

**ANNALES**  
DE LA  
**FACULTÉ DES SCIENCES**  
DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

---

**L'ÉLECTRODYNAMIQUE DE HELMHOLTZ-DUHEM**

ET

**SON APPLICATION AU PROBLÈME DU MUR**

ET A LA

**DÉCHARGE D'UN CONDENSATEUR SUR SON PROPRE DIÉLECTRIQUE**

*(Suite)*

PAR LOUIS ROY.

---

CHAPITRE II

**Le problème du mur.**

§ I. — *Équations du problème.*

Considérons un mur diélectrique et conducteur, d'épaisseur  $2l$ , occupant la région de l'espace  $(-l \leq x \leq l)$  et compris entre deux diélectriques non conducteurs 1 et 2 occupant les deux autres régions de l'espace  $(x \leq -l)$  et  $(x \geq l)$ . Ces trois milieux sont homogènes et isotropes et peuvent être magnétiques. Le *problème du mur* consiste à déterminer, à l'instant  $t$ , l'état électrique et magnétique du système résultant d'un état initial donné arbitrairement.

Pour résoudre ce problème, nous partirons des équations du potentiel vecteur total, afin de pouvoir en déduire aisément le potentiel électrique et étudier séparément le champ électrostatique ainsi que le champ électromagnétique et électrodynamique, dont la somme nous fera connaître le champ électrique total.

Supposons, pour simplifier, l'état initial indépendant de  $y$  et de  $z$ , c'est-à-dire fonction de  $x$  seul : par raison de symétrie, l'état du système à un instant quelconque  $t$  ne dépendra également que de  $x$ , de sorte que les diverses grandeurs définis-

sant l'état du système seront des fonctions des deux seules variables indépendantes  $x$  et  $t$ .

Affectons de l'indice 1 les grandeurs relatives au milieu 1, de l'indice 2 celles relatives au milieu 2; celles sans indice se rapporteront au mur. Les milieux 1 et 2 n'étant pas conducteurs, nous avons tout d'abord

$$(46) \quad \frac{1}{\rho_1} = 0, \quad \frac{1}{\rho_2} = 0,$$

Formons les équations indéfinies du potentiel vecteur total :  $x$  étant la seule variable géométrique, les dérivées par rapport à  $y$  et à  $z$  sont toutes nulles; nous avons donc, d'après l'égalité (24),

$$\Theta = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}.$$

Comme, d'autre part,  $\Delta$  se réduit ici à  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ , la première équation indéfinie (28) du potentiel vecteur total coïncide avec l'équation aux dilatations (30), où  $U$  est remplacé par  $\mathcal{F}$  et qui s'écrit

$$(47) \quad \frac{\varepsilon}{\frac{a^2}{2}k} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\mathcal{F}}{\rho x} + \frac{K}{K-1} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \right) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\mathcal{F}}{\rho x} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \right) = 0.$$

Les deux autres équations indéfinies (28) nous donnent, d'après l'égalité (34), en tenant compte des deux dernières équations (26), dont les seconds membres sont ici nuls,

$$(48) \quad T^2 \frac{\partial^2(\mathcal{G}, \mathcal{H})}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho x} \frac{\partial(\mathcal{G}, \mathcal{H})}{\partial t} - \frac{\partial^2(\mathcal{G}, \mathcal{H})}{\partial t^2} = 0.$$

Dans les milieux 1 et 2, les équations (26), (27) et (48) nous donnent, d'après les égalités (46), comme équations indéfinies du potentiel vecteur total :

$$(49) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\varepsilon}{\frac{a^2}{2}k} \frac{K_1}{K_1-1} \frac{\partial^2 \mathcal{F}_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}_1}{\partial t^2} = 0, \\ T_1^2 \frac{\partial^2(\mathcal{G}_1, \mathcal{H}_1)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2(\mathcal{G}_1, \mathcal{H}_1)}{\partial t^2} = 0; \end{array} \right.$$

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\varepsilon}{\frac{a^2}{2}k} \frac{K_2}{K_2-1} \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial t^2} = 0, \\ T_2^2 \frac{\partial^2(\mathcal{G}_2, \mathcal{H}_2)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2(\mathcal{G}_2, \mathcal{H}_2)}{\partial t^2} = 0. \end{array} \right.$$

Passons maintenant aux conditions aux surfaces séparatives ( $x = \mp l$ ) : pour  $x = -l$ , on a

$$\frac{d}{dn_1} = -\frac{\partial}{\partial x}; \quad \alpha_1 = -1, (\beta_1, \gamma_1) = 0; \quad \frac{d}{dn} = \frac{\partial}{\partial x}; \quad \alpha = 1, (\beta, \gamma) = 0$$

et, pour  $x = l$ ,

$$\frac{d}{dn} = -\frac{\partial}{\partial x}; \quad \alpha = -1, (\beta, \gamma) = 0; \quad \frac{d}{dn_2} = \frac{\partial}{\partial x}; \quad \alpha_2 = 1, (\beta_2, \gamma_2) = 0,$$

d'où, d'après les égalités (35) et (36) :

pour  $x = -l$ ,

$$(51) \quad \begin{cases} \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}, & \mathcal{G}_1 = \mathcal{G}, & \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}; \\ \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}, & \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial x} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}, & \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial x} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}; \end{cases}$$

pour  $x = l$ ,

$$(52) \quad \begin{cases} \mathcal{F} = \mathcal{F}_2, & \mathcal{G} = \mathcal{G}_2, & \mathcal{H} = \mathcal{H}_2; \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial x}, & \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} = \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial \mathcal{G}_2}{\partial x}, & \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial x}. \end{cases}$$

Il résulte des équations ci-dessus, tant indéfinies qu'aux surfaces séparatives, que les trois composantes du potentiel vecteur total se déterminent séparément. Ces composantes ainsi calculées dans tout l'espace, nous en déduirons le potentiel électrique par l'équation (23) qui se réduit à

$$(53) \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} = -k \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{\partial V}{\partial t},$$

le champ électrique par les égalités (21), qui se réduisent à

$$(54) \quad \begin{cases} X = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}, \\ Y = -\frac{a}{\sqrt{2}} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}, \\ Z = -\frac{a}{\sqrt{2}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \end{cases}$$

et, finalement, le champ magnétique par les égalités (22), qui se réduisent à

$$(55) \quad \left\{ \begin{array}{l} X' = 0, \\ Y' = \frac{\sqrt{\varepsilon'}}{\mu} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}, \\ Z' = -\frac{\sqrt{\varepsilon'}}{\mu} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}. \end{array} \right.$$

Nous nous limiterons, dans ce Mémoire, à la recherche dans tout l'espace de la composante longitudinale  $\mathcal{F}$  du potentiel vecteur total et des grandeurs qui en dérivent, ce qui revient à étudier le phénomène en supposant nulles, à l'instant initial, les fonctions  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{H}$  et leurs dérivées par rapport à  $t$ ; dès lors, d'après les égalités (54) et (55), le champ électrique se réduit à sa composante longitudinale  $X$  et le champ magnétique est nul. Supposons, en outre, qu'aucun des trois milieux considérés n'ait un pouvoir inducteur spécifique d'un ordre de grandeur inférieur à celui de l'éther, ce qui est, comme nous l'avons déjà dit, le cas de tous les diélectriques dont on a pu mesurer le pouvoir inducteur : en vertu de l'hypothèse de Faraday et de Mossotti, nous pouvons alors, dans tout l'espace, remplacer le rapport  $\frac{K}{K-1}$  par l'unité, d'où il résulte que la vitesse de propagation des perturbations longitudinales a, dans tout l'espace, une même valeur  $L$  définie par l'égalité (44).

Dans ces conditions, d'après les équations (47), (49), (50), (51), (52), (53), les équations du problème sont en définitive :

$$(56) \quad L^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\mathcal{F}}{\rho x} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \right) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\mathcal{F}}{\rho x} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \right) = 0,$$

$$(57) \quad L^2 \frac{\partial^2 (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)}{\partial t^2} = 0,$$

$$(58) \quad \frac{\partial (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}, \mathcal{F}_2)}{\partial x} + k \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{\partial (V_1, V, V_2)}{\partial t} = 0,$$

pour  $x = -l$ ,

$$(59) \quad \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}, \quad \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x};$$

pour  $x = l$ ,

$$(60) \quad \mathcal{F} = \mathcal{F}_2, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial x};$$

pour  $t=0$ ,

$$(61) \quad \begin{cases} \mathcal{F}_1 = f_1(x), & \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial t} = g_1(x), & V_1 = v_1(x); \\ \mathcal{F} = f(x), & \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = g(x), & V = v(x); \\ \mathcal{F}_2 = f_2(x), & \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial t} = g_2(x), & V_2 = v_2(x), \end{cases}$$

$f_1, g_1, \dots, v_2$  désignant des fonctions données arbitrairement tout en satisfaisant aux conditions aux surfaces séparatives.

L'équation (56) étant du troisième ordre par rapport à  $t$ , la valeur initiale de  $\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t^2}$  se présentera naturellement dans les calculs d'intégration qui vont suivre et nous la désignerons par  $h(x)$ ; mais nous savons qu'elle n'est pas distincte des fonctions  $f(x), g(x), v(x)$ . La première équation (26) s'écrit, en effet, ici, en vertu de l'hypothèse de Faraday et de Massotti,

$$(62) \quad L^2 \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho x} \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{a} \frac{\partial V}{\partial x} \right),$$

de sorte qu'en y faisant  $t=0$ , nous obtenons la relation

$$(63) \quad L^2 f''(x) - h(x) = \frac{1}{\rho x} \left[ g(x) + \frac{\varepsilon}{a} v'(x) \right].$$

Enfin, il est facile de vérifier, d'après les équations générales (28), que, dans le cas particulier que nous traitons, nos équations s'appliquent également au cas où les milieux 1 et 2 seraient remplacés par des milieux conducteurs de résistivité nulle.

## § II. — Changement de variables.

Posons

$$(64) \quad U = \frac{\mathcal{F}}{\rho x} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t};$$

l'équation (56) devient

$$L^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0.$$

Nous avons, en outre, d'après les conditions (59), (60), (61) :

pour  $x = -l$ ,

$$\frac{\mathcal{F}_1}{\rho x} + \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial t} = U, \quad \frac{1}{\rho x} \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 \mathcal{F}_1}{\partial x \partial t} = \frac{\partial U}{\partial x};$$

pour  $x = l$ ,

$$U = \frac{\mathcal{F}_2}{\rho x} + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial t}, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{\rho x} \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial x} + \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial x \partial t};$$

pour  $t = 0$ ,

$$U = \frac{f(x)}{\rho x} + g(x), \quad \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{g(x)}{\rho x} + h(x).$$

Afin de nous débarrasser des constantes  $L$ ,  $\rho$ ,  $x$  qui figurent dans ces équations, substituons aux variables indépendantes  $x$ ,  $t$  de nouvelles variables  $\xi$ ,  $\tau$  liées aux anciennes par les relations

$$(65) \quad x = L\rho x\xi, \quad t = \rho x\tau.$$

La fonction  $\mathcal{F}(x, t)$  devient ainsi une certaine fonction  $\Phi(\xi, \tau)$  et l'on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} &= \frac{1}{\rho x} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau}, & \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\rho^2 x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2}, \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} &= \frac{1}{L\rho x} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, & \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x^2} &= \frac{1}{L^2 \rho^2 x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2}, & \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x \partial t} &= \frac{1}{L\rho^2 x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \tau}, \end{aligned}$$

avec des formules analogues pour  $\mathcal{F}_1$ ,  $\mathcal{F}_2$  qui sont devenues des fonctions  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  de  $\xi$  et de  $\tau$ .

Posons, en outre,

$$\begin{aligned} \rho x U(L\rho x\xi, \rho x\tau) &= \mathcal{U}(\xi, \tau), \\ \sqrt{\epsilon k} V(L\rho x\xi, \rho x\tau) &= \mathcal{V}(\xi, \tau), \\ \frac{\rho x}{a} X(L\rho x\xi, \rho x\tau) &= \mathcal{X}(\xi, \tau); \\ &\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1(L\rho x\xi) &= F_1(\xi), & \rho x g_1(L\rho x\xi) &= G_1(\xi), \\ f(L\rho x\xi) &= F(\xi), & \rho x g(L\rho x\xi) &= G(\xi), & \rho^2 x^2 h(L\rho x\xi) &= H(\xi), \\ f_2(L\rho x\xi) &= F_2(\xi), & \rho x g_2(L\rho x\xi) &= G_2(\xi); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{\varepsilon k v_1(L\rho x\xi)} &= W_1(\xi), \\ \sqrt{\varepsilon k v(L\rho x\xi)} &= W(\xi), \\ \sqrt{\varepsilon k v_2(L\rho x\xi)} &= W_2(\xi); \\ \lambda &= \frac{l}{L\rho x};\end{aligned}$$

les fonctions  $\Phi_1$ ,  $\mathcal{U}$ ,  $\Phi_2$  sont tout d'abord déterminées par les équations :

$$(66) \quad \text{pour } \xi \leq -\lambda, \quad \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \tau^2} = 0;$$

$$(67) \quad \text{pour } -\lambda \leq \xi \leq \lambda, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \tau^2} = 0;$$

$$(68) \quad \text{pour } \xi \geq \lambda, \quad \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \tau^2} = 0;$$

$$(69) \quad \text{pour } \xi = -\lambda, \quad \Phi_1 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau} = \mathcal{U}, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \xi \partial \tau} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \xi};$$

$$(70) \quad \text{pour } \xi = \lambda, \quad \mathcal{U} = \Phi_2 + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \xi} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \xi \partial \tau};$$

$$(71) \quad \text{pour } \tau = 0, \quad \begin{cases} \Phi_1 = F_1(\xi), & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau} = G_1(\xi); \\ \mathcal{U} = F(\xi) + G(\xi), & \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \tau} = G(\xi) + H(\xi); \\ \Phi_2 = F_2(\xi), & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \tau} = G_2(\xi). \end{cases}$$

D'ailleurs, la fonction  $H$  s'exprime au moyen des autres fonctions d'état initial par la transformée de l'égalité (63) qui est

$$(72) \quad F''(\xi) - H(\xi) = G(\xi) + W'(\xi).$$

Les équations (66), (67), (68) donnent pour les fonctions  $\Phi_1$ ,  $\mathcal{U}$ ,  $\Phi_2$  des intégrales générales de la forme

$$(73) \quad \begin{cases} \Phi_1 = \varphi_1(\xi + \tau) + \psi_1(\xi - \tau), \\ \mathcal{U} = \varphi(\xi + \tau) + \psi(\xi - \tau), \\ \Phi_2 = \varphi_2(\xi + \tau) + \psi_2(\xi - \tau), \end{cases}$$

$\varphi_1, \psi_1, \dots, \psi_2$  désignant six fonctions arbitraires que nous déterminerons au paragraphe suivant au moyen des conditions (69), (70), (71).

La fonction  $\mathcal{U}$  étant ainsi déterminée, on en déduira  $\Phi$  en intégrant la transformée de l'équation (64)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \Phi = \mathcal{U},$$

avec, pour  $\tau = 0$ ,

$$\Phi = F(\xi),$$

ce qui donne d'une manière générale

$$(74) \quad \Phi = e^{-\tau} \left[ \int_{\tau_0}^{\tau} \mathcal{U}(\xi, \tau) e^{\tau} d\tau + \Phi(\xi, \tau_0) e^{\tau_0} \right],$$

$\tau_0$  étant une quantité indépendante de  $\tau$ , mais pouvant dépendre de  $\xi$ , que nous choisirons pour la commodité des calculs. Les fonctions  $\Phi_1, \Phi, \Phi_2$  seront ainsi complètement déterminées.

Cela posé, le potentiel électrique se déduira des fonctions ci-dessus par une quadrature au moyen des transformées des équations (58)

$$(75) \quad \frac{\partial(\Phi_1, \Phi, \Phi_2)}{\partial \xi} + \frac{\partial(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}, \mathcal{V}_2)}{\partial \tau} = 0,$$

avec, pour  $\tau = 0$ ,

$$\mathcal{V}_1 = W_1(\xi), \quad \mathcal{V} = W(\xi), \quad \mathcal{V}_2 = W_2(\xi).$$

D'après l'expression (73) de  $\Phi_1$ , la première des équations (75) nous donne

$$\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial \tau} = -\varphi'_1(\xi + \tau) - \psi'_1(\xi - \tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \varphi_1(\xi + \tau) - \psi_1(\xi - \tau) \right],$$

d'où, en intégrant de  $\tau_0$  à  $\tau$ ,

$$(76) \quad \mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_1(\xi, \tau_0) - \varphi_1(\xi + \tau) + \psi_1(\xi - \tau) + \varphi_1(\xi + \tau_0) - \psi_1(\xi - \tau_0),$$

la valeur de  $\tau_0$  étant, comme pour  $\Phi$ , choisie en vue de la commodité des calculs.

L'expression (74) de  $\Phi$  jointe à celle (73) de  $\mathcal{U}$  nous montre que  $\Phi$  peut, d'une manière générale, être écrit sous la forme

$$(77) \quad \Phi = \mu(\xi + \tau) + \nu(\xi - \tau) + \sigma(\xi, \tau),$$



$\mu, \nu, \sigma$  étant des fonctions des variables mises en évidence; nous avons donc, d'après la deuxième équation (75) et comme précédemment

$$2 \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \tau} = - \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \mu(\xi + \tau) - \nu(\xi - \tau) \right] - \frac{\partial \sigma}{\partial \xi},$$

d'où, en intégrant de  $\tau_0$  à  $\tau$ ,

$$(78) \quad 2\mathcal{V} = 2\mathcal{V}(\xi, \tau_0) - \mu(\xi + \tau) + \nu(\xi - \tau) + \mu(\xi + \tau_0) - \nu(\xi - \tau_0) - \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} d\tau.$$

Enfin, la troisième équation (75) jointe à l'expression (73) de  $\Phi_2$  nous donne comme pour  $\mathcal{V}_1$

$$(79) \quad \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_2(\xi, \tau_0) - \varphi_2(\xi + \tau) + \psi_2(\xi - \tau) + \varphi_2(\xi + \tau_0) - \psi_2(\xi - \tau_0),$$

de sorte que le potentiel électrique sera ainsi connu dans tout l'espace.

Il ne reste plus qu'à déterminer le champ électrique; pour cela, la transformée de la première égalité (54) écrite dans les trois milieux nous donne

$$(80) \quad (\mathcal{X}_1, \mathcal{X}, \mathcal{X}_2) = - \frac{\partial(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}, \mathcal{V}_2)}{\partial \xi} - \frac{\partial(\Phi_1, \Phi, \Phi_2)}{\partial \tau},$$

les premiers termes représentant à une constante près le champ électrostatique, les seconds le champ électrodynamique. Il n'y a donc qu'à calculer les dérivées par rapport à  $\xi$  ou à  $\tau$  des fonctions obtenues.

### § III. — Détermination des fonctions arbitraires.

Les conditions aux limites (6g) nous donnent, d'après les égalités (73),

$$\begin{aligned} \varphi(-\lambda + \tau) + \psi(-\lambda - \tau) &= \varphi_1(-\lambda + \tau) + \psi_1(-\lambda - \tau) + \varphi'_1(-\lambda + \tau) - \psi'_1(-\lambda - \tau), \\ \varphi'(-\lambda + \tau) + \psi'(-\lambda - \tau) &= \varphi'_1(-\lambda + \tau) + \psi'_1(-\lambda - \tau) + \varphi''_1(-\lambda + \tau) - \psi''_1(-\lambda - \tau). \end{aligned}$$

Cette dernière relation s'intègre immédiatement une première fois et donne

$$\varphi(-\lambda + \tau) - \psi(-\lambda - \tau) = \varphi_1(-\lambda + \tau) - \psi_1(-\lambda - \tau) + \varphi'_1(-\lambda + \tau) + \psi'_1(-\lambda - \tau) + 2A,$$

A désignant une constante arbitraire; on en déduit, en l'ajoutant membre à

membre à la première, puis en l'en retranchant, les deux premières des égalités

$$(81) \quad \begin{cases} \varphi(-\lambda + \tau) = \varphi_1(-\lambda + \tau) + \varphi'_1(-\lambda + \tau) + \Lambda, \\ \psi(-\lambda - \tau) = \psi_1(-\lambda - \tau) - \psi'_1(-\lambda - \tau) - \Lambda, \\ \varphi(\lambda + \tau) = \varphi_2(\lambda + \tau) + \varphi'_2(\lambda + \tau) + B, \\ \psi(\lambda - \tau) = \psi_2(\lambda - \tau) - \psi'_2(\lambda - \tau) - B, \end{cases}$$

les deux dernières s'obtenant d'une manière analogue au moyen des deux autres conditions aux limites (70) et B désignant une nouvelle constante arbitraire.

