ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

SUR

CERTAINS SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENTIELLES TOTALES

ET SUR UNE GÉNÉRALISATION DU PROBLÈME DE PFAFF

PAR E. GOURSAT.

INTRODUCTION

L'étude des intégrales multiples étendues à des variétés à un nombre quelconque de dimensions conduit tout naturellement à considérer les formes symboliques de différentielles qui figurent sous le signe d'intégration. Il est à remarquer que les règles des opérations symboliques appliquées à ces expressions, règles qui dérivent de leur signification même, ont déjà été établies par Grassmann et utilisées depuis par plusieurs géomètres.

Le présent Mémoire comprend plusieurs parties distinctes. La première partie contient quelques généralités, utiles pour la suite, sur un problème analogue au problème de Pfaff, mais relatif à une forme symbolique de degré quelconque, qui comprend, comme cas particulier, un grand nombre de problèmes classiques. Dans la seconde partie, j'étudie un système d'équations aux différentielles totales complètement intégrable, attaché à toute forme symbolique de degré quelconque, dont l'ordre est égal à la *classe* de cette forme, et dont l'intégration fait connaître les variables qui figurent dans l'expression réduite de cette forme, lorsque le nombre de ces variables est le plus petit possible.

Mes précédentes recherches sur les invariants intégraux se rattachent très simplement à ce problème général, ce qui me permet de présenter ces recherches sous une forme beaucoup plus simple et de les compléter sur certains points. C'est l'objet de la troisième partie.

Enfin, dans la quatrième partie, je montre comment les systèmes d'équations aux différentielles totales étudiés dans la deuxième partie se présentent d'eux-mêmes dans un problème du calcul des variations relatif à la forme symbolique ω. Cette interprétation rend presque intuitives la plupart des propriétés de ces systèmes qui ont été établies directement. Dans un petit travail inséré au *Bulletin de la Société mathématique* (t. XLIV, 1916, p. 13-39), j'ai appliqué la même méthode au système attaché à une forme linéaire de Pfaff, ce qui conduit très aisément aux résultats classiques.

Je n'ai fait qu'aborder ici les nombreux problèmes que soulève l'étude des formes symboliques de degré supérieur. J'aurai sans doute l'occasion d'y revenir dans un autre travail.

Voici la liste des principaux Ouvrages ou Mémoires qui seront cités dans ce travail :

H. Poincaré :

A. *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste* (t. III).

B. *Sur les résidus des intégrales doubles* (Acta Mathematica, t. IX).

C. *Analysis situs* (Journal de l'École Polytechnique, 1895).

E. Goursat :

D. *Sur les invariants intégraux* (Journal de Mathématiques, 6e série, t. IV; 1908).

E. *Sur quelques points de la théorie des invariants intégraux* (Ibid., 7e série, t. I; 1915).

E. Cartan :

F. *Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff* (Annales de l'École Normale, 3e série, t. XVI; 1899).

G. *Sur l'intégration des systèmes d'équations aux différentielles totales* (Ibid., 3e série, t. XVIII; 1901).

H. *Sur l'intégration de certains systèmes de Pfaff de caractère deux* (Bulletin de la Société Mathématique, t. XXIX; 1901).

On trouvera les règles du calcul symbolique dans les Mémoires cités de M. Cartan.

I

[**1**] Une intégrale de surface, dans l'espace à trois dimensions, est représentée par la notation

$$\mathrm{I}=\int\int_{(\mathrm{S})}\mathrm{A}(x,y,z)\,dy\,dz+\mathrm{B}(x,y,z)\,dz\,dx+\mathrm{C}(x,y,z)\,dx\,dy;$$

l'expression qui figure sous le signe $\int\int$ n'est nullement une forme algébrique en dx, dy, dz, mais a une signification purement symbolique. Pour calculer la valeur de l'intégrale I, étendue à une portion de surface représentée par les formules

$$x=f(u,v), \qquad y=\varphi(u,v), \qquad z=\psi(u,v),$$

on doit remplacer les produits symboliques $dy\,dz$, $dz\,dx$, $dx\,dy$ par $\frac{D(y,z)}{D(u,v)}du\,dv$, $\frac{D(z,x)}{D(u,v)}du\,dv$, $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}du\,dv$ respectivement, et calculer l'intégrale double ordinaire

$$\int\int_{(R)}\left[A\frac{D(y,z)}{D(u,v)}+B\frac{D(z,x)}{D(u,v)}+C\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right]du\,dv,$$

étendue à la région R du plan (u, v) qui correspond à la portion de la surface S considérée.

On représente de même une intégrale multiple étendue à une multiplicité M_p d'ordre p dans l'espace à n dimensions par une notation symbolique analogue

$$(1) \qquad I_p=\int_{M_p}\sum A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}\,dx_{\alpha_1}\,dx_{\alpha_2}\ldots dx_{\alpha_p},$$

où l'on écrit pour abréger un seul signe $\int$. Les coefficients $A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}$ sont des fonctions des n variables $x_1, \ldots, x_n$, que nous supposerons continues ainsi que toutes les dérivées partielles qui figurent dans les calculs; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont p nombres entiers différents, pris parmi les n premiers nombres, et la sommation est étendue à tous les arrangements p à p des n premiers nombres. Mais ces coefficients ne sont pas quelconques; deux coefficients $A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}$ et $A_{\alpha'_1\alpha'_2\ldots\alpha'_p}$, qui ne diffèrent que par l'ordre des indices sont égaux si les deux permutations $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ et $(\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_p)$ sont de même classe, et opposés si ces deux permutations sont de classes différentes. Pour avoir la valeur de l'intégrale I_p étendue à une multiplicité M_p de l'espace à n dimensions, nous supposerons les coordonnées d'un point de cette multiplicité exprimées au moyen de p paramètres $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ de façon que la multiplicité M_p corresponde point par point à un domaine D de l'espace à p dimensions $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$, et la valeur de I_p est égale à l'intégrale multiple de forme classique

$$I_p=\int_{(D)}\left(\sum A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}\frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial u_1}\frac{\partial x_{\alpha_2}}{\partial u_2}\cdots\frac{\partial x_{\alpha_p}}{\partial u_p}\right)du_1\ldots du_p,$$

étendue au domaine D. D'après ce qui a été dit plus haut sur les coefficients $A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}$, cette intégrale peut aussi s'écrire

$$(2) \qquad I_p=\int_{(D)}\left[\sum A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}\frac{D(x_{\alpha_1}x_{\alpha_2}\ldots x_{\alpha_p})}{D(u_1u_2\ldots u_p)}\right]du_1\,du_2\ldots du_p,$$

la sommation étant maintenant étendue à toutes les *combinaisons* p à p des n premiers nombres.

On a été ainsi amené à considérer des formes symboliques de différentielles, telles que celle qui figure sous le signe $\int$ dans l'expression (1)

$$(3) \qquad \omega_p = \sum A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p}\, dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_p},$$

le signe $\sum$ étant étendu à toutes les combinaisons des n indices p à p. On peut par exemple supposer que dans chaque terme les indices vont en croissant, mais cela n'est nullement nécessaire. Il faut seulement tenir compte de ce qui a été dit plus haut, si l'on effectue un changement dans l'ordre des indices; on doit changer le signe du coefficient si les deux permutations sont de classes différentes. Par exemple, pour $p=2$, on a $A_{ik}dx_i dx_k = -A_{ik}dx_k dx_i$, ou $A_{ki} = -A_{ik}$.

Je supposerai connues dans la suite les règles du calcul symbolique appliqué à ces expressions différentielles; elles dérivent toutes de la signification même de ces expressions et des formules relatives au changement de variables dans une intégrale multiple.

[**2**] L'intégrale $\int \omega$, étendue à une multiplicité *fermée* M_p de l'espace à n dimensions, est égale, d'après la formule de Stokes généralisée, à une intégrale de même espèce $\int \omega'$, étendue à une multiplicité M_{p+1} à $p+1$ dimensions, limitée par M_p, ω' ayant pour expression symbolique

$$(4) \qquad \omega' = \sum dA_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p}.$$

Cette nouvelle expression ω' est appelée la *dérivée* de l'expression ω; il est clair, d'après sa définition même, que c'est un *covariant* de ω. En d'autres termes, si par un changement de variables

$$(5) \qquad x_i = \varphi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ω se change en

$$\sum B_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p}\, dy_{\alpha_1} dy_{\alpha_2} \ldots dy_{\alpha_p},$$

le même changement de variables appliqué à la forme ω' la transforme en

$$\sum dB_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p}\, dy_{\alpha_1} dy_{\alpha_2} \ldots dy_{\alpha_p}.$$

En développant les produits symboliques indiqués, on peut encore écrire

$$\omega' = \sum \mathcal{A}_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{p+1}} \, dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_{p+1}},$$

la sommation étant étendue à toutes les combinaisons des n premiers nombres $p+1$ à $p+1$. Le coefficient $\mathcal{A}_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{p+1}}$ a deux expressions différentes suivant la parité de p. Si p est pair, on a

$$\mathcal{A}_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{p+1}} = \frac{\partial A_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_p}}{\partial x_{\alpha_{p+1}}} + \frac{\partial A_{\alpha_2 \cdots \alpha_p \alpha_{p+1}}}{\partial x_{\alpha_1}} + \ldots + \frac{\partial A_{\alpha_{p+1} \cdots \alpha_{p-1}}}{\partial x_{\alpha_p}}, \tag{6}$$

avec des signes $+$ seulement dans le second membre; si p est impair, on a

$$\mathcal{A}_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{p+1}} = \frac{\partial A_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_p}}{\partial x_{\alpha_{p+1}}} - \frac{\partial A_{\alpha_2 \cdots \alpha_p \alpha_{p+1}}}{\partial x_{\alpha_1}} + \ldots - \frac{\partial A_{\alpha_{p+1} \cdots \alpha_{p-1}}}{\partial x_{\alpha_p}}, \tag{7}$$

avec le signe $+$ et le signe $-$ alternativement. (*Mémoires A, B, C.*)

Une forme dérivée ω' est caractérisée par la propriété suivante; *la dérivée de ω' est identiquement nulle*, ou, ce qui revient au même, l'intégrale $\int \omega'$ étendue à une multiplicité fermée quelconque d'ordre $p+1$ est nulle. En effet, on vérifie immédiatement, d'après les expressions (6) ou (7) des coefficients $\mathcal{A}_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{p+1}}$ que l'expression ω'' que l'on déduit de ω' par le même procédé que l'on déduit ω' de ω a tous ses coefficients identiquement nuls. On peut encore le vérifier plus simplement en observant qu'un terme quelconque de ω' est de la forme

$$dA \, dx_i \, dx_k \ldots dx_l,$$

et, d'après la règle qui donne la dérivée d'un produit symbolique, la dérivée de ce terme est nulle puisque chacun des facteurs a une dérivée symbolique identiquement nulle.

Inversement soit ω une expression symbolique de degré p dont la dérivée ω' est identiquement nulle, c'est-à-dire dont les coefficients vérifient, suivant la parité de p, l'un des deux systèmes de conditions

$$\frac{\partial A_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_p}}{\partial x_{\alpha_{p+1}}} + \frac{\partial A_{\alpha_2 \cdots \alpha_p \alpha_{p+1}}}{\partial x_{\alpha_1}} + \ldots + \frac{\partial A_{\alpha_{p+1} \alpha_1 \cdots \alpha_{p-1}}}{\partial x_{\alpha_p}} = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial A_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_p}}{\partial x_{\alpha_{p+1}}} - \frac{\partial A_{\alpha_2 \cdots \alpha_p \alpha_{p+1}}}{\partial x_{\alpha_1}} + \ldots - \frac{\partial A_{\alpha_{p+1} \alpha_1 \cdots \alpha_{p-1}}}{\partial x_{\alpha_p}} = 0; \tag{9}$$

on démontre facilement, en tenant compte de ces relations, que l'on peut trouver une expression symbolique ω_1, de degré $p-1$,

$$\omega_1 = \sum C_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{p-1}} \, dx_{\alpha_1} \ldots dx_{\alpha_{p-1}}$$

telle que sa forme dérivée ω'_1 soit identique à ω. Cette forme ω_1 n'est pas complètement déterminée, car on peut lui ajouter une expression qui soit elle-même la dérivée d'une forme symbolique arbitraire de degré $p-2$.

Les formes dérivées jouent le même rôle, dans l'étude des intégrales multiples, que les différentielles totales exactes dans la théorie des intégrales curvilignes. Aussi a-t-on étendu à ces expressions le nom de *différentielles totales symboliques*.

[**3**] Étant donnée une forme linéaire de différentielles $\omega_1 = X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \ldots + X_n\,dx_n$, où les coefficients X_i sont des fonctions des n variables indépendantes x_i, le problème de Pfaff consiste à trouver dans l'espace à n dimensions toutes les multiplicités M_r à r dimensions $(1 \leqslant r < n)$ telles que l'intégrale $\int \omega$, étendue à une ligne quelconque située sur M_r, soit nulle. Si, au lieu d'une expression linéaire, on considère une expression ω de degré p par rapport aux différentielles, une extension toute naturelle du problème de Pfaff consiste à trouver dans l'espace à n dimensions toutes les multiplicités M_r à r dimensions $(p \leqslant r < n)$ telles que l'intégrale $\int \omega$, étendue à une variété quelconque d'ordre p située sur M_r, soit nulle.

Ce problème d'une si haute généralité comprend, comme cas particuliers, la plupart des problèmes classiques, ainsi qu'on aura l'occasion de le voir par la suite. Toute multiplicité satisfaisant à cette condition sera dite une multiplicité intégrale, ou plus simplement une *intégrale* de l'équation

$$\omega = 0. \tag{10}$$

Ce problème se ramène lui-même à l'intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles; l'étude directe de ce système, dans le cas de $p > 1$, ne semble pas avoir été abordée. Il est facile de former ce système en s'appuyant sur les propriétés d'invariance d'un produit symbolique.

Proposons-nous d'abord de rechercher s'il existe des intégrales à $n-1$ dimensions. Soit

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C \tag{11}$$

une équation définissant une famille de multiplicités intégrales de cette espèce, dépendant d'une constante arbitraire C, de telle façon qu'il passe une de ces intégrales par un point arbitraire $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Imaginons que l'on effectue un changement de variables de façon que l'équation (11) devienne

$$y_1 = C;$$

la forme symbolique ω se change en une forme symbolique de degré p en dy_1, $dy_2, \ldots, dy_p$. Or, pour que l'intégrale $\int \omega_1$, étendue à une multiplicité quelconque d'ordre p soit nulle, pourvu que l'on ait sur cette multiplicité $dy_1 = 0$, il faut et il suffit évidemment que dy_1 figure dans tous les termes de ω_1, ou, ce qui revient au même, que le produit symbolique $\omega_1 dy_1$ soit identiquement nul. Mais, si l'on revient aux variables primitives, le produit symbolique $\omega_1 dy_1$ se transforme en le produit symbolique $\omega\, df$; par conséquent, *pour que les multiplicités* M_{n-1} *définies par l'équation* (11) *soient des intégrales de* $\omega = 0$, *il faut et il suffit que le produit symbolique* $\omega\, df$ *soit identiquement nul.*

En égalant à zéro les coefficients de tous les termes de ce produit développé, on obtient un certain nombre d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre, qui devront être compatibles pour qu'il existe des intégrales à $n-1$ dimensions. Dans le cas particulier où $p = n-1$, le produit symbolique $\omega\, df$ ne renferme qu'un terme en $dx_1 dx_2 \ldots dx_n$, et le système qui détermine f se réduit à une seule équation. En simplifiant un peu les notations, écrivons l'équation

$$\omega_{n-1} = A_1 dx_2 \ldots dx_n + A_2 dx_3 \ldots dx_n dx_1 + \ldots + A_n dx_1 dx_2 \ldots dx_{n-1};$$

le produit $\omega_{n-1} df$ a deux expressions différentes, suivant la parité de n. Si n est impair,

$$\omega_{n-1} df = \left\{ A_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + A_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\} dx_1 dx_2 \ldots dx_n;$$

si n est pair,

$$\omega_{n-1} df = -\left\{ A_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} - A_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots - A_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\} dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

Suivant la parité de n, la fonction f doit satisfaire à l'une ou l'autre des deux équations

$$A_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + A_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \tag{12}$$

$$A_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} - A_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots - A_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0. \tag{12'}$$

Supposons encore que Ω soit le produit de r formes du premier degré linéairement distinctes $\Omega = \omega_1 \omega_2 \ldots \omega_r$, où

$$\omega_i = a_{i1} dx_1 + a_{i2} dx_2 + \ldots + a_{in} dx_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Le produit symbolique

$$\Omega\, df = \omega_1 \omega_2 \ldots \omega_r df$$

sera identiquement nul si df est une combinaison linéaire de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$,

$$df = \lambda_1 \omega_1 + \ldots \lambda_r \omega_r,$$

les λ_i étant des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et dans ce cas seulement (H). On est donc ramené à la recherche des combinaisons intégrables des r équations $\omega_i = 0$.

La recherche des intégrales à $n-r$ dimensions $(1 < r \leqslant n-p)$ conduit à un problème d'Analyse plus difficile. Considérons en effet une famille de multiplicités à $n-r$ dimensions, telle qu'il en passe une par chaque point de l'espace. Ces multiplicités sont définies par un système de r équations

$$(13) \qquad f_1 = C_1, \qquad f_2 = C_2, \qquad f_r = C_r.$$

Imaginons comme plus haut que l'on fasse un changement de variables de telle façon que ces intégrales soient représentées par le système d'équations

$$y_1 = C_1, \qquad y_2 = C_2, \qquad \ldots, \qquad y_r = C_r,$$

et soit ω_1 ce que devient la forme ω après cette transformation. Pour que l'intégrale $\int \omega_1$, étendue à toute multiplicité d'ordre p, pour laquelle $y_1, y_2, \ldots, y_r$ ont des valeurs constantes, soit nulle, il faut et il suffit que chaque terme de ω_1 contienne au moins un des facteurs $dy_1, dy_2, \ldots, dy_r$, ou, ce qui revient au même, que le produit symbolique $\omega_1 dy_1 dy_2 \ldots dy_r$ soit identiquement nul. En revenant aux variables primitives, nous avons donc la conclusion suivante :

Pour que les équations (13) *représentent une famille d'intégrales de l'équation* $\omega = 0$, *il faut et il suffit que le produit symbolique*

$$\omega \, df_1 \, df_2 \ldots df_r$$

soit identiquement nul.

En égalant à zéro tous les coefficients de ce produit symbolique développé, le nombre des équations obtenues est égal au nombre C_n^{p+r} des combinaisons de n objets $p+r$ à $p+r$. Le nombre des inconnues étant égal à r, il y a lieu de conjecturer que ces équations sont compatibles dès que r est supérieur ou égal à C_n^{p+r}, et ne le sont pas, tout au moins dans le cas général, si r est inférieur à C_n^{p+r}, mais il y aurait lieu de pousser plus loin cette étude, ce qui serait possible sans doute en généralisant les méthodes employées par M. Cartan pour les systèmes de Pfaff. Il serait important en particulier de connaître la valeur minimum ρ de r. Il est un cas limite où les équations du système se réduisent à une seule, c'est le cas où $r = n-p$; on peut même choisir arbitrairement $r-1$ des fonctions f_i, et la dernière est déterminée par une équation linéaire du premier ordre. Les multiplicités intégrales ainsi obtenues sont à p dimensions; leur existence était évidente *a priori*.

