L'ÉLECTRODYNAMIQUE DE HELMHOLTZ-DUHEM

ET

SON APPLICATION AU PROBLÈME DU MUR

ET A LA

DÉCHARGE D'UN CONDENSATEUR SUR SON PROPRE DIÉLECTRIQUE

PAR LOUIS ROY.

INTRODUCTION

« Il est, en Physique mathématique, une doctrine particulièrement difficile et compliquée : c'est la théorie de l'électricité et du magnétisme. Le génie des Poisson et des Ampère en avait mis les principes dans une clarté toute française; l'œuvre de ces grands hommes avait, avant le milieu du dix-neuvième siècle, servi de guide aux travaux que les plus illustres physiciens allemands, les Gauss, les Weber, les Neumann, avaient accomplis pour les compléter; tous ces efforts, inspirés par l'esprit de finesse en même temps que disciplinés par l'esprit géométrique, avaient édifié l'une des doctrines de Physique les plus puissantes et les plus harmonieuses qu'on eût jamais admirées (1). »

« L'Électrodynamique apparaissait donc, en 1860, comme un vaste pays dont de hardis explorateurs ont reconnu toutes les frontières; l'étendue exacte de la contrée semblait connue; il ne restait plus qu'à étudier minutieusement chacune de ses provinces et à exploiter les richesses qu'elle promettait à l'industrie.

« Cependant, en 1861, à cette science qui semblait si complètement maîtresse de son domaine, une région nouvelle et immense fut ouverte; et l'on put croire alors, beaucoup pensent encore aujourd'hui, que cette extension subite devait non pas seulement accroître l'Électrodynamique, mais encore bouleverser les parties de cette doctrine que l'on regardait comme constituées d'une manière à peu près définitive.

« Cette révolution était l'œuvre d'un physicien écossais, James Clerk Maxwell (2). »

« Ce physicien était comme hanté par deux intuitions.

« En premier lieu, les corps isolants, ceux que Faraday a nommés diélectriques,

(1) P. DUHEM, *La Science allemande*, p. 125.
(2) ID., *Les théories électriques de J. C. Maxwell*, p. 5.

doivent jouer, à l'égard des phénomènes électriques, un rôle comparable à celui que jouent les corps conducteurs; il y a lieu de constituer, pour les corps diélectriques, une Électrodynamique analogue à celle qu'Ampère, W. Weber, F. Neumann ont constituée pour les corps conducteurs.

« En second lieu, les actions électriques doivent se propager, au sein d'un corps diélectrique, de la même façon que la lumière se propage au sein d'un corps transparent; et, pour une même substance, la vitesse de l'électricité et la vitesse de la lumière doivent avoir la même valeur.

« Maxwell chercha donc à étendre aux corps diélectriques les équations de la théorie mathématique de l'électricité et à mettre ces équations sous une forme telle que l'identité entre la propagation de l'électricité et la propagation de la lumière s'y reconnût avec évidence. Mais les lois les mieux établies de l'Électrostatique et de l'Électrodynamique ne se prêtaient point à la transformation rêvée par le physicien écossais. Tantôt par une voie, tantôt par une autre, celui-ci s'acharna, tant que dura sa vie, à réduire ces équations rebelles, à leur arracher les propositions qu'il avait entrevues et qu'avec un merveilleux génie il devinait toutes proches de la vérité; cependant, aucune de ses déductions n'était viable; s'il obtenait enfin les équations souhaitées, c'était, à chaque tentative nouvelle, au prix de paralogismes flagrants, voire de lourdes fautes de calcul.

« Pour saisir les vérités que lui révélait sa pénétrante intuition, l'esprit de finesse le plus primesautier et le plus audacieux qu'on eût vu depuis Fresnel y imposait silence aux réclamations les mieux justifiées de l'esprit géométrique. L'esprit géométrique avait, à son tour, le droit et le devoir de faire entendre sa voix. Maxwell était parvenu jusqu'à ses découvertes par un sentier coupé de précipices infranchissables à toute raison soucieuse des règles de la Logique et de l'Algèbre; il appartenait à l'esprit géométrique de tracer une route aisée par où l'on pût, sans manquer en rien à la rigueur, s'élever jusqu'aux mêmes vérités.

« Cette œuvre indispensable fut menée à bien par un Allemand. H. von Helmholtz montra comment, sans rien abandonner des vérités éprouvées que l'Électrodynamique avait depuis longtemps conquises, sans heurter d'aucune façon les règles de la Logique et de l'Algèbre, on pouvait cependant atteindre au but que le physicien écossais s'était proposé; il suffisait, pour cela, de ne pas imposer à la propagation des actions électriques une vitesse rigoureusement égale à celle que Maxwell lui assignait; cette vitesse-là était seulement très voisine de celle-ci.

« L'esprit de finesse et l'esprit de géométrie trouvaient également leur compte dans la belle théorie de Helmholtz; sans rien renier de l'Électrodynamique construite par Ampère, par Poisson, par W. Weber, par F. Neumann, elle l'enrichissait de tout ce que les vues de Maxwell contenaient de vrai et de fécond (1). »

(1) P. Duhem, *La Science allemande*, p. 127.

« Prolongement naturel des doctrines de Poisson, d'Ampère, de Weber et de Neumann, cette théorie conduit logiquement des principes posés au commencement du dix-neuvième siècle aux conséquences les plus séduisantes des théories de Maxwell, des lois de Coulomb à la théorie électromagnétique de la lumière; sans perdre aucune des récentes conquêtes de la science électrique, elle rétablit la continuité de la tradition [1]. »

La théorie de Helmholtz a été propagée en France et développée par le signataire des lignes qui précèdent, qu'une mort prématurée vient d'enlever à la Science, mais que l'importance de l'œuvre qu'il laisse place au nombre des plus grands physiciens français. Toutefois, dans l'estime qu'il professait pour cette théorie, P. Duhem n'a pas dit que la rigueur et l'esprit de clarté qu'il y admirait étaient en partie son œuvre. Et, en effet, en la faisant connaître en France, il l'a en quelque sorte refondue, soit en modifiant l'enchaînement primitif, soit en éclaircissant certaines démonstrations restées obscures, toujours en employant les ressources variées de l'Énergétique à lui donner cette belle ordonnance, cette unité et ce tour si personnel auxquels se reconnaissent immédiatement ses écrits. Sans diminuer l'œuvre de Helmholtz, on peut donc dire que grâce à celle de Duhem, qui est l'épanouissement de la première, l'Électrodynamique des milieux en repos constitue aujourd'hui un corps de doctrine, qui présente la même harmonie et le même caractère d'achèvement que les théories les plus anciennement constituées de la Physique mathématique et auquel le nom de Duhem mérite de rester attaché à côté de celui de Helmholtz.

Le présent Mémoire est l'application de cette Électrodynamique à un problème assez simple pour pouvoir être poussé jusqu'aux applications numériques et qui renferme, comme cas particulier, la théorie approfondie d'un phénomène familier aux physiciens, celui de la décharge d'un condensateur sur son propre diélectrique supposé imparfaitement isolant. On considère un mur d'épaisseur finie confinant à deux milieux indéfinis, qui peuvent être soit des diélectriques non conducteurs, soit des conducteurs de résistivité nulle; il s'agit de déterminer l'état du système résultant d'un état initial donné arbitrairement dans tout l'espace.

Pour simplifier, cet état initial est supposé le même en tous les points d'un plan quelconque parallèle aux faces du mur; il en est alors de même de l'état du système à un instant quelconque, de sorte que les grandeurs qui fixent cet état ne sont fonctions que de deux variables indépendantes : le temps t et l'abscisse x du point considéré comptée perpendiculairement aux faces du mur.

