
SUR LES TRANSFORMATIONS ET EXTENSIONS
DE
LA FORMULE DE STOKES

PAR M. A. BUHL

CINQUIÈME MÉMOIRE ⁽¹⁾

La Première Partie de ce nouveau Mémoire est entièrement inspirée de la question 4639 de *L'Intermédiaire des Mathématiciens*, posée par M. P. Appell.

La formule de Stokes et ses analogues, à un nombre quelconque de variables, sont susceptibles d'une multitude de transformations à résultats non véritablement distincts au point de vue analytique; il n'y a d'intérêt que si l'une de ces transformations fait apparaître un terme ayant une signification géométrique ou physique intéressante. Ainsi on ne peut nier l'importance de la formule d'Ossian Bonnet

$$\int \int_{\Gamma} \frac{d\sigma}{R_1 R_2} = \int_{\Gamma} \alpha d. \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{\beta}{\gamma} = \int_{\Gamma} d\omega - \int_{\Gamma} \frac{ds}{\rho_g}.$$

La formule de M. Appell se rapproche intimément de cette dernière, mais contient la courbure moyenne au lieu de la courbure totale.

J'ai cherché, dans les extensions déjà étudiées, quelle était la forme la plus convenable et la plus générale à donner à une formule qui comprendrait à la fois celle d'Ossian Bonnet et celle de M. Paul Appell.

L'emploi du vecteur normal (α, β, γ) a été indiqué par M. Appell dans l'énoncé de sa question. *La courbure moyenne est la divergence de ce vecteur*; j'ajoute que *la courbure totale est forme adjointe d'une forme quadratique représentant la courbure d'une section normale*.

(¹) Ces cinq Mémoires ont été précédés par deux autres : *Sur les applications géométriques de la formule de Stokes* et *Sur la formule de Stokes dans l'hyperespace*, publiés aussi dans ce Recueil. Le présent travail est donc, en réalité, le septième d'une série de publications consacrées au même sujet.

Tout ceci donne une forme symétrique spéciale à l'équation aux rayons de courbure principaux et permet, rien qu'en bordant le jacobien nul

$$J = \begin{vmatrix} \alpha_x & \alpha_y & \alpha_z \\ \beta_x & \beta_y & \beta_z \\ \gamma_x & \gamma_y & \gamma_z \end{vmatrix}$$

d'en déduire un déterminant Δ , du sixième ordre, donnant l'invariant intégral

$$\int \int_{\Gamma} \Delta d\sigma,$$

extrêmement symétrique et général, attaché à toutes les cloisons Γ passant par un contour fermé γ et toujours tangentes entre elles en tout point de γ .

Dans la Seconde Partie, je reviens sur les sommes abéliennes de volumes coniques. Des surfaces merveilleuses, — dont presque toutes les propriétés ont été révélées par le Maître récemment disparu, Gaston Darboux, et par M. G. Humbert, — les cyclides, ont de remarquables sommes de cette nature lesquelles s'expriment par l'intervention des aires sphériques de M. Humbert déjà utilisées dans mon Troisième Mémoire.

Quand les sommes abéliennes sont déterminées par un cône ayant son sommet en un centre ⁽¹⁾ de la surface considérée, il est naturel qu'elles aient une expression particulièrement simple. Mais ceci n'est pas une propriété caractéristique des centres des surfaces algébriques; la simplicité en question et les propriétés géométriques qui peuvent en résulter ont lieu pour d'autres surfaces non centrées au sommet du cône et qu'il est intéressant d'associer aux premières.

Après ces considérations géométriques, j'ai tenu à en placer d'autres relatives à des courbes rencontrées dans le Mémoire précédent et dont les normales et les centres de courbure se peuvent construire par une méthode due à M. Maurice d'Ocagne, lequel m'a très obligeamment signalé la possibilité de la chose.

Enfin, dans une Troisième Partie, j'ai placé quelques remarques élémentaires et tout à fait squelettiques sur la question de savoir ce que représentent les intégrales généralement étendues à des variétés fermées lorsqu'on ne les étend plus qu'à des portions ouvertes des variétés en question. Cette étude demande, entre autres choses, une réduction à des types canoniques des formes différentielles placées sous les signes d'intégration; il y aurait donc là, dès l'abord, un des multiples aspects du problème général de Pfaff.

Parmi le peu que j'ai dit, je signale surtout le lien établi entre les courbes gauches à torsion constante et les aires sphériques de M. G. Humbert.

⁽¹⁾ Au sens le plus général de ce mot. (Voir n° 13.)

PREMIÈRE PARTIE

Extension de la Formule de Stokes et Courbure des surfaces.