On voit que c'est la même variable qui figure dans chacune de ces égalités; désignons donc par  $\xi$  l'une quelconque des quatre variables  $\pm \lambda \pm \tau$  et les égalités (81) s'écriront plus simplement

$$(82) \quad \begin{cases} \varphi(\xi) = \varphi_1(\xi) + \varphi'_1(\xi) + \Lambda, \\ \psi(\xi) = \psi_1(\xi) - \psi'_1(\xi) - \Lambda, \\ \varphi(\xi) = \varphi_2(\xi) + \varphi'_2(\xi) + B, \\ \psi(\xi) = \psi_2(\xi) - \psi'_2(\xi) - B. \end{cases}$$

Les égalités (81) ayant lieu quel que soit  $\tau$ , les égalités (82) ont lieu quel que soit  $\xi$ ; elles déterminent donc  $\varphi$  et  $\psi$  en fonction de  $\varphi_1, \psi_1$  ou de  $\varphi_2, \psi_2$ . Inversement, elles permettent, par une nouvelle intégration, d'exprimer les quatre fonctions  $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2$  au moyen de  $\varphi$  et de  $\psi$ , ce qui donne

$$(83) \quad \begin{cases} \varphi_1(\xi) = e^{-\xi} \left[ \int (\varphi - \Lambda) e^{\xi} d\xi + A_1 \right], \\ \psi_1(\xi) = e^{\xi} \left[ - \int (\psi + \Lambda) e^{-\xi} d\xi + B_1 \right], \\ \varphi_2(\xi) = e^{-\xi} \left[ \int (\varphi - B) e^{\xi} d\xi + A_2 \right], \\ \psi_2(\xi) = e^{\xi} \left[ - \int (\psi + B) e^{-\xi} d\xi + B_2 \right], \end{cases}$$

$A_1, B_1, A_2, B_2$  désignant quatre nouvelles constantes arbitraires.

Appliquons maintenant les conditions initiales (71); celles-ci s'écrivent, d'après les égalités (73),

$$\begin{aligned} \varphi_1 + \psi_1 &= F_1, & \varphi'_1 - \psi'_1 &= G_1, \\ \varphi + \psi &= F + G, & \varphi' - \psi' &= G + H, \\ \varphi_2 + \psi_2 &= F_2, & \varphi'_2 - \psi'_2 &= G_2. \end{aligned}$$

Mais le deuxième groupe d'égalités devient par intégration

$$\begin{aligned}\varphi_1 - \psi_1 &= - \int_{\xi}^{-\lambda} G_1 d\xi + \varphi_1(-\lambda) - \psi_1(-\lambda), \\ \varphi - \psi &= \int_{-\lambda}^{\xi} (G + H) d\xi + \varphi(-\lambda) - \psi(-\lambda) = - \int_{\xi}^{\lambda} (G + H) d\xi + \varphi(\lambda) - \psi(\lambda), \\ \varphi_2 - \psi_2 &= \int_{\lambda}^{\xi} G_2 d\xi + \varphi_2(\lambda) - \psi_2(\lambda).\end{aligned}$$

En observant que les fonctions  $F_1, G_1$  ne sont connues que pour  $\xi \leq -\lambda$ , les fonctions  $F, G, H$  que pour  $-\lambda \leq \xi \leq \lambda$  et les fonctions  $F_2, G_2$  que pour  $\xi \geq \lambda$ , nous obtenons ainsi par une résolution immédiate :

pour  $\xi \leq -\lambda$ ,

$$(84) \quad \begin{cases} 2\varphi_1 = F_1 - \int_{\xi}^{-\lambda} G_1 d\xi + \varphi_1(-\lambda) - \psi_1(-\lambda), \\ 2\psi_1 = F_1 + \int_{\xi}^{-\lambda} G_1 d\xi - \varphi_1(-\lambda) + \psi_1(-\lambda); \end{cases}$$

pour  $-\lambda \leq \xi \leq \lambda$ ,

$$(85) \quad \begin{cases} 2\varphi = F + G + \int_{-\lambda}^{\xi} (G + H) d\xi + \varphi(-\lambda) - \psi(-\lambda) \\ \quad = F + G - \int_{\xi}^{\lambda} (G + H) d\xi + \varphi(\lambda) - \psi(\lambda), \\ 2\psi = F + G - \int_{-\lambda}^{\xi} (G + H) d\xi - \varphi(-\lambda) + \psi(-\lambda) \\ \quad = F + G + \int_{\xi}^{\lambda} (G + H) d\xi - \varphi(\lambda) + \psi(\lambda); \end{cases}$$

pour  $\xi \geq \lambda$ ,

$$(86) \quad \begin{cases} 2\varphi_2 = F_2 + \int_{\lambda}^{\xi} G_2 d\xi + \varphi_2(\lambda) - \psi_2(\lambda), \\ 2\psi_2 = F_2 - \int_{\lambda}^{\xi} G_2 d\xi - \varphi_2(\lambda) + \psi_2(\lambda). \end{cases}$$

Il nous reste à déterminer nos six fonctions arbitraires dans les deux autres intervalles où chacune d'elle est encore inconnue : la substitution des expressions (84) et (86) dans les égalités (82) nous fera connaître  $\varphi$  et  $\psi$  pour  $\xi \leq -\lambda$  et  $\xi \geq \lambda$ . Les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  seront ainsi connues dans les trois intervalles, c'est-à-dire pour

toutes les valeurs de  $\xi$ . L'application des égalités (83) achèvera ensuite de nous faire connaître les fonctions  $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2$ .

Établissons, auparavant, quelques formules qui nous seront prochainement utiles : faisons  $\tau = 0$  dans les deux premières égalités (81), puis retranchons-les membre à membre en tenant compte qu'on a, d'après la première condition initiale,

$$\varphi'_1(-\lambda) + \psi'_1(-\lambda) = F'_1(-\lambda);$$

nous obtiendrons la première des égalités

$$(87) \quad \begin{cases} \varphi(-\lambda) - \psi(-\lambda) = \varphi_1(-\lambda) - \psi_1(-\lambda) + F'_1(-\lambda) + 2A, \\ \varphi(\lambda) - \psi(\lambda) = \varphi_2(\lambda) - \psi_2(\lambda) + F'_2(\lambda) + 2B, \end{cases}$$

la deuxième s'obtenant d'une manière analogue.

Enfin, on déduit des deux expressions équivalentes (85) de  $\varphi$  ou de  $\psi$

$$(88) \quad \varphi(\lambda) - \psi(\lambda) - \varphi(-\lambda) + \psi(-\lambda) = \int_{-\lambda}^{\lambda} (G + H) d\xi.$$

Cela posé, achevons de déterminer les fonctions arbitraires comme nous l'avons indiqué : en substituant les expressions (84) et (86) dans les égalités (82) et en tenant compte des égalités (87), il vient :

pour  $\xi \leq -\lambda$ ,

$$(89) \quad \begin{cases} 2\varphi = F_1 + F'_1 + G_1 - \int_{\xi}^{-\lambda} G_1 d\xi + \varphi(-\lambda) - \psi(-\lambda) - F'_1(-\lambda), \\ 2\psi = F_1 - F'_1 + G_1 + \int_{\xi}^{-\lambda} G_1 d\xi - \varphi(-\lambda) + \psi(-\lambda) + F'_1(-\lambda); \end{cases}$$

pour  $\xi \geq \lambda$ ,

$$(90) \quad \begin{cases} 2\varphi = F_2 + F'_2 + G_2 + \int_{\lambda}^{\xi} G_2 d\xi + \varphi(\lambda) - \psi(\lambda) - F'_2(\lambda), \\ 2\psi = F_2 - F'_2 + G_2 - \int_{\lambda}^{\xi} G_2 d\xi - \varphi(\lambda) + \psi(\lambda) + F'_2(\lambda). \end{cases}$$

Passons au calcul des fonctions  $\varphi_1$  et  $\psi_1$  pour  $\xi \geq -\lambda$ .

Considérons d'abord le premier intervalle  $(-\lambda \leq \xi \leq \lambda)$ ; les deux premières

égalités (83) nous donnent, en prenant  $-\lambda$  comme limite inférieure d'intégration,

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= e^{-\xi} \left[ \int_{-\lambda}^{\xi} (\varphi + A) e^{\xi} d\xi + \varphi_1(-\lambda) e^{-\lambda} \right], \\ \psi_1 &= e^{\xi} \left[ - \int_{-\lambda}^{\xi} (\psi + A) e^{-\xi} d\xi + \psi_1(-\lambda) e^{\lambda} \right].\end{aligned}$$

Substituons dans ces égalités les premières expressions (85) de  $\varphi$  et de  $\psi$ , en tenant compte de la première égalité (87) et de la relation

$$\varphi_1(-\lambda) + \psi_1(-\lambda) = F_1(-\lambda);$$

nous obtiendrons pour  $\varphi_1$

$$\begin{aligned}2\varphi_1 &= e^{-\xi} \left\{ \int_{-\lambda}^{\xi} (F + G) e^{\xi} d\xi + \int_{-\lambda}^{\xi} \left[ \int_{-\lambda}^{\xi} (G + H) d\xi \right] e^{\xi} d\xi + [F_1(-\lambda) - F'_1(-\lambda)] e^{-\lambda} \right. \\ &\quad \left. + \varphi_1(-\lambda) - \psi_1(-\lambda) + F'_1(-\lambda) \right\}.\end{aligned}$$

Mais on a, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}\int_{-\lambda}^{\xi} F e^{\xi} d\xi &= (F - F') e^{\xi} - [F(-\lambda) - F'(-\lambda)] e^{-\lambda} + \int_{-\lambda}^{\xi} F'' e^{\xi} d\xi, \\ \int_{-\lambda}^{\xi} \left[ \int_{-\lambda}^{\xi} (G + H) d\xi \right] e^{\xi} d\xi &= e^{\xi} \int_{-\lambda}^{\xi} (G + H) d\xi - \int_{-\lambda}^{\xi} (G + H) e^{\xi} d\xi;\end{aligned}$$

si l'on observe, en outre, qu'on doit avoir

$$F_1(-\lambda) = F(-\lambda), \quad F'_1(-\lambda) = F'(-\lambda)$$

en vertu des conditions aux limites, il viendra la première des expressions cherchées :

$$\begin{aligned}\text{pour } -\lambda \leq \xi \leq \lambda, \\ (91) \quad \begin{cases} 2\varphi_1 = F + \int_{-\lambda}^{\xi} (G + H - F'') d\xi - e^{-\xi} \int_{-\lambda}^{\xi} (H - F'') e^{\xi} d\xi + \varphi_1(-\lambda) - \psi_1(-\lambda) \\ 2\psi_1 = F - \int_{-\lambda}^{\xi} (G + H - F'') d\xi + e^{\xi} \int_{-\lambda}^{\xi} (H - F'') e^{-\xi} d\xi - \varphi_1(-\lambda) + \psi_1(-\lambda), \end{cases}\end{aligned}$$

la deuxième s'obtenant d'une manière analogue.

Considérons maintenant le second intervalle ( $\xi \geq \lambda$ ) : les deux premières

égalités (83) nous donnent, en prenant  $\lambda$  comme limite inférieure d'intégration,

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= e^{-\xi} \left[ \int_{\lambda}^{\xi} (\varphi - A) e^{\xi} d\xi + \varphi_1(\lambda) e^{\lambda} \right], \\ \psi_1 &= e^{\xi} \left[ - \int_{\lambda}^{\xi} (\psi + A) e^{-\xi} d\xi + \psi_1(\lambda) e^{-\lambda} \right].\end{aligned}$$

Substituons dans ces égalités les expressions (90) de  $\varphi$  et de  $\psi$ , transformons par une intégration par parties les intégrales

$$\int_{\lambda}^{\xi} F'_2 e^{-\xi} d\xi, \quad \int_{\lambda}^{\xi} \left( \int_{\lambda}^{\xi} G_2 d\xi \right) e^{-\xi} d\xi$$

et tenons compte de la première égalité (87) et de l'égalité (88), nous obtiendrons

$$\begin{aligned}2\varphi_1 &= F_2 + \int_{\lambda}^{\xi} G_2 d\xi \\ &+ \left[ - \int_{-\lambda}^{\lambda} (G + H - F'') d\xi + 2\varphi_1(\lambda) - \varphi_1(-\lambda) + \psi_1(-\lambda) - F_2(\lambda) \right] e^{-\xi} \\ &+ \int_{-\lambda}^{\lambda} (G + H - F'') d\xi + \varphi_1(-\lambda) - \psi_1(-\lambda), \\ 2\psi_1 &= F_2 - \int_{\lambda}^{\xi} G_2 d\xi \\ &+ \left[ \int_{-\lambda}^{\lambda} (G + H - F'') d\xi + 2\psi_1(\lambda) + \varphi_1(-\lambda) - \psi_1(-\lambda) - F_2(\lambda) \right] e^{-\lambda + \xi} \\ &- \int_{-\lambda}^{\lambda} (G + H - F'') d\xi - \varphi_1(-\lambda) + \psi_1(-\lambda).\end{aligned}$$

Écrivons que ces expressions se raccordent, pour  $\xi = \lambda$ , avec celles (91) antérieurement obtenues, nous obtiendrons les égalités

$$\begin{aligned}- \int_{-\lambda}^{\lambda} (G + H - F'') d\xi + 2\varphi_1(\lambda) - \varphi_1(-\lambda) + \psi_1(-\lambda) - F_2(\lambda) &= -e^{-\lambda} \int_{-\lambda}^{\lambda} (H - F'') e^{\xi} d\xi, \\ \int_{-\lambda}^{\lambda} (G + H - F'') d\xi + 2\psi_1(\lambda) + \varphi_1(-\lambda) - \psi_1(-\lambda) - F_2(\lambda) &= e^{\lambda} \int_{-\lambda}^{\lambda} (H - F'') e^{-\xi} d\xi,\end{aligned}$$

en vertu desquelles les expressions ci-dessus de  $\varphi_1$  et de  $\psi_1$  deviennent en définitive :

$$(92) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour } \xi \geq \lambda, \\ 2\varphi_1 = F_2 + \int_{\lambda}^{\xi} G_2 d\xi - e^{-\xi} \int_{-\lambda}^{\lambda} (H - F'') e^{\xi} d\xi + \int_{-\lambda}^{\lambda} (G + H - F'') d\xi + \varphi_1(-\lambda) - \psi_1(-\lambda), \\ 2\psi_1 = F_2 - \int_{\lambda}^{\xi} G_2 d\xi + e^{\xi} \int_{-\lambda}^{\lambda} (H - F'') e^{-\xi} d\xi - \int_{-\lambda}^{\lambda} (G + H - F'') d\xi - \varphi_1(-\lambda) + \psi_1(-\lambda). \end{array} \right.$$

Les expressions des fonctions  $\varphi_1, \psi_1$  pour  $\xi \leq \lambda$  s'obtiennent alors sans nouveau calcul en permutant dans les expressions (91) et (92) les indices 1 et 2 et les constantes  $-\lambda$  et  $\lambda$ ; il vient ainsi :

$$(93) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour } -\lambda \leq \xi \leq \lambda, \\ 2\varphi_2 = F - \int_{\xi}^{\lambda} (G + H - F'') d\xi + e^{-\xi} \int_{\xi}^{\lambda} (H - F'') e^{\xi} d\xi + \varphi_2(\lambda) - \psi_2(\lambda), \\ 2\psi_2 = F + \int_{\xi}^{\lambda} (G + H - F'') d\xi - e^{\xi} \int_{\xi}^{\lambda} (H - F'') e^{-\xi} d\xi - \varphi_2(\lambda) + \psi_2(\lambda); \end{array} \right.$$

$$(94) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour } \xi \leq -\lambda, \\ 2\varphi_2 = F_1 - \int_{\xi}^{-\lambda} G_1 d\xi + e^{-\xi} \int_{-\lambda}^{\infty} (H - F'') e^{\xi} d\xi - \int_{-\lambda}^{\infty} (G + H - F'') d\xi + \varphi_2(\lambda) - \psi_2(\lambda), \\ 2\psi_2 = F_1 + \int_{\xi}^{-\lambda} G_1 d\xi - e^{\xi} \int_{-\lambda}^{\infty} (H - F'') e^{-\xi} d\xi + \int_{-\lambda}^{\infty} (G + H - F'') d\xi - \varphi_2(\lambda) + \psi_2(\lambda). \end{array} \right.$$

Les six fonctions arbitraires  $\varphi_1, \psi_1, \varphi, \psi, \varphi_2, \psi_2$  sont ainsi déterminées pour toutes les valeurs de la variable, à des constantes additives près qui s'élimineront dans les résultats. Nous allons en déduire aisément les fonctions inconnues cherchées successivement dans le milieu 1, dans le mur et dans le milieu 2.

#### § IV. — Partage en régions du plan des variables $\xi, \tau$ .

Les quantités  $\xi + \tau$  et  $\xi - \tau$ , qui interviennent seules comme variables dans les égalités (73), sont susceptibles de prendre toutes les valeurs réelles de  $-\infty$  à  $+\infty$  suivant l'instant  $t = \varrho x \tau$  considéré et suivant que le point de l'espace  $x = L \varrho x \xi$ , auquel on veut connaître l'état du système, se trouve dans le milieu 1, dans le mur, ou dans le milieu 2. Or, d'après les résultats du paragraphe III et les égalités (73), les fonctions  $\Phi_1, \Psi, \Phi_2$  auront des expressions analytiques différentes suivant la position des variables  $\xi + \tau$  et  $\xi - \tau$  par rapport aux deux nombres  $-\lambda$  et  $\lambda$ .

Pour procéder avec ordre, considérons (*fig. 1*) deux axes rectangulaires ( $O\xi\tau$ ) et les six droites  $\Delta_1, \Delta_2, D_1, D'_1, D_2, D'_2$  ayant pour équations

$$\begin{array}{ll} \xi = -\lambda & (\text{droite } \Delta_1), \\ \xi = \lambda & (\text{ » } \Delta_2), \\ \xi + \tau = -\lambda & (\text{ » } D_1), \\ \xi + \tau = \lambda & (\text{ » } D'_1), \\ \xi - \tau = -\lambda & (\text{ » } D_2), \\ \xi - \tau = \lambda & (\text{ » } D'_2). \end{array}$$

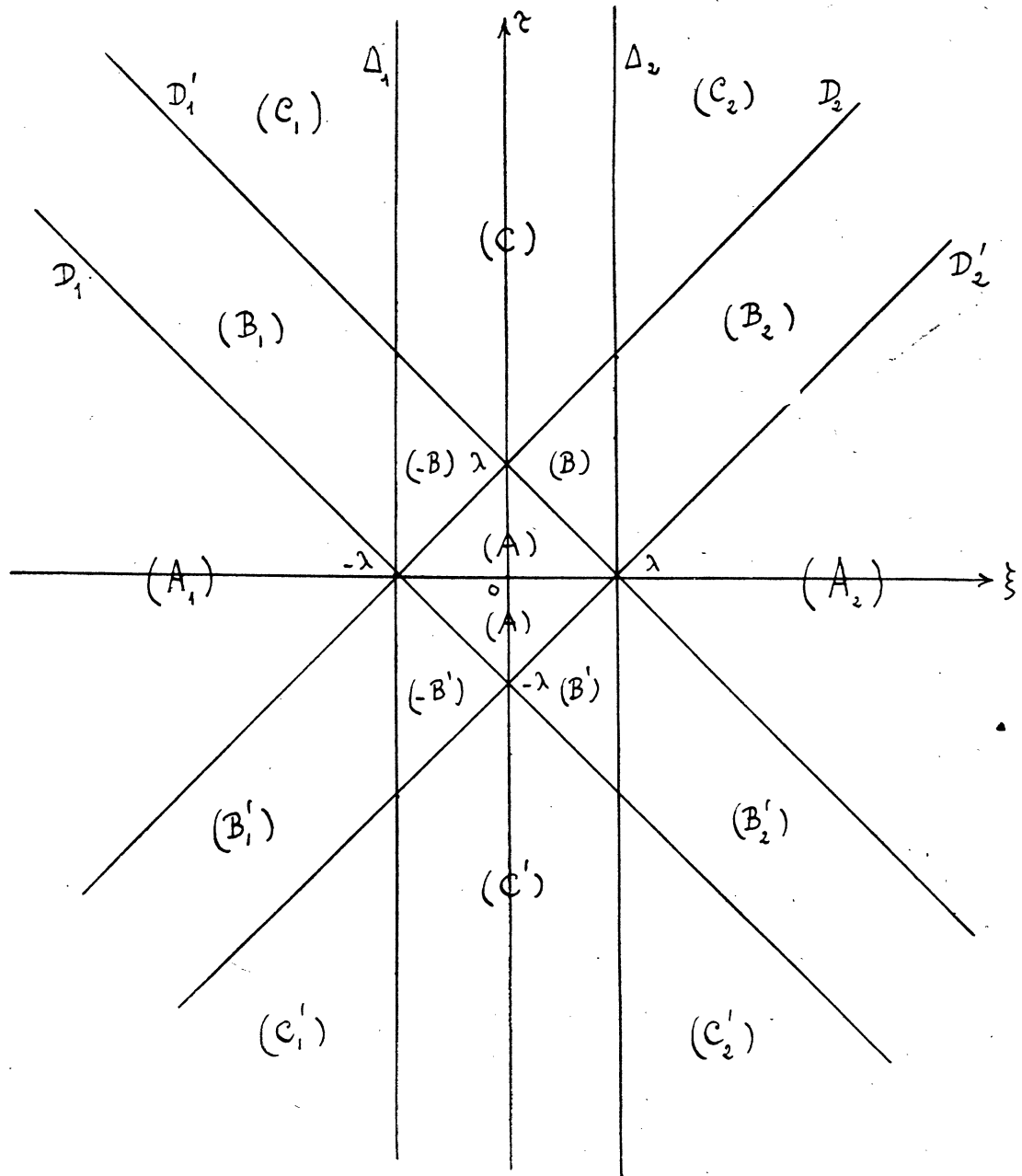


FIG. 1.



