les équations (73) admettent un système d'intégrales $A_i = F_i(x_1, x_2, \ldots, x_6)$ vérifiant les deux relations

$$V = \sum_i A_i a_i = 0, \qquad V_1 = \sum_i A_i \frac{\partial a_i}{\partial x_6} = 0.$$

On a

$$\mathcal{A}(V) = \Sigma A_i \mathcal{A}(a_i) + \Sigma a_i \mathcal{A}(A_i),$$
$$\frac{\partial V}{\partial x_6} = \Sigma A_i \frac{\partial a_i}{\partial x_6} + \Sigma a_i \frac{\partial A_i}{\partial x_6},$$

et par suite

$$\mathcal{A}(V) + \lambda \frac{\partial V}{\partial x_6} = \Sigma a_i \left\{ \mathcal{A}(A_i) + \lambda \frac{\partial A_i}{\partial x_6} \right\} + \Sigma A_i \left\{ \mathcal{A}(a_i) + \lambda \frac{\partial a_i}{\partial x_6} \right\}.$$

Mais $\Sigma a_i \left[\mathcal{A}(\mathrm{A}_i) + \lambda \frac{\partial \mathrm{A}_i}{\partial x_6}\right]$ est égal, d'après les équations (73) elles-mêmes, à

$$-\sum_i a_i \sum_k \mathrm{A}_k \frac{\partial a_k}{\partial x_i} = -\sum_k \mathrm{A}_k \sum_i a_i \frac{\partial a_k}{\partial x_i} = -\sum_k \mathrm{A}_k \mathcal{A}(a_k)$$

et la nouvelle équation s'écrit

$$\mathcal{A}(\mathrm{V}) + \lambda \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_6} = \lambda \mathrm{V}_1, \tag{74}$$

de sorte que $\mathrm{V}_1 = 0$ est une conséquence des équations (73) et de $\mathrm{V} = 0$ si λ n'est pas nul.

D'une façon générale, soient $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_5, \lambda$ un système de solutions des équations (71) et (73) et P une forme linéaire à coefficients quelconques

$$\mathrm{P} = \rho_1 \mathrm{A}_1 + \rho_2 \mathrm{A}_2 + \ldots + \rho_5 \mathrm{A}_5;$$

on a

$$\mathcal{A}(\mathrm{P}) + \lambda \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x_6} = \sum_i \rho_i \left\{ \mathcal{A}(\mathrm{A}_i) + \lambda \frac{\partial \mathrm{A}_i}{\partial x_6} \right\} + \sum \mathrm{A}_i \left\{ \mathcal{A}(\rho_i) + \lambda \frac{\partial \rho_i}{\partial x_6} \right\}.$$

En remplaçant dans le second membre $\mathcal{A}(\mathrm{A}_i) + \lambda \frac{\partial \mathrm{A}_i}{\partial x_6}$ par son expression tirée des formules (73), ce second membre se change en une nouvelle forme linéaire par rapport aux A_i

$$\mathcal{A}(\mathrm{P}) + \lambda \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x_6} = \sigma_1 \mathrm{A}_1 + \sigma_2 \mathrm{A}_2 + \ldots + \sigma_5 \mathrm{A}_5, \tag{75}$$

où l'on a

$$\sigma_i = \mathcal{A}(\rho_i) + \lambda \frac{\partial \rho_i}{\partial x_6} - \sum_k \rho_k \frac{\partial a_i}{\partial x_k}. \tag{76}$$

Cela étant, soient $\mathrm{A}_i = \mathrm{F}_i(x_1, \ldots, x_6)$ un système de solutions des équations (73) satisfaisant à la condition $\mathrm{V}_1 = 0$; ces fonctions F_i satisfont aussi à l'équation $\mathcal{A}(\mathrm{V}_1) + \lambda \frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial x_6} = 0$, et par suite annulent la forme linéaire V_2 que l'on déduit de V_1 par l'opération précédente

$$\mathrm{V}_2 = \sum_i \mathrm{A}_i \left\{ \mathcal{A}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_6}\right) + \lambda \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_6^2} - \sum_k \frac{\partial a_i}{\partial x_6} \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \right\} = \mathcal{A}(\mathrm{V}_1) + \lambda \frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial x_6}. \tag{77}$$

De l'équation homogène $V_2 = 0$ on déduira de même une nouvelle équation homogène $V_3 = 0$, où

$$(78) \qquad V_3 = \mathcal{A}(V_2) + \lambda \frac{\partial V_2}{\partial x_6} = 0;$$

enfin de $V_3 = 0$ on déduira, par l'application du même procédé, une autre équation homogène

$$(79) \qquad V_4 = \mathcal{A}(V_3) + \lambda \frac{\partial V_3}{\partial x_9} = 0.$$

Remarquons que les coefficients de V_2 renferment le paramètre λ, les coefficients de V_3 dépendent de λ et de ses dérivées partielles du premier ordre, tandis que les coefficients de V_4 dépendent de λ et de ses dérivées partielles jusqu'au second ordre.