[**4**] Revenons au cas d'une forme ω_{n-1} de degré $n-1$. Si l'on prend pour variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ un système de $n-1$ intégrales distinctes de

l'équation $\omega_{n-1} df = 0$, la dernière variable x_n restant arbitraire, ω_{n-1} prend la forme simple

$$\omega_{n-1} = k\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1}.$$

La forme dérivée ω'_{n-1} est égale à $\dfrac{\partial k}{\partial x_n} dx_n\, dx_1 \ldots dx_{n-1}$. Il peut donc se présenter deux cas; si le facteur k ne dépend pas de x_n, $\omega'_{n-q} = 0$, et en prenant une nouvelle variable $X_1 = \displaystyle\int k\, dx_1$, au lieu de x_1, la forme ω_{n-1} est identique à $dX_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1}$. Si $\dfrac{\partial k}{\partial x_n}$ n'est pas nul, on peut prendre ce facteur K lui-même pour la $n^{\text{ième}}$ variable x_n. En définitive, *toute forme symbolique ω de degré $n - 1$ à n variables peut, par un choix convenable des variables indépendantes, être ramenée à l'une des deux formes*

$$dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1}, \qquad x_n\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1},$$

dont la première convient au cas où ω est la dérivée d'une forme de degré $n - 2$.

Cette réduction peut d'ailleurs être effectuée d'une infinité de manières et la détermination des variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ de la forme réduite exige l'intégration de l'équation $\omega_{n-1} df = 0$.

Considérons encore une forme ω_{n-2} de degré $n - 2$ à n variables. Si ω_{n-2} n'est pas une différentielle totale symbolique, la forme dérivée ω'_{n-2} peut, d'après ce qu'on vient de voir, être ramenée à la forme $dx_{n-1}\, dx_1 \ldots dx_{n-2}$ par un choix convenable des variables. Les deux formes ω_{n-2} et $x_{n-1} dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-2}$ ont donc même forme dérivée, et par suite on a

$$\omega_{n-2} = x_{n-1}\, dx_1 \ldots dx_{n-2} + \Pi'_{n-3},$$

Π'_{n-3} étant une différentielle totale symbolique. Ces théorèmes sont, comme on voit, tout à fait pareils à ceux qui concernent les expressions de Pfaff à deux ou trois variables, sauf que les différentielles totales d'une fonction sont remplacées par des différentielles totales symboliques.

D'une façon générale, toute forme symbolique ω_p peut être ramenée à une forme canonique analogue à la forme canonique d'une expression de Pfaff, où les différentielles dx_i sont remplacées par des différentielles totales symboliques. Je raisonnerai, pour simplifier, en supposant $p = 2$.

Soient

$$\omega = \sum A_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

une forme symbolique non dérivée et ω' la forme dérivée

$$\omega' = \sum dA_{ik}\, dx_i\, dx_k = \sum A_{ikl}\, dx_i\, dx_k\, dx_l.$$

Supposons que, par un choix convenable des variables indépendantes, chaque terme de ω' contienne au moins un des facteurs $dx_1, dx_2, \ldots, dx_r$. On aura alors $A_{ikl} = 0$ si les trois indices i, k, l sont supérieurs à r. La relation générale

$$\frac{\partial A_{1ik}}{\partial x_l} - \frac{\partial A_{ikl}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{kl1}}{\partial x_i} - \frac{\partial A_{l1i}}{\partial x_k} = 0$$

devient, si les trois indices i, k, l sont supérieurs à r,

$$\frac{\partial A_{1ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial A_{1kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial A_{1li}}{\partial x_k} = 0.$$

On peut donc écrire, en désignant par $\sum'$ une sommation étendue aux valeurs $r+1, \ldots, n$ des indices i, k, $A_{r+1}, \ldots, A_n$ étant de nouvelles fonctions de $x_1, \ldots, x_n$,

$$\sum{}' A_{1ik}\, dx_i\, dx_k = dA_{r+1}\, dx_{r+1} + \ldots + dA_n\, dx_n$$
$$- \left(\frac{\partial A_{r+1}}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial A_{r+1}}{\partial x_r} dx_r \right) dx_{r+1} - \ldots - \left(\frac{\partial A_n}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial A_n}{\partial x_r} dx_r \right) dx_n.$$

Par suite, si nous désignons d'une façon générale par $d_2 U$ une différentielle totale symbolique du second degré, le produit $dx_1 \sum' A_{1ik}\, dx_i\, dx_k$ est de la forme $dx_1\, d_2 U_1$, moins des termes où deux des indices sont inférieurs à $r+1$. En opérant de même sur le produit symbolique $dx_2 \left(\sum' A_{2ik}\, dx_i\, dx_k \right)$, où les deux indices i et k sont supérieurs à r et ainsi de suite, on met ω' sous la forme

$$\omega' = dx_1\, d_2 U_1 + \ldots + dx_r\, d_2 U_r + \sum A'_{ikl}\, dx_i\, dx_k\, dx_l.$$

La forme symbolique $\sum A'_{ikl}\, dx_i\, dx_k\, dx_l$ est elle-même une différentielle totale symbolique, et les coefficients A'_{ikl}, où deux des indices sont supérieurs à r, sont tous nuls.

Considérons maintenant l'ensemble des termes

$$dx_1\, dx_2 \left\{ A'_{12\,r+1}\, dx_{r+1} + \ldots + A'_{12n}\, dx_n \right\}:$$

la relation générale

$$\frac{\partial A'_{12i}}{\partial x_k} - \frac{\partial A'_{2ik}}{\partial x_1} + \frac{\partial A'_{ik1}}{\partial x_2} - \frac{\partial A'_{k12}}{\partial x_i} = 0$$

devient en supposant $i > r$, $k > r$,

$$\frac{\partial A'_{12i}}{\partial x_k} - \frac{\partial A'_{12k}}{dx_i} = 0.$$

On a donc, en désignant par V_{12} une fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$A'_{12r+1}\,dx_{r+1} + \ldots + A'_{12n}\,dx_n = dV_{12} - \left\{ \frac{\partial V_{12}}{\partial x_1}\,dx_1 + \ldots + \frac{\partial V_{12}}{\partial x_r}\,dx_r \right\}.$$

En opérant de même avec tous les termes qui contiennent en facteur $dx_1\,dx_3, \ldots, dx_{r-1}\,dx_r$, on met finalement ω' sous la forme

$$\omega' = dx_1\,d_2V_1 + \ldots + dx_r\,d_2V_r + \sum A''_{ikl}\,dx_i\,dx_k\,dx_l,$$

tous les coefficients A''_{ikl}, où l'un des indices est supérieur à r, étant nuls. Puisque la forme $\sum A''_{ikl}\,dx_i\,dx_k\,dx_l$ est aussi une différentielle totale, la relation générale dont on s'est déjà servi à deux reprises prouve que ces coefficients ne dépendent que des variables $x_1, \ldots, x_r$. Cette forme peut donc elle-même s'écrire, puisqu'elle ne renferme que les r variables $x_1, \ldots, x_r$, et leurs différentielles,

$$dx_1\,d_2W_1 + \ldots + dx_r\,d_2W_r,$$

et finalement on a ramené ω' à la forme symbolique

$$\omega' = dx_1\,d_2H_1 + \ldots + dx_r\,d_2H_r.$$

Soit $\Omega = x_1\,d_2H_1 + \ldots + x_r\,d_2H_r$; la dérivée de la forme $\omega - \Omega$ est identiquement nulle, et par suite on peut écrire

$$\omega = x_1\,d_2H_1 + x_2\,d_2H_2 + \ldots + x_r\,d_2H_r + d_2H_{r+1}, \tag{14}$$

$d_2H_1, d_2H_2, \ldots, d_2H_{r+1}$ étant des différentielles totales symboliques.

On aura une forme réduite où le nombre des termes sera le plus petit possible en prenant pour r le nombre minimum ρ défini plus haut (n° **3**), qui est égal à n diminué du nombre de dimensions des intégrales de $\omega' = 0$ pour lesquelles ce nombre est maximum.

[**5**] On peut aussi étendre aux formes symboliques la théorie du facteur intégrant. Soit ω une forme symbolique de degré p; une fonction μ des variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est un *facteur intégrant* pour ω si le produit $\mu\omega$ est une différentielle totale symbolique. Pour que μ soit un facteur intégrant, il faut et il suffit que l'on ait identiquement

$$(\mu\omega)' = \mu\omega' + d\mu\,\omega = 0.$$

En égalant à zéro les coefficients des différents termes, on a un système d'équations linéaires (mais non homogènes) par rapport aux dérivées partielles du premier ordre de la fonction $\lambda = \log \mu$. Ces équations doivent être compatibles, pour qu'il existe un facteur intégrant pour ω. S'il en est ainsi, l'intégrale générale de ce système est de la forme

$$\lambda = \lambda_1 + F(f_1, f_2, \ldots, f_q),$$

λ_1 étant une intégrale particulière, F une fonction arbitraire et $f_1, f_2, \ldots, f_q$ les q intégrales distinctes d'un système complet, que l'on déduit des équations obtenues en supprimant les termes indépendants de λ dans le système précédent. Si ce système complet se réduit à $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, il existe un seul facteur intégrant distinct $\mu = e^{\lambda_1}$, et λ_1 s'obtient par une quadrature. Dans le cas général, où il existe une infinité de facteurs intégrants pour ω, toutes les formes

$$e^{\lambda_1}\omega\, \Pi(f_1, f_2, \ldots, f_q)$$

sont des différentielles totales symboliques, quelle que soit la fonction Π. Il en est ainsi en particulier de la forme $\Omega = e^{\lambda_1}\omega$. Mais Ωf_1 doit aussi être une différentielle totale et l'on a par conséquent

$$\Omega' f_1 + \Omega\, df_2 = \Omega\, df_1 = 0.$$

On aura de même $\Omega\, df_2 = 0, \ldots, \Omega\, df_q = 0$, et par suite Ω est égale à un produit symbolique $\Pi\, df_2, \ldots, df_q$, la forme Π étant aussi une différentielle totale. On remarquera que lorsqu'il y a plus d'un facteur intégrant distinct pour ω, l'équation $\omega = 0$ admet des intégrales à $n-1$ dimensions; si μ_1 et μ_2 sont deux facteurs intégrants distincts, l'équation $\frac{\mu_2}{\mu_1} = C$ représente une famille d'intégrales à $n-1$ dimensions.

Les formes pour lesquelles le facteur intégrant a le plus haut degré de généralité possible sont les formes représentées symboliquement par un produit de différentielles totales telles que $k\, df_1\, df_2 \ldots df_p$. Il en est ainsi, en particulier, si $p = n-1$, et l'on est ainsi amené à la théorie du dernier multiplicateur de Jacobi.

Soit, comme plus haut,

$$\omega_{n-1} = A_1\, dx_2 \ldots dx_n + A_2\, dx_3 \ldots dx_n\, dx_1 + \ldots + A_n\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1};$$

l'équation qui exprime que $\mu\omega_{n-1}$ est une différentielle totale symbolique est différente, suivant la parité de n (n° **2**). Si n est impair, cette condition est

$$\frac{\partial(\mu A_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\mu A_2)}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial(\mu A_n)}{\partial x_n} = 0,$$

et, si n est pair,

$$\frac{\partial(\mu A_1)}{\partial x_1} - \frac{\partial(\mu A_2)}{\partial x_2} + \ldots - \frac{\partial(\mu A_n)}{\partial x_n} = 0.$$

Dans le premier cas, μ est un multiplicateur pour le système d'équations différentielles

$$\frac{dx_1}{A_1} = \frac{dx_2}{A_2} = \ldots = \frac{dx_n}{A_n},$$

dont l'intégration donne les intégrales de l'équation $\omega_{n-1} df = 0$. Dans le second cas, μ est un multiplicateur pour le système

$$\frac{dx_1}{A_1} = \frac{dx_2}{-A_2} = \frac{dx_3}{A_3} = \ldots = \frac{dx_n}{-A_n},$$

qui doit remplacer le précédent.

On voit immédiatement, d'après cela, que la connaissance de $n-2$ intégrales premières et d'un multiplicateur permet d'achever l'intégration par une quadrature. Supposons en effet que l'on ait effectué un changement de variables tel que $y_1, y_2, \ldots, y_{n-2}$ soient les $n-2$ intégrales premières connues; si μ est un multiplicateur, $\mu\omega_{n-1}$ est une différentielle totale symbolique qui, après le changement de variables, prend la forme

$$\mu\omega_{n-1} = dy_1\, dy_2 \ldots dy_{n-2}(B_{n-1}\, dy_{n-1} + B_n\, dy_n).$$

Pour que la dérivée de $(\mu\omega_{n-1})$ soit nulle, il est nécessaire que l'on ait

$$\frac{\partial B_{n-1}}{\partial y_n} = \frac{\partial B_n}{\partial y_{n-1}},$$

et en posant

$$z = \int B_{n-1}\, dy_{n-1} + B_n\, dy_n,$$

on a aussi

$$\mu\omega_{n-1} = dy_1 \ldots dy_{n-2}\, dz;$$

z est donc une nouvelle intégrale de $\omega_{n-1} df = 0$.

On a étendu la définition du multiplicateur de Jacobi aux systèmes complètement intégrables. Au point de vue où nous nous plaçons, cette extension est immédiate. Soit

$$(15) \qquad \omega_i = a_{i1}\, dx_1 + \ldots + a_{in}\, dx_n = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

un système complètement intégrable de s équations, équivalent au système

$$(15') \qquad df_1 = 0, \qquad df_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad df_s = 0,$$

$f_1, f_2, \ldots, f_s$ étant s fonctions distinctes. On a

$$\omega_i = \lambda_{i1}\, df_1 + \ldots + \lambda_{is}\, df_s \qquad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

le déterminant Δ des coefficients λ_{ik} étant différent de zéro. Considérons le produit symbolique

$$\Omega = \omega_1\, \omega_2 \ldots \omega_s;$$

toute fonction μ des variables $(x_1, \dots, x_n)$ telle que $\mu\Omega$ soit une différentielle totale symbolique est un multiplicateur du système (15). Il est facile de voir qu'il existe une infinité de multiplicateurs et de trouver leur expression générale. Imaginons en effet que l'on effectue un changement de variables de façon que $y_1, y_2, \dots, y_s$ soient des intégrales du système (15), $y_1 = f_1, \dots, y_s = f_s$; le produit symbolique Ω devient $\Delta\, dy_1\, dy_2 \dots dy_s$, et l'on a

$$\mu\Omega = \mu\Delta\, dy_1\, dy_2 \dots dy_s.$$

Pour que $(\mu\Omega')$ soit identiquement nul, il faut et il suffit que $\mu\Delta$ ne dépende que de $y_1, y_2, \dots, y_s$. Le quotient de deux multiplicateurs distincts est encore une intégrale du système (15).

La connaissance d'un multiplicateur est de la même utilité que pour un système d'équations différentielles. Si on connaît $s-1$ intégrales premières et un multiplicateur μ, on peut, comme plus haut, faire un changement de variables qui ramène $\mu\Omega$ à la forme

$$\mu\Omega = dy_1\, dy_2 \dots dy_{s-1} \left\{ \sum_{i=s}^{n} a_i\, dy_i \right\}.$$

Puisque $\mu\Omega$ est une forme dérivée, on a les relations

$$\frac{\partial a_i}{\partial y_k} = \frac{\partial a_k}{\partial y_i} \qquad (i, k = s, \dots, n),$$

et on aura une nouvelle intégrale par une quadrature [1]

$$z = \int \sum_{i=s}^{n} a_i\, dy_i.$$

---

[1] Le théorème fondamental de la théorie des systèmes complets peut aussi se rattacher facilement à l'étude des formes symboliques. Soit $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une intégrale commune aux deux équations

$$(e)\qquad \begin{cases} X_1(f) = A_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + A_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + A_n \dfrac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \\[2ex] X_2(f) = B_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + B_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + B_n \dfrac{\partial f}{\partial x_n}, \end{cases}$$

où les coefficients A_i, B_i sont fonctions de ces n variables. Considérons la forme symbolique de degré $n-2$,

$$\omega_{n-2} = \sum_{i,k} (A_i B_k - B_i A_k)(-1)^{i+k} \frac{dx_1\, dx_2 \dots dx_n}{dx_i\, dx_k},$$

où $\dfrac{dx_1\, dx_2 \dots dx_n}{dx_i\, dx_k}$ représente le produit $dx_1\, dx_2 \dots dx_n$, où l'on aurait supprimé les deux

[6] Le problème de l'intégration de l'équation $\omega = 0$ peut être posé d'une façon un peu différente, en employant le langage géométrique, de la même façon que M. Cartan dans ses travaux sur les systèmes de Pfaff. Étant donnée une multiplicité M_{n-r} définie par les r équations distinctes

$$\varphi_1 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_r = 0, \tag{16}$$

et un point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sur cette multiplicité, un élément linéaire e de cette multiplicité issu de ce point est défini par un système de valeurs $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, vérifiant les r relations

$$d\varphi_1 = 0, \qquad d\varphi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad d\varphi_r = 0.$$

L'ensemble des éléments linéaires issus d'un point sur une multiplicité M_{n-r} à $n-r$ dimensions forme une multiplicité plane à $n-r$ dimensions qui est déterminée par $n-r$ éléments linéaires *distincts*, c'est-à-dire n'appartenant pas à une multiplicité plane à moins de $n-r$ dimensions. Soient

$$\begin{matrix} (dx_1)_1 & (dx_2)_1 & \ldots & (dx_n)_1 \\ (dx_1)_2 & (dx_2)_2 & \ldots & (dx_n)_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (dx_1)_p & (dx_2)_p & \ldots & (dx_n)_p \end{matrix}$$

un système de p éléments linéaires distincts issus d'un point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Nous dirons que ces p éléments linéaires sont *en involution relativement à l'équation* $\omega = 0$, s'ils vérifient la relation

$$\sum A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p} \begin{vmatrix} (dx_{\alpha_1})_1 & (dx_{\alpha_2})_1 & \ldots & (dx_{\alpha_p})_1 \\ (dx_{\alpha_1})_2 & (dx_{\alpha_2})_2 & \ldots & (dx_{\alpha_p})_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (dx_{\alpha_1})_p & (dx_{\alpha_2})_p & \ldots & (dx_{\alpha_p})_p \end{vmatrix} = 0, \tag{17}$$

la sommation étant étendue à toutes les combinaisons p à p des n premiers nombres. Une multiplicité intégrale de l'équation $\omega = 0$ peut être définie comme une multiplicité telle que p éléments linéaires quelconques de cette multiplicité, issus d'un même point, soient en involution relativement à l'équation $\omega = 0$. Il est clair que

---

facteurs dx_i et dx_k, les autres facteurs conservant leurs places. On vérifie aisément que le produit symbolique $\omega_{n-2}\, df$ est nul, si f est une intégrale du système (e). Toute intégrale de ce système annule donc aussi le produit symbolique $\omega'_{n-2}\, df$; en développant ce produit, on trouve que f doit satisfaire à la nouvelle équation

$$X_1(X_2(f)) - X_2(X_1(f)) = 0.$$

toute multiplicité à moins de p dimensions peut être considérée comme une intégrale puisqu'elle admet au plus $p-1$ éléments linéaires distincts en un point non singulier. Tous les déterminants qui figurent dans la relation (17) sont donc nuls.