Ces droites partagent le plan des deux variables  $\xi$ ,  $\tau$  en dix-sept régions qui sont :

- 1) les cinq régions  $A_1, B_1, B'_1, C_1, C'_1$ , situées à gauche de  $\Delta_1$ ; elles correspondent au milieu 1, par suite aux fonctions  $\Phi_1, \mathcal{V}_1, \mathcal{X}_1$ ;
- 2) les sept régions  $A, B, B', -B, -B', C, C'$  comprises entre  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ ; elles correspondent au mur, par suite aux fonctions  $\mathcal{U}, \Phi, \mathcal{V}, \mathcal{X}$ ;
- 3) les cinq régions  $A_2, B_2, B'_2, C_2, C'_2$  situées à droite de  $\Delta_2$ ; elles correspondent au milieu 2, par suite aux fonctions  $\Phi_2, \mathcal{V}_2, \mathcal{X}_2$ .

Les résultats obtenus au paragraphe III vont nous permettre de former aisément ces fonctions dans les différentes régions du plan qui leur correspondent.

### § V. — Expressions des fonctions $\Phi_1, \mathcal{V}_1, \mathcal{X}_1$ .

Commençons par former les différentes expressions des fonctions

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \varphi_1(\xi + \tau) + \psi_1(\xi - \tau), \\ (76) \quad \mathcal{V}_1 &= \mathcal{V}_1(\xi, \tau_0) - \varphi_1(\xi + \tau) + \psi_1(\xi - \tau) + \varphi_1(\xi + \tau_0) - \psi_1(\xi - \tau_0) \end{aligned}$$

dans les diverses régions du plan situées à gauche de  $\Delta_1$ . Nous en déduisons par une simple dérivation le champ électrodynamique  $-\frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau}$  et le champ électrostatique  $-\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial \xi}$ , puis le champ électrique total par l'égalité

$$(95) \quad \mathcal{X}_1 = -\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial \xi} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau}.$$

1. RÉGION  $A_1$ . — Cette région étant définie par les inégalités

$$\xi + \tau \leq -\lambda, \quad \xi - \tau \leq -\lambda,$$

$\varphi_1$  et  $\psi_1$  doivent y recevoir leurs valeurs (84), d'où

$$(96) \quad \begin{cases} 2\Phi_1 = F_1(\xi + \tau) + F_1(\xi - \tau) + \int_{\xi - \tau}^{\xi + \tau} G_1 d\xi, \\ -2\frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau} = -F'_1(\xi + \tau) + F'_1(\xi - \tau) - G_1(\xi + \tau) - G_1(\xi - \tau). \end{cases}$$

Faisons, d'autre part,  $\tau_0 = 0$  dans l'égalité (76) et il viendra

$$(97) \left\{ \begin{array}{l} 2\mathcal{V}_1 = 2W_1(\xi) + \int_{\xi-\tau}^{\xi} (G_1 - F'_1) d\xi - \int_{\xi}^{\xi+\tau} (G_1 + F'_1) d\xi, \\ -2 \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial \xi} = -2G_1(\xi) - 2W'_1(\xi) + F'_1(\xi + \tau) - F'_1(\xi - \tau) + G_1(\xi + \tau) + G_1(\xi - \tau). \end{array} \right.$$

Dans la première de ces égalités, nous avons laissé la fonction  $F'_1$  sous le signe  $\int$  parce qu'elle représente, d'après la première équation (75), la valeur initiale de  $-\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial \tau}$ ; la même remarque s'appliquera aux résultats qui vont suivre.

On déduit enfin de l'égalité (95)

$$(98) \quad \mathcal{X}_1 = -G_1(\xi) - W'_1(\xi).$$

2. RÉGION  $B_1$ . — Cette région étant définie par les inégalités

$$-\lambda \leq \xi + \tau \leq \lambda, \quad \xi - \tau \leq -\lambda,$$

$\varphi_1$  doit y recevoir sa valeur (91),  $\psi$  sa valeur (84), d'où, en tenant compte de l'égalité (72),

$$(99) \left\{ \begin{array}{l} 2\Phi_1 = F(\xi + \tau) + F_1(\xi - \tau) - W(\xi + \tau) + \int_{\xi-\tau}^{-\lambda} G_1 d\xi + e^{-\xi-\tau} \int_{-\lambda}^{\xi+\tau} (G + W) e^{\xi} d\xi + W(-\lambda), \\ -2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau} = -F'(\xi + \tau) + F'_1(\xi - \tau) - G(\xi + \tau) - G_1(\xi - \tau) + e^{-\xi-\tau} \int_{-\lambda}^{\xi+\tau} (G + W) e^{\xi} d\xi. \end{array} \right.$$

Faisons, d'autre part,  $\tau_0 = -\lambda - \xi$  dans l'égalité (76) :  $\mathcal{V}_1(\xi, -\lambda - \xi)$  y recevra sa valeur déduite de la première égalité (97); tous calculs faits et en tenant compte de l'égalité (72), nous obtenons

$$(100) \left\{ \begin{array}{l} 2\mathcal{V}_1 = 2W_1(\xi) + W(\xi + \tau) + \int_{\xi-\tau}^{\xi} (G_1 - F'_1) d\xi - \int_{\xi}^{-\lambda} (G_1 + F'_1) d\xi - \int_{-\lambda}^{\xi+\tau} F'_1 d\xi \\ \quad - e^{-\xi-\tau} \int_{-\lambda}^{\xi+\tau} (G + W) e^{\xi} d\xi - W(-\lambda), \\ -2 \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial \xi} = -2G_1(\xi) - 2W'_1(\xi) + F'_1(\xi + \tau) - F'_1(\xi - \tau) + G(\xi + \tau) + G_1(\xi - \tau) \\ \quad - e^{-\xi-\tau} \int_{-\lambda}^{\xi+\tau} (G + W) e^{\xi} d\xi. \end{array} \right.$$

Enfin l'application de l'égalité (95) redonne l'égalité (98).

3. RÉGION B'. — Cette région étant définie par les inégalités

$$\xi + \tau \leq -\lambda, \quad -\lambda \leq \xi - \tau \leq \lambda,$$

$\varphi_1$  doit y recevoir sa valeur (84),  $\psi_1$  sa valeur (91), d'où, en tenant compte de l'égalité (72),

$$(101) \left\{ \begin{aligned} 2\Phi_1 &= F_1(\xi + \tau) + F(\xi - \tau) + W(\xi - \tau) - \int_{\xi+\tau}^{-\lambda} G_1 d\xi \\ &\quad - e^{\xi-\tau} \int_{-\lambda}^{\xi-\tau} (G + W) e^{-\xi} d\xi - W(-\lambda), \\ -2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau} &= -F'_1(\xi + \tau) + F'(\xi - \tau) - G_1(\xi + \tau) - G(\xi - \tau) \\ &\quad - e^{\xi-\tau} \int_{-\lambda}^{\xi-\tau} (G + W) e^{-\xi} d\xi. \end{aligned} \right.$$

Faisons, d'autre part,  $\tau_0 = \lambda + \xi$  dans l'égalité (76) :  $\mathcal{U}_1(\xi, \lambda + \xi)$  y recevra sa valeur déduite de la première égalité (97); tous calculs faits et en tenant compte de l'égalité (72), nous obtenons

$$(102) \left\{ \begin{aligned} 2\mathcal{U}_1 &= 2W_1(\xi) + W(\xi - \tau) + \int_{\xi+\tau}^{\xi} (G_1 + F'_1) d\xi - \int_{\xi}^{-\lambda} (G_1 - F'_1) d\xi \\ &\quad + \int_{-\lambda}^{\xi-\tau} F' d\xi - e^{\xi-\tau} \int_{-\lambda}^{\xi-\tau} (G + W) e^{-\xi} d\xi - W(-\lambda), \\ -2 \frac{\partial \mathcal{U}_1}{\partial \xi} &= -2G_1(\xi) - 2W'_1(\xi) + F'_1(\xi + \tau) - F'(\xi - \tau) + G_1(\xi + \tau) \\ &\quad + G(\xi - \tau) + e^{\xi-\tau} \int_{-\lambda}^{\xi-\tau} (G + W) e^{-\xi} d\xi. \end{aligned} \right.$$

Enfin l'application de l'égalité (95) redonne l'égalité (98).

4. RÉGION C'. — Cette région étant définie par les inégalités

$$\xi + \tau \geq \lambda, \quad \xi - \tau \leq -\lambda,$$

$\varphi_1$  doit y recevoir sa valeur (92),  $\psi_1$  sa valeur (84),

d'où, en tenant compte de l'égalité (72),

$$(103) \left\{ \begin{aligned} 2\Phi_1 &= F_2(\xi + \tau) + F_1(\xi - \tau) + \int_{\xi-\tau}^{-\lambda} G_1 d\xi + e^{-\xi-\tau} \int_{-\lambda}^{\lambda} (G + W') e^{\xi} d\xi \\ &\quad + \int_{\lambda}^{\xi+\tau} G_2 d\xi - W(\lambda) + W(-\lambda), \\ -2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau} &= -F'_2(\xi + \tau) + F'_1(\xi - \tau) - G_2(\xi + \tau) - G_1(\xi - \tau) \\ &\quad + e^{-\xi-\tau} \int_{-\lambda}^{\lambda} (G + W') e^{\xi} d\xi. \end{aligned} \right.$$

Faisons, d'autre part,  $\tau_0 = \lambda - \xi$  dans l'égalité (76) :  $\mathcal{U}_1(\xi, \lambda - \xi)$  y recevra sa valeur déduite de la première égalité (100); tous calculs faits et en tenant compte de l'égalité (72) nous obtenons

$$(104) \left\{ \begin{aligned} 2\mathcal{U}_1 &= 2W_1(\xi) + \int_{\xi-\tau}^{\xi} (G_1 - F'_1) d\xi - \int_{\xi}^{-\lambda} (G_1 + F'_1) d\xi - \int_{-\lambda}^{\lambda} F' d\xi \\ &\quad - e^{-\xi-\tau} \int_{-\lambda}^{\lambda} (G + W') e^{\xi} d\xi - \int_{\lambda}^{\xi+\tau} (G_2 + F'_2) d\xi + W(\lambda) - W(-\lambda), \\ -2 \frac{\partial \mathcal{U}_1}{\partial \xi} &= -2G_1(\xi) - 2W'_1(\xi) + F'_2(\xi + \tau) - F'_1(\xi - \tau) \\ &\quad + G_2(\xi + \tau) + G_1(\xi - \tau) - e^{-\xi-\tau} \int_{-\lambda}^{\lambda} (G + W') e^{\xi} d\xi. \end{aligned} \right.$$

Enfin l'application de l'égalité (95) redonne l'égalité (98).

5. RÉGION  $C'_1$ . — Cette région étant définie par les inégalités

$$\xi + \tau \leq -\lambda, \quad \xi - \tau \geq \lambda,$$

$\varphi_1$  doit y recevoir sa valeur (84),  $\psi_1$  sa valeur (92); d'où, en tenant compte de l'égalité (72),

$$(105) \left\{ \begin{aligned} 2\Phi_1 &= F_1(\xi + \tau) + F_2(\xi - \tau) - \int_{\xi+\tau}^{-\lambda} G_1 d\xi - e^{\xi-\tau} \int_{-\lambda}^{\lambda} (G + W') e^{-\xi} d\xi \\ &\quad - \int_{\lambda}^{\xi-\tau} G_2 d\xi + W(\lambda) - W(-\lambda), \\ -2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau} &= -F'_1(\xi + \tau) + F'_2(\xi - \tau) - G_1(\xi + \tau) - G_2(\xi - \tau) \\ &\quad - e^{\xi-\tau} \int_{-\lambda}^{\lambda} (G + W') e^{-\xi} d\xi. \end{aligned} \right.$$

Faisons, d'autre part,  $\tau_0 = -\lambda + \xi$  dans l'égalité (76) :  $\mathcal{U}_1(\xi, -\lambda + \xi)$  y recevra sa valeur déduite de la première égalité (102); tous calculs faits et en tenant compte de l'égalité (72) nous obtenons

$$(106) \quad \left\{ \begin{aligned} 2\mathcal{U}_1 &= 2W_1(\xi) + \int_{\xi+\tau}^{\xi} (G_1 + F'_1) d\xi - \int_{\xi}^{-\lambda} (G_1 - F'_1) d\xi + \int_{-\lambda}^{\lambda} F' d\xi \\ &\quad - e^{\xi-\tau} \int_{-\lambda}^{\lambda} (G + W') e^{-\xi} d\xi - \int_{\lambda}^{\xi-\tau} (G_2 - F'_2) d\xi + W(\lambda) - W(-\lambda), \\ -2 \frac{\partial \mathcal{U}_1}{\partial \xi} &= -2G_1(\xi) - 2W'_1(\xi) + F'_1(\xi + \tau) - F'_2(\xi - \tau) \\ &\quad + G_1(\xi + \tau) + G_2(\xi - \tau) + e^{\xi-\tau} \int_{-\lambda}^{\lambda} (G + W') e^{-\xi} d\xi. \end{aligned} \right.$$

Enfin l'application de l'égalité (95) redonne l'égalité (98).

Les fonctions cherchées se trouvent ainsi déterminées en tout point du milieu 1 et pour toutes les valeurs de  $\tau$ . Remarquons que, dans ce milieu, le champ électrique total conserve constamment sa valeur initiale.

#### § VI. — Expressions des fonctions $\Phi$ , $\mathcal{U}$ , $\mathcal{B}$ .

Formons maintenant les différentes expressions des fonctions

$$(74) \quad \begin{aligned} \mathcal{U} &= \varphi(\xi + \tau) + \psi(\xi - \tau), \\ \Phi &= e^{-\tau} \left[ \int_{\tau_0}^{\xi} \mathcal{U}(\xi, \tau) e^{\tau} d\tau + \Phi(\xi, \tau_0) e^{\tau_0} \right], \end{aligned}$$

dans les diverses régions du plan comprises entre les droites  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ . La fonction  $\Phi$  étant de la forme

$$(77) \quad 2\Phi = \mu(\xi + \tau) + \nu(\xi - \tau) + \sigma(\xi, \tau),$$

nous en déduisons la fonction  $\mathcal{U}$  par l'égalité

$$(78) \quad 2\mathcal{U} = 2\mathcal{U}(\xi, \tau_0) - \mu(\xi + \tau) + \nu(\xi - \tau) + \mu(\xi + \tau_0) - \nu(\xi - \tau_0) - \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} d\tau;$$

puis, du champ électrodynamique  $-\frac{\partial \Phi}{\partial \tau}$  et du champ électrostatique  $-\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \xi}$  obtenus

par une simple dérivation, nous déduirons le champ électrique total de l'égalité

$$(107) \quad \mathfrak{E} = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \xi} - \frac{\partial \Phi}{\partial \tau}.$$

1. RÉGION A. — Cette région étant définie par les inégalités

$$-\lambda \leq \xi + \tau \leq \lambda, \quad -\lambda \leq \xi - \tau \leq \lambda,$$

$\varphi$  et  $\psi$  doivent y recevoir leurs valeurs (85), d'où

$$2\mathcal{U} = F(\xi + \tau) + F(\xi - \tau) + G(\xi + \tau) + G(\xi - \tau) + \int_{\xi-\tau}^{\xi+\tau} (G + H) d\xi.$$

Faisons, d'autre part,  $\tau_0 = 0$  dans l'égalité (74); il vient

$$\Phi = e^{-\tau} \left[ \int_0^{\tau} \mathcal{U}(\xi, \tau) e^{\tau} d\tau + F(\xi) \right],$$

expression dans laquelle  $\mathcal{U}$  doit recevoir sa valeur ci-dessus. Comme on a, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau} \left[ \int_{\xi-\tau}^{\xi+\tau} (G + H) d\xi \right] e^{\tau} d\tau &= e^{\tau} \int_{\xi-\tau}^{\xi+\tau} (G + H) d\xi \\ &\quad - \int_0^{\tau} [G(\xi + \tau) + G(\xi - \tau) + H(\xi + \tau) + H(\xi - \tau)] e^{\tau} d\tau \end{aligned}$$

et, par changement de variables, des égalités telles que

$$\int_0^{\tau} F(\xi \pm \tau) e^{\tau} d\tau = \pm e^{\mp \xi} \int_{\xi}^{\xi \pm \tau} F e^{\pm \xi} d\xi,$$

l'expression de  $\Phi$  peut s'écrire

$$2\Phi = \int_{\xi-\tau}^{\xi+\tau} (G + H) d\xi + e^{-\tau} \left[ e^{-\xi} \int_{\xi}^{\xi+\tau} (F - H) e^{\xi} d\xi + e^{\xi} \int_{\xi-\tau}^{\xi} (F - H) e^{-\xi} d\xi + 2F(\xi) \right].$$

En transformant deux fois par intégration par parties les intégrales où figurent

la fonction  $F$  et en tenant compte de l'égalité (72), on obtient en définitive

$$(108) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\Phi = F(\xi + \tau) + F(\xi - \tau) - W(\xi + \tau) + W(\xi - \tau) \\ \quad + e^{\xi-\tau} \int_{\xi-\tau}^{\xi} (G + W') e^{-\xi} d\xi + e^{-\xi-\tau} \int_{\xi}^{\xi+\tau} (G + W') e^{\xi} d\xi, \\ -2 \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = -F'(\xi + \tau) + F'(\xi - \tau) - G(\xi + \tau) - G(\xi - \tau) \\ \quad + e^{\xi-\tau} \int_{\xi-\tau}^{\xi} (G + W') e^{-\xi} d\xi + e^{-\xi-\tau} \int_{\xi}^{\xi+\tau} (G + W') e^{\xi} d\xi. \end{array} \right.$$

Passons au calcul de  $\mathcal{V}$  : en comparant l'égalité (77) à la première des égalités (108), on voit qu'on peut poser

$$\begin{aligned} \mu(\xi + \tau) &= F(\xi + \tau) - W(\xi + \tau), \\ \nu(\xi - \tau) &= F(\xi - \tau) + W(\xi - \tau), \\ \sigma(\xi, \tau) &= e^{\xi-\tau} \int_{\xi-\tau}^{\xi} (G + W') e^{-\xi} d\xi + e^{-\xi-\tau} \int_{\xi}^{\xi+\tau} (G + W') e^{\xi} d\xi. \end{aligned}$$

Faisons, d'autre part,  $\tau_0 = 0$  dans l'égalité (78); en intégrant par parties, on obtient

$$\int_0^{\tau} \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} d\tau = -e^{\xi-\tau} \int_{\xi-\tau}^{\xi} (G + W') e^{-\xi} d\xi + e^{-\xi-\tau} \int_{\xi}^{\xi+\tau} (G + W') e^{\xi} d\xi,$$

d'où finalement

$$(109) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\mathcal{V} = W(\xi + \tau) + W(\xi - \tau) - \int_{\xi-\tau}^{\xi+\tau} F' d\xi + e^{\xi-\tau} \int_{\xi-\tau}^{\xi} (G + W') e^{-\xi} d\xi \\ \quad - e^{-\xi-\tau} \int_{\xi}^{\xi+\tau} (G + W') e^{\xi} d\xi, \\ -2 \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \xi} = -2[G(\xi) + W'(\xi)] e^{-\tau} + F'(\xi + \tau) - F'(\xi - \tau) + G(\xi + \tau) + G(\xi - \tau) \\ \quad - e^{\xi-\tau} \int_{\xi-\tau}^{\xi} (G + W') e^{-\xi} d\xi - e^{-\xi-\tau} \int_{\xi}^{\xi+\tau} (G + W') e^{\xi} d\xi. \end{array} \right.$$

L'égalité (107) donne enfin

$$(110) \quad \mathcal{X} = -[G(\xi) + W'(\xi)] e^{-\tau}.$$

2. RÉGION B. — Cette région étant définie par les inégalités

$$\xi + \tau \geq \lambda, \quad -\lambda \leq \xi - \tau \leq \lambda,$$

$\varphi$  doit y recevoir sa valeur (90),  $\psi$  sa valeur (85), d'où

$$\begin{aligned} 2\mathcal{U} = & F(\xi - \tau) + F_2(\xi + \tau) + F'_2(\xi + \tau) + G(\xi - \tau) + G_2(\xi + \tau) \\ & + \int_{\xi-\lambda}^{\lambda} (G + H) d\xi + \int_{\lambda}^{\xi+\tau} G_2 d\xi - F'_2(\lambda). \end{aligned}$$

Faisons, d'autre part,  $\tau_0 = \lambda - \xi$  dans l'égalité (74); il vient

$$\Phi = e^{-\tau} \left[ \int_{\lambda-\xi}^{\xi} \mathcal{U}(\xi, \tau) e^{\tau} d\tau + \Phi(\xi, \lambda - \xi) e^{\lambda - \xi} \right],$$

expression dans laquelle  $\mathcal{U}$  doit recevoir sa valeur ci-dessus et  $\Phi(\xi, \lambda - \xi)$  sa valeur déduite de la première égalité (108). Par des transformations d'intégrales analogues aux précédentes et en tenant compte de l'égalité (72), on obtient tous calculs faits

$$(111) \quad \left\{ \begin{aligned} 2\Phi = & F(\xi - \tau) + F_2(\xi + \tau) + W(\xi - \tau) \\ & + e^{\xi - \tau} \int_{\xi - \tau}^{\xi} (G + W') e^{-\xi} d\xi + e^{-\xi - \tau} \int_{\xi}^{\lambda} (G + W') e^{\xi} d\xi + \int_{\lambda}^{\xi + \tau} G_2 d\xi - W(\lambda), \\ -2 \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = & F'(\xi - \tau) - F'_2(\xi + \tau) - G(\xi - \tau) - G_2(\xi + \tau) \\ & + e^{\xi - \tau} \int_{\xi - \tau}^{\xi} (G + W') e^{-\xi} d\xi + e^{-\xi - \tau} \int_{\xi}^{\lambda} (G + W') e^{\xi} d\xi. \end{aligned} \right.$$