Tout système d'intégrales $A_i = F_i(x_1, \ldots, x_6)$ des équations (73) satisfaisant aux deux conditions $V = V_1 = 0$ annule aussi les trois formes homogènes V_2, V_3, V_4. Comme ces fonctions ne sont pas toutes nulles, la fonction inconnue λ doit donc être une intégrale de l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$(80) \qquad D(\lambda) = 0$$

obtenue en égalant à zéro le déterminant de ces cinq formes linéaires.

Réciproquement, *à toute intégrale* λ *de l'équation* $D(\lambda) = 0$ *correspond au moins un système de solutions des équations* (71) *et* (73).

Supposons d'abord que cette intégrale $\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_6)$ n'annule pas tous les mineurs du premier ordre de $D(\lambda)$ correspondant aux éléments de la dernière ligne. Alors les quatre équations

$$(81) \qquad V = 0, \qquad V_1 = 0, \qquad V_2 = 0, \qquad V_3 = 0$$

sont linéairement distinctes, et la forme V_4 est une combinaison linéaire de V, V_1, V_2, V_3, de sorte que l'on a identiquement

$$(82) \qquad V_4 = hV + h_1 V_1 + h_2 V_2 + h_3 V_3,$$

quand on remplace λ par l'intégrale considérée de $D(\lambda) = 0$.

Les quatre équations (81) déterminent les rapports de quatre des inconnues A_i à la cinquième. Soient

$$(83) \qquad A_1 = \Phi_1(x_1, \ldots, x_6), \qquad \ldots, \qquad A_5 = \Phi_5(x_1, \ldots, x_6)$$

un système de solutions non toutes nulles de ces équations, l'une des fonctions Φ_i

pouvant être prise arbitrairement. *Il suffit de multiplier ces fonctions Φ_i par un même facteur pour avoir un système de solutions des équations* (73).

En effet, soient $x_1^0, \ldots, x_6^0$ un système de valeurs dans le voisinage duquel les fonctions a_i, λ, Φ_i, h_i sont holomorphes, le coefficient a_1 par exemple n'étant pas nul pour ce système de valeurs. Les fonctions Φ_i se réduisent pour $x_1 = x_1^0$ à cinq fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_5$ des variables $x_2, \ldots, x_6$, qui sont holomorphes dans le domaine du point $x_2^0, \ldots, x_6^0$, et les équations (73) admettent un système d'intégrales

$$A_1 = F_1(x_1, \ldots, x_6), \qquad \ldots, \qquad A_5 = F_5(x_1, \ldots, x_6),$$

holomorphes dans le domaine du point $(x_1^0, \ldots, x_6^0)$ et se réduisant à $\varphi_1, \ldots, \varphi_5$ respectivement pour $x_1 = x_1^0$. Soient U, U_1, U_2, U_3 les fonctions obtenues en remplaçant $A_1, \ldots, A_5$ par $F_1, \ldots, F_5$ respectivement dans les formes linéaires V, $V_1, \ldots, V_4$; d'après les conditions initiales, ces fonctions U, $U_1, \ldots, U_3$ sont nulles pour $x_1 = x_1^0$. D'autre part, on a, d'après la façon même dont les formes V_2, V_3, V_4 ont été définies, et l'identité (82),

$$(84)\qquad \begin{cases} \mathcal{A}(U) + \lambda \dfrac{\partial U}{\partial x_6} = \lambda U_1, \\ \mathcal{A}(U_1) + \lambda \dfrac{\partial U_1}{\partial x_6} = U_2, \\ \mathcal{A}(U_2) + \lambda \dfrac{\partial U_2}{\partial x_6} = U_3, \\ \mathcal{A}(U_3) + \lambda \dfrac{\partial U_3}{\partial x_6} = hU + h_1 U_1 + h_2 U_2 + h_3 U_3. \end{cases}$$

Or ce système (84) n'admet pas d'autres intégrales holomorphes s'annulant pour $x_1 = x_1^0$ que $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$, $U_4 = 0$. Les cinq fonctions F_i satisfont donc aux relations (82), et par suite ne diffèrent des fonctions Φ_i que par un même facteur ρ. On peut donc prendre pour l'équation singulière $\omega_1 = 0$ du système S cherché

$$\omega_1 = \Phi_1 dx_1 + \Phi_2 dx_2 + \ldots + \Phi_5 dx_5 = 0$$

et pour la seconde équation du système

$$\omega_2 = \sum_1^5 \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_6} dx_i = 0;$$

ce système fournira une solution du problème, pourvu qu'il soit de sixième classe.