La solution complète de ce problème se ramène à la recherche du potentiel vecteur total ($\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$) dans tout l'espace. On en déduit aisément le champ magnétique, le potentiel électrique, puis le champ électrique comme résultante de deux

(1) P. Duhem, *Les théories électriques de J. C. Maxwell*, p. 225.

champs partiels : le champ électrostatique et le champ électrodynamique et électromagnétique.

Du fait que nous n'avons ici qu'une seule variable géométrique x résultent des simplifications importantes : les trois composantes $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ du potentiel vecteur total se déterminent séparément; le potentiel électrique ne dépend que de la seule composante longitudinale $\mathcal{F}$ et le champ magnétique que des deux composantes transversales $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$. Comme c'est le potentiel électrique qui nous intéresse tout spécialement dans le phénomène de la décharge d'un condensateur, nous nous bornons, dans ce Mémoire, à déterminer la fonction $\mathcal{F}$ et les grandeurs qui en dérivent; cela revient à supposer qu'à l'instant initial les fonctions $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ sont nulles ainsi que leurs dérivées par rapport au temps. Le champ magnétique est alors nul à chaque instant et le champ électrique purement longitudinal.

Pour connaître l'état du système en un point quelconque de l'espace et pour une valeur quelconque positive ou négative du temps, il faut déterminer les fonctions qui fixent cet état dans tout le plan des deux variables indépendantes x, t. On est ainsi conduit à tracer dans ce plan certaines droites qui le partagent en dix-sept régions, dans lesquelles ces fonctions reçoivent des déterminations analytiques différentes. Pour avoir l'état du système à l'instant t, il faut alors suivre ces déterminations le long d'une parallèle à l'axe des x d'ordonnée t. Cette parallèle est coupée par les droites précédentes en quatre points mobiles quand t varie et ces points sont les abscisses de quatre plans d'ondes formant deux trains, qui se propagent en sens inverse avec la vitesse de la lumière dans l'éther, de manière à coïncider avec les deux faces du mur à l'instant initial. Ces ondes sont, au sens d'Hugoniot, du second ordre pour le potentiel électrique et du premier ordre pour les champs électriques partiels.

En particularisant les fonctions d'état initial, on obtient immédiatement les formules de la décharge d'un condensateur sur son propre diélectrique, formules qui n'avaient été obtenues jusqu'ici, à notre connaissance, qu'en négligeant les effets de l'induction électrodynamique. Les courbes de variation en fonction de x du potentiel et des champs électriques, que nous avons construites pour différentes valeurs de t, montrent d'une façon saisissante la manière dont ces grandeurs se propagent dans l'espace.

Mais la grandeur dont il est le plus intéressant d'étudier la variation en fonction du temps est assurément la différence de potentiel entre les armatures, puisque cette quantité est directement accessible à l'expérience. Si θ désigne le temps que mettrait la lumière à traverser une lame d'éther ayant une épaisseur égale à celle du mur, cette différence de potentiel est représentée en fonction de t par des expressions différentes suivant celui des quatre intervalles limités par les nombres

$$-\theta, \quad 0, \quad \theta$$

dans lequel se trouve cette variable t; mais les deux intervalles centraux correspondent à une durée toujours beaucoup trop courte pour que le phénomène puisse y être observé.

Si le mur est mince et très résistant, ce qui est précisément le cas des condensateurs réels, on reconnait que la loi du phénomène dans le seul intervalle accessible à l'expérience $(t > 0)$ diffère extrêmement peu de la loi exponentielle qu'emploient les physiciens dans la mesure de la résistance d'isolement d'un condensateur.

Afin de fixer les nombreuses définitions et notations qu'emploie l'Électrodynamique et de préparer la mise en équations de notre problème, il nous a paru indispensable de consacrer le premier chapitre de ce Mémoire à l'établissement des équations les plus générales des milieux homogènes et isotropes en repos. Le lecteur y trouvera un exposé synthétique de cette belle théorie à l'édification de laquelle P. Duhem a travaillé jusqu'à son dernier jour [1].

---

[1] Le présent Mémoire a été résumé en deux notes insérées aux Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences : *Le problème du mur en Électrodynamique*, t. 163, p. 608, séance du 20 novembre 1916; — *Le problème du mur et son application à la décharge d'un condensateur sur son propre diélectrique*, t. 163, p. 703, séance du 4 décembre 1916.

CHAPITRE PREMIER

Les équations générales de l'Électrodynamique pour un système de corps homogènes et isotropes en repos.

§ I. — *Grandeurs et fonctions définissant l'état du système.*

Considérons un système de corps homogènes et isotropes en repos susceptibles d'électrisation et pouvant être à la fois conducteurs, diélectriques et magnétiques; ce système est rapporté à trois axes rectangulaires $Oxyz$ qui lui sont invariablement liés.

Les corps étant électrisés, l'état d'électrisation du système est défini, à chaque instant t, par la *densité électrique cubique* e en chaque point intérieur à un corps et par la *densité électrique superficielle* σ en chaque point d'une surface de discontinuité.

Les corps étant conducteurs, les courants de conduction qui les parcourent sont déterminés en chaque point par les composantes u, v, w de la *densité du courant de conduction*.

Les corps étant diélectriques, l'état de polarisation diélectrique du système est défini en chaque point par les composantes A, B, C de l'*intensité de polarisation*. Au même point, la *densité du courant de déplacement* a pour composantes

$$\frac{\partial A}{\partial t}, \quad \frac{\partial B}{\partial t}, \quad \frac{\partial C}{\partial t},$$

de sorte que la *densité du courant total* en ce point a pour composantes

$$(1) \qquad \varphi = u + \frac{\partial A}{\partial t}, \quad \psi = v + \frac{\partial B}{\partial t}, \quad \omega = w + \frac{\partial C}{\partial t}.$$

Enfin, les corps étant magnétiques, l'état de polarisation magnétique du système est défini en chaque point par les composantes A′, B′, C′ de l'*intensité d'aimantation*.

Telles sont les grandeurs, fonctions de x, y, z, t, qui définissent l'état électrique et magnétique du système.

Au moyen de ces grandeurs, on forme certaines fonctions que nous allons définir. Soient :

$d\varpi$ un élément de volume d'un corps;

dS un élément d'une surface de discontinuité;

r la distance d'un point (ξ, η, ζ), soit de l'élément $d\varpi$, soit de l'élément dS au point (x, y, z).

Nous appellerons *potentiel électrique* au point (x, y, z) la fonction

$$V = \int \frac{e}{r} d\varpi + \int \frac{\sigma}{r} dS + \int \left(A \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + B \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + C \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) d\varpi,$$

les intégrales triples s'étendant au système entier, l'intégrale de surface à toutes les surfaces de discontinuité.

Nous appellerons *potentiel magnétique* au point (x, y, z) la fonction

$$V' = \int \left(A' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + B' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + C' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) d\varpi.$$

Soit k la constante purement numérique appelée *constante de Helmholtz;* nous appellerons *potentiel vecteur électrique* au point (x, y, z) le vecteur ayant pour composantes

$$\mathfrak{U} = \int \left[\frac{1+k}{2} \frac{\varphi}{r} + \frac{1-k}{2} \frac{\xi - x}{r^2} \left(\frac{\xi - x}{r} \varphi + \frac{\eta - y}{r} \psi + \frac{\zeta - z}{r} \omega \right) \right] d\varpi,$$

$$\mathfrak{V} = \int \left[\frac{1+k}{2} \frac{\psi}{r} + \frac{1-k}{2} \frac{\eta - y}{r^2} \left(\frac{\xi - x}{r} \varphi + \frac{\eta - y}{r} \psi + \frac{\zeta - z}{r} \omega \right) \right] d\varpi,$$

$$\mathfrak{W} = \int \left[\frac{1+k}{2} \frac{\omega}{r} + \frac{1-k}{2} \frac{\zeta - z}{r^2} \left(\frac{\xi - x}{r} \varphi + \frac{\eta - y}{r} \psi + \frac{\zeta - z}{r} \omega \right) \right] d\varpi.$$