Passons au calcul de  $\mathcal{V}$  : en comparant l'égalité (77) à la première des égalités (111), on voit qu'on peut poser

$$\begin{aligned} \mu(\xi + \tau) &= F_2(\xi + \tau) + \int_{\lambda}^{\xi + \tau} G_2 d\xi, \\ \nu(\xi - \tau) &= F(\xi - \tau) + W(\xi - \tau) - W(\lambda), \\ \sigma(\xi, \tau) &= e^{\xi - \tau} \int_{\xi - \tau}^{\xi} (G + W') e^{-\xi} d\xi + e^{-\xi - \tau} \int_{\xi}^{\lambda} (G + W') e^{\xi} d\xi. \end{aligned}$$

Faisons, d'autre part,  $\tau_0 = \lambda - \xi$  dans l'égalité (78) :  $\mathcal{V}(\xi, \lambda - \xi)$  y recevra





Passons au calcul de  $\mathcal{V}$  : en comparant l'égalité (77) à la première des égalités (113), on voit qu'on peut poser

$$\begin{aligned}\mu(\xi + \tau) &= F(\xi + \tau) - W(\xi + \tau) + W(\lambda), \\ \nu(\xi - \tau) &= F_2(\xi - \tau) - \int_{\lambda}^{\xi - \tau} G_2 d\xi, \\ \sigma(\xi, \tau) &= -e^{\xi - \tau} \int_{\xi}^{\lambda} (G + W') e^{-\xi} d\xi + e^{-\xi - \tau} \int_{\xi}^{\xi + \tau} (G + W') e^{\xi} d\xi.\end{aligned}$$

Faisons, d'autre part,  $\tau_0 = -\lambda + \xi$  dans l'égalité (78) :  $\mathcal{V}(\xi, -\lambda + \xi)$  y recevra sa valeur déduite de la première égalité (109); en intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{-\lambda + \xi}^{\tau} \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} d\tau &= e^{-\xi - \tau} \int_{\xi}^{\xi + \tau} (G + W') e^{\xi} d\xi + e^{\lambda - \xi} \int_{-\lambda + \xi}^{\xi} (G + W') e^{\xi} d\xi \\ &\quad + (e^{\xi - \tau} - e^{\lambda}) \int_{\xi}^{\lambda} (G + W') e^{-\xi} d\xi,\end{aligned}$$

d'où

$$(114) \quad \left\{ \begin{aligned} 2\mathcal{V} &= W(\xi + \tau) + \int_{\xi + \tau}^{\lambda} F' d\xi - \int_{\lambda}^{\xi - \tau} (G_2 - F'_2) d\xi \\ &\quad + e^{-\xi - \tau} \int_{\xi + \tau}^{\xi} (G + W') e^{\xi} d\xi - e^{\xi - \tau} \int_{\xi}^{\lambda} (G + W') e^{-\xi} d\xi + W(\lambda), \\ -2 \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \xi} &= -2[G(\xi) + W'(\xi)] e^{-\tau} + F'(\xi + \tau) - F'_2(\xi - \tau) + G(\xi + \tau) + G_2(\xi - \tau) \\ &\quad + e^{-\xi - \tau} \int_{\xi + \tau}^{\xi} (G + W') e^{\xi} d\xi + e^{\xi - \tau} \int_{\xi}^{\lambda} (G + W') e^{-\xi} d\xi. \end{aligned} \right.$$

L'égalité (107) redonne enfin l'égalité (110).

4. RÉGION —B. — Cette région étant définie par les inégalités

$$-\lambda \leq \xi + \tau \leq \lambda, \quad \xi - \tau \leq -\lambda,$$

$\varphi$  doit y recevoir sa valeur (85),  $\psi$  sa valeur (89), d'où

$$\begin{aligned} 2\mathcal{U} &= F_1(\xi - \tau) - F'_1(\xi - \tau) + F(\xi + \tau) + G_1(\xi - \tau) + G(\xi + \tau) \\ &\quad + \int_{\xi - \tau}^{-\lambda} G_1 d\xi + \int_{-\lambda}^{\xi + \tau} (G + H) d\xi + F'_1(-\lambda). \end{aligned}$$

Faisons, d'autre part,  $\tau_0 = \lambda + \xi$  dans l'égalité (74); il vient

$$\Phi = e^{-\tau} \left[ \int_{\lambda+\xi}^{\xi} \mathcal{U}(\xi, \tau) e^{\tau} d\tau + \Phi(\xi, \lambda + \xi) e^{\lambda+\xi} \right],$$

expression dans laquelle  $\mathcal{U}$  doit recevoir sa valeur ci-dessus et  $\Phi(\xi, \lambda + \xi)$  sa valeur déduite de la première égalité (108). Tous calculs faits et en tenant compte de l'égalité (72), nous obtenons

$$(115) \left\{ \begin{aligned} 2\Phi &= F_1(\xi - \tau) + F(\xi + \tau) - W(\xi + \tau) + \int_{\xi-\tau}^{-\lambda} G_1 d\xi \\ &\quad + e^{\xi-\tau} \int_{-\lambda}^{\xi} (G + W') e^{-\xi} d\xi + e^{-\xi-\tau} \int_{\xi}^{\xi+\tau} (G + W') e^{\xi} d\xi + W(-\lambda), \\ -2 \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} &= F'_1(\xi - \tau) - F'(\xi + \tau) - G_1(\xi - \tau) - G(\xi + \tau) \\ &\quad + e^{\xi-\tau} \int_{-\lambda}^{\xi} (G + W') e^{-\xi} d\xi + e^{-\xi-\tau} \int_{\xi}^{\xi+\tau} (G + W') e^{\xi} d\xi. \end{aligned} \right.$$

Passons au calcul de  $\mathcal{V}$  : en comparant l'égalité (77) à la première des égalités (115), on voit qu'on peut poser

$$\begin{aligned} \mu(\xi + \tau) &= F(\xi + \tau) - W(\xi + \tau) + W(-\lambda), \\ \nu(\xi - \tau) &= F_1(\xi - \tau) + \int_{\xi-\tau}^{-\lambda} G_1 d\xi, \\ \sigma(\xi, \tau) &= e^{\xi-\tau} \int_{-\lambda}^{\xi} (G + W') e^{-\xi} d\xi + e^{-\xi-\tau} \int_{\xi}^{\xi+\tau} (G + W') e^{\xi} d\xi. \end{aligned}$$

Faisons, d'autre part,  $\tau_0 = \lambda + \xi$  dans l'égalité (78) :  $\mathcal{V}(\xi, \lambda + \xi)$  y recevra sa valeur déduite de la première égalité (109); en intégrant par parties, on obtient

$$\int_{\lambda+\xi}^{\tau} \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} d\tau = e^{-\xi-\tau} \int_{\xi}^{\xi+\tau} (G + W') e^{\xi} d\xi - e^{-\lambda-\xi} \int_{\xi}^{\lambda+\xi} (G + W') e^{\xi} d\xi - (e^{\xi-\tau} - e^{-\lambda}) \int_{-\lambda}^{\xi} (G + W') e^{-\xi} d\xi,$$

d'où

$$(116) \left\{ \begin{aligned} 2\mathcal{V} &= W(\xi + \tau) + \int_{\xi-\tau}^{-\lambda} (G_1 - F'_1) d\xi - \int_{-\lambda}^{\xi+\tau} F' d\xi \\ &\quad + e^{\xi-\tau} \int_{-\lambda}^{\xi} (G + W') e^{-\xi} d\xi - e^{-\xi-\tau} \int_{\xi}^{\xi+\tau} (G + W') e^{\xi} d\xi + W(-\lambda), \\ -2 \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \xi} &= -2 [G(\xi) + W'(\xi)] e^{-\tau} - F'_1(\xi - \tau) + F'(\xi + \tau) + G_1(\xi - \tau) + G(\xi + \tau) \\ &\quad - e^{\xi-\tau} \int_{-\lambda}^{\xi} (G + W') e^{-\xi} d\xi - e^{-\xi-\tau} \int_{\xi}^{\xi+\tau} (G + W') e^{\xi} d\xi. \end{aligned} \right.$$

L'égalité (107) redonne enfin l'égalité (110).

5. RÉGION —B'. — Cette région étant définie par les inégalités

$$\xi + \tau \leq -\lambda, \quad -\lambda \leq \xi - \tau \leq \lambda,$$

$\varphi$  doit y recevoir sa valeur (89),  $\psi$  sa valeur (85), d'où

$$\begin{aligned} 2\mathcal{U} = & F_1(\xi + \tau) + F'_1(\xi + \tau) + F(\xi - \tau) + G_1(\xi + \tau) + G(\xi - \tau) \\ & - \int_{\xi+\tau}^{-\lambda} G_1 d\xi - \int_{-\lambda}^{\xi-\tau} (G + H) d\xi - F'_1(-\lambda). \end{aligned}$$

Faisons, d'autre part,  $\tau_0 = -\lambda - \xi$  dans l'égalité (74); il vient

$$\Phi = e^{-\tau} \left[ \int_{-\lambda-\xi}^{\xi} \mathcal{U}(\xi, \tau) e^{\tau} d\tau + \Phi(\xi, -\lambda - \xi) e^{-\lambda-\xi} \right],$$

expression dans laquelle  $\mathcal{U}$  doit recevoir sa valeur ci-dessus et  $\Phi(\xi, -\lambda - \xi)$  sa valeur déduite de la première égalité (108). Tous calculs faits et en tenant compte de l'égalité (72), nous obtenons

$$(117) \quad \left\{ \begin{aligned} 2\Phi &= F_1(\xi + \tau) + F(\xi - \tau) + W(\xi - \tau) \\ &\quad - \int_{\xi+\tau}^{-\lambda} G_1 d\xi - e^{-\xi-\tau} \int_{-\lambda}^{\xi} (G + W') e^{\xi} d\xi - e^{\xi-\tau} \int_{\xi}^{\xi-\tau} (G + W') e^{-\xi} d\xi - W(-\lambda), \\ -2 \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} &= -F'_1(\xi + \tau) + F'(\xi - \tau) - G_1(\xi + \tau) - G(\xi - \tau) \\ &\quad - e^{-\xi-\tau} \int_{-\lambda}^{\xi} (G + W') e^{\xi} d\xi - e^{\xi-\tau} \int_{\xi}^{\xi-\tau} (G + W') e^{-\xi} d\xi. \end{aligned} \right.$$

Passons au calcul de  $\mathcal{V}$  : en comparant l'égalité (77) à la première des égalités (117), on voit qu'on peut poser

$$\begin{aligned} \mu(\xi + \tau) &= F_1(\xi + \tau) - \int_{\xi+\tau}^{-\lambda} G_1 d\xi, \\ \nu(\xi - \tau) &= F(\xi - \tau) + W(\xi - \tau) - W(-\lambda), \\ \sigma(\xi, \tau) &= -e^{-\xi-\tau} \int_{-\lambda}^{\xi} (G + W') e^{\xi} d\xi - e^{\xi-\tau} \int_{\xi}^{\xi-\tau} (G + W') e^{-\xi} d\xi. \end{aligned}$$

Faisons, d'autre part,  $\tau_0 = -\lambda - \xi$  dans l'égalité (78) :  $\mathcal{V}(\xi, -\lambda - \xi)$  y recevra

sa valeur déduite de la première égalité (109); en intégrant par parties, on obtient

$$\int_{-\lambda-\xi}^{\tau} \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} d\tau = e^{\xi-\tau} \int_{\xi}^{\xi-\tau} (G + W') e^{-\xi} d\xi - e^{\lambda+\xi} \int_{\xi}^{\lambda+\xi} (G + W') e^{-\xi} d\xi \\ - (e^{\xi-\tau} - e^{\lambda}) \int_{-\lambda}^{\xi} (G + W') e^{-\xi} d\xi,$$

d'où

$$(118) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\mathcal{U} = W(\xi - \tau) + \int_{\xi+\tau}^{-\lambda} (G_1 + F'_1) d\xi + \int_{-\lambda}^{\xi-\tau} F'_1 d\xi \\ \quad + e^{-\xi-\tau} \int_{-\lambda}^{\xi} (G + W') e^{\xi} d\xi - e^{\xi-\tau} \int_{\xi}^{\xi-\tau} (G + W') e^{-\xi} d\xi + W(-\lambda), \\ -2 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \xi} = -2[G(\xi) + W'(\xi)]e^{-\tau} + F'_1(\xi + \tau) - F'_1(\xi - \tau) + G_1(\xi + \tau) + G(\xi - \tau) \\ \quad + e^{-\xi-\tau} \int_{-\lambda}^{\xi} (G + W') e^{\xi} d\xi + e^{\xi-\tau} \int_{\xi}^{\xi-\tau} (G + W') e^{-\xi} d\xi. \end{array} \right.$$

L'égalité (107) redonne enfin l'égalité (110).

6. RÉGION C. — Cette région étant définie par les inégalités

$$\xi + \tau \geq \lambda, \quad \xi - \tau \leq \lambda,$$

$\varphi$  doit y recevoir sa valeur (90),  $\psi$  sa valeur (89), d'où

$$2\mathcal{U} = F_1(\xi - \tau) - F'_1(\xi - \tau) + F_2(\xi + \tau) + F'_2(\xi + \tau) + G_1(\xi - \tau) + G_2(\xi + \tau) \\ + \int_{\xi-\tau}^{-\lambda} G_1 d\xi + \int_{-\lambda}^{\lambda} (G + H - F'') d\xi + \int_{\lambda}^{\xi+\tau} G_2 d\xi.$$

Faisons, d'autre part,  $\tau_0 = \lambda + \xi$  dans l'égalité (74); il vient

$$\Phi = e^{-\tau} \left[ \int_{\lambda+\xi}^{\xi} \mathcal{U}(\xi, \tau) e^{\tau} d\tau + \Phi(\xi, \lambda + \xi) e^{\lambda+\xi} \right],$$

expression dans laquelle  $\mathcal{U}$  doit recevoir sa valeur ci-dessus et  $\Phi(\xi, \lambda + \xi)$  sa valeur déduite de la première égalité (111). Tous calculs faits et en tenant compte de l'éga-

lité (72), nous obtenons

$$(119) \left\{ \begin{aligned} 2\Phi &= F_1(\xi - \tau) + F_2(\xi + \tau) + \int_{\xi - \tau}^{-\lambda} G_1 d\xi + e^{\xi - \tau} \int_{-\lambda}^{\xi} (G + W') e^{-\xi} d\xi \\ &\quad + e^{-\xi - \tau} \int_{\xi}^{\lambda} (G + W') e^{\xi} d\xi + \int_{\lambda}^{\xi + \tau} G_2 d\xi + W(-\lambda) - W(\lambda), \\ -2 \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} &= F'_1(\xi - \tau) - F'_2(\xi + \tau) - G_1(\xi - \tau) - G_2(\xi + \tau) \\ &\quad + e^{\xi - \tau} \int_{-\lambda}^{\xi} (G + W') e^{-\xi} d\xi + e^{-\xi - \tau} \int_{\xi}^{\lambda} (G + W') e^{\xi} d\xi. \end{aligned} \right.$$

Passons au calcul de  $\mathcal{V}$  : en comparant l'égalité (77) à la première égalité (119), on voit qu'on peut poser

$$\begin{aligned} \mu(\xi + \tau) &= F_2(\xi + \tau) + \int_{\lambda}^{\xi + \tau} G_2 d\xi - W(\lambda), \\ \nu(\xi - \tau) &= F_1(\xi - \tau) + \int_{\xi - \tau}^{-\lambda} G_1 d\xi + W(-\lambda), \\ \sigma(\xi, \tau) &= e^{\xi - \tau} \int_{-\lambda}^{\xi} (G + W') e^{-\xi} d\xi + e^{-\xi - \tau} \int_{\xi}^{\lambda} (G + W') e^{\xi} d\xi. \end{aligned}$$

Faisons, d'autre part,  $\tau_0 = \lambda + \xi$  dans l'égalité (78) :  $\mathcal{V}(\xi, \lambda + \xi)$  y recevra sa valeur déduite de la première égalité (112); en intégrant par parties, on obtient

$$\int_{\lambda + \xi}^{\tau} \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} d\tau = -(e^{\xi - \tau} - e^{-\lambda}) \int_{-\lambda}^{\xi} (G + W') e^{-\xi} d\xi + (e^{-\xi - \tau} - e^{-\lambda - \xi}) \int_{\xi}^{\lambda} (G + W') e^{\xi} d\xi,$$

d'où

$$(120) \left\{ \begin{aligned} 2\mathcal{V} &= \int_{\xi - \tau}^{-\lambda} (G_1 - F'_1) d\xi - \int_{-\lambda}^{\lambda} F' d\xi - \int_{\lambda}^{\xi + \tau} (G_2 + F'_2) d\xi \\ &\quad + e^{\xi - \tau} \int_{-\lambda}^{\xi} (G + W') e^{-\xi} d\xi - e^{-\xi - \tau} \int_{\xi}^{\lambda} (G + W') e^{\xi} d\xi + W(-\lambda) + W(\lambda), \\ -2 \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \xi} &= -2[G(\xi) + W'(\xi)] e^{-\tau} - F'_1(\xi - \tau) + F'_2(\xi + \tau) + G_1(\xi - \tau) + G_2(\xi + \tau) \\ &\quad - e^{\xi - \tau} \int_{-\lambda}^{\xi} (G + W') e^{-\xi} d\xi - e^{-\xi - \tau} \int_{\xi}^{\lambda} (G + W') e^{\xi} d\xi. \end{aligned} \right.$$

L'égalité (107) redonne enfin l'égalité (110).

7. RÉGION C'. — Cette région étant définie par les inégalités

$$\xi + \tau \leq -\lambda, \quad \xi - \tau \geq \lambda,$$

$\varphi$  doit y recevoir sa valeur (89),  $\psi$  sa valeur (90), d'où

$$2\mathcal{U} = F_1(\xi + \tau) + F'_1(\xi + \tau) + F_2(\xi - \tau) - F'_2(\xi - \tau) + G_1(\xi + \tau) + G_2(\xi - \tau) \\ - \int_{\xi+\tau}^{-\lambda} G_1 d\xi - \int_{-\lambda}^{\lambda} (G + H - F'') d\xi - \int_{\lambda}^{\xi-\tau} G_2 d\xi.$$

Faisons, d'autre part,  $\tau_0 = -\lambda - \xi$  dans l'égalité (74); il vient

$$\Phi = e^{-\tau} \left[ \int_{-\lambda-\xi}^{\xi} \mathcal{U}(\xi, \tau) e^{\tau} d\tau + \Phi(\xi, -\lambda - \xi) e^{-\lambda - \xi} \right],$$

expression dans laquelle  $\mathcal{U}$  doit recevoir sa valeur ci-dessus et  $\Phi(\xi, -\lambda - \xi)$  sa valeur déduite de la première égalité (113). Tous calculs faits et en tenant compte de l'égalité (72), nous obtenons

$$(121) \left\{ \begin{array}{l} 2\Phi = F_1(\xi + \tau) + F_2(\xi - \tau) - \int_{\xi+\tau}^{-\lambda} G_1 d\xi - e^{-\xi-\tau} \int_{-\lambda}^{\xi} (G + W') e^{\xi} d\xi \\ \quad - e^{\xi-\tau} \int_{\xi}^{\lambda} (G + W') e^{-\xi} d\xi - \int_{\lambda}^{\xi-\tau} G_2 d\xi - W(-\lambda) + W(\lambda), \\ -2 \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = F'_1(\xi + \tau) + F'_2(\xi - \tau) - G_1(\xi + \tau) - G_2(\xi - \tau) \\ \quad - e^{-\xi-\tau} \int_{-\lambda}^{\xi} (G + W') e^{\xi} d\xi - e^{\xi-\tau} \int_{\xi}^{\lambda} (G + W') e^{-\xi} d\xi. \end{array} \right.$$

Passons au calcul de  $\mathcal{V}$ : en comparant l'égalité (77) à la première égalité (121), on voit qu'on peut poser

$$\mu(\xi + \tau) = F_1(\xi + \tau) - \int_{\xi+\tau}^{-\lambda} G_1 d\xi + W(\lambda),$$

$$\nu(\xi - \tau) = F_2(\xi - \tau) - \int_{\lambda}^{\xi-\tau} G_2 d\xi - W(-\lambda),$$

$$\sigma(\xi, \tau) = -e^{-\xi-\tau} \int_{-\lambda}^{\xi} (G + W') e^{\xi} d\xi - e^{\xi-\tau} \int_{\xi}^{\lambda} (G + W') e^{-\xi} d\xi.$$

Faisons, d'autre part,  $\tau_0 = -\lambda - \xi$  dans l'égalité (78):  $\mathcal{V}(\xi, -\lambda - \xi)$  y recevra

sa valeur déduite de la première égalité (114); en intégrant par parties, on obtient

$$\int_{-\lambda-\xi}^{\tau} \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} d\tau = -(e^{-\xi-\tau} - e^{\lambda}) \int_{-\lambda}^{\xi} (G + W') e^{\xi} d\xi + (e^{\xi-\tau} - e^{\lambda+\xi}) \int_{\xi}^{\lambda} (G + W') e^{-\xi} d\xi,$$

d'où

$$(122) \quad \left\{ \begin{aligned} 2\mathcal{V} &= \int_{\xi+\tau}^{-\lambda} (G_1 + F') d\xi + \int_{-\lambda}^{\lambda} F' d\xi - \int_{\lambda}^{\xi-\tau} (G_2 - F_2) d\xi \\ &\quad + e^{-\xi-\tau} \int_{-\lambda}^{\xi} (G + W') e^{\xi} d\xi - e^{\xi-\tau} \int_{\xi}^{\lambda} (G + W') e^{-\xi} d\xi + W(-\lambda) + W(\lambda), \\ -2 \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \xi} &= -2[G(\xi) + W'(\xi)] e^{-\tau} - F'_1(\xi + \tau) - F'_2(\xi - \tau) + G_1(\xi + \tau) + G_2(\xi - \tau) \\ &\quad + e^{-\xi-\tau} \int_{-\lambda}^{\xi} (G + W') e^{\xi} d\xi + e^{\xi-\tau} \int_{\xi}^{\lambda} (G + W') e^{-\xi} d\xi. \end{aligned} \right.$$

L'égalité (107) redonne enfin l'égalité (110).