[1] Soit un champ de vecteurs $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ dans lequel se trouve une cloison Γ de contour γ et dont l'élément superficiel $d\sigma$ possède une normale de cosinus directeurs α , β , γ . Soient, en outre, P, Q, R, S, T, U six fonctions dépendant chacune des six quantités x , y , z , u , v , w .

On aura

$$(1) \quad \int \int_{\Gamma} \Delta d\sigma = \int_{\gamma} P dx + Q dy + R dz + S du + T dv + U dw,$$

en posant

$$(2) \quad \Delta = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z & -1 & 0 & 0 \\ v_x & v_y & v_z & 0 & -1 & 0 \\ w_x & w_y & w_z & 0 & 0 & -1 \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ P & Q & R & S & T & U \end{vmatrix}.$$

Si les fonctions S, T, U s'annulent et si P, Q, R ne dépendent plus que de x , y , z , la formule (1) se réduit à la formule de Stokes ordinaire

$$(3) \quad \int \int_{\Gamma} \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} d\sigma = \int_{\gamma} P dx + Q dy + R dz.$$

Ce théorème peut être démontré ou vérifié de plusieurs manières. La démonstration à laquelle je donne la préférence est celle qui, aussi directement que possible, fait apparaître Δ sous la forme du déterminant indiqué en (2). Pour éviter des répétitions un peu encombrantes, je renverrai au paragraphe 41 de mon Second Mémoire. On trouvera là une cloison Γ à deux dimensions dans l'espace à six, cloison ayant pour équations

$$x = x, \quad y = y, \quad z_1 = z_1(x, y), \quad z_2 = z_2(x, y), \quad z_3 = z_3(x, y), \quad z_4 = z_4(x, y),$$

et donnant lieu à la formule

$$(S_4) \quad \int_{\Gamma} \Delta_1 dx dy = \int_{\gamma} P dx + Q dy + R_1 dz_1 + R_2 dz_2 + R_3 dz_3 + R_4 dz_4$$

en laquelle

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial z_4}{\partial x} & \frac{\partial z_4}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{\partial z_3}{\partial x} & \frac{\partial z_3}{\partial y} & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{\partial z_2}{\partial x} & \frac{\partial z_2}{\partial y} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial z_1}{\partial x} & \frac{\partial z_1}{\partial y} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z_1} & \frac{\partial}{\partial z_2} & \frac{\partial}{\partial z_3} & \frac{\partial}{\partial z_4} \\ P & Q & R_1 & R_2 & R_3 & R_4 \end{vmatrix}.$$

Ici P, Q, R_1, R_2, R_3, R_4 sont des fonctions quelconques de x, y, z_1, z_2, z_3, z_4 . Or, on peut imaginer que z_1 soit la cote ordinaire z d'une surface d'équation $z=f(x, y)$ et que z_2, z_3, z_4 soient respectivement les fonctions $u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)$, dont chacune n'aurait que deux variables, x et y , en vertu de $z=f(x, y)$. Mais alors, dans Δ_1 , les deux premiers termes des trois premières lignes

$$\begin{array}{lll} w_x & w_y & w_x + w_z z_x \quad w_y + w_z z_y \\ v_x & v_y & \text{peuvent s'écrire} \quad v_x + v_z z_x \quad v_y + v_z z_y \\ u_x & u_y & u_x + u_z z_x \quad u_y + u_z z_y \end{array}$$

Si alors, des trois premières lignes de Δ_1 , on retranche la quatrième multipliée par des facteurs convenables, Δ_1 prend la forme

$$\begin{vmatrix} w_x & w_y & w_z & 0 & 0 & -1 \\ v_x & v_y & v_z & 0 & -1 & 0 \\ u_x & u_y & u_z & -1 & 0 & 0 \\ p & q & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ P & Q & R & S & T & U \end{vmatrix}.$$

En observant que

$$-p dx dy = \alpha d\sigma, \quad -q dx dy = \beta d\sigma, \quad dx dy = \gamma d\sigma,$$

la formule (S_4) est finalement transformée en la formule (1).

Il y a là un nouvel exemple d'une formule établie d'abord dans l'hyperespace et qui, moyennant des conventions convenables, prend un sens tangible dans l'espace ordinaire.

[2] Au point de vue strictement analytique, la formule (1) n'est pas plus générale que la formule de Stokes ordinaire (3). Certes (3) se déduit de (1), mais, bien que ce soit beaucoup moins commode, (1) peut se déduire de (3).