Si l'équation $\omega = 0$ admet une multiplicité intégrale M_r à plus de p dimensions $(r > p)$, M_r est aussi une intégrale de l'équation $\omega' = 0$. Prenons en effet sur M_r une variété quelconque M_{p+1}; l'intégrale $\int \omega'$ étendue à cette variété M_{p+1} est égale, d'après la formule de Stokes généralisée, à l'intégrale $\int \omega$, étendue à la variété fermée à p dimensions M'_p qui limite M_{p+1}. Mais cette variété M'_p appartient à M_r; donc on a $\int_{M'_p} \omega = 0$. Il en est donc de même de $\int_{M_{p+1}} \omega'$, et par suite $p+1$ éléments linéaires distincts de la multiplicité M_r sont en involution relativement à l'équation $\omega' = 0$. Ce résultat peut du reste s'établir directement de la même façon que la proposition classique sur les intégrales d'une équation de Pfaff : deux éléments linéaires quelconques d'une multiplicité intégrale $M_r (r > 1)$ d'une équation de Pfaff vérifient le résultat obtenu en égalant à zéro le covariant bilinéaire.

Il serait sans doute possible, en procédant comme M. Cartan dans ses recherches sur les systèmes de Pfaff, de se servir de ces considérations géométriques pour obtenir l'ordre maximum des intégrales et de préciser leur degré de généralité. Je ne m'occuperai pas de cette question dans ce Mémoire. Je vais seulement définir quelques intégrales singulières; cette définition repose sur une remarque presque évidente. Pour qu'une multiplicité M_p soit une intégrale, il faut et il suffit qu'en chaque point il y ait p éléments linéaires distincts en involution. En effet, si la relation (17) est vérifiée par p éléments linéaires distincts, elle le sera aussi par p éléments linéaires quelconques de la multiplicité plane qu'ils déterminent, puisqu'ils se déduisent linéairement des p premiers. Cela étant, nous dirons qu'un élément linéaire est *singulier*, s'il est en involution avec $p-1$ autres éléments linéaires quelconques de même origine. Pour qu'un élément linéaire $(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$ soit singulier, il faut et il suffit, d'après la condition (17), qu'il vérifie toutes les relations

$$\sum_{i=1}^{n} A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{p-1} i}\, dx_i = 0, \tag{18}$$

quels que soient les $p-1$ indices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}$. Il existe des éléments singuliers si ces équations (18) se réduisent à moins de n équations linéairement distinctes, et dans ce cas seulement. Il est clair, d'après la définition même des éléments singuliers, que ces équations (18) forment un système covariant de l'équation $\omega = 0$, relativement à tout changement de variables. Si par la transformation (5) ω devient

$$\sum B_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p}\, dy_{\alpha_1}\, dy_{\alpha_2} \ldots dy_{\alpha_p},$$

le système (18) est remplacé par le système

$$(18') \qquad \sum_{i=1}^{n} B_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{p-1} i}\, dy_i = 0.$$

Nous dirons que le système S_1, formé par les équations (18), est le premier système *associé à l'équation* $\omega = 0$.

Si le système S_1 contient moins de n équations linéairement distinctes, il existe des courbes Γ, dépendant de constantes ou de fonctions arbitraires, dont tous les éléments sont singuliers; ce sont les *courbes singulières*. Toute multiplicité M_p composée de courbes singulières est une intégrale de l'équation $\omega = 0$. Prenons en effet, en un point quelconque de M_p, p éléments linéaires distincts, parmi lesquels l'élément linéaire de la courbe singulière qui passe par ce point. Ces p éléments linéaires sont en involution, et cela suffit, on l'a remarqué, pour qu'il en soit de même de p éléments linéaires quelconques de M_p. Donc M_p est une intégrale.

On peut définir de même des systèmes singuliers formés de deux éléments, de trois éléments distincts, ..., etc. Nous dirons qu'un système de *deux* éléments linéaires distincts $(dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$, $(\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_n)$ est *singulier* si les deux éléments associés à $p-2$ autres éléments linéaires *quelconques* de même origine forment un système de p éléments en involution. Il faut et il suffit pour cela que ces deux éléments vérifient toutes les relations

$$(19) \qquad \sum_{i,k} A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{p-2} ik}(dx_i\, \delta x_k - dx_k\, \delta x_i) = 0,$$

quels que soient les $p-2$ indices $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-2}$. Si le système S_2 formé par les équations

$$(20) \qquad \sum_{i,k} A_{\alpha_1, \dots, \alpha_{p-2} ik}\, dx_i\, dx_k = 0$$

admet des intégrales à deux dimensions m_2, tous les couples d'éléments linéaires de même origine sur ces multiplicités forment des systèmes singuliers de deux éléments. Il est clair que ce système S_2 est aussi un système covariant de l'équation $\omega = 0$, et on démontrerait comme plus haut que toute multiplicité M_{p+1} engendrée par des multiplicités m_2 est une intégrale de $\omega = 0$.

En continuant pour trois, quatre éléments, etc., on définirait de même des systèmes $S_3, S_4, \dots, S_{p-1}$ d'équations de même forme, de degré $3, 4, \dots, p-1$ respectivement, qui sont des covariants de l'équation $\omega = 0$. En partant de la forme dérivée ω', on définit de la même façon une autre suite de systèmes covariants $S'_1, S'_2, \dots, S'_p$ attachés à l'équation $\omega = 0$. Les deux systèmes S_1 et S'_1, qui sont des systèmes de Pfaff, jouent un rôle important dans la suite de ce travail.

[7] On peut vérifier comme il suit l'existence d'intégrales singulières à p dimensions quand le système S_1 se compose de moins de n équations distinctes. Il existe alors des courbes singulières dépendant de $n-1$ constantes arbitraires, car si l'on ajoute aux $n-r$ équations de S_1 $r-1$ équations de même forme, choisies de façon à former avec S_1 un système qui peut être résolu par rapport à $n-1$ des différentielles dx_i, on obtient un système de $n-1$ équations différentielles ordinaires. Les courbes intégrales de ce système sont évidemment des courbes singulières. Si l'on a choisi le système des variables indépendantes de façon que les équations de cette famille de courbes singulières soit précisément

$$x_1 = C_1, \qquad x_2 = C_2, \qquad \ldots, \qquad x_{n-1} = C_{n-1},$$

les équations du système S_1 doivent être vérifiées quand on y fait

$$dx_1 = dx_2 = \ldots = dx_{n-1} = 0.$$

Tous les coefficients $A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}n}$ sont donc nuls, et *la différentielle dx_n ne figure pas dans* ω. Il est clair que la multiplicité M_p représentée par les équations

$$x_1 = \varphi_1(u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}), \qquad \ldots, \qquad x_{n-1} = \varphi_{n-1}(u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}), \qquad x_n = u_p,$$

où $u_1, u_2, \ldots, u_p$ sont p paramètres auxiliaires, est une intégrale de $\omega = 0$, quelles que soient les fonctions φ_i, car tous les déterminants qui figurent dans cette équation sont nuls, puisqu'ils ne renferment que les dérivées partielles de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.

Inversement, si l'on peut choisir les variables indépendantes de façon que ω ne renferme que $n-1$ différentielles $dx_1, \ldots, dx_{n-1}$, les équations de S_1 ne renferment que $dx_1, dx_2, \ldots, dx_{n-1}$. Ce système comprend donc au plus $n-1$ équations linéairement distinctes, mais elle peut en contenir moins.

Exemple. — Soit ω une forme symbolique du second degré

$$\omega = \sum A_{ik}\, dx_i\, dx_k.$$

Le système S_1 est formé des n équations

$$A_{i1}\, dx_1 + A_{i2}\, dx_2 + \ldots + A_{in}\, dx_n = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Pour que ce système S_1 admette d'autres relations que $dx_i = 0$, il faut et il suffit que le déterminant symétrique gauche formé par les coefficients A_{ik} soit nul; cette condition est toujours satisfaite si n est impair.

Supposons en particulier $n=4$. Si le déterminant de Pfaff

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & 0 & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & 0 & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & 0 \end{vmatrix}$$

est nul, il est possible de déterminer $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ de façon que le produit symbolique

$$\omega(\alpha_1\, dx + \alpha_2\, dx_2 + \alpha_3\, dx_3 + \alpha_4\, dx_4)$$

soit nul. En effet, en égalant à zéro tous les coefficients de ce produit symbolique développé, on a un système de quatre équations linéaires et homogènes en $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, dont le déterminant est précisément Δ. La forme ω est donc le produit symbolique de deux formes de Pfaff Π_1, Π_2,

$$\omega = \Pi_1 \Pi_2,$$

ou, d'une façon plus générale,

$$\omega = (\lambda_1 \Pi_1 + \mu_1 \Pi_2)(\lambda_2 \Pi_1 + \mu_2 \Pi_2),$$

$\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$ étant des fonctions de x_1, x_2, x_3, x_4 vérifiant la condition $\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = 1$.

Or on sait que, par un changement de variables convenable, on peut ramener un système de deux équations de Pfaff à l'une des formes suivantes [1] :

$$\text{(I)} \quad dy_2 - y_3\, dy_1 = 0, \qquad dy_3 - y_4\, dy_1 = 0,$$
$$\text{(II)} \quad dy_2 = 0, \qquad dy_3 - y_4\, dy_1 = 0,$$
$$\text{(III)} \quad dy_1 = 0, \qquad dy_2 = 0.$$

---

[1] Soit en général $n-\mu$ l'ordre des multiplicités intégrales d'ordre maximum du système S_1, telles qu'il en passe une par un point quelconque de l'espace. Imaginons que l'on ait fait un changement de variables tel que ces multiplicités soient représentées par $y_i = C_i\ (i=1, 2, \ldots, \mu)$. Les équations S_1 ne doivent renfermer que les différentielles $dy_1 \ldots dy_\mu$ et, par suite, après le changement de variables, tous les coefficients de la forme ω, où l'un des indices est supérieur à μ sont nuls. Il ne restera donc dans ω que les différentielles $dy_1 \ldots dy_\mu$. La réciproque est évidente.

Ce nombre minimum μ des différentielles, que l'on peut laisser dans l'expression de ω, est au plus égal à la *classe* de cette forme, mais peut lui être inférieur, sauf dans le cas où ω est une différentielle totale symbolique. (*Voir* plus loin n° **10**.)

Le nombre $n-\mu$ est au moins égal au *genre* du système S_1 (Cartan, *Mémoire G*), mais peut lui être supérieur, si ce système admet des intégrales singulières. Prenons par exemple le système

$$dx_2 - x_4\, dx_1 = 0, \qquad dx_3 - x_5\, dx_1 = 0,$$

qui admet des multiplicités intégrales à deux dimensions

$$x_1 = C_1, \qquad x_2 = C_2, \qquad x_3 = C_3,$$

quoique le genre soit deux. Mais tous les éléments linéaires de ces multiplicités, pour lesquels on a $dx_1 = 0$, $dx_2 = 0$, $dx_3 = 0$, sont des éléments singuliers.

La forme ω peut donc être ramenée à l'une des formes réduites

$$\omega = K(dy_2 - y_3\,dy_1)(dy_3 - y_4\,dy_1) = K\{dy_2\,dy_3 + y_3\,dy_3\,dy_1 + y_4\,dy_1\,dy_2\},$$
$$\omega = K\,dy_2(dy_3 - y_4\,dy_1),$$
$$\omega = K\,dy_1\,dy_2;$$

on voit qu'il n'y figure que trois ou deux différentielles.

II

[**8**] Dans mes Mémoires antérieurs sur les invariants intégraux, j'avais été conduit précisément à considérer le système S'_1 et, en utilisant une proposition de Frobenius, j'avais démontré que *ce système est complètement intégrable.*

Je vais d'abord donner de ce théorème une autre démonstration plus directe, fondée uniquement sur le caractère d'invariance, ce qui permet une étude plus complète des propriétés de ce système, et donne en même temps la signification des intégrales. Pour fixer les idées et simplifier les formules, je développerai la démonstration en supposant $p = 2$, mais elle s'étend immédiatement, avec quelques complications d'écriture, à une valeur quelconque de p.

Soient ω une forme du second degré à n variables, qui n'est pas une différentielle totale symbolique,

$$\omega = \sum_{i,k} A_{ik}\,dx_i\,dx_k, \tag{21}$$

et ω' la forme dérivée

$$\omega' = \sum_{i,k,l} A_{ikl}\,dx_i\,dx_k\,dx_l, \tag{22}$$

où le coefficient A_{ikl} a pour valeur

$$A_{ikl} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial A_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial A_{li}}{\partial x_k}.$$

Le système S' correspondant se compose des $\dfrac{n(n-1)}{2}$ équations

$$\sum_{l=1}^{n} A_{ikl}\,dx_l = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n). \tag{23}$$

La propriété que nous voulons établir est évidente si le système (23) contient n équations linéairement distinctes, car il est alors équivalent au système

$$dx_1 = 0, \qquad dx_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad dx_n = 0,$$

formé de n équations dont les premiers membres sont des différentielles exactes. Il en est encore de même, s'il contient $n-1$ équations linéairement distinctes seulement. En effet, il se compose alors de $n-1$ équations différentielles ordinaires, et admet par conséquent $n-1$ combinaisons intégrables distinctes

$$df_1 = 0, \qquad df_2 = 0, \qquad \dots, \qquad df_{n-1} = 0.$$

Il suffit donc d'examiner le cas où le système S'_1 contient seulement q équations linéairement distinctes ($q < n-1$). Ajoutons à ces équations $n-q-1$ équations de même forme

$$a_{i1}\,dx_1 + \dots + a_{in}\,dx_n = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n-q-1)$$

dont les coefficients peuvent être choisis arbitrairement, à condition de former avec S'_1 un système comprenant $n-1$ équations linéairement distinctes. Le système ainsi obtenu admettant $n-1$ intégrales premières, supposons que l'on ait pris un nouveau système de variables $(y_1, y_2, \dots, y_n)$, de façon que l'intégrale générale du système précédent soit

$$y_1 = C_1, \qquad y_2 = C_2, \qquad \dots, \qquad y_{n-1} = C_{n-1}.$$

Après ce changement de variables, la forme ω' se change en une nouvelle forme

$$\omega' = \sum_{i,k,l} B_{ikl}\,dy_i\,dy_k\,dy_l,$$

qui est aussi une différentielle totale symbolique, et le système S'_1 devient

$$(24) \qquad \sum_{l=1}^{n} B_{ikl}\,dy_l = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \dots, n).$$

Ce système devant être vérifié identiquement, quand on y fait

$$dy_1 = dy_2 = \dots = dy_{n-1} = 0,$$

tous les coefficients B_{ikn} sont nuls, quels que soient les indices i et k. D'autre part, puisque ω' est une différentielle totale, on a la relation

$$\frac{\partial B_{ikl}}{\partial y_n} - \frac{\partial B_{kln}}{\partial y_i} + \frac{\partial B_{lni}}{\partial y_k} - \frac{\partial B_{nik}}{\partial y_l} = 0$$

qui devient ici $\dfrac{\partial B_{ikl}}{\partial y_n} = 0$, puisque B_{kln}, B_{lni}, B_{nik} sont nuls. Il s'ensuit que la forme symbolique ω' et le système (24) ne renferment ni y_n ni dy_n. On a donc, par ce changement de variables, ramené le système (23) à un système équivalent de q équations à $n-1$ variables.

Si $q = n - 2$, la proposition énoncée est établie. Si q est plus petit que $n-2$, on remarquera que le système (24) est de même nature que le premier. On peut donc le ramener par un nouveau changement de variables à un système équivalent de q équations à $n-2$ variables, et ainsi de suite. On finira donc par le ramener à un système de q équations à $q+1$ variables, c'est-à-dire à un système complètement intégrable.

Voici une conséquence importante du théorème. Prenons un nouveau système de variables $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ tel que l'intégrale générale du système S'_1 soit précisément

$$y_1 = C_1, \qquad \ldots, \qquad y_q = C_q,$$

et soit $\omega' = \sum B_{ikl}\, dy_i\, dy_k\, dy_l$ la nouvelle expression de ω' avec ce système de variables. Les équations du système associé (24) devant être vérifiées quand on y suppose $dy_1 = 0, \ldots, dy_q = 0$, quels que soient $dy_{q+1}, \ldots, dy_n$, tous les indices B_{ikl} où l'un des indices est supérieur à q sont nuls. De plus, on démontrera comme tout à l'heure que les autres coefficients sont indépendants de $y_{q+1}, \ldots, y_n$. *Dans la nouvelle expression de* ω'

$$\omega' = \sum_{i,k,l} B_{ikl}\, dy_i\, dy_k\, dy_l \qquad (i, k, l = 1, 2, \ldots, q) \tag{25}$$

ne figurent donc que $y_1, y_2, \ldots, y_q$ *et* $dy_1, dy_2, \ldots, dy_q$.

Quelles que soient les variables choisies, on ne peut trouver pour ω' une expression où figurent moins de q variables. En effet, si l'on pouvait mettre ω' sous une forme

$$\omega' = \sum_{i,k,l} C_{ikl}\, dz_i\, dz_k\, dz_l,$$

où les coefficients C_{ikl} ne dépendraient que de $q-1$ variables seulement, par exemple $z_1, z_2, \ldots, z_{q-1}$, et où tous les indices i, k, l ne prendraient eux-mêmes que des valeurs inférieures à q, dans les équations du système associé

$$\sum_{l=1}^{q} C_{ikl}\, dz_l = 0,$$

ne figureraient que les $q-1$ différentielles $dz_1, \ldots, dz_{q-1}$, et ce système renfermerait au plus $q-1$ équations linéairement distinctes, contrairement à l'hypothèse.

On appelle en général *classe* d'une forme symbolique le nombre minimum de variables au moyen desquelles on puisse exprimer cette forme par un changement de variables convenable. Le résultat qui vient d'être obtenu peut alors s'énoncer ainsi : *la classe d'une différentielle totale symbolique est égale au nombre d'équations linéairement distinctes du système associé* S'_1.

Le théorème, démontré en supposant que la forme ω' est du troisième degré, s'applique quel que soit le degré; on le voit immédiatement en reprenant la démonstration.

Nous dirons qu'une forme symbolique de classe q est ramenée à une *forme réduite* lorsque dans son expression ne figurent que q variables et leurs différentielles. Il y a évidemment une infinité de manières de ramener une forme dérivée à une forme réduite, mais toutes ces formes se déduisent l'une de l'autre par un changement de variables portant uniquement sur les q variables qui y figurent. Soient en effet

$$\sum B_{ikl}\, dy_i\, dy_k\, dy_l, \qquad \sum C_{ikl}\, dz_i\, dz_k\, dz_l \qquad (i, k, l = 1, 2, \ldots, q)$$

deux expressions réduites d'une même forme dérivée.