Les fonctions cherchées se trouvent ainsi déterminées en tout point du mur et pour toutes les valeurs de  $\tau$ . Remarquons que, dans ce milieu, le champ électrique total a la même expression dans les différentes régions qui lui correspondent.

### § VII. — Expressions des fonctions $\Phi_2$ , $\mathcal{V}_2$ , $\mathcal{K}_2$ .

Formons enfin les différentes expressions des fonctions

$$(79) \quad \begin{aligned} \Phi_2 &= \varphi_2(\xi + \tau) + \psi_2(\xi - \tau), \\ \mathcal{V}_2 &= \mathcal{V}_2(\xi, \tau_0) - \varphi_2(\xi + \tau) + \psi_2(\xi - \tau) + \varphi_2(\xi + \tau_0) - \psi_2(\xi - \tau_0) \end{aligned}$$

dans les diverses régions du plan situées à droite de  $\Delta_2$ . Nous en déduisons par une simple dérivation le champ électrodynamique  $-\frac{\partial \Phi_2}{\partial \tau}$  et le champ électrostatique  $-\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial \xi}$ , puis le champ électrique total par l'égalité

$$(123) \quad \mathcal{K}_2 = -\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial \xi} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial \tau}.$$

1. RÉGION  $A_2$ . — Cette région étant définie par les inégalités

$$\xi + \tau \geq \lambda, \quad \xi - \tau \geq \lambda,$$





de l'égalité (72), nous obtenons

$$(128) \left\{ \begin{aligned} 2\mathcal{V}_2 &= 2W_2(\xi) + W(\xi - \tau) - \int_{\xi-\tau}^{\lambda} F' d\xi + \int_{\lambda}^{\xi} (G_2 - F'_2) d\xi \\ &\quad - \int_{\xi}^{\xi+\tau} (G_2 + F'_2) d\xi + e^{\xi-\tau} \int_{\xi-\tau}^{\lambda} (G + W') e^{-\xi} d\xi - W(\lambda), \\ -2 \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial \xi} &= -2G_2(\xi) - 2W'_2(\xi) - F'(\xi - \tau) + F'_2(\xi + \tau) + G(\xi - \tau) + G_2(\xi + \tau) \\ &\quad - e^{\xi-\tau} \int_{\xi-\tau}^{\lambda} (G + W') e^{-\xi} d\xi. \end{aligned} \right.$$

Enfin l'application de l'égalité (123) redonne l'égalité (126).

3. RÉGION  $B'_2$ . — Cette région étant définie par les inégalités

$$-\lambda \leq \xi + \tau \leq \lambda, \quad \xi - \tau \geq \lambda,$$

$\varphi_2$  doit y recevoir sa valeur (93),  $\psi_2$  sa valeur (86), d'où, en tenant compte de l'égalité (72),

$$(129) \left\{ \begin{aligned} 2\Phi_2 &= F(\xi + \tau) + F_2(\xi - \tau) - W(\xi + \tau) \\ &\quad - e^{-\xi-\tau} \int_{\xi+\tau}^{\lambda} (G + W') e^{\xi} d\xi - \int_{\lambda}^{\xi-\tau} G_2 d\xi + W(\lambda), \\ -2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \tau} &= -F'(\xi + \tau) + F'_2(\xi - \tau) - G(\xi + \tau) - G_2(\xi - \tau) \\ &\quad - e^{-\xi-\tau} \int_{\xi+\tau}^{\lambda} (G + W') e^{\xi} d\xi. \end{aligned} \right.$$

Faisons, d'autre part,  $\tau_0 = \lambda - \xi$  dans l'égalité (79) :  $\mathcal{V}_2(\xi, \lambda - \xi)$  y recevra sa valeur déduite de la première égalité (125); tous calculs faits et en tenant compte de l'égalité (72), nous obtenons

$$(130) \left\{ \begin{aligned} 2\mathcal{V}_2 &= 2W_2(\xi) + W(\xi + \tau) + \int_{\xi+\tau}^{\lambda} F' d\xi + \int_{\lambda}^{\xi} (G_2 + F'_2) d\xi \\ &\quad - \int_{\xi}^{\xi-\tau} (G_2 - F'_2) d\xi + e^{-\xi-\tau} \int_{\xi+\tau}^{\lambda} (G + W') e^{\xi} d\xi - W(\lambda), \\ -2 \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial \xi} &= -2G_2(\xi) - 2W'_2(\xi) + F'(\xi + \tau) - F'_2(\xi - \tau) + G(\xi + \tau) + G_2(\xi - \tau) \\ &\quad + e^{-\xi-\tau} \int_{\xi+\tau}^{\lambda} (G + W') e^{\xi} d\xi. \end{aligned} \right.$$

Enfin l'application de l'égalité (123) redonne l'égalité (126).

4. RÉGION  $C_2$ . — Cette région étant définie par les inégalités

$$\xi + \tau \geq \lambda, \quad \xi - \tau \leq -\lambda,$$

$\varphi_2$  doit y recevoir sa valeur (86),  $\psi_2$  sa valeur (94), d'où, en tenant compte de l'égalité (72),

$$(131) \left\{ \begin{aligned} 2\Phi_2 &= F_1(\xi - \tau) + F_2(\xi + \tau) + \int_{\xi - \tau}^{-\lambda} G_1 d\xi + e^{\xi - \tau} \int_{-\lambda}^{\lambda} (G + W) e^{-\xi} d\xi \\ &\quad + \int_{\lambda}^{\xi + \tau} G_2 d\xi + W(-\lambda) - W(\lambda), \\ -2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \tau} &= F'_1(\xi - \tau) - F'_2(\xi + \tau) - G_1(\xi - \tau) - G_2(\xi + \tau) \\ &\quad + e^{\xi - \tau} \int_{-\lambda}^{\lambda} (G + W) e^{-\xi} d\xi. \end{aligned} \right.$$

Faisons, d'autre part,  $\tau_0 = \lambda + \xi$  dans l'égalité (79) :  $\mathcal{U}_2(\xi, \lambda + \xi)$  y recevra sa valeur déduite de la première égalité (128); tous calculs faits et en tenant compte de l'égalité (72), nous obtenons

$$(132) \left\{ \begin{aligned} 2\mathcal{U}_2 &= 2W_2(\xi) + \int_{\xi - \tau}^{-\lambda} (G_1 - F'_1) d\xi - \int_{-\lambda}^{\lambda} F'_1 d\xi + \int_{\lambda}^{\xi} (G_2 - F'_2) d\xi \\ &\quad - \int_{\xi}^{\xi + \tau} (G_2 + F'_2) d\xi + e^{\xi - \tau} \int_{-\lambda}^{\lambda} (G + W) e^{-\xi} d\xi + W(-\lambda) - W(\lambda), \\ -2 \frac{\partial \mathcal{U}_2}{\partial \xi} &= -2G_2(\xi) - 2W'_2(\xi) - F'_1(\xi - \tau) + F'_2(\xi + \tau) + G_1(\xi - \tau) + G_2(\xi + \tau) \\ &\quad - e^{\xi - \tau} \int_{-\lambda}^{\lambda} (G + W) e^{-\xi} d\xi. \end{aligned} \right.$$

Enfin l'application de l'égalité (123) redonne l'égalité (126).

5. RÉGION  $C'_2$ . — Cette région étant définie par les inégalités

$$\xi + \tau \leq -\lambda, \quad \xi - \tau \geq \lambda,$$

$\varphi_2$  doit y recevoir sa valeur (94),  $\psi_2$  sa valeur (86), d'où, en tenant compte de l'égalité (72),

$$(133) \left\{ \begin{aligned} 2\Phi_2 &= F_1(\xi + \tau) + F_2(\xi - \tau) - \int_{\xi + \tau}^{-\lambda} G_1 d\xi - e^{\xi - \tau} \int_{-\lambda}^{\lambda} (G + W) e^{\xi} d\xi \\ &\quad - \int_{\lambda}^{\xi - \tau} G_2 d\xi - W(-\lambda) + W(\lambda), \\ -2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \tau} &= -F'_1(\xi + \tau) + F'_2(\xi - \tau) - G_1(\xi + \tau) - G_2(\xi - \tau) \\ &\quad - e^{\xi - \tau} \int_{-\lambda}^{\lambda} (G + W) e^{\xi} d\xi. \end{aligned} \right.$$

Faisons, d'autre part,  $\tau_0 = -\lambda - \xi$  dans l'égalité (79) :  $\mathcal{V}_2(\xi, -\lambda - \xi)$  y recevra sa valeur déduite de la première égalité (130); tous calculs faits et en tenant compte de l'égalité (72), nous obtenons

$$(134) \left\{ \begin{aligned} \mathcal{V}_2 &= \mathcal{W}_2(\xi) + \int_{\xi+\tau}^{-\lambda} (G_1 + F_1') d\xi + \int_{-\lambda}^{\lambda} F_1' d\xi + \int_{\lambda}^{\xi} (G_2 + F_2') d\xi \\ &\quad - \int_{\xi}^{\xi-\tau} (G_2 - F_2') d\xi + e^{-\xi-\tau} \int_{-\lambda}^{\lambda} (G + W') e^{\xi} d\xi + W(-\lambda) - W(\lambda), \\ -2 \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial \xi} &= -2G_1(\xi) - 2W_1'(\xi) + F_1'(\xi + \tau) - F_1'(\xi - \tau) + G_1(\xi + \tau) + G_2(\xi - \tau) \\ &\quad + e^{-\xi-\tau} \int_{-\lambda}^{\lambda} (G + W') e^{\xi} d\xi. \end{aligned} \right.$$

Enfin l'application de l'égalité (123) redonne l'égalité (126).

Les fonctions cherchées se trouvent ainsi déterminées en tout point du milieu  $\alpha$  et pour toutes les valeurs de  $\tau$ . Remarquons que, dans ce milieu, le champ électrique total conserve constamment sa valeur initiale.

#### § VIII. — Calcul direct du champ électrique total.

Les expressions très simples (98), (110), (126) auxquelles nous sommes parvenus pour le champ électrique total peuvent s'obtenir directement et presque sans calcul de la manière suivante :

Dérivons par rapport à  $\tau$  les deux membres de l'égalité (95); en tenant compte de l'équation (66), il vient

$$\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial \tau} = - \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial \tau} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \right).$$

Mais, la parenthèse du second membre est nulle d'après la première équation (75), on a donc aussi

$$\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial \tau} = 0,$$

d'où, en intégrant, l'expression (98).

Un calcul analogue au précédent donne de même

$$\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial \xi} = 0,$$

d'où il résulte que  $\mathcal{K}_1$  est constant et qu'on a la relation

$$W'_1(\xi) + G'_1(\xi) = 0,$$

d'après laquelle les fonctions  $W_1$  et  $G_1$  ne sont pas entièrement arbitraires. Ceci est un cas particulier de ce que nous avons vu (ch. I, § vi) au sujet des conséquences de l'hypothèse de Faraday et de Mossotti appliquée aux milieux non conducteurs.

Les mêmes considérations s'appliquent à la fonction  $\mathcal{K}_2$ .

Dérivons maintenant par rapport à  $\tau$  les deux membres de l'égalité (107); en tenant compte de la deuxième équation (75), il vient

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2}.$$

Mais, d'après la transformée de l'égalité (62)

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} = \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \xi}$$

et l'égalité (107), on a

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} = -\mathcal{K},$$

par suite

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \tau} + \mathcal{K} = 0,$$

ce qui, en intégrant, redonne précisément l'expression (110).

#### § IX. — Expressions de la différence de potentiel entre les faces du mur.

En vertu de la continuité du potentiel électrique à la traversée des deux faces du mur, la différence de potentiel entre ces deux faces peut se calculer en formant l'une ou l'autre des expressions

$$\mathcal{V}(-\lambda, \tau) - \mathcal{V}(\lambda, \tau), \quad \mathcal{V}_1(-\lambda, \tau) - \mathcal{V}_1(\lambda, \tau).$$

Partons, par exemple, de la fonction  $\mathcal{V}$ : le partage en régions du plan des deux variables  $\xi, \tau$  nous montre, en nous reportant à la figure 1 (ch. II, § iv), que la dif-

férence de potentiel cherchée aura des expressions analytiques différentes suivant la position de la variable  $\tau$  par rapport aux trois nombres

$$-2\lambda, \quad 0, \quad 2\lambda.$$

Nous avons donc quatre intervalles à considérer.

1.  $\tau \leq -2\lambda$ . — La fonction  $\mathcal{U}$  doit être considérée dans la région  $C'$ ; en faisant successivement  $\xi = -\lambda$  et  $\xi = \lambda$  dans la première égalité (122) et en retranchant membre à membre les résultats obtenus, il vient

$$(135) \quad 2[\mathcal{U}(-\lambda, \tau) - \mathcal{U}(\lambda, \tau)] = \int_{-\lambda+\tau}^{\lambda+\tau} (G_1 + F_1) d\xi + \int_{-\lambda-\tau}^{\lambda-\tau} (G_2 - F_2) d\xi \\ - 2e^{-\lambda-\tau} \int_{-\lambda}^{\lambda} (G + W) ch \xi d\xi,$$

$ch$  désignant le cosinus hyperbolique.

2.  $-2\lambda \leq \tau \leq 0$ . — La fonction  $\mathcal{U}$  doit être considérée dans les régions  $-B'$  et  $B'$ ; en faisant successivement  $\xi = -\lambda$  dans la première égalité (118),  $\xi = \lambda$  dans la première égalité (114) et en retranchant membre à membre les résultats obtenus, il vient

$$(136) \quad 2[\mathcal{U}(-\lambda, \tau) - \mathcal{U}(\lambda, \tau)] = W(-\lambda - \tau) - W(\lambda + \tau) \\ + \int_{-\lambda+\tau}^{-\lambda} (G_1 + F_1) d\xi + \int_{-\lambda}^{-\lambda-\tau} F' d\xi - \int_{\lambda+\tau}^{\lambda} F' d\xi + \int_{\lambda}^{\lambda-\tau} (G_2 - F_2) d\xi \\ - e^{-\lambda-\tau} \left[ \int_{-\lambda}^{-\lambda-\tau} (G + W) e^{-\xi} d\xi + \int_{\lambda+\tau}^{\lambda} (G + W) e^{\xi} d\xi \right] + W(-\lambda) - W(\lambda).$$

3.  $0 \leq \tau \leq 2\lambda$ . — La fonction  $\mathcal{U}$  doit être considérée dans les régions  $-B$  et  $B$ ; en faisant successivement  $\xi = -\lambda$  dans la première égalité (116),  $\xi = \lambda$  dans la première égalité (112) et en retranchant membre à membre les résultats obtenus, il vient

$$(137) \quad 2[\mathcal{U}(-\lambda, \tau) - \mathcal{U}(\lambda, \tau)] = W(-\lambda + \tau) - W(\lambda - \tau) \\ + \int_{-\lambda-\tau}^{-\lambda} (G_1 - F_1) d\xi - \int_{-\lambda}^{-\lambda+\tau} F' d\xi + \int_{\lambda-\tau}^{\lambda} F' d\xi + \int_{\lambda}^{\lambda+\tau} (G_2 + F_2) d\xi \\ - e^{\lambda-\tau} \left[ \int_{-\lambda}^{-\lambda+\tau} (G + W) e^{\xi} d\xi + \int_{\lambda-\tau}^{\lambda} (G + W) e^{-\xi} d\xi \right] + W(-\lambda) - W(\lambda).$$

4.  $\tau \gg 2\lambda$ . — La fonction  $\mathcal{U}$  doit être considérée dans la région C; en faisant successivement  $\xi = -\lambda$  et  $\xi = \lambda$  dans la première égalité (120) et en retranchant membre à membre les résultats obtenus, il vient

$$(138) \quad 2[\mathcal{U}(-\lambda, \tau) - \mathcal{U}(\lambda, \tau)] = \int_{-\lambda-\tau}^{\lambda-\tau} (G_1 - F'_1) d\xi + \int_{-\lambda+\tau}^{\lambda+\tau} (G_2 + F'_2) d\xi \\ - 2e^{\lambda-\tau} \int_{-\lambda}^{\lambda} (G + W) ch\xi d\xi.$$

Le problème que nous nous sommes proposé se trouve donc complètement résolu.

§ X. — *État du système à un instant quelconque.*

Pour nous rendre compte de l'état du système à un instant quelconque  $t = \rho x \tau$ , il suffit de mener sur la figure 1 (§ IV) une parallèle à l'axe  $ox$  d'ordonnée  $\tau$  et de suivre le long de cette droite la variation des fonctions qui fixent cet état. La parallèle ainsi menée rencontre les six droites

$$\begin{array}{cccccc} D_1, & D'_1, & \Delta_1, & \Delta_2, & D_2, & D'_2, \\ \text{en des points} & & & & & \\ M_1, & M'_1, & \mu_1, & \mu_2, & M_2, & M'_2, \\ \text{d'abscisses} & & & & & \\ -\lambda - \tau, & \lambda - \tau, & -\lambda, & \lambda, & -\lambda + \tau, & \lambda + \tau, \end{array}$$

qui déterminent sur cette parallèle sept régions, sur lesquelles les fonctions considérées ont des déterminations analytiques différentes. On voit qu'on a

$$\overline{M_1 M'_1} = \overline{\mu_1 \mu_2} = \overline{M_2 M'_2} = 2\lambda.$$

Quand  $\tau$  varie, les points  $\mu_1 \mu_2$  restent fixes sur la parallèle, mais les deux autres groupes de points  $(M_1, M'_1)$ ,  $(M_2, M'_2)$  se déplacent en sens inverse avec une vitesse égale à 1, de façon à coïncider, pour  $\tau = 0$ , avec le groupe fixe  $(\mu_1, \mu_2)$ .

A ces points correspondent, dans l'espace occupé par le système et à l'instant  $t$ , des plans parallèles

$$\begin{array}{cccccc} P_1, & P'_1, & \omega_1, & \omega_2, & P_2, & P'_2 \\ \text{perpendiculaires à } ox \text{ et d'abscisses} & & & & & \\ -l - Lt, & l - Lt, & -l, & l, & -l + Lt, & l + Lt, \end{array}$$

de sorte que les distances des plans  $(P_1, P'_1)$ ,  $(\omega_1, \omega_2)$ ,  $(P_2, P'_2)$  sont constantes et égales à  $2l$ . Ces plans partagent l'espace en sept régions, dans lesquelles les fonctions considérées ont des déterminations analytiques différentes, de sorte que ce sont des ondes au sens d'Hugoniot, à l'exception des plans  $\omega_1, \omega_2$  qui sont précisément les faces du mur.

Quand  $t$  varie, les deux trains d'ondes  $(P_1, P'_1)$ ,  $(P_2, P'_2)$  se déplacent en sens inverse avec une vitesse uniforme égale à  $L$ , de façon à coïncider, pour  $t=0$ , avec les deux faces du mur.

Nous pouvons donc, en définitive, nous représenter le phénomène de la façon suivante :

Si l'on prend la solution dans son intégralité en faisant varier  $t$  de  $-\infty$  à  $+\infty$ , on voit que le phénomène consiste en la propagation de deux trains d'ondes planes parallèles aux faces du mur, venant de l'infini de part et d'autre de ce mur, qui se propagent en sens inverse à la vitesse  $L$  et qui se croisent à l'instant  $t=0$ , en coïncidant à cet instant avec les faces du mur.

Si, au contraire, on considère le phénomène comme ayant commencé à l'instant  $t=0$ , les deux faces du mur apparaissent à cet instant comme deux plans d'émission, d'où partent deux trains d'ondes se propageant en sens inverse à la vitesse  $L$ .

Rappelons que si l'on accepte l'hypothèse que nous avons faite sur le pouvoir inducteur spécifique des métaux (ch. I, § VII), cette vitesse  $L$  est celle de la propagation de la lumière dans l'éther.