Supposons en second lieu que, pour une intégrale λ de l'équation $D(\lambda) = 0$, les quatre équations (81) ne soient pas linéairement distinctes, mais que les trois premières le soient, de telle sorte que l'on ait identiquement

$$(82') \qquad V_3 = kV + k_1 V_1 + k_2 V_2.$$

Choisissons encore un système de valeurs $(x_1^0, \ldots, x_6^0)$ satisfaisant aux mêmes conditions que tout à l'heure, et soient $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_5$ cinq fonctions holomorphes des variables $x_2, \ldots, x_6$, satisfaisant aux relations

$$V = 0, \qquad V_1 = 0, \qquad V_2 = 0,$$

où l'on aurait remplacé x_1 par x_1^0; deux de ces fonctions peuvent être choisies arbitrairement. Les équations (73) admettent encore un système de solutions $A_i = F_i$, holomorphes dans le domaine du point $(x_1^0, \ldots, x_6^0)$ et se réduisant à $\varphi_1, \ldots, \varphi_5$ respectivement pour $x_1 = x_1^0$. Les fonctions U, U_1, U_2, obtenues en remplaçant $A_1, \ldots, A_5$ par ces intégrales $F_1, \ldots, F_5$ dans V, V_1, V_2 satisfont au système d'équations

$$(84') \qquad \begin{cases} \mathcal{A}(U) + \lambda \dfrac{\partial U}{\partial x_6} = \lambda U_1, \\ \mathcal{A}(U_1) + \lambda \dfrac{\partial U_1}{\partial x_6} = U_2, \\ \mathcal{A}(U_2) + \lambda \dfrac{\partial U_2}{\partial x_6} = U_3 = kU + k_1 U_1 + k_2 U_2, \end{cases}$$

et sont nulles pour $x_1 = x_1^0$. Elles sont donc nulles identiquement, et les intégrales $A_i = F_i$ du système (73) déterminées par les conditions initiales précédentes annulent les formes linéaires V et V_1. On obtient donc de cette façon un système d'intégrales des équations (71) et (73) dépendant de deux fonctions arbitraires de cinq variables. On en déduira, comme dans le premier cas, une solution du problème proposé dépendant d'une fonction arbitraire de cinq variables, avec la même restriction relative à la classe du système de Pfaff obtenu.

On verra de même que si une intégrale λ de $D(\lambda) = 0$ est telle que les trois équations $V = 0$, $V_1 = 0$, $V_2 = 0$ ne soient pas linéairement distinctes, et si les deux premières sont distinctes, à cette intégrale correspondent une infinité de solutions des équations (71) et (73) dépendant de trois fonctions arbitraires de cinq variables, et par suite une infinité de solutions du problème proposé, dépendant de deux fonctions arbitraires de cinq variables.

Les deux formes $V = 0$, $V_1 = 0$ sont linéairement distinctes, à moins que l'on n'ait

$$\frac{\partial \log a_1}{\partial x_6} = \frac{\partial \log a_2}{\partial x_6} = \ldots = \frac{\partial \log a_5}{\partial x_6};$$

C'est le cas traité au n° **32**, où le système Σ est complètement intégrable. Remarquons que le déterminant $D(\lambda)$ est alors identiquement nul, et il en est de même dans les autres cas particuliers examinés au précédent paragraphe.

[**34**] L'inconnue auxiliaire λ a une signification très simple, qui explique bien le rôle important de cette fonction dans le problème. Nous pouvons en effet poser la question dont il s'agit d'une façon un peu différente, en cherchant à déterminer une équation de Pfaff

$$\omega_1 = A_1 dx + \ldots + A_5 dx_5 = 0$$

dont les éléments caractéristiques soient définis par un système d'équations

$$\frac{dx_1}{a_1} = \ldots = \frac{dx_5}{a_5} = \frac{dx_6}{\lambda}, \tag{85}$$

les inconnues étant A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, λ. On a toujours

$$\omega'_1 = \sum_{i=1}^{5}\sum_{k=1}^{5} A_{ik}(dx_i\delta x_k - dx_k\delta x_i) + \sum_{i=1}^{5} \frac{\partial A_i}{\partial x_6}(dx_i\delta x_6 - dx_6\delta x_i),$$

et il faudra qu'en remplaçant, dans $\omega'_1 = 0$, $dx_1, dx_2, \ldots, dx_5, dx_6$ par $a_1, a_2, \ldots, a_5, \lambda$ respectivement, l'équation obtenue soit identique à l'équation $\omega_1 = 0$, où l'on aurait remplacé dx_i par δx_i. Après cette substitution, il vient

$$\omega'_1 = -\sum_{i=1}^{5} \delta x_i \left[\sum_{k=1}^{5} A_{ik} a_k + \lambda \frac{\partial A_i}{\partial x_6}\right] + \sum_{1}^{5} a_i \frac{\partial A_i}{\partial x_6}\delta x_6 = 0;$$

il faudra donc que l'on ait

$$\sum_i a_i \frac{\partial A_i}{\partial x_6} = 0, \qquad \sum A_i a_i = 0,$$

$$\sum_k A_{ik} a_k + \lambda \frac{\partial A_i}{\partial x_6} + \mu A_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5),$$

et nous retrouvons bien le système (71) et (72).

Il suit de là que toutes les équations $\omega_1 = 0$, qui correspondent à une même intégrale λ de $D(\lambda) = 0$, ont les mêmes éléments caractéristiques. Si les coefficients A_i sont indépendants de x_6, les éléments caractéristiques sont définis par les équations

$$dx_1 = dx_2 = dx_3 = dx_4 = dx_5 = 0,$$

et λ doit être regardé comme infini. On voit comment ce cas particulier, que nous avons examiné le premier, se rattache au cas général.