Le système associé S'_1 peut être écrit sous les deux formes

$$dy_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad dy_q = 0,$$

ou

$$dz_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad dz_q = 0.$$

Il s'ensuit que les équations $y_i = C_i$ ou $z_i = C'_i$ $(i = 1, 2, \ldots, q)$ représentent l'intégrale générale d'un même système complètement intégrable. On a donc des relations de la forme

$$y_i = \varphi_i(z_1, z_2, \ldots, z_q) \qquad (i = 1, 2, \ldots, q),$$

et l'on passe de l'une des formes réduites à l'autre par un changement de variables.

Les variables qui figurent dans une forme réduite de ω' *constituent donc un système de* q *intégrales distinctes du système complètement intégrable* S'_1.

Si, par un moyen quelconque, on peut ramener ω' à une forme réduite, on a par là même intégré le système complètement intégrable S'_1.

Remarque. — Dans une expression réduite de ω', toutes les différentielles dy_1, dy_2, ..., dy_q doivent figurer; si dy_q par exemple n'y figurait pas, les équations (24) ne pourraient comprendre plus de $q - 1$ équations linéairement distinctes.

[9] Le système S'_1 n'est pas un système complètement intégrable quelconque. *Si l'on connaît* $q - 1$ *intégrales premières de ce système, on peut achever l'intégration par une quadrature.*

Supposons toujours que l'on ait effectué un changement de variables tel que ces $q - 1$ intégrales premières soient précisément $y_1 = C_1$, ..., $y_{q-1} = C_{q-1}$. Avec ce système de variables, les équations (24) du système associé S'_1 doivent se réduire à une seule équation distincte quand on y fait $dy_1 = 0$, ..., $dy_{q-1} = 0$. Elles ne peuvent être toutes vérifiées identiquement après cette substitution, car elles se réduiraient à moins de q équations distinctes. *Tous les coefficients* B_{ikl}, *où deux des indices sont supérieurs à* $q-1$, *doivent être nuls.* En effet, supposons par exemple que l'on ait $B_{ikh} \neq 0$, k et h étant supérieurs à $q-1$. Les deux équations du système (24), où l'on a fait $dy_1 = 0, \ldots, dy_{q-1} = 0$,

$$\sum_{l=q}^{n} B_{ikl}\, dy_l = 0, \qquad \sum_{l=q}^{n} B_{ihl}\, dy_l = 0,$$

ne peuvent se réduire à une seule, car la première contient un terme en dy_h et ne contient pas de terme en dy_k, tandis que la seconde, au contraire, renferme un terme en dy_k et ne renferme pas de terme en dy_h.

Cela étant, prenons un système de valeurs pour les indices i et k tel que tous les coefficients B_{ikl}, où $l \geqslant q$, ne soient pas nuls. La relation générale

$$\frac{\partial B_{ikl}}{\partial y_h} - \frac{\partial B_{klh}}{\partial y_i} + \frac{\partial B_{lhi}}{\partial y_k} - \frac{\partial B_{hik}}{\partial y_l} = 0$$

devient, puisque $B_{klh} = B_{lhi} = 0$, si l et h sont $\geqslant q$,

$$\frac{\partial B_{ikl}}{\partial y_h} - \frac{\partial B_{ikh}}{\partial y_l} = 0 \qquad (l, h = q, q+1, \ldots, n).$$

Le premier membre de l'équation

$$\sum_{l=q}^{n} B_{ikl}\, dy_l = 0,$$

où l'on regarde $y_1, \ldots, y_{q-1}$ comme des constantes, est donc une différentielle exacte, et la dernière intégrale s'obtient bien par une quadrature.

La proposition est vraie, quel que soit l'ordre de la forme dérivée. Le théorème classique de Jacobi peut en être considéré comme un cas particulier, correspondant à la valeur $n-2$ de p. Supposons en effet que le système d'équations différentielles

$$(26) \qquad \frac{dx_1}{A_1} = \frac{dx_2}{A_2} = \ldots = \frac{dx_n}{A_n}$$

admette pour multiplicateur l'unité, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial A_n}{\partial x_n} = 0.$$

Si n est impair, par exemple, on a vu que la forme (n° **5**)

$$\omega_{n-1} = A_1\, dx_2 \ldots dx_n + A_2\, dx_3 \ldots dx_n\, dx_1 + \ldots + A_n\, dx_1 \ldots dx_{n-1}$$

était une différentielle totale, et le système associé S'_1 est identique au système (26). On reviendra plus loin sur les autres simplifications que peut présenter l'intégration d'un système S'_1 associé à une forme dérivée de degré quelconque.

[**10**] Dans tous les calculs des paragraphes précédents, les coefficients de la forme dérivée ω' interviennent seuls; il n'est pas nécessaire de connaître les coefficients de la forme ω elle-même, dont ω' est la forme dérivée. Supposons maintenant que l'on veuille avoir la classe d'une forme quelconque ω qui ne soit pas une différentielle totale. Il est clair que, quand on passe d'une forme ω à la forme dérivée, on n'introduit aucune variable nouvelle qui ne figure pas dans ω; la classe ne peut donc augmenter. Par suite, si ω' est de classe q, ω est au moins de classe q, mais elle peut être de classe supérieure à q. Supposons la forme ω' de classe q mise sous une forme réduite où figurent seulement q variables et leurs différentielles; on peut par des quadratures (n° **4**) déterminer une forme ω_1 ayant pour dérivée ω' et où ne figurent que les mêmes variables qui figurent dans ω'. La différence $\omega - \omega_1$ est une différentielle totale, dans l'expression de laquelle peuvent entrer des variables, en nombre quelconque, qui ne figurent pas dans ω'.

Pour avoir la classe de la forme ω elle-même, considérons la forme auxiliaire

$$(27) \qquad \omega_1 = e^{x_{n+1}}\omega = e^{x_{n+1}}\left\{\sum_{i,k} A_{ik}\,dx_i\,dx_k\right\},$$

x_{n+1} étant une nouvelle variable indépendante, qui restera la même dans tous les changements de variables portant uniquement sur les n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Nous raisonnerons toujours, comme plus haut, en supposant $p=2$. La forme dérivée ω'_1 a pour expression

$$(28) \qquad \begin{aligned} \omega'_1 &= e^{x_{n+1}}dx_{n+1}\,\omega + e^{x_{n+1}}\omega' \\ &= e^{x_{n+1}}\left\{\sum_{i,k,l} A_{ikl}\,dx_i\,dx_k\,dx_l + \sum_{i,k} A_{ik}\,dx_i\,dx_k\,dx_{n+1}\right\} \\ &\qquad (i, k, l = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}$$

Soit S''_1 le système de Pfaff associé à la forme ω'_1; il se décompose en deux groupes d'équations

$$S''_1 \left\{ \begin{aligned} &(29) \quad \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\,dx_k = 0 &&(i = 1, 2, \ldots, n), \\ &(30) \quad \sum_{l=1}^{n} A_{ikl}\,dx_l + A_{ik}\,dx_{n+1} = 0 &&(i, k = 1, 2, \ldots, n); \end{aligned} \right.$$

ce système S''_1 est lui-même un système complètement intégrable, d'après la proposition générale du n° **8**. C'est aussi un système covariant de l'équation $\omega = 0$, relativement à tout changement de variables portant sur les variables $x_1, \ldots, x_n$, la variable x_{n+1} n'étant pas changée.

Si l'on ajoute aux équations de S''_1 l'équation $dx_{n+1} = 0$, on obtient un nouveau système complètement intégrable (¹) S'''_1, composé de deux groupes d'équations

$$S'''_1 \begin{cases} (29) \quad \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\, dx_k = 0, & (i = 1, 2, \ldots, n), \\ (31) \quad \sum_{l=1}^{n} A_{ikl}\, dx_l = 0, & (i, k = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

qui s'obtient en ajoutant les deux systèmes S_1, S'_1, associés respectivement à ω et à ω'. Il est clair que ce système S'''_1 est lui-même un covariant de ω. On peut démontrer directement qu'il est complètement intégrable en raisonnant comme on l'a fait sur le système S'_1. La proposition est évidente, si le système contient n ou $n - 1$ équations distinctes. S'il contient q équations distinctes $(q < n - 1)$, faisons un changement de variables tel que les équations

$$y_1 = C_1, \qquad y_2 = C_2, \qquad \ldots, \qquad y_{n-1} = C_{n-1}$$

représentent une famille d'intégrales à une dimension du système transformé. Soit $\omega = \sum B_{ik}\, dy_i\, dy_k$ la nouvelle expression de ω; les équations

$$\sum_{k=1}^{n} B_{ik}\, dy_k = 0, \qquad \sum_{l=1}^{n} B_{ikl}\, dy_l = 0$$

(¹) D'une façon générale, si l'on réunit les équations des deux systèmes complètement intégrables, on obtient un nouveau système complètement intégrable. Si le premier système S_1 contient p équations linéairement distinctes, il est équivalent à un système

$$(\alpha) \qquad df_1 = 0, \qquad df_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad df_q = 0.$$

Le second système S_2 est de même équivalent à un système de q équations

$$(\beta) \qquad d\varphi_1 = 0, \qquad d\varphi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad d\varphi_q = 0.$$

Si les $p + q$ fonctions f_i, φ_k sont distinctes, il n'y a aucune relation linéaire entre les différentielles df_i, $d\varphi_k$, et par suite le système formé par les équations (α) et (β) contient $p + q$ équations distinctes. Dans le cas général, il y a autant de relations distinctes entre les $p + q$ fonctions f_i, φ_k qu'il y a de relations linéaires entre leurs différentielles. S'il y a r relations, les équations (α) et (β) se réduisent à $p + q - r$ équations linéairement distinctes et forment bien un système complètement intégrable.

doivent être vérifiées quand on y suppose $dy_1 = 0, \ldots, dy_{n-1} = 0$. Tous les coefficients B_{ik}, B_{ikl}, où l'un des indices est égal à n, sont donc nuls. Il en est de même des dérivées $\dfrac{\partial B_{ik}}{\partial y_n}$, d'après la relation générale

$$B_{ikn} = \frac{\partial B_{ik}}{\partial y_n} + \frac{\partial B_{kn}}{\partial y_i} + \frac{\partial B_{ni}}{\partial y_k},$$

et par suite la nouvelle expression de ω ne renferme ni y_n, ni dy_n. Le système S_1''' est donc remplacé par un système équivalent de q équations à $n-1$ variables seulement. En continuant de la sorte, il est clair qu'on finira par arriver à un système de q équations à $q+1$ variables seulement, équivalent au système S_1''', c'est-à-dire à un système complètement intégrable.

Les conséquences sont les mêmes que celles qui ont été développées plus haut (n° **9**). Si l'on a pris un système de variables indépendantes $(y_1, \ldots, y_n)$ tel que le système S_1''' soit équivalent au système

$$dy_1 = 0, \quad \ldots, \quad dy_q = 0,$$

dans l'expression de la forme ω avec ce système de variables

$$\omega = \sum B_{ik}\, dy_i\, dy_k$$

ne figurent que les variables $y_1, y_2, \ldots, y_q$ et leurs différentielles $dy_1, \ldots, dy_q$. La forme ω est donc au plus de classe q. Cette forme ne peut être de classe inférieure à q, car s'il était possible de l'exprimer au moyen de q' variables $z_1, z_2, \ldots, z_q$, et de leurs différentielles $dz_1, \ldots, dz_q$, $(q' < q)$, le système S_1''' comprendrait au plus q' équations linéairement distinctes.

La classe d'une forme symbolique ω est donc égale au nombre d'équations linéairement distinctes du système S_1''' formé par la réunion des deux systèmes S_1 et S'_1.

Lorsque le système S_1''' ne renferme pas d'équations linéairement distinctes des q équations du système S'_1 la forme ω est de même classe que la forme dérivée ω', et il suffira d'intégrer le système S'_1 pour ramener ces deux expressions à une forme réduite par un même changement de variables.

Supposons maintenant que le système S_1 contienne r équations linéairement distinctes des q équations du système S'_1. Le système S_1''' se compose alors de $q+r$ équations. Pour trouver l'intégrale générale de ce système (on suppose bien entendu $q + r < n$), on peut d'abord intégrer le système complètement intégrable S'_1; il reste ensuite à intégrer un nouveau système complètement intégrable de r équations. Ce nouveau système jouit de la même propriété que le système S'_1; si l'on a obtenu $r-1$ intégrales, on peut achever l'intégration par une quadrature. Pour le démontrer, supposons que l'on ait pris un système de variables tels que $y_1, y_2, \ldots y_q$ soient des intégrales de S'_1, et $y_{q+1}, \ldots, y_{q+r-1}$ des intégrales du système S'''_1. Soit

$$\omega = \sum B_{ik}\, dy_i\, dy_k$$

l'expression de ω avec ce système de variables; $y_1, \ldots, y_q$ étant des intégrales du système S'_1, tous les coefficients B_{ikl} où l'un des indices est supérieur à q sont nuls, et ce système est équivalent aux q équations

$$dy_1 = 0, \qquad dy_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad dy_q = 0.$$

D'autre part, toutes les équations du système S_1 doivent se réduire à une seule quand on y fait $dy_1 = 0$, $dy_2 = 0$, $\ldots$, $dy_{q+r-1} = 0$. En raisonnant comme au n° **9**, on en déduit que tous les coefficients B_{ik}, où les deux indices sont supérieurs à $q + r - 1$, sont nuls. Soit

$$B_{iq+r}\, dy_{q+r} + \ldots + B_{in}\, dy_n = 0 \tag{32}$$

une équation de ce système dont tous les coefficients ne sont pas nuls. La relation générale

$$B_{ihl} = \frac{\partial B_{ih}}{\partial y_l} + \frac{\partial B_{hl}}{\partial y_i} + \frac{\partial B_{li}}{\partial y_h}$$

se réduit à

$$\frac{\partial B_{ih}}{\partial y_l} = \frac{\partial B_{il}}{\partial y_h},$$

si les deux indices h et l sont supérieurs à $q + r - 1$. Le premier membre de l'équation (32) est donc une différentielle exacte, en regardant $y_1, \ldots, y_{q+r-1}$ comme constants.

Appelons pour abréger *opération m* la détermination d'une intégrale première d'un système complètement intégrable de m équations aux différentielles totales. On peut dire alors que l'intégration du système $S_1 + S'_1$ exige d'abord les opérations q, $q - 1$, $\ldots$, 2, et une quadrature; puis les opérations r, $r - 1$, $\ldots$, 2, et une quadrature. Cette dernière série d'intégrations se réduit à une quadrature si $r = 1$.

Exemple. — Soit $\omega = x_1^2\, dx_2\, dx_3 + x_1\, dx_2\, dx_4 + dx_3\, dx_4$; on a

$$\omega' = 2x_1\, dx_1\, dx_2\, dx_3 + dx_1\, dx_2\, dx_4.$$

Le système S'_1 ne comprend que trois équations distinctes

$$2x_1\, dx_3 + dx_4 = 0, \qquad dx_1 = 0, \qquad dx_2 = 0,$$

tandis que $S'_1 + S_1$ contient quatre équations

$$dx_1 = dx_2 = dx_3 = dx_4 = 0;$$

ω est donc de classe quatre et ω' de classe trois. Le système S'_1 admet les trois intégrales x_1, x_2, $2x_1x_3 + x_4$. En prenant pour variables x_1, x_2, x_3 et $y = 2x_1x_3 + x_4$, on a en effet

$$\omega' = dx_1\, dx_2\, dy,$$

$$\omega = x_1\, dx_2\, dy + \left\{ dx_3\, dy + d(x_1^2 x_3)\, dx_2 + dx_1\, d(x_3^2) \right\}.$$

Remarque. — Pour que la forme ω_p de degré p soit le produit symbolique de p facteurs $df_1, df_2, \ldots, df_p$, il est nécessaire que cette forme soit de classe p, si c'est une différentielle totale symbolique, ou de classe $p+1$ dans le cas contraire.

Ces conditions sont suffisantes. Si, par exemple, ω_p est de classe $p+1$, on peut, par un changement de variables, la transformer en une forme symbolique de degré p, où figurent seulement $p+1$ variables $y_1, y_2, \ldots, y_{p+1}$, et l'on a démontré plus haut (n° **4**) qu'une telle forme est décomposable en un produit symbolique de p différentielles

$$K\, df_1\, df_2 \ldots df_p.$$

Si le facteur K ne se réduit pas à une fonction de $f_1, f_2, \ldots, f_p$, la forme ω'_p est elle-même de classe $p+1$, et le système (S) + (S') est identique au système (S'_1).

[**11**] Reprenons encore le système complètement intégrable S''_1 que nous écrirons

$$S''_1 \quad \begin{cases} (29) \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_{ik}\, dx_k = 0 & (i = 1, 2, \ldots, n), \\[2ex] (30) \quad \dfrac{\displaystyle\sum_{l} A_{ikl}\, dx_l}{A_{ik}} = -\, dx_{n+1} & (i, k = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

S'il se compose de $m+1$ équations linéairement distinctes, il admet m intégrales indépendantes de x_{n+1}, et une dernière intégrale dépendant de x_{n+1} de la forme

$$x_{n+1} + F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C.$$

Cette dernière intégrale s'obtiendra par une quadrature quand on aura obtenu les intégrales premières indépendantes de x_{n+1}. Imaginons encore que l'on fasse un changement de variables tel que ces m intégrales soient précisément $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Comme le système S''_1 est un covariant de la forme ω relativement à tout changement de variable portant uniquement sur les n variables $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, le système de même forme que S''_1

$$\sum_{k=1}^{n} B_{ik}\, dy_k = 0, \qquad \frac{\displaystyle\sum_{l=1}^{n} B_{ikl}\, dy_l}{B_{ik}} = -\, dx_{n+1}$$

devra admettre les m intégrales premières $y_1, \ldots, y_m$, indépendantes de x_{n+1}. Il faut d'abord que l'on ait $B_{ik}=0$ si l'un des indices est supérieur à m, et par suite tous les coefficients B_{ikl} où deux des indices sont supérieurs à m seront nuls. Supposons $i \leqslant m$, $k \leqslant m$; toutes les relations

$$\sum_{l=m+1}^{n} B_{ikl}\, dy_l + B_{ik}\, dx_{n+1} = 0$$

doivent se réduire à une seule, ce qui exige que le rapport $\frac{B_{ikl}}{B_{ik}}$ soit indépendant des indices i et k. Mais on a, l étant supérieur à m,

$$B_{ikl} = \frac{\partial B_{ik}}{\partial y_l} + \frac{\partial B_{kl}}{\partial y_i} + \frac{\partial B_{li}}{\partial y_k} = \frac{\partial B_{ik}}{\partial y_l};$$

par conséquent quels que soient les indices (i, k) (i', k') dont aucun n'est supérieur à m, on a

$$\frac{\dfrac{\partial B_{ik}}{\partial y_l}}{B_{ik}} = \frac{\dfrac{\partial B_{i'k'}}{\partial y_l}}{B_{i'k'}}.$$

Le rapport de deux coefficients quelconques B_{ik}, $B_{i'k'}$ est donc indépendant des variables $y_{m+1}, \ldots, y_n$, et l'on a pour ω une expression de la forme

$$\omega = K \sum_{i,k} C_{ik}\, dy_i\, dy_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, m) \tag{31}$$

les coefficients C_{ik} ne dépendant que de $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Par un raisonnement déjà employé deux fois, on démontre que la forme ω ne peut être mise sous une forme analogue où le nombre m serait remplacé par un nombre inférieur. S'il en était ainsi, le système S''_1 comprendrait moins de $m+1$ équations linéairement distinctes. Ce nombre m s'appelle *la classe de l'équation* $\omega = 0$.