Nous allons appliquer les résultats précédents à un cas particulier extrêmement simple, qui offre, en même temps, un très grand intérêt pour le physicien.



## CHAPITRE III

### Application à la décharge d'un condensateur sur son propre diélectrique.

#### § 1. — Fonctions d'état initial.

La solution générale du problème du mur, que nous venons d'obtenir, s'applique en particulier, à la décharge d'un condensateur plan sur son propre diélectrique, problème qui n'a été traité jusqu'ici, à notre connaissance, qu'en négligeant les effets de l'induction électrodynamique. Nos formules vont précisément mettre ceux-ci en évidence.

Le problème se pose pour le physicien de la façon suivante : les deux armatures A et B du condensateur, qui seront ici les deux faces  $x = \mp l$  du mur, sont tout d'abord maintenues, par l'intermédiaire d'une source, à des potentiels constants  $V_A$  et  $V_B$ , et cela, pendant un temps assez long pour que le régime permanent puisse être considéré comme établi. Puis on abandonne le condensateur à lui-même, en supprimant les contacts des armatures avec la source; il s'agit de déterminer comment varie en fonction du temps l'état électrique du système qui comprend, outre le condensateur, le milieu ambiant dans lequel il est placé.

Dans la théorie élémentaire de la décharge, on se borne à rechercher, abstraction faite des effets de l'induction qu'on néglige, comment varient en fonction du temps, à partir de l'instant initial, c'est-à-dire pour  $t \geq 0$ , la différence de potentiel entre les armatures ainsi que le courant de décharge dont le diélectrique du condensateur est le siège. Nos formules vont nous faire connaître, en outre, en chaque point de l'espace y compris le milieu extérieur, les lois de variation du potentiel électrique, du champ électrostatique, du champ électrodynamique et du champ électrique total. Comme nous avons obtenu, d'une manière générale, les expressions de toutes ces quantités même pour  $t < 0$ , celles-ci nous feront connaître l'état du système non seulement après mais aussi *avant* l'instant initial. Autrement dit, nos formules nous feront connaître ce que devrait être l'état du système à un instant quelconque  $t < 0$  pour que cet état, à un instant ultérieur  $t = 0$ , fût celui du régime permanent que nous avons défini.

Commençons par chercher l'expression des différentes fonctions d'état initial.

Pendant le régime permanent qui correspond à la fin de la charge, on a

$$\frac{d^2(V_1, V; V_2)}{dx^2} = 0,$$

avec : pour  $x = -l$ ,

$$V_1 = V = V_A;$$

pour  $x = l$ ,

$$V = V_2 = V_B;$$

par suite, en effectuant notre changement de variables,

$$\frac{d^2(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}, \mathcal{U}_2)}{d\xi^2} = 0,$$

avec : pour  $\xi = -\lambda$ ,

$$\mathcal{U}_1 = \mathcal{U} = W_A;$$

pour  $\xi = \lambda$ ,

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_2 = W_B,$$

en posant

$$W_A = \sqrt{\varepsilon h} V_A, \quad W_B = \sqrt{\varepsilon h} V_B.$$

Comme le potentiel doit rester fini pour  $x = \mp \infty$ , il résulte de ces équations que le régime permanent qui précède la décharge est défini par les égalités

$$\mathcal{U}_1 = W_A, \quad 2\mathcal{U} = W_A + W_B - (W_A - W_B) \frac{\xi}{\lambda}, \quad \mathcal{U}_2 = W_B.$$

En même temps, le mur est le siège d'un courant de conduction  $u$ , parallèle à  $ox$ , proportionnel à  $V_A - V_B$  et le champ électrodynamique est nul dans tout l'espace.

A l'instant  $t = 0$ , abandonnons le système à lui-même dans l'état qui vient d'être défini, en supprimant les contacts du mur avec la source qui maintenait constante la différence de potentiel entre ses faces : on a tout d'abord

$$(139) \quad W_1(\xi) = W_A, \quad 2W(\xi) = W_A + W_B - (W_A - W_B) \frac{\xi}{\lambda}, \quad W_2(\xi) = W_B.$$

D'autre part, puisque le champ électrodynamique

$$-\frac{\partial(\Phi_1, \Phi, \Phi_2)}{\partial \tau}$$

part de la valeur zéro, on a aussi

$$(140) \quad G_1(\xi) = 0, \quad G(\xi) = 0, \quad G_2(\xi) = 0.$$

Enfin, puisque nous abandonnons le système à lui-même, c'est-à-dire *sans vitesse initiale*, on a, pour  $\tau = 0$ ,

$$\frac{\partial(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}, \mathcal{V}_2)}{\partial\tau} = 0,$$

soit, d'après les égalités (75),

$$\frac{\partial(\Phi_1, \Phi, \Phi_2)}{\partial\xi} = 0,$$

c'est-à-dire

$$(141) \quad F'_1(\xi) = 0, \quad F'(\xi) = 0, \quad F'_2(\xi) = 0.$$

Toutes les fonctions arbitraires d'état initial, qui interviennent dans les expressions du potentiel électrique et des champs, se trouvent ainsi complètement déterminées, de sorte qu'il ne reste qu'à les remplacer par leurs valeurs dans les expressions générales que nous avons obtenues aux paragraphes v, vi et vii du précédent chapitre.

§ II. — *Expressions du potentiel électrique, du champ électrostatique, du champ électrodynamique, du champ électrique total et de la différence de potentiel.*

I. **Milieu 1.** — Le champ électrique total ayant, comme nous l'avons vu, la même expression dans toutes les régions relatives du milieu 1, les égalités (98), (139) et (140) nous donnent tout d'abord

$$(142) \quad \mathcal{V}_1 = 0.$$

1. **RÉGION A<sub>1</sub>.** — Les égalités (96) et (97) nous donnent

$$(143) \quad \mathcal{V}_1 = W_A, \quad -\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial\xi} = 0, \quad -\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial\tau} = 0.$$

2. **RÉGION B<sub>1</sub>.** — Les égalités (99) et (100) nous donnent

$$(144) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\mathcal{V}_1 = W_A + \frac{W_A + W_B}{2} + \frac{W_A - W_B}{2\lambda} (1 - \xi - \tau - e^{-\lambda\xi - \tau}), \\ -\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial\xi} = \frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial\tau} = \frac{W_A + W_B}{4\lambda} (1 - e^{-\lambda\xi - \tau}). \end{array} \right.$$

3. RÉGION B'. — Les égalités (101) et (102) nous donnent

$$(145) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\mathcal{U}_1 = W_A + \frac{W_A + W_B}{2} - \frac{W_A - W_B}{2\lambda} (1 + \xi - \tau - e^{\lambda \cdot \frac{\xi}{2} - \tau}), \\ -\frac{\partial \mathcal{U}_1}{\partial \xi} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau} = \frac{W_A - W_B}{4\lambda} (1 - e^{\lambda \cdot \frac{\xi}{2} - \tau}). \end{array} \right.$$

4. RÉGION C'. — Les égalités (103) et (104) nous donnent

$$(146) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\mathcal{U}_1 = W_A + W_B + (W_A - W_B) \frac{sh \lambda}{\lambda} e^{-\frac{\xi}{2} - \tau}, \\ -\frac{\partial \mathcal{U}_1}{\partial \xi} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau} = \frac{1}{2} (W_A - W_B) \frac{sh \lambda}{\lambda} e^{-\frac{\xi}{2} - \tau}, \end{array} \right.$$

*sh* désignant le sinus hyperbolique.

5. RÉGION C'. — Les égalités (105) et (106) nous donnent

$$(147) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\mathcal{U}_1 = W_A + W_B + (W_A - W_B) \frac{sh \lambda}{\lambda} e^{\frac{\xi}{2} - \tau}, \\ -\frac{\partial \mathcal{U}_1}{\partial \xi} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau} = -\frac{1}{2} (W_A - W_B) \frac{sh \lambda}{\lambda} e^{\frac{\xi}{2} - \tau}. \end{array} \right.$$

II. Mur. — Le champ électrique total ayant, comme nous l'avons vu, les mêmes expressions dans toutes les régions relatives au mur, les égalités (110), (139) et (140) nous donnent tout d'abord

$$(148) \quad \mathcal{U} = \frac{W_A - W_B}{2\lambda} e^{-\tau}.$$

I. RÉGION A. — Les égalités (108) et (109) nous donnent

$$(149) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\mathcal{U} = W_A + W_B - (W_A - W_B) \frac{e^{\lambda \xi}}{\lambda}, \\ -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \xi} = \frac{W_A - W_B}{2\lambda}, \\ -\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = -\frac{W_A - W_B}{2\lambda} (1 - e^{-\tau}). \end{array} \right.$$

2. RÉGION B. — Les égalités (111) et (112) nous donnent

$$(150) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\mathcal{U} = W_n + \frac{W_A + W_B}{2} - \frac{W_A - W_B}{2\lambda} (1 + \xi - \tau - e^{\lambda - \xi - \tau}), \\ -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \xi} = \frac{W_A - W_B}{4\lambda} (1 + e^{\lambda - \xi - \tau}), \\ -\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = -\frac{W_A - W_B}{4\lambda} (1 - 2e^{-\tau} + e^{\lambda - \xi - \tau}). \end{array} \right.$$

3. RÉGION B'. — Les égalités (113) et (114) nous donnent

$$(151) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\mathcal{U} = W_n + \frac{W_A + W_B}{2} + \frac{W_A - W_B}{2\lambda} (1 - \xi - \tau - e^{-\lambda - \xi - \tau}), \\ -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \xi} = \frac{W_A - W_B}{4\lambda} (1 + e^{-\lambda - \xi - \tau}), \\ -\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = -\frac{W_A - W_B}{4\lambda} (1 - 2e^{-\tau} + e^{-\lambda - \xi - \tau}). \end{array} \right.$$

4. RÉGION —B. — Les égalités (115) et (116) nous donnent

$$(152) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\mathcal{U} = W_A + \frac{W_A + W_B}{2} + \frac{W_A - W_B}{2\lambda} (1 - \xi - \tau - e^{\lambda - \xi - \tau}), \\ -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \xi} = \frac{W_A - W_B}{4\lambda} (1 + e^{\lambda - \xi - \tau}), \\ -\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = -\frac{W_A - W_B}{4\lambda} (1 - 2e^{-\tau} + e^{\lambda - \xi - \tau}). \end{array} \right.$$

5. RÉGION —B'. — Les égalités (117) et (118) nous donnent

$$(153) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\mathcal{U} = W_A + \frac{W_A + W_B}{2} - \frac{W_A - W_B}{2\lambda} (1 + \xi - \tau - e^{-\lambda - \xi - \tau}), \\ -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \xi} = \frac{W_A - W_B}{4\lambda} (1 + e^{-\lambda - \xi - \tau}), \\ -\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = -\frac{W_A - W_B}{4\lambda} (1 - 2e^{-\tau} + e^{-\lambda - \xi - \tau}). \end{array} \right.$$

6. RÉGION C. — Les égalités (119) et (120) nous donnent

$$(154) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\mathcal{U} = W_A + W_B - \frac{W_A - W_B}{\lambda} sh \xi e^{\lambda - \tau}, \\ -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \xi} = \frac{W_A - W_B}{2\lambda} ch \xi e^{\lambda - \tau}, \\ -\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = \frac{W_A - W_B}{2\lambda} (1 - e^{\lambda} ch \xi) e^{-\tau}. \end{array} \right.$$

7. RÉGION C'. — Les égalités (121) et (122) nous donnent

$$(155) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\mathcal{U} = W_A + W_B - \frac{W_A - W_B}{\lambda} sh \xi e^{-\lambda - \tau}, \\ -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \xi} = \frac{W_A - W_B}{2\lambda} ch \xi e^{-\lambda - \tau}, \\ -\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = \frac{W_A - W_B}{2\lambda} (1 - e^{-\lambda} ch \xi) e^{-\tau}. \end{array} \right.$$

III. Milieu 2. — Le champ électrique total ayant, comme nous l'avons vu, la même expression dans toutes les régions relatives au milieu 2, les égalités (126), (139) et (140) nous donnent tout d'abord

$$(156) \quad \mathcal{U}_2 = 0.$$

1. RÉGION A<sub>2</sub>. — Les égalités (124) et (125) nous donnent

$$(157) \quad \mathcal{U}_2 = W_B, \quad -\frac{\partial \mathcal{U}_2}{\partial \xi} = 0, \quad -\frac{\partial \Phi_2}{\partial \tau} = 0.$$

2. RÉGION B<sub>2</sub>. — Les égalités (127) et (128) nous donnent

$$(158) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\mathcal{U}_2 = W_B + \frac{W_A + W_B}{2} - \frac{W_A - W_B}{2\lambda} (1 + \xi - \tau - e^{-\lambda + \xi - \tau}), \\ -\frac{\partial \mathcal{U}_2}{\partial \xi} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \tau} = \frac{W_A - W_B}{4\lambda} (1 - e^{-\lambda + \xi - \tau}). \end{array} \right.$$

3. RÉGION B'₂. — Les égalités (129) et (130) nous donnent

$$(159) \quad \begin{cases} 2\mathcal{U}_2 = W_A + W_B + \frac{W_A - W_B}{2\lambda} (1 - \xi - \tau - e^{\lambda - \xi - \tau}), \\ -\frac{\partial \mathcal{U}_2}{\partial \xi} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \tau} = \frac{W_A - W_B}{4\lambda} (1 - e^{\lambda - \xi - \tau}). \end{cases}$$

4. RÉGION C₂. — Les égalités (131) et (132) nous donnent

$$(160) \quad \begin{cases} 2\mathcal{U}_2 = W_A + W_B - (W_A - W_B) \frac{sh\lambda}{\lambda} e^{\xi - \tau}, \\ -\frac{\partial \mathcal{U}_2}{\partial \xi} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \tau} = \frac{1}{2} (W_A - W_B) \frac{sh\lambda}{\lambda} e^{\xi - \tau}. \end{cases}$$

5. RÉGION C'₂. — Les égalités (133) et (134) nous donnent

$$(161) \quad \begin{cases} 2\mathcal{U}_2 = W_A + W_B - (W_A - W_B) \frac{sh\lambda}{\lambda} e^{-\xi - \tau}, \\ -\frac{\partial \mathcal{U}_2}{\partial \xi} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \tau} = -\frac{1}{2} (W_A - W_B) \frac{sh\lambda}{\lambda} e^{-\xi - \tau}. \end{cases}$$

IV. Différence de potentiel. — 1.  $\tau \leq -2\lambda$ . — L'égalité (135) nous donne

$$(162) \quad \mathcal{U}(-\lambda, \tau) - \mathcal{U}(\lambda, \tau) = (W_A - W_B) \frac{sh\lambda}{\lambda} e^{-\lambda - \tau}.$$

2.  $-2\lambda \leq \tau \leq 0$ . — L'égalité (136) nous donne

$$(163) \quad \mathcal{U}(-\lambda, \tau) - \mathcal{U}(\lambda, \tau) = (W_A - W_B) \left( 1 - \frac{1 - \tau - e^{-\tau}}{2\lambda} \right).$$

3.  $0 \leq \tau \leq 2\lambda$ . — L'égalité (137) nous donne

$$(164) \quad \mathcal{U}(-\lambda, \tau) - \mathcal{U}(\lambda, \tau) = (W_A - W_B) \left( 1 + \frac{1 - \tau - e^{-\tau}}{2\lambda} \right).$$

4.  $\tau \geq 2\lambda$ . — L'égalité (138) nous donne

$$(165) \quad \mathcal{U}(-\lambda, \tau) - \mathcal{U}(\lambda, \tau) = W_A - W_B \frac{sh\lambda}{\lambda} e^{\lambda - \tau}.$$

## § III. — Représentations graphiques.

Afin de synthétiser les résultats du précédent paragraphe, représentons graphiquement à différents instants du phénomène, c'est-à-dire pour différentes valeurs de  $\tau$ , les lois de variation en fonction de  $\xi$  des fonctions

$$(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}, \mathcal{V}_2), \quad -\frac{\partial(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}, \mathcal{V}_2)}{\partial\xi}, \quad -\frac{\partial(\Phi_1, \Phi, \Phi_2)}{\partial\tau}, \quad (\mathcal{X}_1, \mathcal{X}, \mathcal{X}_2)$$

respectivement proportionnelles, en chaque point de l'espace, au potentiel électrique, au champ électrostatique, au champ électrodynamique et au champ électrique total. En nous reportant à la figure 1 (ch. II, § IV), sur laquelle on suppose tracée une parallèle variable à l'axe  $oz$ , nous voyons que la position relative des points d'intersection

$$M_1, \quad M'_1, \quad \mu_1, \quad \mu_2, \quad M_2, \quad M'_2$$

de cette parallèle avec les six droites

$$D_1, \quad D'_1, \quad \Delta_1, \quad \Delta_2, \quad D_2, \quad D'_2$$

varie avec la position de la variable  $\tau$  par rapport aux nombres

$$-2\lambda, \quad -\lambda, \quad 0, \quad \lambda, \quad 2\lambda.$$

Nous sommes ainsi conduits à représenter graphiquement les lois de variation en fonction de  $\xi$  des grandeurs ci-dessus pour des valeurs de  $\tau$  comprises dans chacun des six intervalles limités par les nombres précédents.

La figure 2 est relative au premier intervalle ( $\tau \leq -2\lambda$ ); la figure 1 (ch. II, § IV), sur laquelle on suppose tracée la parallèle à l'axe  $oz$  d'ordonnée  $\tau \leq -2\lambda$ , montre que les points de discontinuité de nos fonctions sont disposés de gauche à droite dans l'ordre

$$M_2, \quad M'_2, \quad \mu_1, \quad \mu_2, \quad M_1, \quad M'_1,$$

de sorte que leurs abscisses

$$-\lambda + \tau, \quad \lambda + \tau, \quad -\lambda, \quad \lambda, \quad -\lambda - \tau, \quad \lambda - \tau$$

forment une suite croissante. Les deux trains d'ondes  $(P_2, P'_2)$ ,  $(P_1, P'_1)$  venant de l'infini de part et d'autre du mur n'ont donc pas encore atteint celui-ci.



Pour  $\xi \leq -\lambda + \tau$ , on se trouve dans la région A; les fonctions sont donc données par leurs expressions (143) et (142).

Pour  $-\lambda + \tau \leq \xi \leq \lambda + \tau$ , on se trouve dans la région B'; les fonctions sont donc données par leurs expressions (145) et (142). Et ainsi de suite : dans les cinq intervalles suivants, correspondant respectivement aux régions C', C', C', B', A, les fonctions sont représentées successivement par les expressions (147), (142); (155), (148); (156), (161), (159), (157).

Convenons de tracer toutes les courbes en prenant, par exemple,  $\lambda = 0,5$  et prenons, pour simplifier, comme potentiel zéro le potentiel  $V_A + V_B$ , ce qui donne  $\frac{W_A + W_B}{2} = 0$ . Pour  $\tau = -2,5\lambda$ , nous obtenons ainsi pour la fonction  $\mathcal{U}$  la courbe tracée en trait plein de la figure 2.

Les champs électrostatique, électrodynamique et électrique total étant proportionnels à  $W_A - W_B$ , il nous suffit de représenter les courbes de variation en fonction de  $\xi$  des rapports

$$-\frac{1}{W_A - W_B} \frac{\partial(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}, \mathcal{U}_2)}{\partial \xi}, \quad -\frac{1}{W_A - W_B} \frac{\partial(\Phi_1, \Phi, \Phi_2)}{\partial \tau}, \quad \frac{(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}, \mathcal{A}_2)}{W_A - W_B}.$$

Le premier, proportionnel au champ électrostatique, est représenté par la courbe en ponctué; le second, proportionnel au champ électrodynamique, est représenté par la courbe en traits interrompus; enfin le troisième, proportionnel au champ électrique total, est représenté par la courbe en trait mixte. L'échelle des ordonnées est relative à ces trois courbes. En outre, pour  $\xi \leq -\lambda + \tau$  et pour  $\xi \geq \lambda + \tau$ , les trois champs sont nuls.

Au seul aspect de ces trois courbes, on voit que le champ électrodynamique seul varie avec continuité dans tout l'espace, les deux autres étant discontinus pour  $\xi = \pm \lambda$ , c'est-à-dire sur les deux faces du mur. Les ondes  $P_1, P'_1, P_2, P'_2$  sont des ondes du premier ordre pour les champs partiels, du second ordre pour le potentiel électrique.

Sur cette figure 2 et celles qui suivent, les courbes de potentiel sont construites à la même échelle, ce qui rend leur comparaison immédiate; mais les champs varient dans des limites si étendues que, pour obtenir des tracés satisfaisants, nous avons dû faire varier leur échelle d'une figure à l'autre. Cette échelle est indiquée sur chaque figure par les nombres inscrits en ordonnées.