Nous appellerons *potentiel vecteur magnétique* au point (x, y, z) le vecteur ayant pour composantes

$$\Phi = \int \left(C' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} - B' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) d\varpi,$$

$$\Psi = \int \left(A' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} - C' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} \right) d\varpi,$$

$$\Omega = \int \left(B' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} - A' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} \right) d\varpi.$$

Soient :

$\frac{a^2}{2}$ la *constante fondamentale des actions électrodynamiques;*

ε' la *constante fondamentale des actions magnétiques;*

nous appellerons *potentiel vecteur total* au point (x, y, z) le vecteur ayant pour composantes [1]

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathcal{F} &= \frac{a}{\sqrt{2}}\mathfrak{U} + \sqrt{\varepsilon'}\,\Phi, \\ \mathcal{G} &= \frac{a}{\sqrt{2}}\mathfrak{V} + \sqrt{\varepsilon'}\,\Psi, \\ \mathcal{H} &= \frac{a}{\sqrt{2}}\mathfrak{W} + \sqrt{\varepsilon'}\,\Omega. \end{aligned}\right.$$

Soit ε la *constante fondamentale des actions électrostatiques;* le *champ électrique* au point (x, y, z) est le vecteur ayant pour composantes

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= -\varepsilon\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{a^2}{2}\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t} - \frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'}\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \\ Y &= -\varepsilon\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{a^2}{2}\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t} - \frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'}\frac{\partial \Psi}{\partial t}, \\ Z &= -\varepsilon\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{a^2}{2}\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial t} - \frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'}\frac{\partial \Omega}{\partial t}; \end{aligned}\right.$$

il est la résultante de trois champs partiels : le *champ électrostatique*

$$-\varepsilon\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad -\varepsilon\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad -\varepsilon\frac{\partial V}{\partial z};$$

le *champ électrodynamique*

$$-\frac{a^2}{2}\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t}, \qquad -\frac{a^2}{2}\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t}, \qquad -\frac{a^2}{2}\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial t};$$

le *champ électromagnétique*

$$-\frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'}\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \qquad -\frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'}\frac{\partial \Psi}{\partial t}, \qquad -\frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'}\frac{\partial \Omega}{\partial t}.$$

Enfin, le *champ magnétique* est le vecteur ayant pour composantes

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} X' &= -\varepsilon'\frac{\partial V'}{\partial x} - \frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'}\left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z}\right), \\ Y' &= -\varepsilon'\frac{\partial V'}{\partial y} - \frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'}\left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x}\right), \\ Z' &= -\varepsilon'\frac{\partial V'}{\partial z} - \frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'}\left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y}\right). \end{aligned}\right.$$

---

[1] Ces fonctions $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ sont appelées dans les Mémoires de P. Duhem *fonctions totales de Helmholtz.*

§ II. — *Relations analytiques.*

Les grandeurs et les fonctions qui viennent d'être définies sont reliées par un certain nombre de relations, qui constituent les lois essentielles des milieux en repos; les unes sont des équations indéfinies vérifiées en tout point intérieur à un corps du système, les autres sont des équations aux surfaces séparatives vérifiées en tout point d'une surface séparative de deux corps contigus.

En tout point intérieur à un corps du système, on a les équations indéfinies

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial e}{\partial t}=0; \tag{5}$$

$$\Delta V=4\pi\left(-e+\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right); \tag{6}$$

$$\left\{\begin{aligned} \Delta\mathfrak{U}&=-4\pi\varphi+(1-k)\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial t},\\ \Delta\mathfrak{V}&=-4\pi\psi+(1-k)\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial t},\\ \Delta\mathfrak{W}&=-4\pi\omega+(1-k)\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial t}; \end{aligned}\right. \tag{7}$$

$$\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial z}=-k\frac{\partial V}{\partial t}; \tag{8}$$

$$\Delta V'=4\pi\left(\frac{\partial A'}{\partial x}+\frac{\partial B'}{\partial y}+\frac{\partial C'}{\partial z}\right);$$

$$\left\{\begin{aligned} \Delta\Phi&=4\pi\left(\frac{\partial C'}{\partial y}-\frac{\partial B'}{\partial z}\right),\\ \Delta\Psi&=4\pi\left(\frac{\partial A'}{\partial z}-\frac{\partial C'}{\partial x}\right),\\ \Delta\Omega&=4\pi\left(\frac{\partial B'}{\partial x}-\frac{\partial A'}{\partial y}\right); \end{aligned}\right. \tag{9}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Psi}{\partial y}+\frac{\partial\Omega}{\partial z}=0; \tag{10}$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\Omega}{\partial y}-\frac{\partial\Psi}{\partial z}&=\frac{\partial V'}{\partial x}-4\pi A',\\ \frac{\partial\Phi}{\partial z}-\frac{\partial\Omega}{\partial x}&=\frac{\partial V'}{\partial y}-4\pi B',\\ \frac{\partial\Psi}{\partial x}-\frac{\partial\Phi}{\partial y}&=\frac{\partial V'}{\partial z}-4\pi C'; \end{aligned}\right. \tag{11}$$

$$\rho u = X, \qquad \rho v = Y, \qquad \rho w = Z; \tag{12}$$

$$A = \varkappa X, \qquad B = \varkappa Y, \qquad C = \varkappa Z; \tag{13}$$

$$A' = \varkappa' X', \qquad B' = \varkappa' Y', \qquad C' = \varkappa' Z'. \tag{14}$$

Dans ces dernières équations, ρ désigne la *résistivité* du corps considéré, $\varkappa$ son *coefficient de polarisation diélectrique*, $\varkappa'$ son *coefficient d'aimantation*.

Passons aux équations vérifiées en chaque point M de la surface séparative S de deux corps contigus 1 et 2. Soient :

Mn_1 la demi-normale de cosinus directeurs α_1, β_1, γ_1 menée en M à la surface S vers l'intérieur du corps 1 ;

Mn_2 la demi-normale de cosinus directeurs α_2, β_2, γ_2 menée en M à la surface S vers l'intérieur du corps 2.

On a, tout d'abord,

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \qquad \beta_1 + \beta_2 = 0, \qquad \gamma_1 + \gamma_2 = 0.$$

En affectant de l'indice 1 les grandeurs relatives au corps 1 et de l'indice 2 celles relatives au corps 2, on a, en tout point M de la surface S, les équations aux surfaces séparatives

$$u_1\alpha_1 + v_1\beta_1 + w_1\gamma_1 + u_2\alpha_2 + v_2\beta_2 + w_2\gamma_2 + \frac{\partial\sigma}{\partial t} = 0; \tag{15}$$

$$\left\{\begin{array}{l} V_1 = V_2, \\ \dfrac{dV_1}{dn_1} + \dfrac{dV_2}{dn_2} = 4\pi(-\sigma + A_1\alpha_1 + B_1\beta_1 + C_1\gamma_1 + A_2\alpha_2 + B_2\beta_2 + C_2\gamma_2); \end{array}\right. \tag{16}$$

$$\left\{\begin{array}{l} V'_1 = V'_2, \\ \dfrac{dV'_1}{dn_1} + \dfrac{dV'_2}{dn_2} = 4\pi(A'_1\alpha_1 + B'_1\beta_1 + C'_1\gamma_1 + A'_2\alpha_2 + B'_2\beta_2 + C'_2\gamma_2); \end{array}\right. \tag{17}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{U}_1 = \mathfrak{U}_2, \qquad \mathfrak{V}_1 = \mathfrak{V}_2, \qquad \mathfrak{W}_1 = \mathfrak{W}_2; \\ \dfrac{\partial\mathfrak{U}_1}{\partial(x, y, z)} = \dfrac{\partial\mathfrak{U}_2}{\partial(x, y, z)}, \qquad \dfrac{\partial\mathfrak{V}_1}{\partial(x, y, z)} = \dfrac{\partial\mathfrak{V}_2}{\partial(x, y, z)}, \qquad \dfrac{\partial\mathfrak{W}_1}{\partial(x, y, z)} = \dfrac{\partial\mathfrak{W}_2}{\partial(x, y, z)}; \end{array}\right. \tag{18}$$