[**35**] *Exemple I.* — Soit $a_1 = x_2$, $a_2 = x_6$, $a_3 = x_6^2$, $a_4 = x_6^3$, $a_5 = 1$. Posons pour abréger

$$\mathcal{B}(f) = \mathcal{A}(f) + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_6} = x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_6 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_6^2 \frac{\partial f}{\partial x_3} + x_6^3 \frac{\partial f}{\partial x_4} + \frac{\partial f}{\partial x_5} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_6};$$

les équations (71) et (73) sont ici

$$\mathcal{B}(A_1) = 0, \quad \mathcal{B}(A_2) + A_1 = 0, \quad \mathcal{B}(A_3) = 0, \quad \mathcal{B}(A_4) = 0, \quad \mathcal{B}(A_5) = 0,$$
$$V = A_1 x_2 + A_2 x_6 + A_3 x_6^2 + A_4 x_6^3 + A_5 = 0,$$
$$V_1 = A_2 + 2A_3 x_6 + 3A_4 x_6^2 = 0.$$

De l'équation $\mathcal{B}(V_1) = 0$ on tire une nouvelle relation linéaire et homogène

$$V_2 = 2\lambda A_3 + 6\lambda A_4 x_6 - A_1 = 0;$$

la condition $\mathcal{B}(V_2) = 0$ donne de même une relation qui peut s'écrire, en tenant compte de la précédente

$$V_3 = 6A_4 \lambda^3 + \mathcal{B}(\lambda) A_1 = 0.$$

Enfin l'équation $\mathcal{B}(V_3) = 0$ donne une dernière relation

$$V_4 = 18 A_4 \lambda^2 \mathcal{B}(\lambda) + \mathcal{B}^{(2)}(\lambda) A_1 = 0, \qquad \text{où} \qquad \mathcal{B}^{(2)}(\lambda) = \mathcal{B}(\mathcal{B}(\lambda)).$$

Pour que les deux dernières équations soient compatibles, il faut que λ soit une intégrale de l'équation

$$D(\lambda) = 3\lambda^2 [\mathcal{B}(\lambda)]^2 - \lambda \mathcal{B}^{(2)}(\lambda) = 0,$$

Soit λ_1 une intégrale différente de zéro. Les équations $V = 0$, $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0$ déterminent complètement les rapports des fonctions inconnues A_i, et par suite l'équation $\omega_1 = 0$ correspondante est déterminée.

Si λ est nul, les deux équations $V_3 = 0$, $V_4 = 0$ sont vérifiées identiquement, et la précédente donne $A_1 = 0$. Il reste pour déterminer les quatre coefficients A_2, A_3, A_4, A_5 le système d'équations

$$\mathcal{A}(A_2)=0, \quad \mathcal{A}(A_3)=0, \quad \mathcal{A}(A_4)=0, \quad \mathcal{A}(A_5)=0,$$
$$v = A_2 x^6 + A_3 x_6^2 + A_4 x_6^3 + A_5 = 0,$$
$$v_1 = A_2 + 2A_3 x_6 + 3A_4 x_6^2 = 0.$$

Il suffira de prendre pour A_3 et A_4 deux intégrales de $\mathcal{A}(f) = 0$, et les deux autres inconnues A_1 et A_5 sont données par les relations $v = 0$, $v_1 = 0$.

Exemple II. — Soit $a_1 = x_2$, $a_2 = x_3$, $a_3 = x_4$, $a_4 = x_5$, $a_5 = x_6$.

Le système à intégrer est ici, en posant comme dans le premier exemple

$$\mathcal{B}(f) = x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_4 \frac{\partial f}{\partial x_3} + x_5 \frac{\partial f}{\partial x_4} + x_6 \frac{\partial f}{\partial x_5} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_6},$$
$$\mathcal{B}(A_1)=0, \quad \mathcal{B}(A_2)+A_1=0, \quad \mathcal{B}(A_3)+A_2=0, \quad \mathcal{B}(A_4)+A_3=0, \quad \mathcal{B}(A_5)+A_4=0,$$
$$V = A_1 x_2 + A_2 x_3 + A_3 x_4 + A_4 x_5 + A_5 x_6 = 0, \qquad V_1 = A_5 = 0,$$

et on en tire successivement $A_4 = 0$, $A_3 = 0$, $A_2 = 0$, $A_1 = 0$. On n'a donc de solutions du problème qu'en supposant λ infini, ou, ce qui revient au même, les coefficients A_i indépendants de x_6. On doit avoir encore $A_5 = 0$, et on prendra pour les autres coefficients des fonctions de $x_1, \ldots, x_5$ satisfaisant à la condition

$$A_1 x_2 + A_2 x_3 + A_3 x_4 + A_4 x_5 = 0.$$

On aurait un résultat tout pareil en supposant

$$a_1 = 0, \qquad a_2 = 1, \qquad a_3 = x_4, \qquad a_4 = x_5, \qquad a_5 = x_6.$$

Remarquons que, dans ces derniers cas particuliers, comme dans ceux qui ont été examinés au n° **32**, le système Σ est intégrable explicitement. Il y a cependant une différence essentielle entre les derniers exemples traités et ceux du n° **32.** Tandis que pour les premiers l'équation $D(\lambda) = 0$ se réduit à une identité, pour l'exemple II au contraire cette équation conduit à une impossibilité.