Nous avons maintenant deux cas à distinguer. Si le facteur K ne dépend que des variables $y_1, y_2, \ldots, y_m$, on peut évidemment le supposer égal à l'unité. La forme ω est de classe m, et $y_1, y_2, \ldots, y_m$ sont les variables qui figurent dans la forme réduite, c'est-à-dire des intégrales des systèmes S_1 et S'_1. La dernière équation du système S''_1 se réduit à $dx_{n+1} = 0$. La classe de ω est égale à la classe de l'équation $\omega = 0$, mais la classe de ω' peut être un nombre quelconque inférieur à m.

Si le facteur K contient d'autres variables que $y_1, y_2, \ldots, y_m$, on peut supposer $K = y_{m+1}$. Les $m+1$ équations du système S''_1 se réduisent alors à

$$dy_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad dy_m = 0, \qquad \frac{dy_{m+1}}{y_{m+1}} + dx_{n+1} = 0.$$

La classe de ω est $m+1$, tandis que la classe de l'équation $\omega=0$ est seulement m. Dans ce cas, la classe de ω' est aussi $m+1$. En effet, la classe de ω' est égale au nombre des équations linéairement distinctes du système

$$\sum_{k=1}^{m} B_{ik}\, dy_s = 0, \qquad y_{m+1} \sum_{l=1}^{m} B_{ikl}\, dy_l + B_{ik}\, dy_{m+1} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, m).$$

Or, ce système est identique au système S''_1, relatif à la forme $\sum B_{ik}\, dy_i\, dy_k$, qui se compose de $m+1$ équations distinctes, puisque cette forme est de classe m.

En définitive, on a trois nombres à considérer :

1° La classe c_ω de la forme ω ; ce nombre est égal au nombre des équations linéairement distinctes du système S'''_1 formé par l'ensemble des équations des deux systèmes S_1 et S'_1.

2° La classe $c_{\omega'}$ de la forme ω'; ce nombre est égal au nombre des équations linéairement distinctes du système S'_1.

3° La classe γ_ω de l'équation $\omega=0$ ce nombre est égal au nombre des équations linéairement distinctes du système S''_1, où l'on aurait supprimé dx_{n+1}.

On a toujours $c_\omega \geqslant c_{\omega'}$ et $c_\omega \geqslant \gamma_\omega$. On ne peut avoir les signes d'inégalité en même temps. Nous venons de voir, en effet, que si l'on a $c_\omega = \gamma_\omega + 1$, on a forcément $c_\omega = c_{\omega'}$. Si $c_\omega = \gamma_\omega$, la classe $c_{\omega'}$ peut être inférieure à c_ω. Dans ce dernier cas, l'équation $dx_{n+1}=0$ est une des combinaisons intégrables du système S''_1.

Plaçons-nous dans le cas où $c_\omega = \gamma_\omega + 1$. Si l'on a trouvé les m intégrales y_1, $y_2, \ldots, y_m$ du système S''_1 indépendantes de x_{n+1}, on peut trouver la dernière intégrale du système S'_1 sans aucune quadrature. Il suffira, en effet, de prendre un nouveau système de variables indépendantes dont $y_1, y_2, \ldots, y_m$ fassent partie.

La forme ω, nous l'avons vu, s'exprimera uniquement au moyen des différentielles $dy_1, \ldots, dy_m$,

$$\omega = \sum B_{ik}\, dy_i\, dy_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, m),$$

et on pourra prendre pour la dernière intégrale y_{m+1} l'un quelconque des coefficients B_{ik} qui ne sont pas nuls.

Tout ce qui précède s'applique, bien entendu, quel que soit le degré de la forme ω. Dans le cas d'une forme de Pfaff, on ne peut avoir à la fois $c_\omega = c_{\omega'} = \gamma_\omega$. Si c_ω est un nombre impair $2n+1$, la forme canonique de ω est

$$\omega = p_1\, dx_1 + \ldots + p_n\, dx_n + dx_{n+1},$$

et l'on a

$$\omega' = dp_1\, dx_1 + \ldots + dp_n\, dx_n;$$

dans ce cas, $\gamma_\omega = c_\omega = 2n+1$, $c_{\omega'} = 2n$. Si c_ω est un nombre pair $2n$, la forme canonique de ω est

$$\omega = p_1\,dx_1 + \ldots + p_n\,dx_n;$$

on en déduit

$$\omega' = dp_1\,dx_1 + \ldots + dp_n\,dx_n,$$

et, par suite, $\gamma_\omega = 2n-1$, $c_{\omega'} = c_\omega$. On remarquera que $c_{\omega'}$ est toujours un nombre pair, tandis que γ_ω est toujours impair.

Remarque. — Dans le cas d'une forme symbolique de degré supérieur au premier, les trois nombres c_ω, γ_ω, $c_{\omega'}$ peuvent être égaux.

Soit, par exemple,

$$\omega = x_1\,dx_2\,dx_3 + x_4\,dx_5\,dx_6 + dx_2\,dx_3;$$

on a

$$\omega' = dx_1\,dx_2\,dx_3 + dx_4\,dx_5\,dx_6,$$

et les trois systèmes d'équations aux différentielles totales considérés plus haut sont identiques et donnent $dx_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$. On a donc dans ce cas

$$c_\omega = \gamma_\omega = c_{\omega'} = 6.$$

[**12**] Le système complètement intégrable S''_1, où l'on regarde x_{n+1} comme un paramètre auxiliaire, est le système *caractéristique* relatif à l'équation $\omega = 0$. Toute multiplicité intégrale de ce système, c'est-à-dire toute multiplicité dont tous les éléments linéaires vérifient les m équations de S''_1, est une *multiplicité caractéristique.* Il existe des multiplicités caractéristiques M_{n-m} à $n-m$ dimensions représentées par les équations

$$y_1 = C_1, \quad y_2 = C_2, \quad \ldots, \quad y_m = C_m,$$

où $y_1, \ldots, y_m$ sont m intégrales distinctes de S''_1, indépendantes de x_{n+1}, et toute multiplicité caractéristique s'obtient en prenant une multiplicité arbitraire sur une des multiplicités caractéristiques M_{n-m}. Nous dirons que $y_1, y_2, \ldots, y_m$ forment un système de variables caractéristiques. *Le lieu des multiplicités caractéristiques M_{n-m} issues des différents points d'une multiplicité intégrale M_r de l'équation $\omega = 0$ est aussi une multiplicité intégrale de la même équation.*

On le vérifie immédiatement en supposant l'équation $\omega = 0$ ramenée à une forme réduite, où les coefficients ne dépendent que des variables caractéristiques $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Si les équations

$$y_i = \varphi_i(u_1, u_2, \ldots, u_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

représentent une multiplicité intégrale à r dimensions, $u_1, u_2, \ldots, u_r$ étant r paramètres arbitraires, il est clair que les équations

$$y_1 = \varphi_1(u_1, \ldots, u_r), \quad \ldots, \quad y_m = \varphi_m(u_1, \ldots, u_r), \quad y_{m+1} = u_{r+1}, \quad \ldots, \quad y_n = u_{r+n-m}$$

représentent aussi une multiplicité intégrale, qui sera à $r+n-m$ dimensions si les paramètres $u_1, \ldots, u_r$ figurent effectivement dans les expressions de $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$. Il est clair que cette multiplicité est le lieu des multiplicités M_{n-m} issues des différents points de la multiplicité M_r. En particulier, le lieu des multiplicités caractéristiques M_{n-m} issues de tous les points d'une multiplicité quelconque d'ordre inférieur à p est une multiplicité intégrale.

Considérons en particulier une forme ω de degré p, égale au produit symbolique de p formes de Pfaff linéairement distinctes

$$\omega = \Omega_1 \Omega_2 \ldots \Omega_p,$$

où

$$\Omega_i = a_{i1} dx_1 + \ldots a_{in} dx_n \qquad (i = 1, 2, \ldots p).$$

Supposons que, par un changement de variables convenable, on puisse remplacer le système des p équations $\Omega_i = 0$ par un système équivalent où figurent seulement m variables $y_1, \ldots, y_m$ et leurs différentielles

$$\Pi_i = b_{i1} dy_1 + \ldots + b_{im} dy_m = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Le produit symbolique ω se transforme en un nouveau produit symbolique

$$\omega = K \Pi_1 \Pi_2 \ldots \Pi_p,$$

le facteur K pouvant contenir, en même temps que les variables $y_1, y_2, \ldots, y_m$ d'autres variables $y_{m+1}, \ldots$. L'équation $\omega = 0$ est donc au plus de classe m. Elle ne peut être de classe inférieure à m, car si l'on pouvait mettre ω sous une forme telle que $\omega = H . \omega_1$, H étant une fonction ordinaire et ω_1 une forme symbolique où figurent seulement $m-r$ variables et leurs différentielles, ω_1 serait aussi le produit symbolique de p facteurs linéaires ne dépendant que de ces $m-r$ variables et de leurs différentielles. Le système des p équations de Pfaff $\Omega_i = 0$ est donc de classe m, et le système qui définit les caractéristiques de ces équations est identique au système qui définit les caractéristiques de l'équation $\omega = 0$.

Lorsque les p équations $\Pi_i = 0$ forment un système complètement intégrable, le produit symbolique ω est réductible à la forme

$$\omega = K\, dy_1 \ldots dy_p,$$

et la détermination des variétés caractéristiques $y_1, \ldots, y_p$ est équivalent à l'intégration du système donné lui-même. On voit par là que les équations différentielles des multiplicités caractéristiques d'une équation peuvent former un système complètement intégrable quelconque.

III

[**13**] Les propriétés des formes symboliques de différentielles se prêtent facilement à l'étude des invariants intégraux. Étant donné un système d'équations différentielles

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = dt, \tag{32}$$

où $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ne dépendent pas de la variable t, tout invariant intégral de ce système est représenté par une intégrale, simple ou multiple,

$$I_p = \int \omega_p = \int \sum A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_p},$$

où ω_p est une forme symbolique de degré p, dont les coefficients doivent vérifier un certain nombre d'équations aux dérivées partielles qui expriment que $\frac{dI_p}{dt}$ est identiquement nul, quelle que soit la multiplicité M_p à laquelle l'intégrale est étendue (1).

Imaginons que par un changement de variables on ait ramené le système (32) à la forme canonique

$$\frac{dy_1}{0} = \frac{dy_2}{0} = \ldots = \frac{dy_{n-1}}{0} = \frac{dz}{1} = dt; \tag{32'}$$

la forme symbolique ω_p se change en une nouvelle forme symbolique Ω_p, où les variables $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ et les différentielles $dy_1, \ldots, dy_{n-1}, dz$ peuvent figurer d'une façon quelconque, mais *dont les coefficients ne dépendent pas de la variable z.*

Cela étant, soient ω_p et ω_q deux formes symboliques correspondant à deux invariants intégraux I_p et I_q du système (32), Ω_p et Ω_q les expressions de ces formes symboliques après le changement de variables qui ramène le système (32) à la forme (32').

---

(1) Il existe aussi des invariants intégraux d'une autre espèce,

$$J_1 = \int \sqrt[m]{\Phi(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)}.$$

Φ étant une forme (*au sens algébrique*) de degré m en $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, dont les coefficients sont des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Pour qu'une forme de cette espèce donne un invariant intégral, il faut et il suffit que, par le changement de variables qui ramène le système (32) à la forme (32'), la forme Φ se transforme en une nouvelle forme $\Psi(dy_1, \ldots, dy_{n-1}, dz)$ dont les coefficients ne dépendent pas de z.

Les coefficients de Ω_p et de Ω_q ne renfermant pas la variable z, il en est évidemment de même du produit symbolique $\Omega_p . \Omega_q$. Or, on a, d'après les propriétés d'invariance d'un produit symbolique,

$$\omega_p . \omega_q = \Omega_p . \Omega_q,$$

ce qui prouve que la forme symbolique de degré $p+q$, $\omega_p \omega_q$ se transforme en une forme symbolique dont les coefficients ne renferment pas z par le changement de variables qui conduit des équations (32) aux équations (32'). Au produit symbolique $\omega_p \omega_q$ correspond donc un invariant intégral d'ordre $p+q$

$$\mathrm{I}_{p+q} = \int \omega_p . \omega_q .$$

Ce théorème est dû à Poincaré, qui l'a déduit des propriétés des équations aux variations. L'énoncé n'exige pas que ω_p et ω_q soient différents; de tout invariant intégral $\int \omega_p$ on peut donc en déduire de nouveaux représentés symboliquement par $\int (\omega_p)^2$, $\int (\omega_p)^3$, ... Tous ces invariants sont identiquement nuls, si p est impair.

Connaissant un ou plusieurs invariants intégraux du système (32), si l'opération précédente permet d'en déduire un invariant intégral d'ordre n, on aura un multiplicateur du système. Si, en procédant d'une autre façon, on peut en déduire un autre invariant d'ordre n, on aura deux multiplicateurs et par suite une intégrale, pouvant se réduire à une constante. Supposons, par exemple, que l'on connaisse un invariant intégral du second ordre $\mathrm{I}_2 = \int \omega_2$ d'un système de $2n$ équations, la puissance symbolique $(\omega_2)^n$ n'étant pas nulle, et en outre deux intégrales φ_1, φ_2. On en déduit que

$$\mathrm{I}_4 = \int (\omega_2)^2, \qquad \ldots, \qquad \mathrm{I}_{2n-2} = \int (\omega_2)^{n-1}, \qquad \mathrm{I}_{2n} = \int (\omega_2)^n$$

sont aussi des invariants intégraux, dont le dernier donnera un multiplicateur du système. D'autre part, φ_1 et φ_2 étant des intégrales, $\int d\varphi_1$, $\int d\varphi_2$ sont aussi des invariants intégraux, ainsi que $\int (\omega_2)^{n-1} d\varphi_1 d\varphi_2$. Le quotient des deux formes symboliques

$$\frac{(\omega_2)^{n-1} d\varphi_1 d\varphi_2}{(\omega_2)^n}$$

est donc une nouvelle intégrale du système proposé.

Le théorème classique de Poisson n'est qu'un cas particulier de cette proposition. Supposons que le système considéré soit un système canonique de $2n$ équations

$$(33)\qquad \frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\qquad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i}\qquad (i=1, 2, \ldots, n);$$

ce système admet l'invariant intégral ([1])

$$I_2=\int \omega_2=\int \sum_{i=1}^{n} dx_i\, dp_i.$$

La puissance symbolique $(\omega_2)^n$ est identique à $n!\ dx_1\, dp_1 \ldots dx_n\, dp_n$, et par conséquent le système (33) admet pour multiplicateur l'unité, comme il est bien connu. D'autre part, si φ_1 et φ_2 sont deux intégrales, $\int (\omega_2)^{n-1}\, d\varphi_1\, d\varphi_2$ est un invariant intégral. Or, le produit symbolique $(\omega_2)^{n-1}\, d\varphi_i\, d\varphi_2$ est égal, à un facteur constant près, comme on le voit aisément, à $(\varphi_1, \varphi_2)\, dx_1\, dp_1 \ldots dx_n\, dp_n$. L'expression (φ_1, φ_2) est donc une intégrale du système (33). Les généralisations bien connues du théorème de Poisson s'établissent de la même façon.

[**14**] Poincaré a indiqué d'autres procédés permettant, dans certains cas, de déduire d'invariants intégraux connus une ou plusieurs intégrales du système (32), sans aucune intégration. Tous ces procédés, de caractère algébrique, se déduisent aisément de la forme canonique des invariants intégraux, quand on suppose le système ramené à la forme (32'), et s'appliquent en particulier aux invariants du premier ordre, considérés dans la note de la page 34.

Le problème que je me suis proposé dans les travaux consacrés à ce sujet est un peu différent. La connaissance d'un invariant intégral ne permet pas en général

---

([1]) On peut démontrer comme il suit que les systèmes canoniques sont les seuls qui admettent l'invariant intégral I_2. Supposons en effet que I_2 soit un invariant intégral du système

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i,\qquad \frac{dp_i}{dt}=P_i\qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

La forme ω_2 étant une différentielle totale symbolique, l'invariant du premier ordre que l'on déduit de I_2 par l'opération (E) doit être un invariant $I_1^{(d.e)}(D)$.

Or, cet invariant a pour expression

$$I_1^{(d.e)}=\int X_1\, dp_1 - P_1\, dx_1 + X_2\, dp_2 - P_2\, dx_2 + \ldots.$$

La fonction sous le signe $\int$ devant être une différentielle exacte, on a donc

$$X_i=\frac{\partial F}{\partial p_i},\qquad P_i=-\frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

d'obtenir sans aucune intégration une ou plusieurs intégrales premières du système (32), mais on peut toujours en déduire un nouveau système d'équations différentielles, d'ordre inférieur ou égal à n, dont l'intégration présente des simplifications qui ne se présentent pas pour le système le plus général, et dont toutes les intégrales sont aussi des intégrales du système (32). Ce fait, que j'avais établi directement, se rattache très simplement à la notion de classe d'une forme symbolique.

Considérons en particulier les invariants intégraux que je désigne par $I_p^{(e)}$, qui sont aussi des invariants intégraux pour tous les systèmes d'équations différentielles que l'on déduit du système (32) en multipliant tous les coefficients X_i par un facteur quelconque $\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. De tout invariant intégral on peut déduire, par des additions et des multiplications, un invariant de cette espèce. Soit $\omega_p^{(e)}$ la forme symbolique qui correspond à un tel invariant $I_p^{(e)}$. Ces formes symboliques sont caractérisées par la propriété suivante : si l'on fait le changement de variables qui ramène le système (32) à la forme (32'), *l'expression* $\omega_p^{(e)}$ *se change en une expression symbolique* $\Omega_p^{(e)}$, *où ne figurent ni* z *ni* dz. La forme $\omega_p^{(e)}$ est donc au plus de classe $n-1$, mais elle peut être de classe inférieure à $n-1$. Soit $n-r$ $(r \geqslant 1)$ la classe de cette forme; si on la suppose ramenée à une forme réduite où ne figurent que $n-r$ variables $Y_1, \ldots, Y_{n-r}$, et leurs différentielles, il est clair que les variables Y_i, qui figurent dans cette expression réduite, sont elles-mêmes des fonctions de $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, indépendantes de z, et par suite des intégrales du système (32). Si donc l'on connaît un invariant $I_p^{(e)} = \int \omega_p^{(e)}$ des équations (32), on aura des intégrales de ce système en déterminant les variables qui figurent dans la forme réduite de $\omega_p^{(e)}$. On a vu dans les paragraphes précédents comment l'on déterminait ces variables par l'intégration d'un système d'équations aux différentielles totales complètement intégrable, dont l'ordre est égal à la classe de $\omega_p^{(e)}$, et les simplifications qui pouvaient se produire dans l'intégration de ce système.