$$\Phi_1 = \Phi_2, \qquad \Psi_1 = \Psi_2, \qquad \Omega_1 = \Omega_2; \tag{19}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\Phi_1}{dn_1} + \dfrac{d\Phi_2}{dn_2} = 4\pi(C'_1\beta_1 - B'_1\gamma_1 + C'_2\beta_2 - B'_2\gamma_2), \\ \dfrac{d\Psi_1}{dn_1} + \dfrac{d\Psi_2}{dn_2} = 4\pi(A'_1\gamma_1 - C'_1\alpha_1 + A'_2\gamma_2 - C'_2\alpha_2), \\ \dfrac{d\Omega_1}{dn_1} + \dfrac{d\Omega_2}{dn_2} = 4\pi(B'_1\alpha_1 - A'_1\beta_1 + B'_2\alpha_2 - A'_2\beta_2). \end{array}\right. \tag{20}$$

§ III. — *Le problème général de l'Électrodynamique.*

P. Duhem a montré que si l'on connaît le potentiel électrique V et le potentiel vecteur total $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$, toutes les grandeurs énumérées au § I et définissant l'état du système sont déterminées (¹).

En effet, d'après les égalités (2) et (3), le champ électrique se trouve déterminé par les égalités

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= -\varepsilon\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{a}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t},\\ Y &= -\varepsilon\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{a}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t},\\ Z &= -\varepsilon\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{a}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t},\end{aligned}\right.$$

ce qui détermine, d'après les égalités (12) et (13), le courant de conduction (u, v, w) et l'intensité de polarisation (A, B, C). On en déduit le courant de déplacement $\frac{\partial(A, B, C)}{\partial t}$ et le courant total (φ, ψ, ω) au moyen des égalités (1).

De même, la densité électrique cubique e se détermine au moyen de l'égalité (6) et la densité électrique superficielle σ au moyen de la deuxième égalité (16).

Enfin, en vertu des égalités (2) et (11), les égalités (4) donnent pour le champ magnétique

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} \mu X' &= -\sqrt{\varepsilon'}\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z}\right),\\ \mu Y' &= -\sqrt{\varepsilon'}\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}\right),\\ \mu Z' &= -\sqrt{\varepsilon'}\left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\right),\end{aligned}\right.$$

en désignant par $\mu = 1 + 4\pi\varepsilon'\chi'$ la *perméabilité magnétique*.

L'intensité d'aimantation (A', B', C') est alors déterminée par les égalités (14).

D'ailleurs, si l'on connaît le potentiel vecteur total $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$, le potentiel électrique V s'en déduit par une quadrature; en effet, les égalités (2), (8) et (10) nous donnent

$$(23)\qquad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} = -k\frac{a}{\sqrt{2}}\frac{\partial V}{\partial t}.$$

(¹) P. Duhem, *Le problème général de l'Électrodynamique pour un système de corps immobiles*, Journal de Math. pures et appliquées, (6), t. X, 1914, p. 354.

Nous allons voir qu'on peut déduire des égalités précédentes les équations nécessaires et suffisantes pour déterminer le potentiel vecteur total et, par suite, pour résoudre le problème général de l'Électrodynamique.

Nous verrons de même qu'indépendamment de la considération du potentiel vecteur total, on peut former les équations nécessaires et suffisantes pour déterminer les champs électrique et magnétique; mais cette méthode a, sur la première, l'inconvénient de ne pas faire connaître par un calcul immédiat le potentiel électrique. Elle ne permet donc pas le calcul immédiat des différents champs partiels dont la résultante donne le champ électrique total.

§ IV. — *Équations du potentiel vecteur total.*

Posons pour abréger

$$\Theta = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z}; \tag{24}$$

les égalités (14) et (22) transforment la première égalité (9) en la suivante :

$$\Delta\Phi = \frac{4\pi\sqrt{\varepsilon'}\,\varkappa'}{\mu}\left(\Delta\mathcal{F} - \frac{\partial\Theta}{\partial x}\right).$$

La première égalité (7) devient alors, en tenant compte de la première égalité (2),

$$\Delta\mathcal{F} - \frac{4\pi\varepsilon'\varkappa'}{\mu}\left(\Delta\mathcal{F} - \frac{\partial\Theta}{\partial x}\right) = -4\pi\frac{a}{\sqrt{2}}\varphi + \frac{a}{\sqrt{2}}(1-k)\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial t}. \tag{25}$$

Mais la première égalité (1) peut s'écrire, d'après les égalités (12), (13) et (21),

$$\varphi = -\frac{1}{\rho}\left(\varepsilon\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{a}{\sqrt{2}}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial t}\right) - \varkappa\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{a}{\sqrt{2}}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial t}\right);$$

l'égalité (25) devient ainsi la première des égalités

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu}\Delta\mathcal{F} - 2\pi a^2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathcal{F}}{\rho} + \varkappa\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial t}\right) = \frac{a}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{4\pi\varepsilon}{\rho}V + \frac{\mu K - k}{\mu}\frac{\partial V}{\partial t}\right),\\
&\frac{1}{\mu}\Delta\mathcal{G} - 2\pi a^2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathcal{G}}{\rho} + \varkappa\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial t}\right) = \frac{a}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{4\pi\varepsilon}{\rho}V + \frac{\mu K - k}{\mu}\frac{\partial V}{\partial t}\right),\\
&\frac{1}{\mu}\Delta\mathcal{H} - 2\pi a^2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathcal{H}}{\rho} + \varkappa\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}\right) = \frac{a}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{4\pi\varepsilon}{\rho}V + \frac{\mu K - k}{\mu}\frac{\partial V}{\partial t}\right),
\end{aligned}\right. \tag{26}$$

les deux autres s'obtenant d'une manière analogue et

$$K = 1 + 4\pi\varepsilon\varkappa$$

désignant le *pouvoir inducteur spécifique*.

Dérivons enfin par rapport à t les égalités (26) en tenant compte qu'on a, d'après les égalités (23) et (24),

$$\Theta = -k\frac{a}{\sqrt{2}}\frac{\partial V}{\partial t} \tag{27}$$

et il viendra

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{a^2 k}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2\varepsilon}{\rho}\Theta + \frac{\mu K - k}{2\pi\mu}\frac{\partial\Theta}{\partial t}\right) + \frac{1}{2\pi\mu a^2}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\mathcal{F}}{\rho} + \varkappa\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial t}\right) = 0,\\
&\frac{1}{a^2 k}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2\varepsilon}{\rho}\Theta + \frac{\mu K - k}{2\pi\mu}\frac{\partial\Theta}{\partial t}\right) + \frac{1}{2\pi\mu a^2}\frac{\partial\Delta\mathcal{G}}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\mathcal{G}}{\rho} + \varkappa\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial t}\right) = 0,\\
&\frac{1}{a^2 k}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2\varepsilon}{\rho}\Theta + \frac{\mu K - k}{2\pi\mu}\frac{\partial\Theta}{\partial t}\right) + \frac{1}{2\pi\mu a^2}\frac{\partial\Delta\mathcal{H}}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\mathcal{H}}{\rho} + \varkappa\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}\right) = 0.
\end{aligned}\right. \tag{28}$$

Telles sont les équations indéfinies que vérifie le potentiel vecteur total $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$.