IV

[**36**] La méthode employée dans la première partie pour l'étude des éléments singuliers d'un système de deux équations de Pfaff à six variables s'étend aisément

à tout système de deux équations de Pfaff à un nombre quelconque de variables, mais le nombre des cas particuliers qui peuvent se présenter croît naturellement avec le nombre des variables. J'examinerai en quelques pages les circonstances les plus générales.

Soit S un système de deux équations de Pfaff à n variables

$$(86)\qquad \begin{cases} \omega_1 = a_1 dx_1 + \ldots + a_n dx_n = 0, \\ \omega_2 = b_1 dx_1 + \ldots + b_n dx_n = 0; \end{cases}$$

nous supposerons, pour fixer les idées, que l'on peut résoudre ces deux équations par rapport à dx_{n-1} et à dx_n. Dans les covariants bilinéaires ω'_1 et ω'_2, on peut ne laisser que les différentielles dx_i et δx_i dont l'indice est inférieur ou égal à $n-2$

$$\begin{aligned} \omega'_1 &= A_1 \delta x_1 + \ldots + A_{n-2} \delta x_{n-2}, \\ \omega'_2 &= B_1 \delta x_1 + \ldots + B_{n-2} \delta x_{n-2}, \end{aligned} \qquad (\text{mod } \omega_1, \omega_2)$$

A_i et B_i étant des formes linéaires en $dx_1, dx_2, \ldots, dx_{n-2}$

$$\begin{aligned} A_i &= \alpha_{i1} dx_1 + \ldots + \alpha_{i,n-2} dx_{n-2}, \\ B_i &= \beta_{i1} dx_1 + \ldots + \beta_{i,n-2} dx_{n-2}. \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-2)$$

Les deux covariants ω'_1 et ω'_2 étant identiquement nuls quand on y remplace δx_i par dx_i, les coefficients α_{ik} et β_{ik} vérifient les conditions

$$\alpha_{ik} + \alpha_{ki} = 0, \qquad \beta_{ik} + \beta_{ki} = 0.$$

Tout élément intégral du système S $(dx_1, dx_2, \ldots, dx_{n-2})$ est en involution avec une infinité d'autres éléments linéaires intégraux du même système $(\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_{n-2})$, satisfaisant aux deux équations $\omega'_1 = 0$, $\omega'_2 = 0$. Nous laissons de côté le cas où les covariants ω'_1 et ω'_2 seraient nuls identiquement, et aussi le cas où les deux équations précédentes se réduiraient à une seule. Le système S serait complètement intégrable dans le premier cas, et, dans le second cas, il serait de quatrième classe ou admettrait une combinaison intégrable.

Ces cas exceptionnels écartés, si nous considérons $\delta x_1, \ldots, \delta x_{n-2}$ comme les coordonnées homogènes d'un point dans un espace à $n-3$ dimensions, nous voyons que tout élément linéaire intégral du système est en involution avec une infinité d'autres éléments linéaires intégraux qui sont figurés par les points d'une variété plane à $n-5$ dimensions.

Cette conclusion est en défaut si, pour l'élément linéaire considéré $(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$, les deux équations $\omega'_1 = 0$, $\omega'_2 = 0$ ne sont pas distinctes. Il faut pour cela que l'on ait

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \ldots = \frac{A_{n-2}}{B_{n-2}},$$

en désignant par $-\frac{\mu}{\lambda}$ la valeur commune des rapports précédents, on doit avoir les $n-2$ relations

$$(87) \qquad (\lambda\alpha_{i1} + \mu\beta_{i1})dx_1 + \ldots + (\lambda\alpha_{i,n-2} + \mu\beta_{i,n-2})dx_{n-2} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-2).$$

Pour que ces équations admettent un système de solutions non toutes nulles en $dx_1, dx_2, \ldots, dx_{n-2}$, le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ doit annuler le déterminant $\Delta(\lambda, \mu)$ des coefficients de $dx_1, \ldots, dx_{n-2}$ dans ces équations. Or ce déterminant est un déterminant symétrique gauche d'ordre $n-2$, et les résultats sont tout différents suivant la parité de n.

Nous supposerons d'abord que n est un nombre pair $2p+2$. Le déterminant $\Delta(\lambda, \mu)$ est alors le carré d'une forme de degré p en λ, μ, $\Delta(\lambda, \mu) = [F(\lambda, \mu)]^2$, et le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ doit satisfaire à l'équation de degré p

$$(88) \qquad F(\lambda, \mu) = 0.$$

Soient λ, μ un système de solutions de cette équation. Les $2p$ équations (87) se réduisent alors en général à $2p-2$ équations distinctes, et les coordonnées de l'élément singulier $(dx_1, dx_2, \ldots, dx_{2p})$ dépendent de deux paramètres arbitraires d'une façon homogène et linéaire. Le point de coordonnées homogènes décrit donc une variété plane à une dimension dans l'espace à $2p-1$ dimensions. Nous voyons donc que *tout système de deux équations de Pfaff à* $2p+2$ *variables admet,* EN GÉNÉRAL, *p familles distinctes d'éléments singuliers, les éléments singuliers d'une même famille correspondant aux points d'une variété plane à une dimension.*

A toute famille d'éléments singuliers correspond une équation singulière du système de Pfaff.