Soient S_1 et S'_1 les systèmes d'équations aux différentielles totales associés respectivement à la forme $\omega_p^{(e)}$ et à la forme dérivée. Le système S'_1 est complètement intégrable et toutes ses intégrales sont aussi des intégrales du système (32); c'est le résultat que j'ai établi dans mon premier Mémoire sur les invariants intégraux. Le nouveau résultat est plus complet, puisque le système $S_1 + S'_1$ est lui-même complètement intégrable, et, s'il ne se confond pas avec S'_1, il donnera de nouvelles intégrales du système (32). Je n'avais pas tenu compte de ce système, sauf dans le cas particulier où $p = n-2$. La forme $\omega_{n-2}^{(e)}$ est alors de classe $n-1$ ou de classe $n-2$. Dans le premier cas, $\omega_{n-2}^{(e)}$ est réductible à la forme canonique

$$\omega_{n-2}^{(e)} = y_{n-1}\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_{n-2};$$

$y_1, y_2, \ldots, y_{n-2}$ sont les intégrales d'un système complet que l'on obtiendra en écrivant que le produit symbolique $\omega_{n-2}^{(e)}\,df$ est nul (n° **4**). La dernière intégrale y_{n-1} s'obtient alors sans aucune quadrature.

Si $\omega_{n-2}^{(e)}$ est de classe $n-2$, elle est réductible à la forme canonique

$$\omega_{n-2}^{(e)} = dy_1\,dy_2\,\ldots\,dy_{n-2};$$

elle est donc une différentielle totale symbolique et, si l'on connaît $n-3$ intégrales du système complet correspondant, on aura la dernière intégrale de ce système par une quadrature (n° **9**). Mais, en général, la dernière intégrale y_{n-1} du système (32) ne pourra s'obtenir par une quadrature.

Si l'on connaît un invariant intégral $I_{n-1}^{(e)}$, la forme correspondante $\omega_{n-1}^{(e)}$ de classe $n-1$ est réductible à la forme $dy_1\,dy_2\,\ldots\,dy_{n-1}$; on connaît donc un multiplicateur pour le système (32), car ce système est équivalent à celui que l'on obtient en écrivant que le produit symbolique $\omega_{n-1}^{(e)}\,df$ est nul (n° **5**). Inversement, la connaissance d'un multiplicateur permet de former un invariant $I_{n-1}^{(e)}$ (Mémoire D).

Reprenons encore le cas où l'on connaît un invariant $I_1^{(e)}$, c'est-à-dire un invariant intégral du premier ordre

$$\int A_1\,dx_1 + \ldots + A_n\,dx_n$$

dont les coefficients A_i vérifient la relation $A_1X_1 + \ldots + A_nX_n = 0$.

La forme de Pfaff $\sum A_i\,dx_i$ est alors au plus de classe $n-1$, et les variables qui figurent dans la forme réduite sont des intégrales du système (32). La détermination de ces intégrales présente les mêmes simplifications que la réduction d'une expression de Pfaff à sa forme canonique.

[**15**] Connaissant un invariant $I_p^{(e)}$ de classe $r < n-1$ du système (32), si l'on a pu intégrer le système correspondant à cet invariant $S_1 + S'_1$, on aura par là même déterminé r intégrales du système (32), que l'on pourra, par un changement de variables, ramener à un système d'équations différentielles à $n-r$ inconnues. La connaissance de l'invariant $I_p^{(e)}$ ne peut plus être d'aucune utilité pour l'intégration de ce nouveau système. Supposons en effet que l'on ait choisi les nouvelles variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$, de façon que $I_p^{(e)}$ s'exprime uniquement au moyen de $y_1, y_2, \ldots, y_r$, $dy_1, \ldots, dy_r$. Le système (32) transformé prend la forme

$$\frac{dy_1}{0} = \frac{dy_2}{0} = \ldots = \frac{dy_r}{0} = \frac{dy_{r+1}}{Y_{r+1}} = \ldots = \frac{dy_n}{Y_n} = dt,$$

puisque $y_1, y_2, \ldots, y_r$ sont des intégrales. Il est clair que toute forme symbolique ω, qui s'exprime uniquement au moyen de $y_1, \ldots, y_r, dy_1, \ldots, dy_r$ fournit un invariant intégral de ce système, mais cet invariant ne peut servir en rien à l'intégration du nouveau système

$$\frac{dy_{r+1}}{Y_{r+1}} = \ldots = \frac{dy_n}{Y_n} = dt,$$

où $y_1, \ldots, y_r$ sont regardées comme des paramètres. On a donc épuisé, comme il était facile de le prévoir, tout ce qu'on peut tirer de la connaissance de l'invariant $I_p^{(e)}$, en déterminant les variables qui figurent dans la forme réduite de cet invariant.

Il n'en est pas de même si l'invariant $I_p^{(e)}$ a été déduit par l'opération (E) d'un autre invariant connu d'ordre $p+1$. Pour le montrer, nous sommes amenés à examiner de plus près le problème suivant. Supposons que l'on connaisse r intégrales ($r<n-1$) du système (32) et de plus un invariant intégral I_p. On peut alors ramener le système (32) à un système différentiel à $n-r$ inconnues. Il s'agit de reconnaître quelle peut être l'utilité de l'invariant intégral I_p du système primitif pour l'intégration du système transformé. Pour ne pas multiplier les notations, nous supposerons que l'on a choisi les variables indépendantes de façon que les r intégrales connues sont précisément $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Le système proposé est alors de la forme

$$(34) \qquad \frac{dx_1}{0} = \ldots = \frac{dx_r}{0} = \frac{dx_{r+1}}{X_{r+1}} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = dt.$$

Soit

$$I_p = \int \omega_p = \int \sum A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p}\, dx_{\alpha_1} \ldots dx_{\alpha_p}$$

un invariant intégral d'ordre p de ce système. Les relations générales, qui expriment que I_p est un invariant, deviennent dans ce cas, puisque $X_1 = X_2 = \ldots = X_r = 0$,

$$(35) \qquad X(A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p}) + \sum_{h=r+1}^{n} \left(A_{h\alpha_2 \ldots \alpha_p} \frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_1}} + A_{\alpha_1 h \ldots \alpha_p} \frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_2}} + \ldots + A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1} h} \frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_p}} \right) = 0$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p = 1, 2, \ldots, n),$$

en posant

$$X(f) = X_{r+1} \frac{\partial f}{\partial x_{r+1}} + \ldots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Ne prenons dans ω_p que les coefficients $A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p}$, dont tous les indices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont supérieurs à r. L'ensemble des relations (35) appliquées à ces coefficients exprime précisément que

$$I'_p = \int \omega'_p = \int \sum_{r+1}^{n} A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p}\, dx_{\alpha_1} \ldots dx_{\alpha_p},$$

la sommation étant étendue à tous les systèmes de valeurs des indices plus grandes que r, est un invariant intégral pour le système

$$\frac{dx_{r+1}}{X_{r+1}} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = dt, \tag{36}$$

où l'on regarde $x_1, x_2, \ldots, x_r$ comme des paramètres. De l'invariant intégral I_p du système (34) on déduit donc un invariant intégral I'_p du même ordre pour le système (36).

Ce procédé est en défaut si les coefficients $A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}$, où tous les indices sont supérieurs à r, sont tous nuls (ce qui arrive en particulier lorsque l'on a $p > n-r$). Supposons qu'il en soit ainsi, mais que les coefficients $A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}$, où $p-1$ des indices seulement sont supérieurs à r, ne soient pas tous nuls, par exemple que quelques-uns des coefficients $A_{1\alpha_2\ldots\alpha_p}$, où $\alpha_2 > r, \ldots, \alpha_p > r$, sont différents de zéro. Parmi les relations (35), prenons seulement celles où figurent ces coefficients. Puisque $A_{h\alpha_2\ldots\alpha_p} = 0$, lorsque h est supérieur à r, ces relations deviennent

$$X(A_{1\alpha\ldots\alpha_p}) + \sum_{h=r+1}^{n}\left(A_{1h\ldots\alpha_p}\frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_2}} + \ldots + A_{1\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}h}\frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_p}}\right) = 0$$

$$(\alpha_2, \ldots, \alpha_p = r+1, r+2, \ldots, n),$$

et elles expriment que

$$I_{p-1} = \int \omega_{p-1} = \int \sum_{r+1}^{n} A_{1\alpha_2\ldots\alpha_p}\, dx_{\alpha_2}\ldots dx_{\alpha_p},$$

la sommation étant étendue aux valeurs des indices $\alpha_2, \ldots, \alpha_p$, plus grandes que r, est un invariant intégral du système (36).

Si quelques-uns des coefficients $A_{2\alpha_2\ldots\alpha_p}$, où $\alpha_2 > r, \ldots, \alpha_p > r$ sont différents de zéro, on obtiendra de la même façon un autre invariant intégral I'_{p-1} du système (36), qui pourra d'ailleurs être identique à I_{p-1}. Si donc tous les coefficients $A_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$, où $p-1$ des indices sont supérieurs à r ne sont pas nuls, on peut déduire de I_p un ou plusieurs invariants intégraux pour le système (36).

Supposons encore que les coefficients $A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}$, où $p-1$ des indices sont supérieurs à r, sont tous nuls, mais que les coefficients, où $p-2$ des indices seulement sont supérieurs à r, ne sont pas tous nuls, par exemple que quelques-uns des coefficients $A_{12\alpha_3\ldots\alpha_p}$, où $\alpha_3 > r, \ldots, \alpha_p > r$, sont différents de zéro. On démontre alors, comme tout à l'heure, que

$$I_{p-2} = \int \omega_{p-2} = \int \sum_{r+1}^{n} A_{12\alpha_3\ldots\alpha_p}\, dx_{\alpha_3}\ldots dx_{\alpha_p}$$

est un invariant intégral du système (36).

Si les coefficients $A_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$, où $p-2$ des indices sont supérieurs à r, sont tous nuls, on passera aux coefficients où $p-3$ des indices seulement sont supérieurs à r, et ainsi de suite. Pour savoir jusqu'où on pourra continuer l'application de ce procédé, nous avons deux cas à distinguer :

Premier cas. — Si $p>r$, dans un coefficient quelconque $A_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$, il y a au moins $p-r$ indices supérieurs à r. Comme I_p n'est pas identiquement nul, le procédé précédent donnera donc un ou plusieurs invariants intégraux du système (36), d'ordre au moins égal à $p-r$.

Deuxième cas. — Si $p\leqslant r$, il peut arriver que les coefficients $A_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$, où quelques-uns des indices sont supérieurs à r, ne soient pas tous nuls; dans ce cas, nous venons de voir comment on peut déduire de I_p un ou plusieurs invariants intégraux du système (36). Il peut aussi arriver que tous ces coefficients soient nuls, de telle sorte que les différentielles $dx_1, \ldots, dx_r$ figurent seules dans I_p. Les relations (35) se réduisent alors à

$$X(A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p})=0,$$

et tous les coefficients de la forme ω_p sont des intégrales du système (36). Le seul cas où la connaissance de l'invariant I_p n'est d'aucune utilité est celui où tous ces coefficients sont eux-mêmes des fonctions des intégrales connues $x_1, \ldots x_r$ seulement. L'invariant I_p est alors un invariant de classe r, qui s'exprime uniquement au moyen de $x_1, \ldots, x_r$, $dx_1, \ldots, dx_r$. C'est le cas examiné au début de ce paragraphe; il ne peut se présenter que si I_p est un invariant $I_p^{(e)}$.

Remarque. — Un invariant intégral du système (36)

$$I_q=\int\omega_q=\int\sum_{r+1}^{n}A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_q}\,dx_{\alpha_1}\,dx_{\alpha_2}\ldots dx_{\alpha_q}, \tag{37}$$

la sommation étant étendue aux valeurs des indices supérieures à r, n'est pas nécessairement un invariant intégral du système (34). En effet, posons $A_{\alpha_1\ldots\alpha_q}=0$, lorsque l'un au moins des indices $\alpha_1\ldots\alpha_q$ est inférieur à $r+1$. Pour que I_q soit un invariant intégral du système (34), il faut et il suffit que les coefficients $A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_q}$, ainsi définis pour toutes les valeurs des indices de 1 à n, vérifient les relations (35). Les relations où figure sous le signe $X(\,)$ un coefficient $A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_q}$, dont tous les indices sont supérieurs à r, sont vérifiées par hypothèse puisque I_q est un invariant intégral du système (36). Il en est de même des relations où deux au moins des indices du coefficient $A_{\alpha_1\ldots\alpha_q}$, qui figure sous le signe $X(\,)$, sont inférieurs à $r+1$.

Quant aux relations, où un seul des indices du coefficient qui figure sous le signe $X(\,)$ est inférieur à $r+1$, elles prennent la forme suivante

$$\sum_{h=r+1}^{n}A_{h\alpha_2\ldots\alpha_q}\frac{\partial X_h}{\partial x_i}=0 \tag{38}$$

$$(i=1, 2, \ldots, r)\quad (\alpha_2, \ldots, \alpha_q=r+1, \ldots, n).$$

Telles sont les conditions qui expriment que I_q est aussi un invariant intégral du système (34).

Considérons par exemple le système

$$(34'') \qquad \frac{dx}{o} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} = dt,$$

Y et Z étant des fonctions de x, y, z, et le système obtenu en supprimant la première équation

$$(36'') \qquad \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} = dt,$$

où x est regardé comme un paramètre. L'intégrale $I_2 = \int\int M(x, y, z)\, dy\, dz$ est un invariant intégral de ce dernier système si M satisfait à la condition

$$\frac{\partial(MY)}{\partial y} + \frac{\partial(MZ)}{\partial z} = o.$$

Pour que I_2 soit un invariant intégral du système (34''), il faut de plus que l'on ait $\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial x} = o$, c'est-à-dire que Y et Z ne dépendent pas de x. On s'explique aisément par cet exemple pourquoi un invariant intégral du système (36) n'est pas en général un invariant intégral du système (34). Soit en effet S_0 une surface quelconque; les courbes intégrales du système (34'') issues des divers points de S_0 sont des courbes planes situées dans des plans parallèles au plan $x = o$, et remplissent un certain volume si S_0 n'est pas une portion d'un plan $x = x_0$. Soit S_t la position occupée au temps t par la surface qui coïncide avec S_0 à l'époque $t = o$. Pour que $\int\int M\, dy\, dz$ soit un invariant intégral du système (34''), il faut que l'intégrale $\int\int M\, dy\, dz$ étendue à la surface S_t soit égale, quel que soit t, à la même intégrale étendue à S_0. Pour que $\int\int M\, dy\, dz$ soit un invariant intégral du système (36''), il suffit que cette condition soit satisfaite, quand on prend pour S_0 une portion quelconque d'un plan $x = x_0$.

[**16**] Dans les paragraphes précédents, nous avons étudié le cas où l'on connaît un invariant intégral $I_p^{(e)}$ du système différentiel (32). Pour compléter cette étude, nous allons examiner le cas où l'on connaît un invariant intégral qui ne soit pas un invariant $I_p^{(e)}$, et nous commencerons par le cas singulier où l'on connaît un invariant intégral du premier ordre

$$I_1 = \int A_1\, dx_1 + \ldots + A_n\, dx_n,$$

tel que $A_1X_1 + \ldots + A_nX_n$ se réduise à une constante C différente de zéro. Je rappellerai succinctement les résultats établis dans un Mémoire antérieur. Si $A_1 dx_1 + \ldots + A_n dx_n$ est une différentielle exacte dU, on a immédiatement une intégrale première renfermant le temps

$$U(x_1, \ldots, x_n) = Ct + C',$$

C′ étant une constante arbitraire. Si $A_1 dx_1 + \ldots + A_n dx_n$ n'est pas une différentielle exacte, on sait que l'invariant intégral

$$I_2 = \int\int dA_1 dx_1 + \ldots + dA_n dx_n$$

est un invariant intégral $I_2^{(d,e)}$ du système (32), et on a vu quelle était l'utilité de cet invariant pour l'intégration du système. Si cet invariant est de classe r (r étant nécessairement un nombre pair), et si l'on a pu déterminer les variables qui figurent dans la forme réduite de cet invariant, on connaît r intégrales du système (32), que l'on peut par conséquent supposé mis sous la forme (34).

J'ajoute maintenant que l'on peut aussi trouver une intégrale du système (36), renfermant le temps t, par une quadrature. En effet, de l'invariant I_1 du système (32) on déduit, comme on l'a vu au paragraphe précédent, un invariant

$$I'_1 = \int A_{r+1} dx_{r+1} + \ldots + A_n dx_n$$

du système (36), pour lequel on a aussi

$$A_{r+1}X_{r+1} + \ldots + A_nX_n = C.$$

L'expression $A_{r+1} dx_{r+1} + \ldots + A_n dx_n$ est une différentielle exacte quand on y regarde $x_1, \ldots, x_r$ comme des paramètres.

En effet, par hypothèse, la forme $dA_1 dx_1 + \ldots + dA_n dx_n$ s'exprime uniquement au moyen de $x_1, \ldots, x_r, dx_1, \ldots, dx_r$, et par conséquent tous les termes contenant les produits $dx_i dx_k$ (où $i > r$, $h > r$) doivent disparaître. Or, tous ces termes proviennent uniquement de la somme

$$\left(\frac{\partial A_{r+1}}{\partial x_{r+1}} dx_{r+1} + \ldots + \frac{\partial A_{r+1}}{\partial x_n}\right) dx_{r+1} + \ldots + \left(\frac{\partial A_n}{\partial x_{r+1}} dx_{r+1} + \ldots + \frac{\partial A_n}{\partial x_n} dx_n\right) dx_n.$$

Cette somme devant être nulle identiquement, l'expression $A_{r+1} dx_{r+1} + \ldots + A_n dx_n$, où $x_1, \ldots, x_r$ sont regardés comme des paramètres, est bien une différentielle exacte, et l'on retombe sur le premier cas examiné.

[**17**] Prenons enfin le cas général où l'on connaît un invariant intégral I_p, qui n'est pas un invariant $I_p^{(e)}$, et où l'invariant intégral $I_{p-1}^{(e)}$ que l'on en déduit par l'opération (E) ne se réduit pas à une constante (cas que l'on vient d'examiner, et

qui suppose $p=1$). On a vu plus haut comment la détermination des variables qui figurent dans la forme réduite de $I_{p-1}^{(e)}$ fournissait un certain nombre d'intégrales du système (32). Supposons que l'on ait obtenu ces intégrales, et que l'on ait ramené le système à la forme (34), les variables $x_1, x_2, \ldots, x_r$ étant celles qui figurent dans l'invariant $I_{p-1}^{(e)}$. Soient

$$I_p = \int \omega_p = \int \sum A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p}\, dx_{\alpha_1} \ldots dx_{\alpha_p}$$

l'expression de l'invariant intégral après le changement de variables, et

$$I_{p-1}^{(e)} = \int \omega_{p-1} = \int \sum B_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{p-1}}\, dx_{\alpha_1} \ldots dx_{\alpha_{p-1}}$$

l'expression de l'invariant $I_{p-1}^{(e)}$ que l'on déduit de I_p par l'opération (E). Par hypothèse, cet invariant s'exprime uniquement au moyen de $x_1, \ldots, x_r, dx_1, \ldots, dx_r$. Or on a, dans le cas actuel,

$$B_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{p-1}} = \sum_{i=r+1}^{n} A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{p-1} i} X_i.$$

Les coefficients de l'invariant donné I_p vérifient donc les relations suivantes :

$$\sum_{i=r+1}^{n} A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{p-1} i} X_i = 0, \tag{39}$$

si l'un au moins des indices $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$ est supérieur à r;

$$\sum_{i=r+1}^{n} A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{p-1} i} X_i = F_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}}(x_1, x_2, \ldots, x_r), \tag{40}$$

si tous les indices $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$ sont inférieurs à $r+1$.