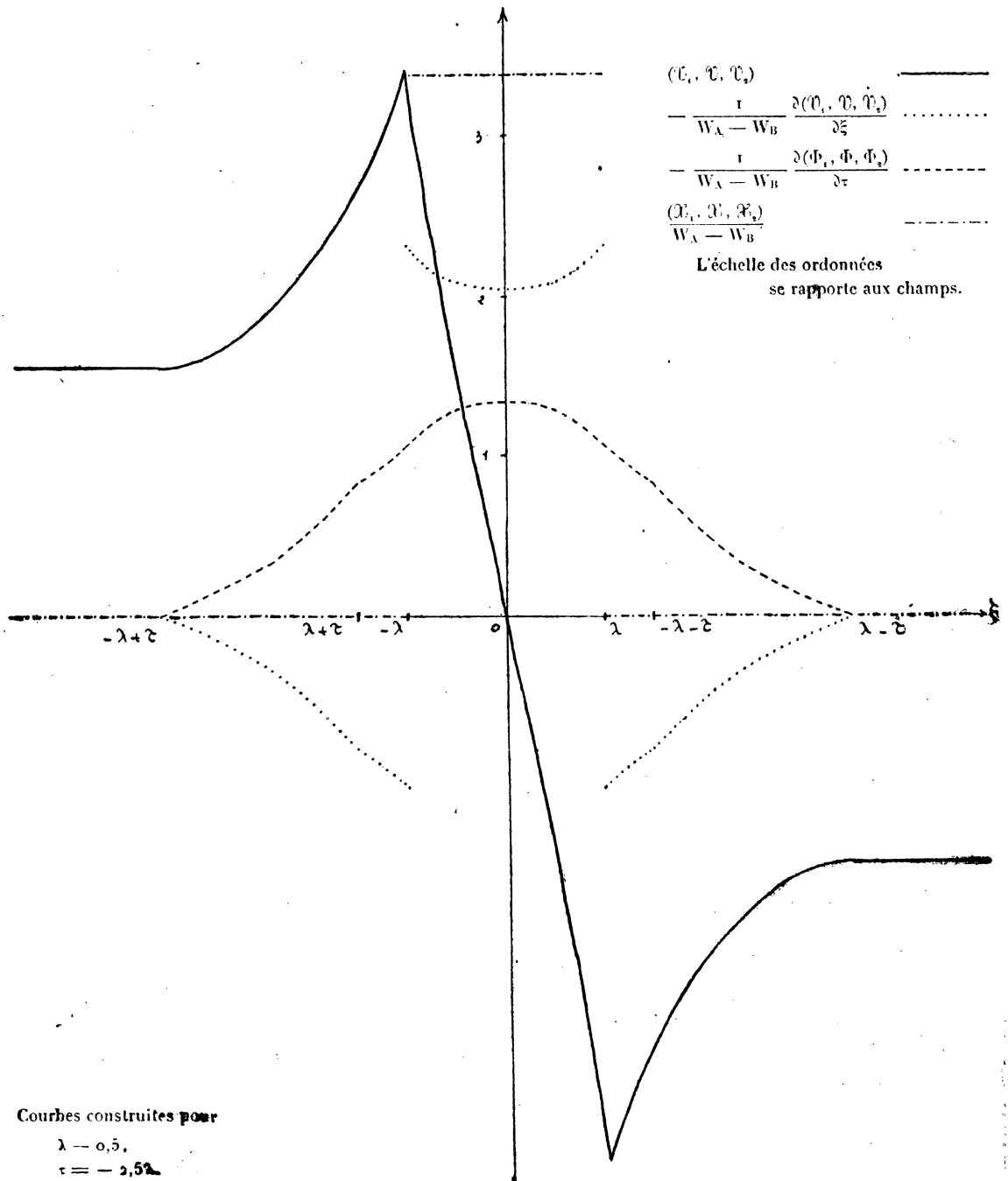


FIG. 2.

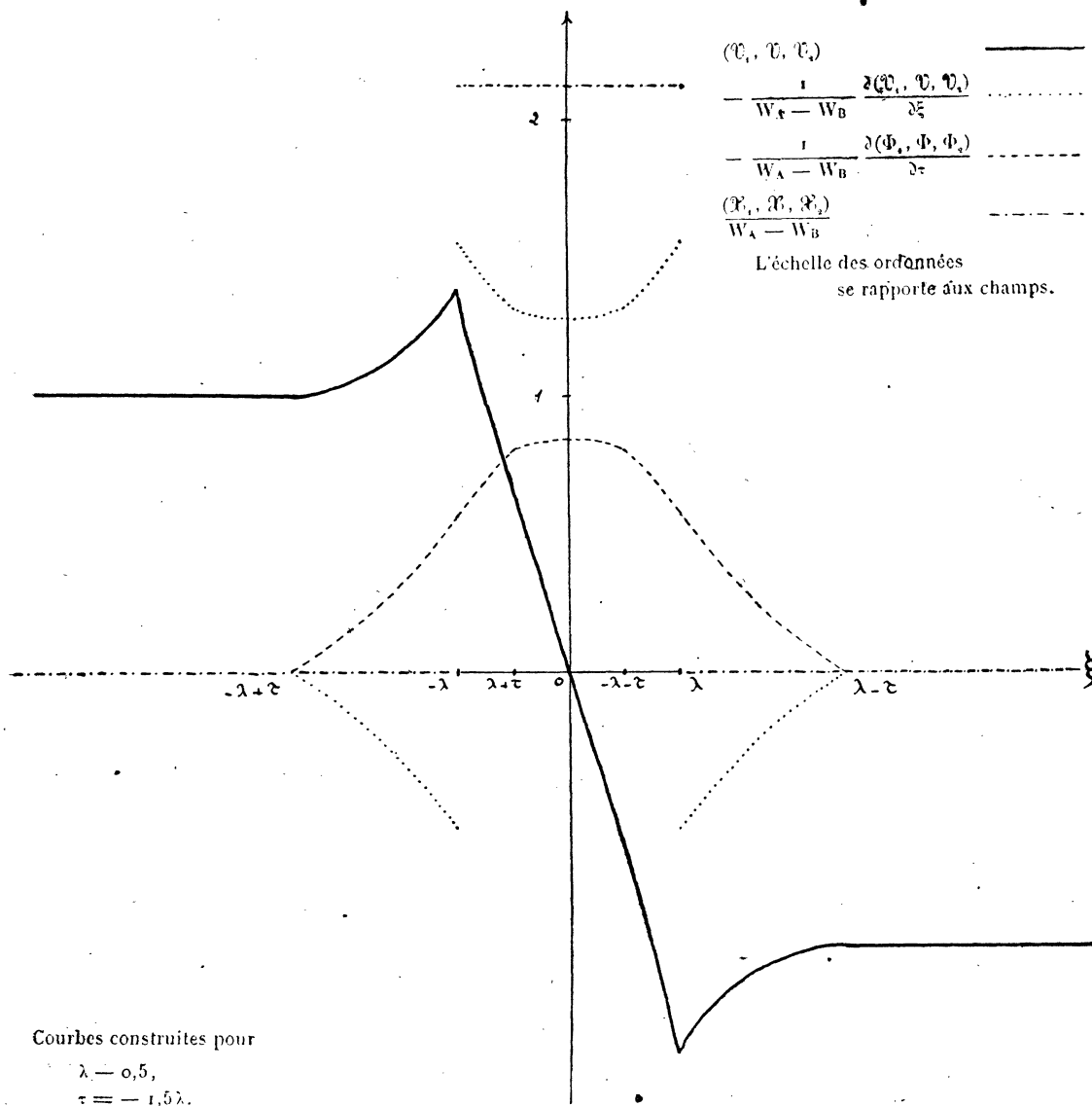


FIG. 3.

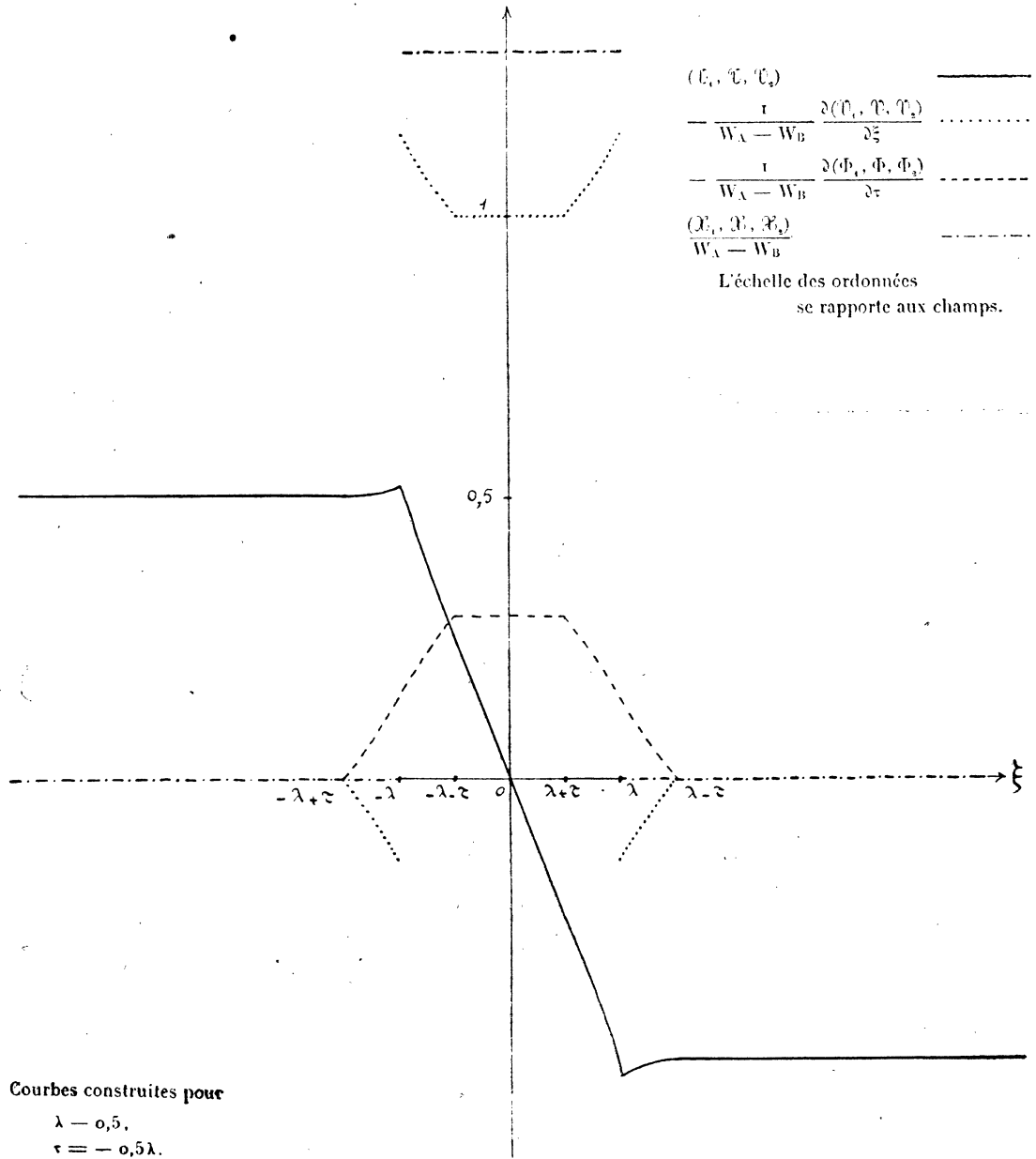
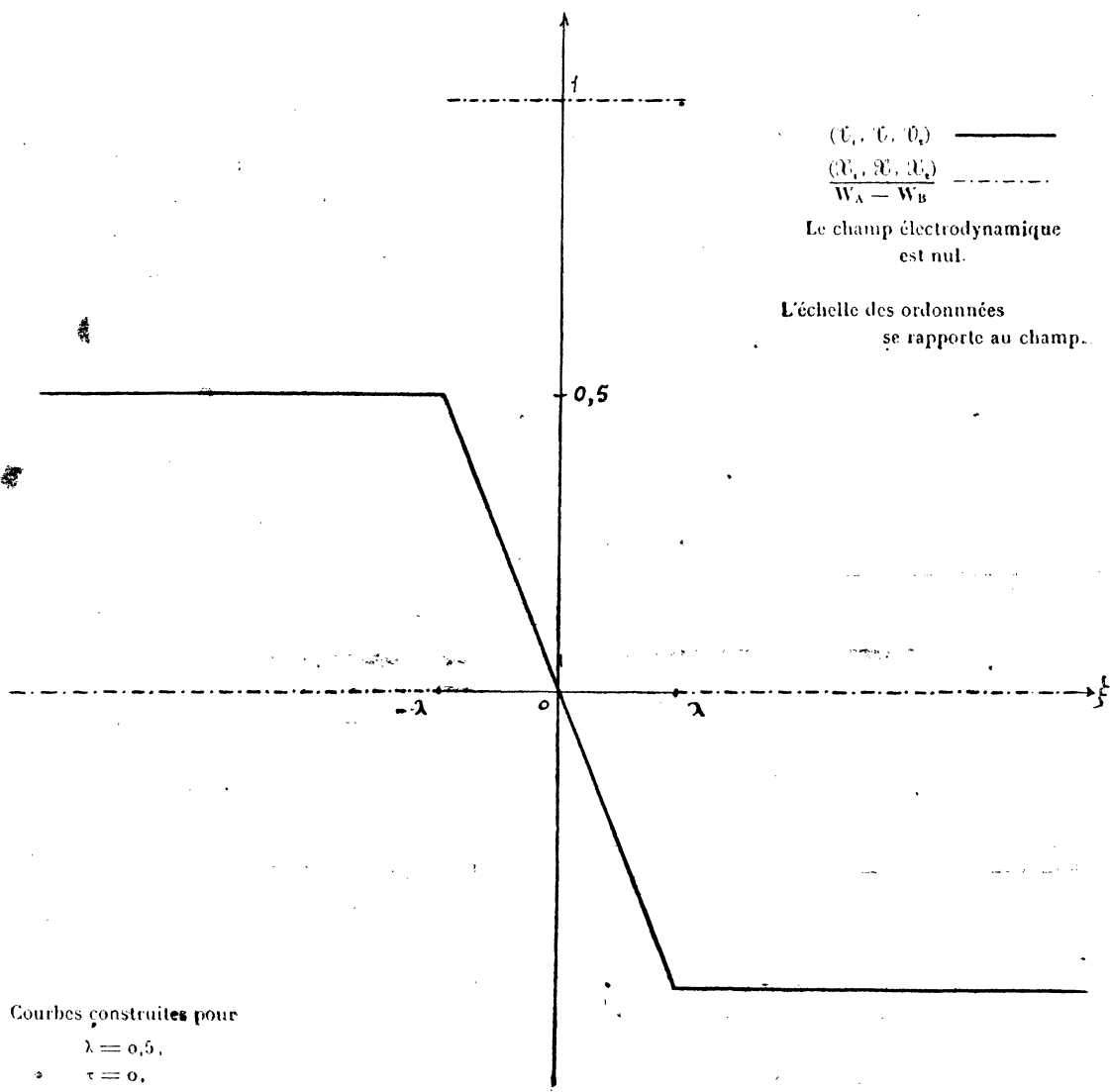


FIG. 4.



● FIG. 5.

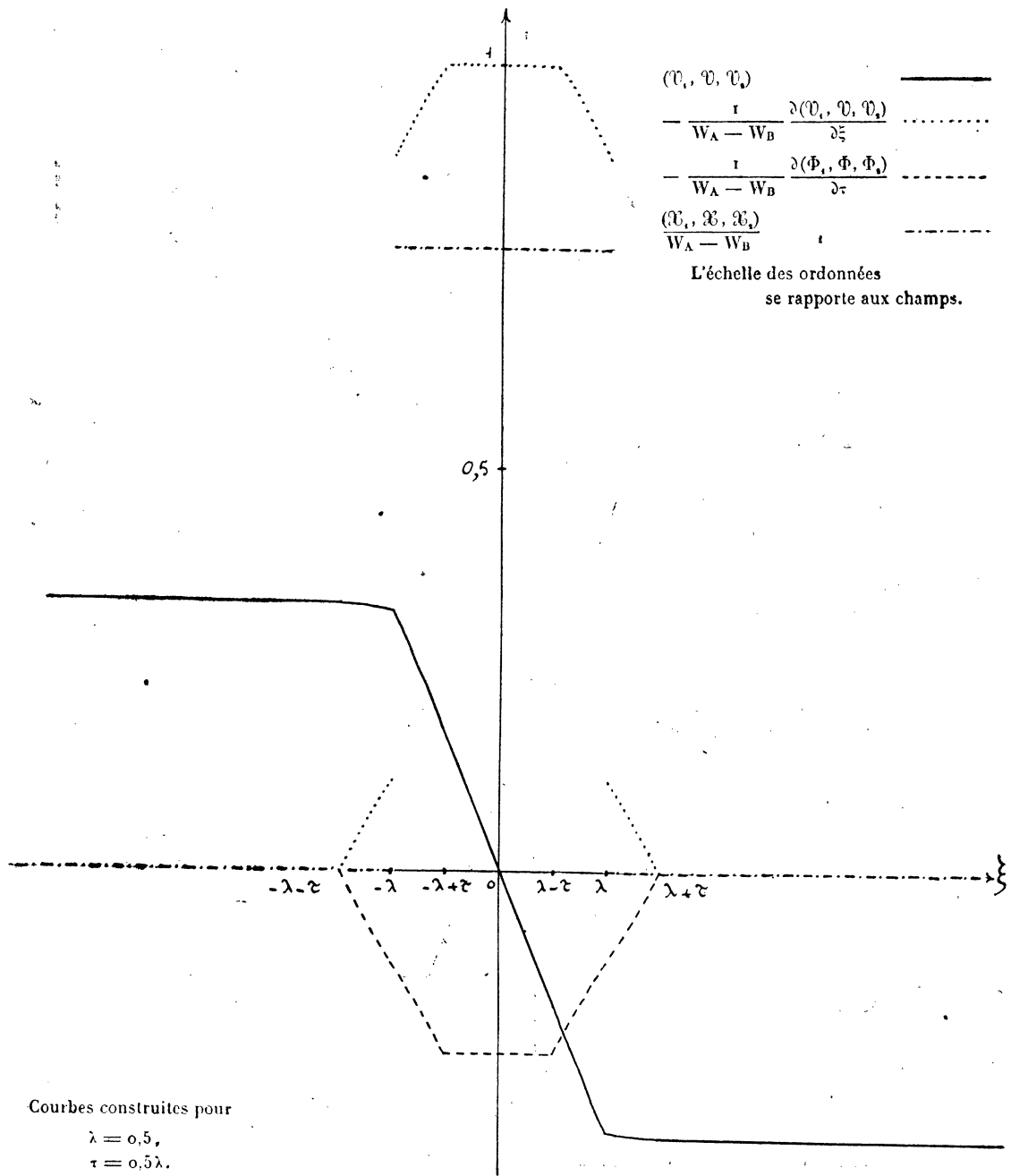
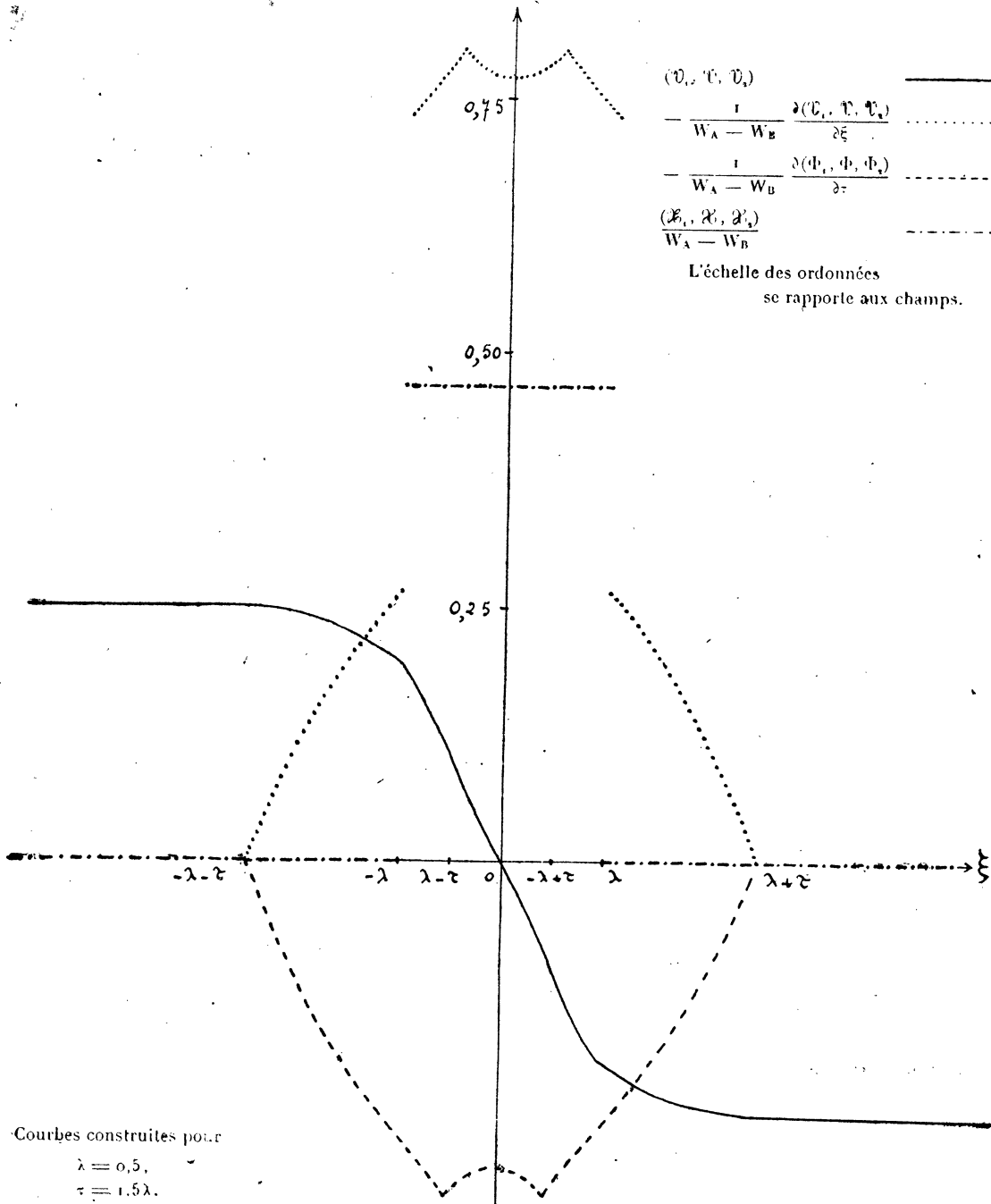


FIG. 6.