Si λ, μ forment un système de solutions de l'équation (88), les éléments singuliers de la famille correspondante satisfont à la relation

$$(\lambda\omega_1 + \mu\omega_2)' = 0$$

quel que soit l'élément intégral $(\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_{n-2})$. Nous dirons encore que l'équation

$$\lambda\omega_1 + \mu\omega_2 = 0$$

est une *équation singulière* du système de Pfaff. Supposons d'abord, ce qui est évidemment le cas général, que cette équation singulière soit de classe $2p+1$, et imaginons qu'on l'ait ramenée à une forme canonique par un changement de variables

$$\Omega_1 = dy_{2p+1} - y_{p+1}dy_1 - y_{p+2}dy_2 - \ldots - y_{2p}dy_p = 0;$$

on peut compléter le système par une équation ne contenant pas dy_{2p+1},

$$\Omega_2 = B_1 dy_1 + \ldots + B_{2p}dy_{2p} + B_{2p+2}dy_{2p+2} = 0.$$

La relation

$$\Omega'_1 = dy_{p+1}\delta y_1 - dy_1 \delta y_{p+1} + \ldots + dy_{2p}\delta y_p - dy_p \delta y_{2p} = 0$$

doit être vérifiée, quel que soit l'élément intégral $(\delta y_1, \ldots, \delta y_{2p+2})$, pourvu que l'élément $(dy_1, \ldots, dy_{2p+2})$ soit un élément singulier. Ceci ne peut avoir lieu que si $B_{2p+2} = 0$. En effet, si B_{2p+2} n'était pas nul, $\delta y_1, \ldots, \delta y_{2p}$ pourraient être choisis arbitrairement, et l'équation $\Omega'_1 = 0$ ne serait vérifiée identiquement qu'en prenant

$$dy_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad dy_{2p} = 0;$$

on aurait ensuite $dy_{2p+1} = 0$, $dy_{2p} = 0$, d'après les équations même du système. Il n'y aurait donc pas d'éléments singuliers correspondant à l'équation $\Omega_1 = 0$. Au contraire, si $B_{2p} = 0$, l'équation $\Omega'_1 = 0$ sera identique à l'équation

$$B_1\delta y_1 + B_2\delta y_2 + \ldots + B_{2p}\delta y_{2p} = 0$$

pourvu que $dy_1, \ldots, dy_{2p}$ vérifient les relations

$$(89) \qquad \frac{dy_1}{-B_{p+1}} = \frac{dy_2}{-B_{p+2}} = \ldots = \frac{dy_p}{-B_{2p}} = \frac{dy_{p+1}}{B_1} = \ldots = \frac{dy_{2p}}{B_p}.$$

Ces relations, jointes à $\Omega_1 = 0$, déterminent une famille d'éléments singuliers correspondant à l'équation singulière $\Omega_1 = 0$. Nous voyons, comme dans le cas où $p = 2$, que les éléments caractéristiques de l'équation singulière $\Omega_1 = 0$ sont des éléments intégraux du système de Pfaff.

Le théorème du n° **5** peut alors être généralisé comme il suit : *Tout système de deux équations de Pfaff à* $2p+2$ *variables peut,* EN GÉNÉRAL, *être ramené de* p *façons différentes à la forme suivante*

$$(90) \qquad \begin{cases} \Omega_1 = dy_{2p+1} - y_{p+1}dy_1 - y_{p+2}dy_2 - \ldots - y_{2p}dy_p = 0, \\ \Omega_2 = B_1 dy_1 + B_2 dy_2 + \ldots + B_{2p}dy_{2p} = 0, \end{cases}$$

les coefficients B_i *étant des fonctions des* $2p+2$ *variables* $y_1, y_2, \ldots, y_{2p+2}$.

On peut encore prendre un des coefficients B_i égal à un, et un autre égal à y_{2p+2}, de sorte qu'il ne reste dans la forme réduite que $2p-2$ fonctions arbitraires, comme on pouvait le prévoir *a priori*.

Cet énoncé ne s'applique naturellement qu'aux circonstances les plus générales, c'est-à-dire au cas où les coefficients du système ne satisfont à aucune condition d'égalité particulière.

On peut obtenir directement l'équation (88) qui détermine les p familles d'éléments singuliers, en conservant les équations du système de Pfaff sous la forme générale (86). Le covariant bilinéaire de $\lambda\omega_1 + \mu\omega_2$ a alors pour expression

$$(\lambda\omega_1 + \mu\omega_2)' = \sum_i \sum_k \alpha_{ik} dx_i \delta x_k,$$

où

$$\alpha_{ik} = \lambda a_{ik} + \mu b_{ik} + a_i \frac{\partial\lambda}{\partial x_k} - a_k \frac{\partial\lambda}{\partial x_i} + b_i \frac{\partial\mu}{\partial x_k} - b_k \frac{\partial\mu}{\partial x_i}.$$