On a vu au n° **15** comment de l'invariant I_p on pouvait déduire un ou plusieurs invariants intégraux pour le système (36)

$$\frac{dx_{r+1}}{X_{r+1}} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = dt,$$

où l'on regarde $x_1, \ldots, x_r$ comme des paramètres. Soit I'_q l'un de ces invariants intégraux. La forme symbolique correspondante ω'_q a pour expression

$$\omega'_q = \sum_{r+1}^{n} A_{\alpha_1 \ldots \alpha_q \alpha_{q+1} \ldots \alpha_p}\, dx_{\alpha_1} \ldots dx_{\alpha_q},$$

les indices $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ prenant tous les systèmes de valeurs de $r+1$ à n, tandis que les indices $\alpha_{q+1}, \ldots, \alpha_p$ ont des valeurs *fixes* inférieures à $r+1$. Cela posé, si $q>1$, les relations (39) prouvent que I'_q est un invariant $I'^{(e)}_q$. Si $q=1$, cet invariant du premier ordre I'_1 est aussi $I'^{(e)}_1$, ou bien l'intégrale que l'on en déduit par l'opération (E) se réduit à une fonction de $x_1, \ldots, x_2$, différente de zéro, c'est-à-dire à une constante, puisque $x_1, \ldots, x_r$ sont traitées comme des constantes dans l'intégration du système (36). Les deux cas possibles ont été examinés plus haut.

Remarque. — On a écarté l'hypothèse où l'invariant I_p ne renfermerait que les différentielles $dx_1, \ldots, dx_r$. Ce cas ne peut se présenter, car tous les coefficients de cet invariant seraient (n° **15**) des intégrales du système (34), et par suite il serait un invariant $I_p^{(e)}$.

[**18**] Soit $\omega_p = \sum A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_p}$ une forme symbolique de degré p à n variables. Pour que l'intégrale $\int \omega_p$ soit un invariant intégral $I_p^{(e)}$ d'un système d'équations différentielles tel que le système (32), il est nécessaire, nous venons de le voir, que la forme ω_p soit au plus de classe $n-1$. *Cette condition est suffisante.*

En effet, les équations

$$(41) \qquad \sum_{i=1}^{n} A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{p-1} i} \lambda_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} \mathcal{A}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p i} \lambda_i = 0,$$

où l'on considère $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ comme les inconnues, se réduisent à $n-1$ équations distinctes au plus. Soient $\lambda_1 = X_1, \ldots, \lambda_n = X_n$ un système de solutions non toutes nulles. Nous allons montrer que $\int \omega_p$ est un invariant intégral $I_p^{(e)}$ pour le système (32), où $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ont les valeurs précédentes. En effet, tout système de solutions des équations (32) est alors un système de solutions des équations

$$(42) \qquad \sum_{i=1}^{n} A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{p-1} i} dx_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} \mathcal{A}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p i} dx_i = 0.$$

Imaginons maintenant que, par un changement de variables, on ait ramené le système (32) à la forme

$$(32'') \qquad \frac{dy_1}{0} = \ldots = \frac{dy_{n-1}}{0} = \frac{dy_n}{1} = dt.$$

en remplaçant, pour plus de symétrie, z par y_n dans les équations (32'). La forme ω_p devient

$$\Omega_p = \sum B_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p} dy_{\alpha_1} dy_{\alpha_2} \ldots dy_{\alpha_p}$$

et le système (42) est remplacé par le système de même forme

$$(42') \qquad \sum_{i} B_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{p-1} i} dy_i = 0, \qquad \sum_{i} \mathcal{B}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p i} dy_i = 0.$$

Ce nouveau système doit être vérifié quand on suppose $dy_1 = dy_2 = \ldots = dy_{n-1} = 0$. Il faut pour cela que tous les coefficients $B_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$, $\mathcal{B}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{p+1}}$, où l'un des indices est égal à n, soient nuls. La différentielle dy_n ne figure donc ni dans Ω_p, ni dans Ω'_p. Les relations (6) ou (7), où l'on suppose $p + 1 = n$, se réduisent à

$$\frac{\partial B_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p}}{\partial y_n} = 0,$$

et par suite la forme Ω_p ne renferme ni y_n ni dy_n; $\int \omega_p$ est donc un invariant intégral $I_p^{(e)}$ pour le système (32).

Si ω_p est de classe $n - 1$, les facteurs X_i sont déterminées à un facteur près. Si ω_p est de classe $n - r$, $X_1, \ldots, X_n$ dépendent linéairement de r fonctions arbitraires. Soit, par exemple, ω_p une forme de classe $n - 2$; en l'exprimant au moyen de $n - 2$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}$ et de leurs différentielles, on voit immédiatement que $\int \omega_p$ est un invariant intégral pour le système

$$\frac{dx_1}{0} = \ldots = \frac{dx_{n-2}}{0} = \frac{dx_{n-1}}{X_{n-1}} = \frac{dx_n}{X_n} = dt,$$

quelles que soient les fonctions X_{n-1}, X_n.

On peut établir une autre réciproque. Supposons que l'on connaisse un système de r équations aux différentielles totales ($r < n - 1$), complètement intégrable, dont toutes les intégrales soient aussi des intégrales du système (32). Soient

$$\Pi_1 = 0, \ \ldots, \ \Pi_r = 0$$

ces r équations et μ un multiplicateur (n° **5**); le produit symbolique $\Omega = \mu \Pi_1 \Pi_2 \ldots \Pi_r$ peut être mis sous la forme

$$\Omega = dy_1 \ldots dy_r,$$

$y_1, y_2, \ldots, y_r$ étant r intégrales premières du système

$$\frac{dx_1}{X_1} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}.$$

L'intégrale $\int \Omega$ est donc un invariant intégral $I_r^{(e)}$ de ce système.

IV

[**19**] Les systèmes S_2, S'_1 déduits d'une forme symbolique peuvent être rattachés à un problème du calcul des variations relatifs à cette forme. Nous développerons

encore les calculs en supposant $p=2$, mais la méthode est générale. Rappelons d'abord la formule suivante, facile à établir, du calcul des variations. Soit

$$I(\alpha)=\int\int_{(D)} F(x, y, \alpha)\, dx\, dy$$

une intégrale double étendue à un domaine D limité par une courbe fermée C qui varie elle-même d'une manière continue avec le paramètre α; la première variation δI a pour expression

$$\delta I=\int\int_{(D)} \delta F\, dx\, dy+\int_{C} F(\delta x\, dy-dx\, \delta y), \tag{43}$$

δx et δy désignant les variations de x et de y en un point du contour C, et l'intégrale curviligne étant prise dans le sens direct si l'on suppose que les axes ont la disposition habituelle.

Cela posé, soit $\omega=\sum A_{ik}\, dx_i\, dx_k$ une forme symbolique quelconque, et I l'intégrale double

$$I=\int\int \sum A_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

étendue à une multiplicité à deux dimensions M_2, qui varie d'une manière continue avec un paramètre α. Supposons les coordonnées d'un point de M_2 exprimées en fonction de deux variables auxiliaires u et v

$$x_i=f_i(u, v, \alpha) \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

de telle sorte que cette multiplicité M_2 corresponde point par point à un domaine D du plan (u, v) limité par un contour fermé C, qui correspond lui-même point par point au contour fermé Γ de l'espace à n dimensions qui limite M_2; C et Γ varient d'une manière continue avec le paramètre α. L'intégrale I, dont on cherche la première variation, peut être remplacée par l'intégrale double ordinaire

$$I=\int\int_{(D)} \sum A_{ik} \frac{D(x_i, x_k)}{D(u, v)}\, du\, dv,$$

à laquelle on peut appliquer la formule (43). Prenons un seul terme de cette intégrale, pour lequel nous développerons les calculs

$$U_{ik}=\int\int_{(D)} A_{ik}\left(\frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_k}{\partial v}-\frac{\partial x_k}{\partial u} \frac{\partial x_i}{\partial v}\right) du\, dv,$$

Dans l'expression de δU_{ik} nous avons d'abord une intégrale double

$$\int\int_{(D)} \delta A_{ik}\left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_k}{\partial v}-\frac{\partial x_k}{\partial u}\frac{\partial x_i}{\partial v}\right)du\,dv$$

$$+\delta\alpha\int\int_{(D)} A_{ik}\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial u\,\partial\alpha}\frac{\partial x_k}{\partial v}+\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial^2 x_k}{\partial v\,\partial\alpha}-\frac{\partial^2 x_k}{\partial u\,\partial\alpha}\frac{\partial x_i}{\partial v}-\frac{\partial x_k}{\partial u}\frac{\partial^2 x_i}{\partial v\,\partial\alpha}\right)du\,dv.$$

La formule d'intégrations par parties permet de transformer la dernière intégrale; on a en effet, d'après la formule de Green :

$$\int\int_{(D)} A_{ik}\frac{\partial^2 x_i}{\partial u\,\partial\alpha}\frac{\partial x_k}{\partial v}\,du\,dv = \int_{C} A_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial\alpha}\frac{\partial x_k}{\partial v}\,dv$$
$$-\int\int_{(D)}\left(\frac{dA_{ik}}{du}\frac{\partial x_i}{\partial\alpha}\frac{\partial x_k}{\partial v}+A_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial\alpha}\frac{\partial^2 x_k}{\partial u\,\partial v}\right)du\,dv,$$

$$\int\int_{(D)} A_{ik}\frac{\partial^2 x_k}{\partial v\,\partial\alpha}\frac{\partial x_i}{\partial u}\,du\,dv = -\int_{C} A_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_k}{\partial\alpha}\,du$$
$$-\int\int_{(D)}\left(\frac{dA_{ik}}{dv}\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_k}{\partial\alpha}+A_{ik}\frac{\partial x_k}{\partial\alpha}\frac{\partial^2 x_i}{\partial u\,\partial v}\right)du\,dv,$$

$$\int\int_{(D)} A_{ik}\frac{\partial^2 x_k}{\partial u\,\partial\alpha}\frac{\partial x_i}{\partial v}\,du\,dv = \int_{C} A_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial v}\frac{\partial x_k}{\partial\alpha}\,dv$$
$$-\int\int_{(D)}\left(\frac{dA_{ik}}{du}\frac{\partial x_i}{\partial v}\frac{\partial x_k}{\partial\alpha}+A_{ik}\frac{\partial x_k}{\partial\alpha}\frac{\partial^2 x_i}{\partial u\,\partial v}\right)du\,dv,$$

$$\int\int_{(D)} A_{ik}\frac{\partial^2 x_i}{\partial v\,\partial\alpha}\frac{\partial x_k}{\partial u}\,du\,dv = -\int_{C} A_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial\alpha}\frac{\partial x_k}{\partial u}\,du$$
$$-\int\int_{(D)}\left(\frac{dA_{ik}}{dv}\frac{\partial x_i}{\partial\alpha}\frac{\partial x_k}{\partial u}+A_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial\alpha}\frac{\partial^2 x_k}{\partial u\,\partial v}\right)du\,dv.$$

En tenant compte de ces formules, l'intégrale double précédente peut être remplacée par la somme d'une intégrale curviligne, que l'on écrira plus loin, et de l'intégrale double

$$\int\int_{(D)} \delta A_{ik}\left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_k}{\partial v}-\frac{\partial x_k}{\partial u}\frac{\partial x_i}{\partial v}\right)du\,dv$$
$$+\int\int_{(D)}\left(\frac{\partial A_{ik}}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u}+\ldots+\frac{\partial A_{ik}}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial u}\right)\left(\delta x_k\frac{\partial x_i}{\partial v}-\delta x_i\frac{\partial x_k}{\partial v}\right)du\,dv$$
$$+\int\int_{(D)}\left(\frac{\partial A_{ik}}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial v}+\ldots+\frac{\partial A_{ik}}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial v}\right)\left(\delta x_i\frac{\partial x_k}{\partial v}-\delta x_k\frac{\partial x_i}{\partial u}\right)du\,dv,$$

que l'on peut aussi mettre sous la forme

$$\begin{aligned}
&\int\int \sum_l \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_l}\,\delta x_l\, dx_i\, dx_k \\
&+\int\int \delta x_k \sum_l \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_l}\, dx_l\, dx_i \\
&+\int\int \delta x_i \sum_l \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_l}\, dx_k\, dx_l,
\end{aligned}$$

les trois intégrales doubles étant étendues à la multiplicité M_2.

Il reste l'intégrale curviligne

$$\int_C A_{ik}\left(\delta x_i \frac{\partial x_k}{\partial v}\,dv - \delta x_k \frac{\partial x_i}{\partial u}\,du + \delta x_i \frac{\partial x_k}{\partial u}\,du - \delta x_k \frac{\partial x_i}{\partial v}\,dv\right)$$

à laquelle il faut ajouter, d'après la formule générale (43), l'intégrale curviligne

$$\int_C A_{ik}\left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_k}{\partial v} - \frac{\partial x_i}{\partial v}\frac{\partial x_k}{\partial u}\right)(\delta u\, dv - du\, \delta v),$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
&\int_C A_{ik}\frac{\partial x_k}{\partial v}\,dv\left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\,\delta u + \frac{\partial x_i}{\partial \alpha}\,\delta\alpha\right) - A_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial v}\,dv\left(\frac{\partial x_k}{\partial u}\,\delta u + \frac{\partial x_k}{\partial \alpha}\,\delta\alpha\right) \\
&+\int_C A_{ik}\frac{\partial x_k}{\partial u}\,du\left(\frac{\partial x_i}{\partial v}\,\delta v + \frac{\partial x_i}{\partial \alpha}\,\delta\alpha\right) - A_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial u}\,du\left(\frac{\partial x_k}{\partial v}\,\delta v + \frac{\partial x_k}{\partial \alpha}\,\delta\alpha\right).
\end{aligned}$$

En posant

$$\Delta x_i \equiv \frac{\partial x_i}{\partial u}\,\delta u + \frac{\partial x_i}{\partial v}\,\delta v + \frac{\partial x_i}{\partial \alpha}\,\delta\alpha \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

l'intégrale curviligne précédente s'écrit plus simplement

$$\int_C A_{ik}\Delta x_i\left(\frac{\partial x_k}{\partial u}\,du + \frac{\partial x_k}{\partial v}\,dv\right) - A_{ik}\Delta x_k\left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\,du + \frac{\partial x_i}{\partial v}\right),$$

et peut être remplacée par une intégrale curviligne prise le long de Γ

$$\int_\Gamma A_{ik}(\Delta x_i\, dx_k - \Delta x_k\, dx_i):$$

On a donc en définitive

$$\begin{aligned}
\delta U_{ik} = \int\int_{M_2} \sum_l \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_l}(\delta x_l\, dx_i\, dx_k + \delta x_k\, dx_l\, dx_i + \delta x_i\, dx_k\, dx_l) \\
+\int_\Gamma A_{ik}(\Delta x_i\, dx_k - \Delta x_k\, dx_i),
\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\delta I = \sum_{i,k} \delta U_{ik} = \int\int_{M_2} \sum_{i,k,l} \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_l} (\delta x_l \, dx_i \, dx_k + \delta x_k \, dx_l \, dx_i + \delta x_i \, dx_k \, dx_l)$$
$$+ \int_\Gamma \sum_{i,k} A_{ik} (\Delta x_i \, dx_k - \Delta x_k \, dx_i).$$

Les deux derniers termes de l'intégrale double peuvent s'écrire, par une permutation convenable des indices,

$$\frac{\partial A_{kl}}{\partial x_i} \delta x_l \, dx_i \, dx_k + \frac{\partial A_{li}}{\partial x_k} \delta x_l \, dx_i \, dx_k$$

et l'expression définitive de δI est

$$(44) \qquad \delta I = \int\int_{M_2} \sum_{i,k,l} A_{ikl} \, dx_i \, dx_k \, \delta x_l + \int_\Gamma \sum_{i,k} A_{ik} (\Delta x_i \, dx_k - \Delta x_k \, dx_i),$$

en posant, comme plus haut (nº **8**),

$$A_{ikl} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial A_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial A_{li}}{\partial x_k}.$$

Dans cette formule, $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n$ sont les composantes du déplacement infiniment petit du point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de M_2, quand on passe de ce point à un point infiniment voisin de la multiplicité M'_2 qui correspond à un accroissement $\delta\alpha$ du paramètre; $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ sont les composantes du déplacement infiniment petit d'un point de la courbe limite Γ quand on passe de ce point à un point infiniment voisin de la nouvelle courbe limite Γ'.

[**20**] Supposons d'abord que l'on fasse varier la multiplicité M_2 sans faire varier la courbe limite Γ; l'expression de δI se réduit à une intégrale double

$$\delta I = \int\int_{M_2} \sum_{l=1}^{n} \delta x_l \Big(\sum_{i,k} A_{ikl} \, dx_i \, dx_k \Big).$$

Pour que la variation δI soit nulle, quelles que soient les variations $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n$, il faut et il suffit que les coordonnées d'un point de M_2 vérifient les n relations

$$(45) \qquad \sum_{i,k} A_{1ik} \, dx_i \, dx_k = 0, \quad \sum_{i,k} A_{2ik} \, dx_i \, dx_k = 0, \quad \ldots, \quad \sum_{i,k} A_{nik} \, dx_i \, dx_k = 0.$$

Nous appellerons *multiplicités extrémales* ou *surfaces extrémales* les multiplicités M_2 qui satisfont à ces n équations. Remarquons que ce système est identique au système S'_2 défini plus haut (nº **6**), dont on voit ainsi la signification.

On peut encore écrire l'expression de δI

$$\delta I = \int\int_{M_2} \sum_{i,k} dx_i\, dx_k \left(\sum_l A_{ikl}\, \delta x_l \right),$$

et la première variation δI sera nulle, quelle que soit la multiplicité M_2, si les variations $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$ satisfont aux relations

$$(46) \qquad \sum_{l=1}^{n} A_{ikl}\, \delta x_l = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

En remplaçant la lettre δ par la lettre d, nous retrouvons le système S'_1 (n° **6**). Nous appellerons *courbes extrémales* les multiplicités à *une* dimension dont tous les éléments linéaires satisfont aux conditions (46). Quand on déforme une multiplicité quelconque M_2, sans changer sa limite, de façon que chaque point de cette multiplicité décrive une courbe extrémale, la première variatiou δI est constamment nulle, et par suite l'intégrale I conserve une valeur constante. Ce sont du reste les seules courbes jouissant de cette propriété, car δI ne peut être nul, quelle que soit la multiplicité M_2, que si les variations δx_i vérifient les relations (46).