Si, dans (3), nous remplaçons P, Q, R respectivement par

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} P + S \frac{\partial u}{\partial x} + T \frac{\partial v}{\partial x} + U \frac{\partial w}{\partial x}, \\ Q + S \frac{\partial u}{\partial y} + T \frac{\partial v}{\partial y} + U \frac{\partial w}{\partial y}, \\ R + S \frac{\partial u}{\partial z} + T \frac{\partial v}{\partial z} + U \frac{\partial w}{\partial z}, \end{array} \right.$$

le second membre de (3) devient le second membre de (1) et ceci entraîne l'identité des premiers membres, facile à vérifier d'ailleurs par développement direct. Mais ce qui n'est pas évident et ce qui offre de l'intérêt, même au point de vue strictement analytique, c'est que la transformation, ainsi indiquée pour le pseudo-déterminant de (3), donne le pseudo-déterminant Δ d'une symétrie si parfaite et si remarquable. On remarquera notamment que Δ contient le pseudo-déterminant de (3) surmonté du jacobien des fonctions u, v, w . Cette remarque permet d'écrire Δ de mémoire, sans aucune difficulté.

Si l'on veut, le théorème du début du paragraphe 1 revient à cet énoncé :
Le pseudo-déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix},$$

où l'on donne, à P, Q, R, les formes (4), prend la forme Δ indiquée en (2). Ce n'est certainement pas évident.

Au point de vue du Calcul intégral, il y a encore mieux à faire qu'à rapporter (1) à (3) qui n'est nullement une formule fondamentale. Il vaut mieux rappeler ce que j'ai déjà dit et répété dans tous les Mémoires précédents, à savoir que toutes les formules en litige ne sont que des combinaisons de l'identité

$$\int \int_A dX dY = \int_C X dY$$

et de transformations qui en résultent par changement de variables. C'est dans cette voie que la formule (S_4) du second Mémoire a été établie. Et l'identité indiquée, qui

exprime de deux manières une aire plane A de contour C, ne semble pas pouvoir se résoudre en quelque chose de plus simple; c'est bien une formule fondamentale.

À part ces questions de principe, nous allons voir que la formule (1) peut jouer un rôle synthétique considérable, notamment en Géométrie. On rassemble ainsi très aisément des résultats qu'il serait fastidieux de tirer de laborieuses transformations de (3).

[3] *Cas où u, v, w deviennent α, β, γ .* — Cette hypothèse fait dépendre le champ (u, v, w) de la surface Γ alors que jusqu'ici c'étaient là choses complètement indépendantes. On peut même imaginer une famille $F(x, y, z) = C$ de surfaces Γ qui détermineraient α, β, γ , en un point x, y, z , par les relations

$$\frac{\alpha}{F_x} = \frac{\beta}{F_y} = \frac{\gamma}{F_z} = \frac{1}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}.$$

Alors P, Q, R, S, T, U étant des fonctions de $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$, on a

$$(5) \quad \iint_{\Gamma} \Delta d\sigma = \int_{\gamma} P dx + Q dy + R dz + S d\alpha + T d\beta + U d\gamma$$

avec

$$(6) \quad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_x & \alpha_y & \alpha_z & -1 & 0 & 0 \\ \beta_x & \beta_y & \beta_z & 0 & -1 & 0 \\ \gamma_x & \gamma_y & \gamma_z & 0 & 0 & -1 \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial \alpha} & \frac{\partial}{\partial \beta} & \frac{\partial}{\partial \gamma} \\ P & Q & R & S & T & U \end{vmatrix}.$$

L'intégrale double de (5), par le seul fait qu'elle est égale au second membre de la formule, est invariante lorsque la cloison d'intégration se déforme en conservant même contour γ et mêmes plans tangents, ou mêmes normales, le long de γ . Ceci était le cas de la formule (D), en x, y, z, p, q , des précédents Mémoires et (5) n'est qu'une nouvelle forme, particulièrement symétrique de (D). Comme on l'a déjà remarqué, (5) fait donc connaître un invariant intégral, très général, analogue à la courbure d'une cloison (cf. Premier Mémoire, 1912, n^{os} 22 et suivants).

Mais que faut-il entendre exactement par le mot *courbure*? La formule (5) est-elle plus particulièrement d'accord avec la *courbure totale* ou avec la *courbure moyenne*? Pour élucider ce point, nous allons reprendre une étude de ces courbures en utilisant non pas les dérivées secondes de F, comme on le fait d'ordinaire, mais les dérivées premières de α, β, γ . On a alors des expressions remarquablement symétriques, dont la comparaison avec Δ est aisée. Au premier abord, il semble que l'expression (6)

de Δ soit plus proche de la courbure totale en un point de Γ , mais ce n'est qu'une apparence, car M. P. Appell, comme nous le verrons, a donné une formule rentrant dans (5) et qui contient la courbure moyenne. Au fond, cette question de non-prééminence est analogue à celle déjà discutée par G. Darboux (*Surfaces*, t. II, n° 497).