D'après un théorème de Clebsch généralisé [1], les intégrales de ces équations sont de la forme

$$\left\{\begin{aligned}
\mathcal{F} &= \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z},\\
\mathcal{G} &= \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x},\\
\mathcal{H} &= \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y},
\end{aligned}\right. \tag{29}$$

U étant une intégrale de l'*équation aux dilatations*

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{K}{2\pi a^2 k\varkappa}\Delta U - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) + \frac{1}{\rho\varkappa}\left(\frac{2\varepsilon}{a^2 k}\Delta U - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) = 0 \tag{30}$$

et P, Q, R trois intégrales de l'*équation aux rotations*

$$\frac{1}{2\pi\mu a^2}\Delta W - \frac{1}{\rho}\frac{\partial W}{\partial t} - \varkappa\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \tag{31}$$

liées par la relation

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0. \tag{32}$$

D'une manière générale, on convient de dire que l'équation (30) est celle d'une

---

[1] P. DUHEM, *Sur la généralisation d'un théorème de Clebsch*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, (5), t. VI, 1900, p. 213.

perturbation longitudinale et que l'équation (31) est celle d'une *perturbation transversale.* Remarquons que l'équation (30) est aussi celle que vérifie le potentiel électrique V, comme on le voit en dérivant par rapport à x, y, z les équations (26), puis en les ajoutant membre à membre en tenant compte de l'égalité (27).

L'application de la méthode d'Hugoniot aux équations (30) et (31) montre que les perturbations longitudinales se propagent dans le milieu considéré avec la vitesse L définie par l'égalité

$$\text{(33)} \qquad L^2 = \frac{\varepsilon}{\frac{a^2}{2} k} \frac{K}{K-1},$$

tandis que les perturbations transversales se propagent avec la vitesse T définie par l'égalité

$$\text{(34)} \qquad T^2 = \frac{\varepsilon}{\frac{a^2}{2}(K-1)\mu}.$$

On voit que ces vitesses de propagation sont indépendantes de la résistivité du milieu; elles supposent, en outre, le pouvoir inducteur spécifique K supérieur à 1, c'est-à-dire le coefficient de polarisation diélectrique $\varkappa$ positif.

Les équations (28) étant du second ordre par rapport aux coordonnées, on sait qu'il est nécessaire de leur adjoindre deux équations aux surfaces séparatives par fonction inconnue, ce qui fait ici six équations distinctes.

Des trois premières égalités (18) et des égalités (19) résulte déjà, en vertu des égalités (2), la continuité du vecteur ($\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$) à la traversée d'une surface séparative; de là, les trois premières des six équations cherchées

$$\text{(35)} \qquad \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2, \qquad \mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2, \qquad \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2.$$

D'autre part, en vertu de la continuité des dérivées partielles du premier ordre par rapport aux coordonnées du vecteur ($\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$) exprimée par les autres égalités (18), on a, d'après les égalités (2),

$$\frac{d\mathcal{F}_1}{dn_1} + \frac{d\mathcal{F}_2}{dn_2} = \sqrt{\varepsilon'}\left(\frac{d\Phi_1}{dn_1} + \frac{d\Phi_2}{dn_2}\right),$$

de sorte que la première des égalités (20) devient

$$\frac{d\mathcal{F}_1}{dn_1} + \frac{d\mathcal{F}_2}{dn_2} = 4\pi\sqrt{\varepsilon'}(C'_1\beta_1 - B'_1\gamma_1 + C'_2\beta_2 - B'_2\gamma_2);$$

remplaçons-y les composantes de l'intensité d'aimantation par leurs valeurs (14), en tenant compte des expressions (22) du champ magnétique et il viendra la première des trois autres équations cherchées

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu_1}\frac{d\mathcal{F}_1}{dn_1}+\frac{1}{\mu_2}\frac{d\mathcal{F}_2}{dn_2}+\frac{4\pi\varepsilon' x'_1}{\mu_1}\left(\alpha_1\frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial x}+\beta_1\frac{\partial\mathcal{G}_1}{\partial x}+\gamma_1\frac{\partial\mathcal{H}_1}{\partial x}\right)\\
&\qquad\qquad+\frac{4\pi\varepsilon' x'_2}{\mu_2}\left(\alpha_2\frac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial x}+\beta_2\frac{\partial\mathcal{G}_2}{\partial x}+\gamma_2\frac{\partial\mathcal{H}_2}{\partial x}\right)=0,\\
&\frac{1}{\mu_1}\frac{d\mathcal{G}_1}{dn_1}+\frac{1}{\mu_2}\frac{d\mathcal{G}_2}{dn_2}+\frac{4\pi\varepsilon' x'_1}{\mu_1}\left(\alpha_1\frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial y}+\beta_1\frac{\partial\mathcal{G}_1}{\partial y}+\gamma_1\frac{\partial\mathcal{H}_1}{\partial y}\right)\\
&\qquad\qquad+\frac{4\pi\varepsilon' x'_2}{\mu_2}\left(\alpha_2\frac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial y}+\beta_2\frac{\partial\mathcal{G}_2}{\partial y}+\gamma_2\frac{\partial\mathcal{H}_2}{\partial y}\right)=0,\\
&\frac{1}{\mu_1}\frac{d\mathcal{H}_1}{dn_1}+\frac{1}{\mu_2}\frac{d\mathcal{H}_2}{dn_2}+\frac{4\pi\varepsilon' x'_1}{\mu_1}\left(\alpha_1\frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial z}+\beta_1\frac{\partial\mathcal{G}_1}{\partial z}+\gamma_1\frac{\partial\mathcal{H}_1}{\partial z}\right)\\
&\qquad\qquad+\frac{4\pi\varepsilon' x'_2}{\mu_2}\left(\alpha_2\frac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial z}+\beta_2\frac{\partial\mathcal{G}_2}{\partial z}+\gamma_2\frac{\partial\mathcal{H}_2}{\partial z}\right)=0,
\end{aligned}\right.$$

les deux autres s'obtenant d'une manière analogue.

Les égalités (35) et (36) constituent les six équations aux surfaces séparatives à adjoindre aux équations indéfinies (28).

P. Duhem a démontré (1) que si en tout point de la surface qui borne le système on connaît à chaque instant les quatre fonctions

$$\mathcal{F},\quad \mathcal{G},\quad \mathcal{H},\quad V$$

et si, à l'instant initial, on connaît en tout point du système les sept fonctions

$$\mathcal{F},\ \mathcal{G},\ \mathcal{H},\ \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial t},\ \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial t},\ \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t},\ V,$$

le problème se trouve déterminé sans ambiguïté.

§ V. — *Équations des champs électrique et magnétique.*

Dérivons par rapport à t les deux membres des équations (28) et remplaçons-y les dérivées $\dfrac{\partial(\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H})}{\partial t}$ par leurs valeurs tirées des égalités (21). Si nous posons

$$\theta=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}$$

(1) P. Duhem, *Le problème général de l'Électrodynamique pour un système de corps conducteurs immobiles*, Comptes rendus, t. 162, 1916, p. 542.

et si nous tenons compte que la fonction V vérifie l'équation aux dilatations (30), nous obtiendrons les équations indéfinies du champ électrique

$$\frac{1}{a^2k}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2\varepsilon}{\rho}\theta+\frac{\mu K-k}{2\pi\mu}\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)+\frac{1}{2\pi\mu a^2}\frac{\partial\Delta X}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{X}{\rho}+\varkappa\frac{\partial X}{\partial t}\right)=0,$$

$$\frac{1}{a^2k}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2\varepsilon}{\rho}\theta+\frac{\mu K-k}{2\pi\mu}\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)+\frac{1}{2\pi\mu a^2}\frac{\partial\Delta Y}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{Y}{\rho}+\varkappa\frac{\partial Y}{\partial t}\right)=0,$$

$$\frac{1}{a^2k}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2\varepsilon}{\rho}\theta+\frac{\mu K-k}{2\pi\mu}\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)+\frac{1}{2\pi\mu a^2}\frac{\partial\Delta Z}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{Z}{\rho}+\varkappa\frac{\partial Z}{\partial t}\right)=0.$$

Ce sont les mêmes que celles du potentiel vecteur total.