Courbes construites pour  
 $\lambda = 0,5,$   
 $\tau = 1,5\lambda.$

FIG. 7.

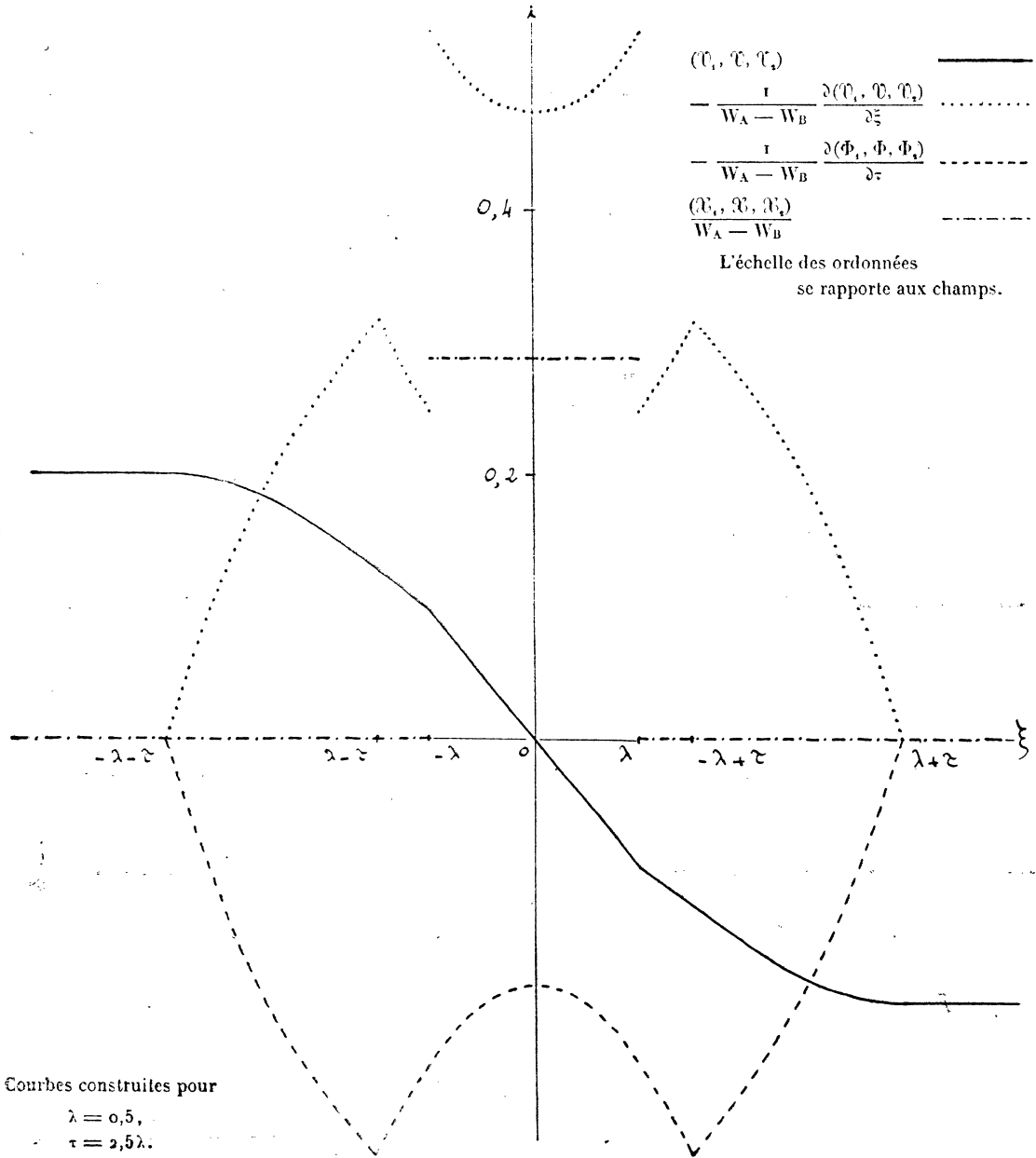


FIG. 8.



La figure 3 est relative au second intervalle  $-2\lambda \leq \tau \leq -\lambda$  et les courbes  $y$  sont construites pour  $\tau = -1,5\lambda$ . En nous reportant à la figure 1 (ch. II, § iv), sur laquelle on suppose tracée la parallèle à l'axe  $oz$  d'ordonnée  $\tau$ , on voit que les points de discontinuité sont disposés de gauche à droite dans l'ordre

$$M_2, \quad \mu_1, \quad M'_2, \quad M_1, \quad \mu_2, \quad M'_1,$$

de sorte que les ondes  $P'_2$  et  $P_1$  ont pénétré à l'intérieur du mur. Quand  $\xi$  varie de  $-\infty$  à  $+\infty$ , les régions traversées sont les régions

$$A_1, \quad B'_1, \quad -B', \quad C', \quad B', \quad B'_2, \quad A_2;$$

pour construire les courbes, nous avons donc dû appliquer successivement les formules (143), (145), (153), (155), (151), (159) et (157).

La figure 4 est relative au troisième intervalle  $-\lambda \leq \tau \leq 0$  et les courbes  $y$  sont construites pour  $\tau = -0,5\lambda$ . On voit que, par rapport à la figure précédente, les points de discontinuité  $M_1$  et  $M'_2$  ont échangé leurs places; entre les ondes correspondantes  $P_1$  et  $P'_2$ , les trois champs sont constants. Enfin, les pointes de la courbe de potentiel sont devenues à peine visibles.

La figure 5 représente l'état du système pour  $\tau = 0$ ; à l'instant correspondant  $t = 0$ , les ondes  $P_1, P_2$  coïncident avec la face  $\sigma_1$  du mur et les ondes  $P'_1, P'_2$  avec la face  $\sigma_2$ ; le champ électrodynamique est nul dans tout l'espace, de sorte que le champ électrostatique coïncide avec le champ électrique total.

La figure 6 relative au quatrième intervalle  $0 \leq \tau \leq \lambda$  a été construite pour  $\tau = 0,5\lambda$ . Les points de discontinuité sont maintenant disposés dans l'ordre

$$M_1, \quad \mu_1, \quad M_2, \quad M'_1, \quad \mu_2, \quad M'_2,$$

en sorte que les ondes  $P_2, P'_1$  sont à l'intérieur du mur. Le champ électrodynamique a changé de signe et entre les ondes  $P_2, P'_1$  les trois champs sont constants.

La figure 7 relative au cinquième intervalle  $\lambda \leq \tau \leq 2\lambda$  a été construite pour  $\tau = 1,5\lambda$ . On voit que, par rapport à la figure précédente, les points de discontinuité  $M_1$  et  $M'_1$  ont échangé leurs places; entre les ondes correspondantes  $P_2$  et  $P'_1$ , les courbes des champs partiels se creusent comme l'indique la figure.

Enfin la figure 8 relative au dernier intervalle  $\tau \geq 2\lambda$  représente le phénomène pour  $\tau = 2,5\lambda$ . On voit que, par rapport à la figure 2, les deux trains d'ondes ont échangé leurs places et s'éloignent maintenant du mur à la vitesse  $L$ .

La loi de variation en fonction du temps de la différence de potentiel entre les faces du mur exprimée par les égalités (162), (163), (164) et (165) est représentée

graphiquement par la courbe en trait plein de la figure 9, également calculée pour  $\lambda = 0,5$  et où l'on a porté en ordonnée la quantité proportionnelle

$$\frac{V(-\lambda, \tau) - V(\lambda, \tau)}{W_A - W_B}$$

La tangente varie avec continuité tout le long de cette courbe. Si l'on fait tendre  $\lambda$  vers zéro, les égalités (162), (163), (164) et (165) montrent que la quantité ci-dessus tend vers l'exponentielle

$$e^{-\tau};$$

nous avons donc représenté sur la même figure la loi de variation de cette exponentielle par la courbe en traits interrompus, afin de mettre graphiquement en évidence l'influence du nombre  $\lambda$ .

§ IV. — *Ordre de grandeur du nombre  $\lambda$ ; comparaison de la loi de décharge d'un condensateur à celle employée par les physiciens.*

Déterminons l'ordre de grandeur du nombre

$$\lambda = \frac{l}{L \cdot z}$$

Tout d'abord, en vertu de l'hypothèse de Faraday et de Mossotti, on a très sensiblement

$$K = 4\pi\epsilon z, \quad L = v,$$

d'où, d'après l'égalité (43),

$$\lambda = 4\pi \frac{a^2}{2} \frac{v}{\epsilon} \frac{K_0}{K} \mu_0.$$

Mais la perméabilité de l'éther  $\mu_0$  peut être prise égale à l'unité à un très haut degré d'approximation et l'on sait que  $v = 3 \cdot 10^{10}$  cm. par sec.; si donc nous employons les unités électromagnétiques, nous aurons en outre  $\frac{a^2}{2} = 1$  et il viendra

$$(166) \quad \lambda = 3,76 \frac{l}{\epsilon} \frac{K_0}{K} 10^{11}.$$

Les résistivités variant dans des limites beaucoup plus grandes que les pouvoirs inducteurs spécifiques connus, il résulte de cette égalité que, pour une même épais-

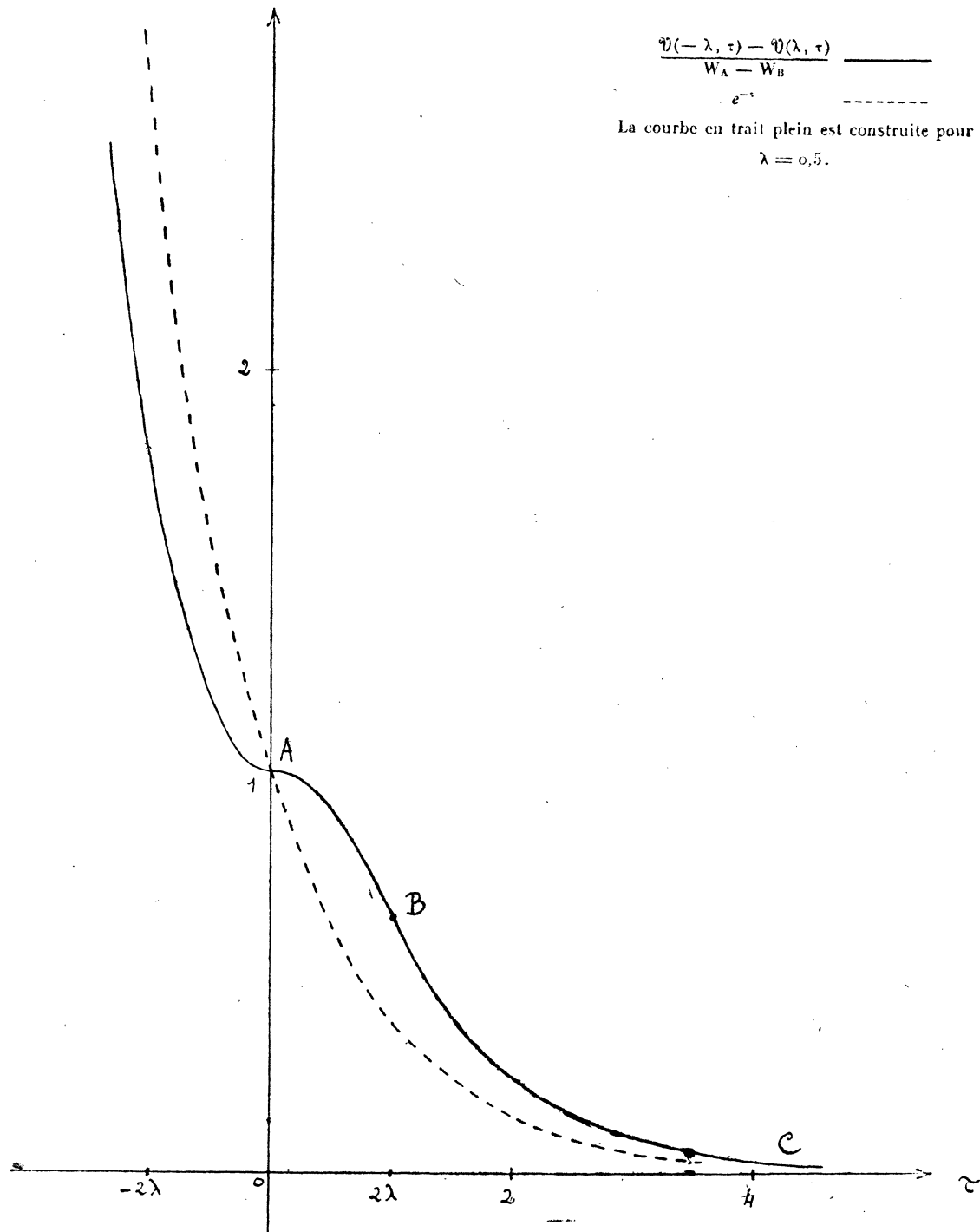


FIG. 9.

seur de mur  $2l$ ,  $\lambda$  doit varier beaucoup d'une substance à une autre. Nous allons donc considérer quelques cas extrêmes.

Tout d'abord, la moins résistante des substances connues est l'argent pour laquelle on a

$$\varphi = 1,5 \cdot 10^3 \text{ C. G. S. électromagnétiques,}$$

d'où, d'après l'égalité (166),

$$\lambda = 2,51 l \frac{K_0}{K} 10^8.$$

Mais, ne connaissant pas le pouvoir inducteur spécifique des métaux, tout ce que nous pouvons dire c'est que, si l'épaisseur  $2l$  du mur exprimée en centimètres est numériquement de l'ordre de grandeur de son pouvoir inducteur spécifique par rapport à l'éther, le nombre  $\lambda$  est de l'ordre de  $10^8$ ; comme on a, d'après les égalités (164) ou (165),

$$\frac{\mathcal{U}(-\lambda, 2\lambda) - \mathcal{U}(\lambda, 2\lambda)}{W_1 - W_2} = \frac{1 - e^{-2\lambda}}{2\lambda}.$$

on voit que la décharge se trouve pratiquement terminée pour  $\tau = 2\lambda$ , c'est-à-dire, à partir de l'instant initial, au bout du temps extrêmement court  $\frac{2l}{L}$  que mettrait la lumière à traverser une lame d'éther d'épaisseur égale à celle du mur. Autrement dit, l'ordonnée du point B, d'abscisse  $2\lambda$ , de la courbe de décharge (*fig. 9*) a, dans le cas actuel, une valeur si voisine de zéro que la dernière branche BC de cette courbe se confond pratiquement avec l'axe  $o\tau$ . La partie principale du phénomène est donc représentée par la branche de courbe AB, c'est-à-dire par l'égalité (164), mais son extrême brièveté la rend inobservable.

Considérons maintenant ce qui se passe dans le cas d'un mur de grande résistivité et supposons, pour fixer les idées, que ce mur soit en mica, substance précisément employée dans la construction des condensateurs de précision. On aura

$$\varphi = 10^{23} \text{ C. G. S. électromagnétiques,} \quad \frac{K}{K_0} = 8$$

et, d'après l'égalité (166),

$$\lambda = 4,68 / 10^{-13},$$

de sorte que le mur peut être très épais sans que  $\lambda$  cesse d'être un nombre très petit.

Dès lors, la courbe de décharge diffère extrêmement peu de la courbe exponentielle et comme le point B devient extrêmement voisin du point A, la partie principale du phénomène se trouve représentée par la branche de courbe BC, c'est-à-dire par l'égalité (165).

Enfin, si le mur est formé d'une substance médiocrement résistante telle qu'un électrolyte,  $\lambda$  peut avoir une valeur comparable à l'unité pour une épaisseur de mur de l'ordre du centimètre. En effet, la résistivité d'un électrolyte est de l'ordre de  $10^9$  C. G. S. électromagnétiques et si l'on admet que la valeur correspondante du pouvoir inducteur spécifique par rapport à l'éther est de l'ordre de celui de l'eau, soit  $10^2$ , l'égalité (166) montre que  $\lambda$  sera précisément de l'ordre de l'unité pour une épaisseur de mur de l'ordre du centimètre. Dans ces conditions, l'ordonnée du point B (*fig. 9*) ne sera ni très petite ni très voisine de 1, mais alors la valeur du rapport

$$\frac{\Psi(-\lambda, \tau) - \Psi(\lambda, \tau)}{W_A - W_B}$$

deviendra très petite pour une valeur de  $\tau$  non très grande par rapport à  $2\lambda$ , de sorte que la décharge aura une durée trop courte pour être observable.

En résumé, dans le cas d'un condensateur plan tel que ceux qu'emploient les physiciens et supposé indéfini, la partie observable du phénomène de sa décharge est représentée par l'égalité (165). Soient alors C et R la capacité et la résistance d'une portion quelconque de ce condensateur découpée perpendiculairement à ses faces et de section S; on aura

$$C = \frac{kS}{4\pi\epsilon 2l}, \quad R = \rho \frac{2l}{S},$$

d'où

$$(167) \quad \tau = \frac{l}{\rho x} = \frac{4\pi\epsilon}{\rho k} l = \frac{l}{CR}.$$

En revenant aux variables primitives, l'égalité (165) s'écrira ainsi

$$V(-l, t) - V(l, t) = (V_A - V_B) \frac{sh\lambda}{\lambda} e^{-\frac{t}{CR}}.$$

Telle est la loi rigoureuse de la décharge à partir du temps extrêmement petit  $\frac{2l}{L}$  qui suit l'instant initial.

Mais,  $\lambda$  étant très petit, on peut développer en série les termes en  $\lambda$  en se limitant aux termes du premier degré; il vient ainsi sensiblement

$$V(-l, t) - V(l, t) = (V_A - V_B) (1 + \lambda) e^{-\frac{t}{CR}}.$$

Si, enfin, on néglige  $\lambda$  vis-à-vis de l'unité, on retrouve la formule bien connue

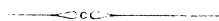
$$(168) \quad V(-l, t) - V(l, t) = (V_A - V_B) e^{-\frac{t}{CR}}.$$

qu'emploient les physiciens dans la mesure de la résistance d'isolement d'un condensateur.

D'autre part, nous avons vu que, quel que soit  $\tau$ , le champ électrique total dans le mur est donné par l'égalité (148). Comme le courant de conduction  $u$  lui est proportionnel, sa loi de variation en fonction du temps, est, d'après les égalités (148) et (167),

$$u = u_0 e^{-\frac{t}{CR}}.$$

Ainsi, par suite des effets de l'induction, l'égalité (168) relative à la différence de potentiel est simplement approchée, à un très haut degré d'approximation il est vrai, tandis que la précédente, qui fait connaître le courant de décharge, est absolument rigoureuse, et cela dès le commencement du phénomène.



# TABLE DES MATIÈRES

**TOME VIII**

	Pages.
INTRODUCTION.....	221

## CHAPITRE PREMIER

### Les équations générales de l'Électrodynamique pour un système de corps homogènes et isotropes en repos.

§§		
I.	Grandeurs et fonctions définissant l'état du système.....	226
II.	Relations analytiques.....	229
III.	Le problème général de l'Électrodynamique.....	231
IV.	Équations du potentiel vecteur total.....	232
V.	Équations des champs électrique et magnétique.....	235
VI.	Hypothèse de Faraday et de Mossotti.....	240
VII.	Signification de la constante de Helmholtz.....	242

## CHAPITRE II

### Le problème du mur.

**TOME X**

I.	Équations du problème.....	1
II.	Changement de variables.....	5
III.	Détermination des fonctions arbitraires.....	9
IV.	Partage en régions du plan des variables $\xi, \tau$ .....	15
V.	Expressions des fonctions $\Phi_1, \mathcal{U}_1, \mathcal{V}_1$ .....	17
VI.	Expressions des fonctions $\Phi, \mathcal{U}, \mathcal{V}$ .....	21
VII.	Expressions des fonctions $\Phi_2, \mathcal{U}_2, \mathcal{V}_2$ .....	32
VIII.	Calcul direct du champ électrique total.....	36
IX.	Expressions de la différence de potentiel entre les faces du mur.....	37
X.	État du système à un instant quelconque.....	39

## CHAPITRE III

### Application à la décharge d'un condensateur sur son propre diélectrique.

I.	Fonctions d'état initial.....	41
II.	Expressions du potentiel électrique, du champ électrostatique, du champ électrodynamique, du champ électrique total et de la différence de potentiel.....	43
III.	Représentations graphiques.....	48
IV.	Ordre de grandeur du nombre $\lambda$ : comparaison de la loi de décharge d'un condensateur à celle employée par les physiciens.....	58