Remarquons que les courbes extrémales sont des courbes singulières pour chacune des équations du système (45) qui définit les surfaces extrémales (n° **6**). D'après une propriété générale, *toute multiplicité à deux dimensions, engendrée par une famille de courbes extrémales, est une intégrale de chacune des équations* (45), *et par suite une surface extrémale*. Mais la réciproque n'est pas vraie; il existe aussi des surfaces extrémales qui ne sont pas des lieux de courbes extrémales (n° **22**).

Considérons maintenant le terme de δI qui provient de la déformation du contour; on peut l'écrire

$$\int_\Gamma \sum_i \Delta x_i \left(\sum_k A_{ik}\, dx_k \right).$$

Pour que cette intégrale soit nulle quelles que soient les valeurs de $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, il faut et il suffit que tous les éléments linéaires de Γ vérifient les n relations du système S_1 (n° **6**).

$$(47) \qquad \sum_k A_{1k}\, dx_k = 0, \quad \sum_k A_{2k}\, dx_k = 0, \quad \ldots, \quad \sum_k A_{nk}\, dx_k = 0.$$

A cause de la symétrie de l'expression sous le signe $\int$, par rapport aux lettres d et Δ, la portion de δI provenant de la déformation du contour est nulle aussi, quelle que soit la courbe Γ, pourvu que $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ vérifient en chaque point les conditions (47). Si nous appelons comme au n° **6** *courbes singulières* de la forme $\sum A_{ik}\,dx_i\,dx_k$ les courbes dont tous les éléments linéaires satisfont au système (47), on voit que la portion de δI qui provient de la déformation du contour Γ est nulle *lorsque ce contour est formé de courbes singulières ou lorsque chaque point de Γ décrit dans la déformation un élément de courbe singulière.*

La signification des systèmes S_1, S'_1, S'_2 confirme bien ce qui a été établi plus haut et montre immédiatement que ces systèmes sont des covariants de la forme $\omega_2 = \sum A_{ik}\,dx_i\,dx_k$, relativement à tout changement de variables.

[**21**] On peut aussi, en généralisant un raisonnement que j'ai employé pour une forme de Pfaff (*Bulletin de la Société mathématique*, t. 44, 1916), démontrer sans aucun calcul que le système S'_1 est complètement intégrable, en s'appuyant uniquement sur la signification de ce système. On suppose, bien entendu, qu'il se compose de moins de n équations distinctes. Imaginons que l'on fasse subir à une multiplicité M_2 une déformation infiniment petite de façon que chaque point de cette multiplicité décrive un élément de courbe extrémale. La variation δI s'exprimera par une intégrale curviligne étendue à la courbe limite Γ. Cela posé, imaginons que de chaque point m de M_2 parte une courbe extrémale non située sur M_2, et que l'on prenne sur cette courbe un point m' choisi arbitrairement. Le lieu du segment d'extrémale mm' est une multiplicité à trois dimensions M_3 (*tube d'extrémales*) dont la frontière est constituée par M_2, par le lieu M'_2 du point m' et par une autre multiplicité M''_2 constituée par les segments d'extrémales issues des différents points de la frontière Γ de M_2. Cette multiplicité M''_2 peut d'ailleurs se réduire à zéro si les deux multiplicités M_2 et M'_2 ont la même frontière. On peut évidemment passer de M_2 à M'_2 par une déformation continue dans laquelle chaque point de M_2 décrit un segment d'extrémale. La différence des intégrales $\int\int \sum A_{ik}\,dx_i\,dx_k$, étendues aux multiplicités M_2 et M'_2, étant la somme des variations infiniment petites, est donc représentée par une intégrale double étendue à la multiplicité M''_2, et ne dépend par suite que de cette multiplicité.

On le vérifie immédiatement au moyen de la formule de Stokes généralisée. En effet, l'intégrale double $\int\int \sum A_{ik}\,dx_i\,dx_k$, étendue à la frontière de la multiplicité M_3, se compose de la différence des deux intégrales étendues à M'_2 et à M_2 dans des sens correspondants, et de l'intégrale étendue à M''_2. D'autre part, cette intégrale double est égale à l'intégrale triple

$$I_3 = \int\int\int \sum A_{ikl}\,dx_i\,dx_k\,dx_l,$$

et cette intégrale triple étendue à un tube d'extrémales est manifestement nulle. Nous pouvons en effet supposer les coordonnées x_i d'un point de M_3 exprimées au moyen de trois paramètres u, v, w, de façon que les courbes $u = c^{te}$, $v = c^{te}$ soient précisément des courbes extrémales. L'intégrale I_3 peut s'écrire

$$I_3 = \int\int\int \sum_{i,k} dx_i\, dx_k \left(\sum_l A_{ikl} \frac{\partial x_l}{\partial w}\, dw \right),$$

et comme l'on a $\sum\limits_l A_{ikl} \dfrac{\partial x_l}{\partial w} = 0$, on a aussi $I_3 = 0$.

Cela étant, soit $C^{(e)}$ une famille d'extrémales, telle qu'il en passe une par un point quelconque de l'espace à n dimensions, tout au moins dans le domaine que nous considérons. Soit, d'autre part, $M_2^{(e)}$ une surface extrémale quelconque située dans ce domaine; les extrémales $C^{(e)}$ issues des différents points de $M_2^{(e)}$ forment un tube de courbes extrémales. *Toute section M'_2 de ce tube d'extrémales est aussi une surface extrémale.* En d'autres termes, si sur chaque extrémale de la famille considérée passant pas un point m de $M_2^{(e)}$ on prend un point m' à volonté, variant d'une manière continue avec la position du point m, le lieu du point m' est aussi une surface extrémale.

Soit Γ la courbe limite de $M_2^{(e)}$; la limite de M'_2 est une autre courbe Γ', et l'ensemble des courbes extrémales qui joignent les points correspondants de Γ et de Γ' forme une autre multiplicité M''_2.

Soit $\mathcal{M}'_2$ une autre multiplicité quelconque à deux dimensions infiniment voisine de M'_2, et limitée par la même courbe Γ'; sur chaque extrémale de la famille considérée issue d'un point μ' de $\mathcal{M}'_2$ prenons un point μ de façon que le lieu du point μ soit une multiplicité $\mathcal{M}_2$ infiniment voisine de $M_2^{(e)}$, et limitée à la courbe Γ, ce qu'on peut faire évidemment d'une infinité de manières. D'après la propriété qui vient d'être établie, la différence

$$\int_{M'_2} \omega_2 - \int_{M_2} \omega_2$$

est égale à l'intégrale double $\int \omega_2$ étendue à la multiplicité M''_2. Il en est de même de la différence $\int_{\mathcal{M}'_2} \omega_2 - \int_{\mathcal{M}_2} \omega_2$, et par suite on a

$$\int_{\mathcal{M}'_2} \omega_2 - \int_{M'_2} \omega_2 = \int_{\mathcal{M}_2} \omega_2 - \int_{M_2} \omega_2.$$

Or, on peut imaginer que l'on passe des surfaces M_2 et M'_2 aux surfaces infiniment voisines $\mathcal{M}_2$ et $\mathcal{M}'_2$ par une déformation continue dépendant d'un paramètre α. La surface $M_2^{(e)}$ étant une surface extrémale, la différence $\int_{\mathcal{M}_2} \omega_2 - \int_{M_2^{(e)}} \omega_2$ est un infiniment petit d'ordre supérieur au premier par rapport à l'accroissement $\delta\alpha$

du paramètre, quand on passe de $M_2^{(e)}$ à $\mathcal{M}_2$, et de M'_2 à $\mathcal{M}'_2$. Il en est donc de même de la différence

$$\int_{\mathcal{M}'_2} \omega_2 - \int_{M'_2} \omega_2,$$

quelle que soit la surface $\mathcal{M}'_2$ infiniment voisine de M'_2, limitée au même contour Γ', et par suite la surface M'_2 est bien une surface extrémale.

La construction par laquelle on passe de la surface M_2 à la surface M'_2 est une transformation ponctuelle dépendant d'une fonction arbitraire. Nous venons de voir que cette transformation ponctuelle ne change pas les équations (45), qui définissent les surfaces extrémales. Il est clair qu'elle ne changera pas non plus les équations (46) qui forment un système covariant du système (45), et par conséquent la construction précédente change aussi les courbes extrémales en courbes extrémales. En d'autres termes, soit AB un segment de courbe extrémale quelconque, ne faisant pas partie de la famille d'extrémales $C^{(e)}$. De chaque point m de AB part une extrémale $C_m^{(e)}$ de cette famille; si l'on prend sur cette extrémale un point à volonté m', variant d'une manière continue avec m, le lieu du point m' est une nouvelle courbe extrémale. Il s'ensuit que toute courbe située sur la multiplicité à deux dimensions engendrée par les courbes extrémales $C_m^{(e)}$ issues des différents points de AB est elle-même une courbe extrémale. Cela suffit pour prouver que les équations (46) qui définissent les courbes extrémales forment un système complètement intégrable. (Voir l'article cité du *Bulletin de la Société mathématique*, t. 44.)

Des raisonnements tout à fait analogues prouvent que le système $S_1+S'_1$, formé par la réunion des équations (46) et (47), est aussi complètement intégrable. Les multiplicités à une dimension dont tous les éléments vérifient ces deux systèmes d'équations sont à la fois des courbes extrémales et des courbes singulières. Nous les appellerons *courbes extrémales singulières*, et nous appellerons de même *surfaces extrémales singulières* les multiplicités à deux dimensions qui satisfont en même temps aux équations (45) et à la condition $\omega_2 = 0$. Toute surface, lieu de courbes extrémales singulières, est une surface extrémale singulière, et les courbes extrémales singulières jouent, vis-à-vis des surfaces du même nom, le même rôle que les courbes extrémales les plus générales vis-à-vis des surfaces extrémales les plus générales. Les raisonnements qui précèdent peuvent alors être repris, avec quelques modifications bien faciles à trouver, et conduisent à la même conclusion.

[**22**] Si les équations (46) se réduisent à q équations distinctes, on peut, par un changement de variables, les ramener à la forme $dx_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, q)$. Tous les coefficients A_{ikl}, où l'un des indices est supérieur à q, sont nuls, et les autres ne dépendent que de $x_1, x_2, \ldots, x_q$. Le système (45), qui définit les surfaces extrémales, ne se compose donc que de q équations.

Ces q équations sont linéairement distinctes. D'une façon générale, *les deux systèmes* (45) *et* (46) *contiennent le même nombre d'équations linéairement distinctes*. En effet, si les équations (45) ne sont pas linéairement distinctes, il existe n facteurs $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, dont l'un au moins est différent de zéro, tels que l'on ait

$$\lambda_1 \sum_{i,k} A_{1ik}\, dx_i\, dx_k + \lambda_2 \sum_{i,k} A_{2ik}\, dx_i\, dx_k + \ldots + \lambda_n \sum_{i,k} A_{nik}\, dx_i\, dx_k = 0,$$

quels que soient les produits symboliques $dx_i\, dx_k$. Il faut pour cela que l'on ait, pour toutes les combinaisons d'indices i et k,

$$A_{1ik}\lambda_1 + A_{2ik}\lambda_2 + \ldots + A_{nik}\lambda_n = 0.$$

Les équations différentielles $\dfrac{dx_1}{\lambda_1} = \dfrac{dx_2}{\lambda_2} = \ldots = \dfrac{dx_n}{\lambda_n}$ définissent alors une famille de courbes extrémales. La réciproque se démontre de la même façon. Si donc les équations (46) admettent $n-q$ solutions linéairement distinctes, les équations (45) se réduisent bien à q équations linéairement distinctes et inversement.

Supposons effectué le changement de variables indiqué tout à l'heure, de sorte que l'on obtienne toutes les courbes extrémales en donnant à $x_1, x_2, \ldots, x_q$ des valeurs constantes et en prenant pour $x_{q+1}, \ldots, x_n$ des fonctions arbitraires d'un paramètre a. Les surfaces extrémales peuvent être de trois espèces différentes. Supposons, pour fixer les idées,

$$\omega_2 = x_1\, dx_2\, dx_3 + x_4\, dx_5\, dx_6 + dx_7\, dx_8.$$

Les équations différentielles des courbes extrémales sont ici

$$dx_1 = dx_2 = dx_3 = dx_4 = dx_5 = dx_6 = 0,$$

tandis que les équations différentielles des surfaces extrémales sont

$$dx_1\, dx_2 = dx_2\, dx_3 = dx_3\, dx_1 = 0, \qquad dx_4\, dx_5 = dx_5\, dx_6 = dx_6\, dx_4 = 0.$$

On satisfait à ces équations de trois façons différentes :

1° En posant

$$x_i = x_i^0 \ (i = 1, 2, \ldots, 6), \qquad x_7 = u, \qquad x_8 = v,$$

2° En posant

$$x_i = \varphi_i(u) \ (i \leqslant 6), \qquad x_7 = \psi(u, v), \qquad x_8 = \pi(u, v).$$

Cette surface renferme encore ∞^1 courbes extrémales obtenues en donnant au paramètre u une valeur constante arbitraire.

3° En posant

$$x_1 = \varphi_1(u), \quad x_2 = \varphi_2(u), \quad x_3 = \varphi_3(u), \quad x_4 = \psi_1(v), \quad x_5 = \psi_2(v), \quad x_6 = \psi_3(v),$$

x_7 et x_8 étant des fonctions quelconques de u et de v. Cette surface n'est pas un lieu de courbes extrémales, car on n'obtient une courbe de cette espèce qu'en donnant à u et à v des valeurs constantes, et x_7 et x_8 seraient aussi constants.

D'une façon générale, les surfaces extrémales de la première catégorie annulent aussi la seconde variation de l'intégrale double, quand on déforme infiniment peu la surface sans changer le contour. Soit ω_2 la forme symbolique

$$\omega_2 = \sum_1^q A_{ik}\, dx_i\, dx_k + \text{diff. tot.},$$

les variables $x_{q+1}, \ldots, x_n$ ne figurant que dans la différentielle totale, de sorte que les courbes extrémales sont représentées par les équations $x_i = x_i^0$ $(i = 1, 2, \ldots, q)$. Une surface extrémale de la première catégorie est alors définie par un système d'équations

$$x_1 = x_1^0, \quad \ldots, \quad x_q = x_q^0, \quad x_i = \varphi_i(u, v) \qquad (i > q).$$

La seconde variation d'un terme quelconque, tel que $\int\int A_{12}(x_1, \ldots, x_q)\, dx_1\, dx_2$, est nulle quand on pose

$$x_1 = x_1^0 + \alpha\eta_1, \quad \ldots, \quad x_q = x_q^0 + \alpha\eta_q,$$

$\eta_1, \ldots, \eta_q$ étant des fonctions de u, v, α, qui s'annulent, quel que soit α, en tous les points de la courbe C du plan (u, v) qui correspond au contour Γ de la surface extrémale considérée. Le terme en α^2 est égal en effet, à un facteur constant près, à l'intégrale double

$$\int\int \frac{D(\eta_1, \eta_2)}{D(u, v)}\, du\, dv$$

étendue à la région R du plan (u, v) limitée par le contour C, que l'on peut remplacer par l'intégrale $\int \eta_1\, d\eta_2$ le long du contour.

[**23**] Si l'on remplace, dans la formule (44) qui donne δI, les lettres δ et Δ sous le signe $\int$ par la lettre d, on a comme élément de l'intégrale double la forme dérivée ω', et comme élément de l'intégrale simple la forme ω elle-même. Ce résultat si simple s'explique aisément au moyen de la formule de Stokes généralisée.

Soient en effet M_2 une variété à deux dimensions limitée par un contour fermé Γ, M'_2 une variété infiniment voisine limitée par un contour Γ' infiniment voisin de Γ, et M''_2 la variété à deux dimensions décrite par Γ lorsque ce contour se déplace d'une façon continue pour venir coïncider avec Γ'. Appliquons le théorème de Stokes généralisé à la variété fermée composée des variétés M_2, M'_2, M''_2. L'intégrale double étendue à cette variété est égale à l'intégrale triple

$$\int\int\int \sum A_{ikl}\, dx_i\, dx_k\, dx_l,$$

étendue à la variété à trois dimensions M_3, limitée par M_2, M'_2, M''_2. Or, l'intégrale double précédente est égale à la différence des intégrales doubles étendues à M'_2 et à M_2 dans des sens correspondants, augmentée de l'intégrale double étendue à M''_2.

Soient dx_i la variation de x_i quand on passe d'un point de M_2 à un point infiniment voisin de M'_2, Δx_i la variation de x_i quand on passe d'un point de Γ à un point infiniment voisin de Γ'. Il est clair que la partie principale de l'intégrale triple étendue à M_3 est égale à l'intégrale double

$$\int\int\int_{M_2} \sum A_{ikl}\, dx_i\, dx_k\, dx_l,$$

tandis que la partie principale de l'intégrale double étendue à M''_2 est égale à l'intégrale simple $\int_\Gamma \sum A_{ik}\, dx_k\, \Delta x_i$ prise dans un sens convenable. On retrouve bien la formule (44). Pour que la démonstration fût absolument rigoureuse, il resterait à examiner de plus près une question de signes que je laisserai de côté.

De la formule générale (44) on peut aussi déduire très aisément les conditions pour que $I = \int \omega_2$ soit un invariant intégral du système d'équations différentielles

$$dx_i = X_i\, dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Il faut et il suffit pour cela que l'on ait $\delta I = 0$ toutes les fois que les variations Δx_i, δx_i sont proportionnelles aux fonctions X_i. On peut alors supposer que l'on a $\delta x_i = X_i\, \delta\alpha$ en tout point de M_2, et $\Delta x_i = X_i\, \delta\alpha$ en tout point de Γ. L'expression de δI devient

$$\delta I = \delta\alpha \int\int_{M_2} \sum_{i,k} dx_i\, dx_k \Big(\sum_l A_{ikl} X_l\Big) + \delta\alpha \int_\Gamma \sum_k dx_k \Big(\sum_l A_{lk} X_l\Big),$$

ou, en transformant la dernière intégrale par la formule de Stokes,

$$\delta I = \delta\alpha \int\int_{M_2} \sum_{i,k} dx_i\, dx_k \left\{ \sum_l A_{ikl} X_l + \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\sum_l A_{lk} X_l\Big) - \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\sum_l A_{li} X_l\Big) \right\}.$$

Pour que I soit un invariant intégral, on doit donc avoir, quels que soient les indices i et k,

$$\sum_l A_{ikl} X_l + \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\sum_l A_{lk} X_l\Big) - \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\sum_l A_{li} X_l\Big) = 0$$

ou

$$\sum_l \left(\frac{\partial A_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial A_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial A_{li}}{\partial x_k} \right) X_l + \sum_l X_l \frac{\partial A_{lk}}{\partial x_i} + \sum_l A_{lk} \frac{\partial X_l}{\partial x_i}$$
$$- \sum_l X_l \frac{\partial A_{li}}{\partial x_k} + \sum_l A_{il} \frac{\partial X_l}{\partial x_k} = 0,$$

relation qui se réduit à

$$\sum_l X_l \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_l} + \sum_l \left(A_{lk} \frac{\partial X_l}{\partial x_i} + A_{il} \frac{\partial X_l}{\partial x_k} \right) = 0.$$

On retrouve bien les conditions connues.