D'autre part, les égalités (22) et (29) nous donnent, en tenant compte de l'égalité (32),

$$\mu X'=\sqrt{\varepsilon'}\,\Delta P,\qquad \mu Y'=\sqrt{\varepsilon'}\,\Delta Q,\qquad \mu Z'=\sqrt{\varepsilon'}\,\Delta R,$$

ce qui montre que les composantes (X', Y', Z') du champ magnétique vérifient l'équation aux rotations (31). Les équations indéfinies du champ magnétique sont donc

$$\frac{1}{2\pi\mu a^2}\Delta(X', Y', Z')-\frac{1}{\rho}\frac{\partial(X', Y', Z')}{\partial t}-\varkappa\frac{\partial^2(X', Y', Z')}{\partial t^2}=0.$$

Passons à la recherche des équations aux surfaces séparatives.

En un point M_1 du milieu 1 infiniment voisin d'un point M de la surface séparative, les égalités (21) s'écrivent

$$(37)\qquad \left\{\begin{array}{l} X_1=-\varepsilon\dfrac{\partial V_1}{\partial x}-\dfrac{a}{\sqrt{2}}\dfrac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial t},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \end{array}\right.$$

en un point M_2 du milieu 2 infiniment voisin de M, on a de même

$$(37')\qquad \left\{\begin{array}{l} X_2=-\varepsilon\dfrac{\partial V_2}{\partial x}-\dfrac{a}{\sqrt{2}}\dfrac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial t},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

Multiplions alors les égalités (37) respectivement par α_1, β_1, γ_1, les égalités (37′) respectivement par α_2, β_2, γ_2 et ajoutons-les membre à membre; représentons, pour abréger, d'une manière générale par

$$\sum \alpha\mathcal{X}=\alpha\mathcal{X}+\beta\mathcal{Y}+\gamma\mathcal{Z}$$

la projection du vecteur $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ sur la direction (α, β, γ) et tenons compte des relations de continuité (35); il viendra

$$\sum \alpha_1 X_1+\sum \alpha_2 X_2+\varepsilon\left(\frac{dV_1}{dn_1}+\frac{dV_2}{dn_2}\right)=0.$$

Mais la deuxième égalité (16), qui est vérifiée quel que soit t, peut être dérivée par rapport à cette variable, de sorte que, combinée avec l'égalité (15), elle donne, d'après les égalités (12) et (13),

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{dV_1}{dn_1}+\frac{dV_2}{dn_2}\right)=4\pi\left(\frac{1}{\rho_1}\sum\alpha_1 X_1+\frac{1}{\rho_2}\sum\alpha_2 X_2+x_1\frac{\partial}{\partial t}\sum\alpha_1 X_1+x_2\frac{\partial}{\partial t}\sum\alpha_2 X_2\right),$$

d'où, en éliminant le potentiel électrique entre les deux dernières égalités et en introduisant le pouvoir inducteur spécifique,

$$\frac{4\pi\varepsilon}{\rho_1}\sum\alpha_1 X_1+K_1\frac{\partial}{\partial t}\sum\alpha_1 X_1+\frac{4\pi\varepsilon}{\rho_2}\sum\alpha_2 X_2+K_2\frac{\partial}{\partial t}\sum\alpha_2 X_2=0. \tag{38}$$

Il résulte de cette égalité qu'à la traversée d'une surface séparative la composante normale du champ électrique est discontinue.

Soient maintenant α, β, γ les cosinus directeurs d'une demi-tangente quelconque $M\tau$ menée en M à la surface séparative S; multiplions les équations (37) respectivement par α, β, γ, les équations (37') respectivement par $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$ et ajoutons-les membre à membre. Il résulte de la première égalité (16) que la dérivée de V suivant la tangente $M\tau$ n'éprouve pas de discontinuité à travers S; nous avons donc

$$\sum\alpha(X_1-X_2)=0,$$

égalité qui exprime la continuité de la composante tangentielle du champ électrique et qui équivaut aux deux suivantes,

$$\frac{X_1-X_2}{\alpha_1 \text{ ou } \alpha_2}=\frac{Y_1-Y_2}{\beta_1 \text{ ou } \beta_2}=\frac{Z_1-Z_2}{\gamma_1 \text{ ou } \gamma_2}, \tag{39}$$

le même indice devant évidemment figurer dans les trois dénominateurs.

Écrivons de même les égalités (4) de part et d'autre de la surface S :

$$\left\{\begin{array}{l} X'_1=-\varepsilon'\dfrac{\partial V'_1}{\partial x}-\dfrac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'}\left(\dfrac{\partial \mathfrak{W}_1}{\partial y}-\dfrac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial z}\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ; \end{array}\right. \tag{40}$$

$$\left\{\begin{array}{l} X'_2=-\varepsilon'\dfrac{\partial V'_2}{\partial x}-\dfrac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'}\left(\dfrac{\partial \mathfrak{W}_2}{\partial y}-\dfrac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial z}\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right. \tag{40'}$$

Multiplions les égalités (40) respectivement par α_1, β_1, γ_1, les égalités (40') respectivement par α_2, β_2, γ_2 et ajoutons-les membre à membre; le potentiel vecteur électrique disparaît en vertu du second groupe des égalités (18), de sorte qu'il reste

$$\sum\alpha_1 X'_1+\sum\alpha_2 X'_2+\varepsilon'\left(\frac{dV'_1}{dn_1}+\frac{dV'_2}{dn_2}\right)=0.$$

Mais les égalités (14) transforment la seconde égalité (17) en la suivante

$$\frac{dV'_1}{dn_1}+\frac{dV'_2}{dn_2}=4\pi\left(\varkappa'_1\sum\alpha_1X'_1+\varkappa'_2\sum\alpha_2X'_2\right),$$

d'où finalement, en introduisant la perméabilité magnétique,

$$(41)\qquad \mu_1\sum\alpha_1X'_1+\mu_2\sum\alpha_2X'_2=0.$$

Il résulte de cette égalité qu'à la traversée d'une surface séparative la composante normale du champ magnétique est discontinue.

Multiplions enfin les égalités (40) respectivement par α, β, γ, les égalités (40′) respectivement par $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$ et ajoutons-les membre à membre. Il résulte de la première égalité (17) que la dérivée de V' suivant la tangente $M\tau$ n'éprouve pas de discontinuité à travers S; nous avons donc

$$\sum\alpha(X'_1-X'_2)=0,$$

égalité qui exprime la continuité de la composante tangentielle du champ magnétique et qui équivaut aux deux suivantes,

$$(42)\qquad \frac{X'_1-X'_2}{\alpha_1 \text{ ou } \alpha_2}=\frac{Y'_1-Y'_2}{\beta_1 \text{ ou } \beta_2}=\frac{Z'_1-Z'_2}{\gamma_1 \text{ ou } \gamma_2},$$

le même indice devant évidemment figurer dans les trois dénominateurs.

Si les six équations aux surfaces séparatives (38), (39), (41) et (42) étaient distinctes, elles suffiraient à la détermination du champ électrique et du champ magnétique. En effet, la détermination du champ magnétique se ramène à celle du champ électrique, car des égalités (21) et (22) on déduit les suivantes,

$$\mu\frac{a}{\sqrt{2}}\frac{\partial X'}{\partial t}=\sqrt{\varepsilon'}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right),$$

$$\mu\frac{a}{\sqrt{2}}\frac{\partial Y'}{\partial t}=\sqrt{\varepsilon'}\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right),$$

$$\mu\frac{a}{\sqrt{2}}\frac{\partial Z'}{\partial t}=\sqrt{\varepsilon'}\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right),$$

appelées *relations de Faraday* ou *premier triplet de Maxwell*. Or, si l'on dérive par rapport à t les égalités (41) et (42) et qu'on y remplace le champ magnétique par son expression ci-dessus en fonction du champ électrique, ces égalités ne dépendront plus que du champ électrique. Jointes aux précédentes (38) et (39), elles constitueront six conditions aux surfaces séparatives pour déterminer les trois fonctions inconnues X, Y, Z.