Si l'élément intégral $(dx_1, \ldots, dx_n)$ est tel que l'on ait $(\lambda\omega_1 + \mu\omega_2)' = 0$, quel que soit le second élément intégral $(\delta x_1, \ldots, \delta x_n)$, on doit avoir identiquement, quels que soient les δx_i,

$$(\lambda\omega_1 + \mu\omega_2)' + u \sum_i a_i \delta x_i + v \sum b_i \delta x_i = 0,$$

u et v étant deux coefficients indéterminés. Par suite, les coordonnées dx_i d'un élément singulier et les paramètres u et v doivent vérifier les relations

$$\begin{gathered}
\alpha_{1i} dx_1 + \ldots + \alpha_{ni} dx_n + u a_i + \mu b_i = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \\
a_1 dx_1 + \ldots + a_n dx_n = 0, \\
b_1 dx_1 + \ldots + b_n dx_n = 0.
\end{gathered}$$

Le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix}
0 & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} & a_1 & b_1 \\
\alpha_{21} & 0 & \ldots & \alpha_{2n} & a_2 & b_2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & 0 & a_n & b_n \\
a_1 & a_1 & \ldots & a_n & 0 & 0 \\
b_1 & b_2 & \ldots & b_n & 0 & 0
\end{vmatrix}$$

doit donc être nul, et l'on démontre, comme au n° **5**, par quelques combinaisons de lignes et de colonnes, que cette condition peut s'écrire

$$(91)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} 0, & \lambda a_{12}+\mu b_{12} & \dots\dots & \lambda a_{1n}+\mu b_{1n}, & a_1, & b_1 \\ \lambda a_{21}+\mu b_{21}, & 0, & \dots\dots & \lambda a_{2n}+\mu b_{2n}, & a_2, & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{n1}+\mu b_{n1}, & \lambda a_{n2}+\mu b_{n2}, & \dots\dots & 0, & a_n, & b_n \\ a_1, & a_2, & \dots\dots & a_n, & 0, & 0 \\ b_1, & b_2, & \dots\dots & b_n, & 0, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

[37] Pour traiter complètement le problème (¹), comme on l'a fait lorsque $n=6$, il resterait à examiner tous les cas particuliers qui peuvent se présenter. Pour une famille d'éléments singuliers, il y a lieu de considérer trois nombres entiers : 1° le degré de multiplicité de la racine de l'équation (88) ou (91) qui fournit cette famille d'éléments singuliers; 2° la classe de l'équation singulière correspondante; 3° le nombre de dimensions de cette multiplicité d'éléments singuliers. Je me bornerai à quelques indications.

Remarquons que, si une équation $\lambda\omega_1+\mu\omega_2=0$ du système est de classe inférieure à $2p+1$, elle est certainement une équation singulière du système. Soit en effet $\Omega_1=0$ une équation du système de classe $2p-2q+1$ $(q>0)$ que nous supposerons mise sous forme canonique

$$(92)\qquad \Omega_1 = dy_{2p-2q+1}-(y_{p+1}dy_1+\dots+y_{2p-q}dy_{p-q})=0.$$

On a

$$\Omega'_1 = dy_{p+1}\delta y_1 - dy_1\delta y_{p+1}+\dots+dy_{2p-q}\delta y_{p-q}-dy_{p-q}\delta y_{2p-q},$$

et tous les éléments linéaires intégraux définis par les $2p-2q+2=n-2q$ relations

$$(93)\quad dy_1=0,\ dy_2=0,\ \dots,\ dy_{p-q}=0,\ dy_{p+1}=0,\ \dots,\ dy_{2p-q}=0,\ \Omega_1=0,\ \Omega_2=0$$

sont des éléments singuliers; l'équation $\Omega_1=0$ est donc une équation singulière du système. *Il y a donc au plus, dans le système* S, *p équations de classe inférieure à* $n-1$.

(¹) Je laisse de côté le cas où l'équation $F(\lambda,\mu)=0$ serait vérifiée identiquement. Le système est alors de classe inférieure à $2p+2$, et la réciproque est évidente.

Pour avoir les équations qui déterminent les éléments singuliers correspondant à l'équation $\Omega_1 = 0$, nous avons deux cas à distinguer :

1° Nous pouvons toujours supposer que la seconde équation du système $\Omega_1 = 0$ ne contient pas $dy_{2p-2q+1}$. Si cette équation contient quelques-unes des différentielles

$$dy_{p-q+1}, \ldots, dy_p, dy_{2p-q} + 1, \ldots, dy_{2p-2q}, dy_{2p-2q+2}, \ldots, dy_{2p+2},$$

les équations (93) sont précisément les équations cherchées, qui définissent une famille d'éléments singuliers à $2q - 1$ dimensions.

2° Si $\Omega_2 = 0$ ne contient que les différentielles

$$dy_1, \ldots, dy_{p-q}, dy_{p+1}, \ldots, dy_{2p-q},$$

$$\Omega_2 = B_1 dy_1 + \ldots + B_{p-q} dy_{p-q} + B_{p+1} dy_{p+1} + \ldots + B_{2p-q} dy_{2p-q} = 0,$$

pour qu'un élément soit singulier, il faut et il suffit que les deux équations $\Omega'_1 = 0$ et

$$B_1 \delta y_1 + \ldots + B_{p-q} \delta y_{p-q} + B_{p+1} \delta y_{p+1} + \ldots + B_{2p-q} \delta y_{2p-q} = 0$$

ne soient pas distinctes, c'est-à-dire que l'on ait

$$(94) \qquad \frac{dy_{p+1}}{B_1} = \ldots = \frac{dy_{2p-q}}{B_{p-q}} = \frac{-dy_1}{B_{p+1}} = \ldots = \frac{-dy_{p-q}}{B_{2p-q}}.$$

Les $2p - 2q = n - 2q - 2$ équations (92) et (94) représentent une famille d'éléments singuliers à $2q + 1$ dimensions.