DIGRESSION SUR L'ÉQUATION AUX RAYONS DE COURBURE.

[4] Nous allons former l'équation aux rayons de courbure principaux, en un point $M(x, y, z)$ d'une surface Γ , en n'y faisant intervenir finalement que les cosinus directeurs α, β, γ de la normale en M .

Le raisonnement garde l'allure classique que l'on trouvera, par exemple, dans le *Traité d'Analyse* de H. Laurent (t. II, pp. 434 et suivantes).

En M , menons à la surface Γ une tangente MT de cosinus directeurs x', y', z' , les accents désignant la dérivation de x, y, z par rapport à l'arc s d'une courbe tracée sur Γ avec tangente MT en M . Si, à l'équation du plan normal

$$x'(X - x) + y'(Y - y) + z'(Z - z) = 0,$$

on adjoint sa dérivée par rapport à s ,

$$x''(X - x) + y''(Y - y) + z''(Z - z) = 1,$$

on définit l'axe du cercle osculateur en M à la courbe tracée. Cet axe rencontre la normale en M en un point C et est normal au plan CMT . Observant que X, Y, Z peuvent représenter les coordonnées de C et désignant le rayon MC par R , on a

$$\frac{X - x}{\alpha} = \frac{Y - y}{\beta} = \frac{Z - z}{\gamma} = -R = \frac{1}{\alpha x'' + \beta y'' + \gamma z''}.$$

Comme

$$(7) \quad \alpha x' + \beta y' + \gamma z' = 0$$

donne

$$\alpha x'' + \beta y'' + \gamma z'' + x' \frac{dx}{ds} + y' \frac{dy}{ds} + z' \frac{dz}{ds} = 0$$

on a

$$\frac{1}{R} = x' \frac{dx}{ds} + y' \frac{dy}{ds} + z' \frac{dz}{ds}.$$

Comme les dérivées de α, β, γ , par rapport à s , doivent respectivement s'écrire

$$\alpha_x x' + \alpha_y y' + \alpha_z z', \quad \beta_x x' + \beta_y y' + \beta_z z', \quad \gamma_x x' + \gamma_y y' + \gamma_z z',$$

il vient finalement

$$(8) \quad \frac{1}{R} = \alpha_x x'^2 + \beta_y y'^2 + \gamma_z z'^2 + (\beta_z + \gamma_y) y' z' + (\gamma_x + \alpha_z) z' x' + (\alpha_y + \beta_x) x' y'.$$

Chercher les rayons de courbure principaux, c'est chercher les maxima ou minima de cette expression quand x', y', z' varient en étant liés, bien entendu, par la relation (7) et, en outre, par l'identité

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1.$$

Il est tout indiqué d'appliquer la méthode des multiplicateurs qui donne

$$\frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{1}{R} \right) + \lambda \alpha + \mu x' = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{1}{R} \right) + \lambda \beta + \mu y' = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{1}{R} \right) + \lambda \gamma + \mu z' = 0.$$

Ces trois équations, impliquant la combinaison

$$x' \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{1}{R} \right) + y' \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{1}{R} \right) + z' \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{1}{R} \right) + \mu = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{2}{R} + \mu = 0,$$

peuvent, avec la valeur de μ ainsi obtenue, être réécrites

$$\begin{aligned} 2 \left(\alpha_x - \frac{1}{R} \right) x' + (\beta_x + \alpha_y) y' + (\gamma_x + \alpha_z) z' + \lambda \alpha &= 0, \\ (\alpha_y + \beta_x) x' + 2 \left(\beta_y - \frac{1}{R} \right) y' + (\gamma_y + \beta_z) z' + \lambda \beta &= 0, \\ (\alpha_z + \gamma_x) x' + (\beta_z + \gamma_y) y' + 2 \left(\gamma_z - \frac{1}{R} \right) z' + \lambda \gamma &= 0. \end{aligned}$$

Adjoignant (7) à ce système et éliminant x', y', z', λ , il vient

$$(9) \quad \begin{vmatrix} \alpha_x - \frac{1}{R} & \frac{1}{2}(\beta_x + \alpha_y) & \frac{1}{2}(\gamma_x + \alpha_z) & \alpha \\ \frac{1}{2}(\alpha_y + \beta_x) & \beta_y - \frac{1}{R} & \frac{1}{2}(\gamma_y + \beta_z) & \beta \\ \frac{1}{2}(\alpha_z + \gamma_x) & \frac{1}{2}(\beta_z + \gamma_y) & \gamma_z - \frac{1}{R} & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Telle est l'équation du second degré qui doit donner les rayons de courbure principaux R_1 et R_2 .