Mais on sait que les six conditions ainsi écrites ne sont pas distinctes et se réduisent à cinq, comme on le reconnaît aisément en prenant comme plan des x, y le plan tangent en M à la surface S. Il faut donc trouver une nouvelle relation à adjoindre aux précédentes.

Pour cela, dérivons les égalités (21) respectivement par rapport à x, y, z et ajoutons-les membre à membre en tenant compte de l'égalité (23); il vient

$$0 = -\varepsilon\Delta V + k\frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}.$$

Dérivons par rapport à t l'égalité (6) et tenons compte des égalités (5), (12) et (13); nous obtenons

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial t} = 4\pi\left(\frac{\theta}{\rho} + \varkappa\frac{\partial\theta}{\partial t}\right),$$

de sorte qu'en éliminant ΔV entre ces deux dernières égalités, il vient

$$\frac{4\pi\varepsilon}{\rho}\theta + K\frac{\partial\theta}{\partial t} = k\frac{a^2}{2}\frac{\partial^3 V}{\partial t^3}.$$

D'après la première égalité (16), le second membre de cette égalité est continu à la traversée de la surface S; il en est donc de même du premier, de sorte qu'on a

$$\frac{4\pi\varepsilon}{\rho_1}\theta_1 + K_1\frac{\partial\theta_1}{\partial t} = \frac{4\pi\varepsilon}{\rho_2}\theta_2 + K_2\frac{\partial\theta_2}{\partial t}. \tag{42'}$$

Telle est l'équation complémentaire aux surfaces séparatives cherchée à adjoindre aux précédentes. Elle a été donnée sous une forme un peu différente par P. Duhem [1] lorsque les milieux 1 et 2 ne sont pas à la fois diélectriques et conducteurs; nous l'avons ensuite étendue au cas général [2].

D'après la transformation de Clebsch, on peut mettre le champ électrique (X, Y, Z) sous la forme

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z},$$

$$Y = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x},$$

$$Z = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

---

[1] P. Duhem, *Sur l'Électrodynamique des milieux diélectriques*, Comptes rendus, t. 162, 1916, p. 282; — *Sur l'Électrodynamique des milieux conducteurs*, *ibid.*, p. 337.

[2] L. Roy, *Sur l'Électrodynamique des milieux absorbants*, *ibid.*, p. 468.

Partant de là et des équations qui viennent d'être établies, P. Duhem a démontré (¹) que si en tout point de la surface qui borne le système on connaît à chaque instant les quatre fonctions

$$X', \quad Y', \quad Z', \quad V$$

et si, à l'instant initial, on connaît en tout point du système les neuf fonctions

$$U, \quad \frac{\partial U}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2},$$

$$P, \quad \frac{\partial P}{\partial t}, \quad Q, \quad \frac{\partial Q}{\partial t}, \quad R, \quad \frac{\partial R}{\partial t},$$

le problème se trouve déterminé sans ambiguïté.

§ VI. — *Hypothèse de Faraday et de Mossotti.*

Soient v la vitesse de la lumière dans l'éther, K_0 le pouvoir inducteur spécifique de l'éther, μ_0 sa perméabilité magnétique; on a entre les constantes fondamentales de l'Électrostatique et de l'Électrodynamique la relation célèbre

$$\frac{\varepsilon}{\frac{a^2}{2} K_0 \mu_0} = v^2. \tag{43}$$

D'autre part, il résulte des expériences de Hertz et de ses continuateurs que la vitesse de propagation T_0 des perturbations transversales dans l'éther est égale à la vitesse v de la lumière dans ce même milieu; or on a, d'après l'égalité (34) :

$$T_0^2 = \frac{\varepsilon}{\frac{a^2}{2}(K_0 - 1)\mu_0}.$$

L'égalité

$$T_0 = v$$

ne peut donc avoir lieu, aux erreurs d'expériences près, que si le pouvoir inducteur spécifique de l'éther K_0 est un nombre très grand par rapport à l'unité.

On est ainsi conduit, par nécessité expérimentale, à l'hypothèse suivante appelée par P. Duhem *hypothèse de Faraday et de Mossotti :*

Le pouvoir inducteur spécifique de l'éther est un nombre très grand par rapport à l'unité.

Cette hypothèse n'est pas contraire à l'expérience, puisque celle-ci ne nous fait connaître que des rapports de pouvoirs inducteurs spécifiques.

(¹) P. Duhem, *Le problème général de l'Électrodynamique pour un système de corps conducteurs immobiles*, Comptes rendus, t. 162, 1916, p. 542.

Cela posé, l'expérience montre qu'on a, pour tous les corps dont on a pu mesurer jusqu'ici le pouvoir inducteur spécifique,

$$\frac{K}{K_0} \geqslant 1.$$

Ce résultat, combiné avec l'hypothèse de Faraday et de Mossotti, nous donne donc la conclusion suivante :

Les pouvoirs inducteurs spécifiques de tous les corps dont on a pu mesurer le pouvoir inducteur sont des nombres très grands par rapport à l'unité.

Il résulte alors de l'égalité (33) que la vitesse de propagation L des perturbations longitudinales dans tous les milieux homogènes et isotropes, dont le pouvoir inducteur spécifique n'est pas d'un ordre de grandeur inférieur à celui de l'éther, a sensiblement la même valeur donnée par l'égalité

$$\text{(44)} \qquad L^2 = \frac{\varepsilon}{\frac{a^2}{2} k}.$$

L'hypothèse de Faraday et de Mossotti entraîne une autre conséquence.

Dérivons les égalités (21) respectivement par rapport à x, y, z et ajoutons-les membre à membre; il vient

$$0 = -\varepsilon \Delta V - \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{\partial \Theta}{\partial t},$$

ou, encore, d'après les égalités (27) et (44),

$$\text{(44')} \qquad 0 = -k \frac{a^2}{2} \left(L^2 \Delta V - \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right).$$

Mais l'équation aux dilatations (30) peut s'écrire, dans notre hypothèse,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(L^2 \Delta U - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right) + \frac{1}{\rho \chi} \left(L^2 \Delta U - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right) = 0,$$

de sorte qu'en remarquant que le potentiel V vérifie cette équation, il vient

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\theta}{\rho \chi} = 0.$$

Ainsi, dans l'hypothèse de Faraday et de Mossotti, la condition supplémentaire aux surfaces séparatives (42') se trouve identiquement vérifiée en vertu de l'équation indéfinie précédente, qui donne en intégrant

$$\theta = \theta_0 e^{-\frac{t}{\rho \chi}},$$

θ_0 désignant la valeur initiale de θ. Le champ électrique tend donc à devenir transversal.

Lorsque le milieu n'est pas conducteur, on a $\frac{1}{\rho} = 0$, de sorte que V ne figure plus que par sa dérivée par rapport à t dans les égalités (26). Cette fonction s'élimine donc au moyen de l'égalité (27), sans effectuer la dérivation par rapport à t qui nous a conduits aux équations indéfinies (28). Dans le cas actuel d'un milieu non conducteur, ces équations sont donc seulement du second ordre et il en est de même de l'équation aux dilatations correspondantes qui s'écrit, dans l'hypothèse de Faraday et de Mossotti,

$$L^2 \Delta U - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0.$$

Comme c'est également celle que vérifie la fonction V, il vient donc, d'après l'égalité (44'),

$$\theta = 0,$$

égalité qui exprime que le champ électrique est transversal.