Cette seconde hypothèse n'est admissible que si le nombre total des différentielles qui figurent dans Ω_1 et Ω_2 est supérieur ou au moins égal au nombre minimum des différentielles qui figurent dans un système de classe $n = 2p + 2$. Or si un système de deux équations renferme seulement r différentielles, il est clair que la classe est au plus égale à $r + 2(r - 2) = 3r - 4$. On doit donc avoir

$$3(2p - 2q + 1) - 4 \geqslant 2p + 2 \qquad \text{ou} \qquad 4p - 3 \geqslant 6q,$$

et, comme l'égalité est impossible,

$$q < \frac{4p - 3}{6}.$$

Le nombre des dimensions d'une multiplicité d'éléments singuliers est donc inférieur à $\frac{4p - 3}{3} + 1 = \frac{4p}{3}$.

Le cas que nous venons d'examiner ne peut se présenter si $p = 2$, car $\frac{4p-3}{6}$ est inférieur à un. Si $p = 3$, on peut avoir $q = 1$. Tel est le cas du système

$$\Omega_1 = dy_7 - y_4 dy_1 - y_5 dy_2 = 0, \qquad \Omega_2 = dy_1 + y_3 dy_2 + y_6 dy_4 + y_8 dy_5 = 0;$$

l'équation singulière $\Omega_1 = 0$ correspond à une racine triple de l'équation $F(\lambda, \mu) = 0$, et les éléments singuliers correspondants définis par l'équation $\Omega_1 = 0$, jointe aux relations

$$\frac{dy_4}{1} = \frac{dy_1}{-y_6} = \frac{dy_5}{y_3} = \frac{dy_2}{-y_8},$$

forment une multiplicité à trois dimensions.

L'équation singulière $\Omega_1 = 0$ du système

$$\Omega_1 = dy_3 - y_2 dy_1 = 0, \qquad \Omega_2 = dy_6 + y_4 dy_5 + y_7 dy_4 + y_8 dy_2 = 0$$

correspond aussi à une racine triple, et les éléments singuliers définis par les relations

$$dy_1 = 0, \qquad dy_2 = 0, \qquad dy_3 = 0, \qquad dy_6 + y_4 dy_5 = 0$$

forment encore une multiplicité à trois dimensions.

Le système

$$\Omega_1 = dy_3 - y_2 dy_1 = 0, \qquad \Omega_2 = dy_8 + y_4 dy_5 + y_6 dy_7 = 0$$

a deux équations singulières, l'une provenant d'une racine double, l'autre d'une racine simple.

[**38**] Les résultats sont tout différents pour un système de deux équations de Pfaff à $2p+1$ variables. Le déterminant $\Delta(\lambda, \mu)$, qui est un déterminant symétrique gauche d'ordre impair, est alors identiquement nul, et toute équation $\Omega = \lambda\omega_1 + \mu\omega_2 = 0$ peut être considérée comme une équation singulière du système.

Quelles que soient les valeurs de λ et de μ, les $2p-1$ relations (87) se réduisent à $2p-2$ relations distinctes en général, et permettent d'exprimer les rapports des différentielles $dx_1, \ldots, dx_{2p-1}$ à l'une d'elles au moyen du paramètre arbitraire $\frac{\lambda}{\mu}$. Il y a donc une infinité d'éléments singuliers; mais ces éléments singuliers, au lieu de former p multiplicités distinctes comme dans le cas d'un nombre pair de variables, forment en général une seule multiplicité à une dimension.

Il existe dans ce cas une infinité d'équations du système qui sont de classe $2p-1$.

Soit en effet

$$\omega = a_1 dx_1 + \ldots + a_n dx_n \qquad (n = 2p + 1)$$

une forme de Pfaff à un nombre impair de variables.

Pour que l'équation $\omega = 0$ soit de classe $2p - 1$ ou de classe inférieure, il faut et il suffit que la forme ω soit au plus de classe $2p$, et l'équation $\omega = 0$ doit être une conséquence des relations

$$a_{i1} dx_1 + \ldots + a_{in} dx_n = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

qui comprennent au plus $2p$ relations distinctes. Tous les déterminants obtenus en supprimant une ligne du tableau

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{vmatrix}$$

doivent donc être nuls. Il faut et il suffit pour cela que le déterminant de Pfaff

$$H = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & a_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & a_n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n & 0 \end{vmatrix}$$

soit nul. En appliquant ce résultat à l'équation $\lambda\omega_1 + \mu\omega_2 = 0$, on voit qu'il existe une infinité de valeurs du rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ pour lesquels cette équation est de classe $2p - 1$ au plus.