Remarquons, enfin, qu'en vertu de l'expression de θ, cette égalité entraîne la suivante,

$$\varepsilon \Delta V + \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{\partial \Theta}{\partial t} = 0,$$

et, si l'on y fait $t = 0$, on voit que certaines des fonctions d'état initial se trouvent ici liées par une relation.

Ainsi, en résumé :

Si le pouvoir inducteur spécifique d'un milieu homogène et isotrope n'est pas d'un ordre de grandeur inférieur à celui de l'éther,

le champ électrique est transversal, si ce milieu n'est pas conducteur;

le champ électrique tend à devenir transversal, si ce milieu est conducteur.

§ VII. — *Signification de la constante de Helmholtz.*

Récrivons l'équation indéfinie (31) des perturbations transversales sous la forme

$$(31') \qquad \frac{\rho}{2\pi\mu a^2} \Delta W - \frac{\partial}{\partial t}\left(W + \rho \varkappa \frac{\partial W}{\partial t}\right) = 0$$

et appliquons-la à un milieu satisfaisant aux deux conditions suivantes :

1° La résistivité de ce milieu n'excède pas celle du plus résistant des métaux connus;

2° Son pouvoir inducteur spécifique n'excède pas le plus grand pouvoir inducteur spécifique connu.

Nous allons voir que, dans ces conditions, le second terme de la parenthèse de l'équation (31') est négligeable devant le premier, même dans le cas des oscillations électriques les plus rapides qu'on ait pu réaliser. A cet effet, nous allons calculer une limite supérieure de la quantité $\rho\varkappa$ qui, d'après l'équation (31'), est toujours homogène à un temps.

Tout d'abord, le plus résistant des métaux connus est le mercure, dont la résistivité vaut $9,4.10^4$ C. G. S. électromagnétiques; on a donc déjà

$$\rho \leqslant 9,4.10^4 \text{ C. G. S. électromagnétiques.}$$

D'autre part, le plus grand pouvoir inducteur spécifique connu est celui de l'eau qui est 80 fois plus grand que celui de l'éther; on a donc aussi

$$\frac{4\pi\varepsilon\varkappa}{K_0} < \frac{K}{K_0} \leqslant 80,$$

c'est-à-dire, d'après l'égalité (43),

$$\varkappa < \frac{80}{4\pi\dfrac{a^2}{2}\mu_0 v^2}.$$

Or, on peut prendre $\mu_0 = 1$ à un très haut degré d'approximation; comme, enfin, $v = 3.10^{10}$ cm. par seconde, il vient, dans le système électromagnétique où $\dfrac{a^2}{2} = 1$ par définition,

$$\varkappa < 0,71.10^{-20} \text{ C. G. S. électromagnétiques,}$$

d'où

$$\rho\varkappa < 6,7.10^{-16} \text{ secondes.}$$

Cela posé, si la perturbation considérée n'est pas périodique par rapport au temps ou, du moins, si sa période n'est pas très petite, $\dfrac{\partial W}{\partial t}$ sera numériquement du même ordre de grandeur que W, de sorte que, d'après l'inégalité précédente, le deuxième terme de la parenthèse de l'équation (31') sera absolument négligeable vis-à-vis du premier.

Si, au contraire, la perturbation considérée est périodique par rapport au temps et de période τ, $\dfrac{\partial W}{\partial t}$ sera de l'ordre de $\dfrac{2\pi}{\tau}$ W; or, les plus petites longueurs d'ondes qu'on ait pu réaliser dans l'éther étant de 0,6 cm., on a

$$3.10^{10}\tau \geqslant 0,6 \text{ cm.},$$

d'où

$$\frac{2\pi}{\tau}\rho\varkappa < 2,1.10^{-4},$$

ce qui est encore un nombre très petit.

Ainsi, pour un milieu satisfaisant à la double condition énoncée, le deuxième terme de la parenthèse de l'équation (31') est négligeable vis-à-vis du premier; cette équation se réduit alors sensiblement à la suivante

$$\frac{\rho}{2\pi\mu a^2}\Delta W - \frac{\partial W}{\partial t} = 0$$

d'après laquelle il n'y a plus de phénomène de propagation.

De là résulte, en particulier, la conclusion suivante :

Si le pouvoir inducteur spécifique des métaux, qui nous est inconnu, n'excède pas comme ordre de grandeur le plus grand des pouvoirs inducteurs spécifiques connus, les perturbations électriques transversales ne s'y propagent pas sensiblement; les seules perturbations électriques qui puissent s'y propager d'une manière effective sont donc des perturbations longitudinales.

Or, les expériences de M. Blondlot ont montré qu'une perturbation électrique excitée dans un métal s'y propage, aux erreurs d'expériences près, avec la vitesse v de la lumière dans l'éther; si l'on admet l'hypothèse ci-dessus, cette perturbation ne peut donc être que longitudinale.

Nous avons alors deux cas à distinguer suivant que le pouvoir inducteur spécifique K est supérieur ou égal à 1 :

1° Si K est supérieur à 1, l'égalité (33) nous donne

$$v^2 = \frac{\varepsilon}{\frac{a^2}{2}k}\frac{K}{K-1},$$

ce qui exige que le pouvoir inducteur spécifique de tous les métaux soit constant, à moins que ceux-ci ne satisfassent à l'hypothèse de Faraday et de Mossotti, ce qui est une conclusion bien plus vraisemblable. L'égalité précédente devient ainsi

$$v^2 = \frac{\varepsilon}{\frac{a^2}{2}k}, \tag{45}$$

d'où nous déduisons, d'après l'égalité (43),

$$k = K_0\mu_0.$$

2° Si K est égal à 1, c'est-à-dire si $\varkappa$ est nul, l'équation aux dilatations (30) peut s'écrire

$$\frac{\varepsilon}{\frac{a^2}{2}k}\Delta\left(U + \frac{\rho}{4\pi\varepsilon}\frac{\partial U}{\partial t}\right) - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0.$$

Mais, dans le cas des métaux, le second terme de la parenthèse est négligeable devant le premier, même pour les oscillations électriques les plus rapides, car on a

$$\rho \leqslant 9{,}4.10^4 \text{ C. G. S. électromagnétiques}$$

et, d'après l'égalité (43),

$$\varepsilon = \frac{a^2}{2} K_0 \mu_0 v^2 > 9.10^{20} \text{ C. G. S. électromagnétiques},$$

d'où

$$\frac{\rho}{4\pi\varepsilon} < 0,83.10^{-17},$$

ce qui nous conduit aux mêmes conclusions que pour la parenthèse de l'équation (31').

L'équation précédente se réduit donc sensiblement à la suivante,

$$\frac{\varepsilon}{\frac{a^2}{2} k} \Delta U - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0,$$

d'après laquelle il y a quasi-propagation des perturbations longitudinales à la vitesse définie par l'égalité (44). Comme cette vitesse doit être égale à celle de la lumière dans l'éther, d'après notre interprétation des expériences de M. Blondlot, on retrouve encore la relation (45), ce qui nous conduit à la même conclusion que précédemment touchant la valeur de k.

Il résulte enfin des égalités (44) et (45) qu'on a pour tout milieu homogène et isotrope satisfaisant à l'hypothèse de Faraday et de Mossotti

$$L = v.$$

De là, en résumé, les conclusions suivantes :

Si le pouvoir inducteur spécifique des métaux n'excède pas l'ordre de grandeur des pouvoirs inducteurs spécifiques connus :

1° *La constante de Helmholtz est égale au produit du pouvoir inducteur spécifique de l'éther par sa perméabilité;*

2° *La vitesse de propagation des perturbations électriques longitudinales dans tout milieu homogène et isotrope, dont le pouvoir inducteur spécifique n'est pas d'un ordre de grandeur inférieur à celui de l'éther, est égale à la vitesse de propagation de la lumière dans l'éther.*

(*A suivre.*)