Utilisant l'identité

$$(10) \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

et ses dérivées partielles par rapport à x, y, z , on conclut aisément de (9)

$$(11) \quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \alpha_x + \beta_y + \gamma_z.$$

Cette formule a d'abord été écrite par M. P. Appell. J'y reviendrai plus loin (n° 8).

De même, (9) donne

$$(12) \quad \frac{1}{R_1 R_2} = - \begin{vmatrix} x_x & \frac{1}{2}(\beta_x + \alpha_y) & \frac{1}{2}(\gamma_x + \alpha_z) & \alpha \\ \frac{1}{2}(\alpha_y + \beta_x) & \beta_y & \frac{1}{2}(\gamma_y + \beta_z) & \beta \\ \frac{1}{2}(\alpha_z + \gamma_x) & \frac{1}{2}(\beta_z + \gamma_y) & \gamma_z & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix}.$$

C'est là une formule moins simple que (11) mais néanmoins d'une symétrie remarquable; nous allons d'ailleurs la simplifier. Quoi qu'il en soit, on peut déjà énoncer ces deux théorèmes étroitement associés :

La courbure moyenne est la divergence du vecteur normal (α, β, γ) .

La courbure totale est forme adjointe de la courbure d'une section normale. La courbure de cette section normale est exprimée ici par la forme quadratique, en x', y', z' , écrite en (8). Les variables des deux formes, x', y', z' et α, β, γ , doivent être liées par une relation d'orthogonalité qui est (7).

[5] Étudions maintenant les simplifications possibles de (12). Si, dans la formule de Stokes ordinaire (3), on prend P, Q, R respectivement égaux à α, β, γ , le second membre est identiquement nul, de par l'orthogonalité des directions α, β, γ et dx, dy, dz . Ceci entraîne la nullité identique du pseudo-déterminant figurant dans le premier membre, c'est-à-dire l'identité

$$\alpha(\gamma_y - \beta_z) + \beta(\alpha_z - \gamma_x) + \gamma(\beta_x - \alpha_y) = 0$$

facile à vérifier par un calcul direct. En s'appuyant sur celle-ci, on arrive, par une succession de transformations élémentaires, à mettre (12) sous la forme

$$(13) \quad \frac{1}{R_1 R_2} = - \begin{vmatrix} \alpha_x & \alpha_y & \alpha_z & \alpha \\ \beta_x & \beta_y & \beta_z & \beta \\ \gamma_x & \gamma_y & \gamma_z & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix}.$$

Je considérerai ce résultat comme définitif surtout quant à une conservation de la symétrie nécessaire à ce qui suit. Mais, si l'on abandonne la symétrie, on peut simplifier encore.

Soit une surface représentée par l'équation $z = f(x, y)$. Alors

$$\alpha = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \beta = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

et $\alpha_z, \beta_z, \gamma_z$ étant nuls, il vient

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \gamma \begin{vmatrix} \alpha_x & \alpha_y & \alpha \\ \beta_x & \beta_y & \beta \\ \gamma_x & \gamma_y & \gamma \end{vmatrix}.$$

Utilisant encore les dérivées de la relation (10),

$$\alpha \alpha_x + \beta \beta_x + \gamma \gamma_x = 0, \quad \alpha \alpha_y + \beta \beta_y + \gamma \gamma_y = 0,$$

on obtient

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \begin{vmatrix} \alpha_x & \alpha_y \\ \beta_x & \beta_y \end{vmatrix} = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2},$$

ce qui est un résultat bien connu. Toujours pour la surface d'équation $z = f(x, y)$, l'équation aux rayons de courbure principaux peut ainsi être écrite

$$\frac{1}{R^2} - (\alpha_x + \beta_y) \frac{1}{R} + \begin{vmatrix} \alpha_x & \alpha_y \\ \beta_x & \beta_y \end{vmatrix} = 0.$$

On trouvera cette forme dans le *Traité d'Analyse* de H. Laurent (t. II, p. 450), à cela près que cet auteur prend α, β, γ avec des signes contraires à ceux adoptés ici.

Mais, sans faire aucune hypothèse sur la forme de l'équation de la surface, autre que celle qui consiste à considérer les cosinus directeurs α, β, γ de la normale comme des fonctions de x, y, z , l'équation aux rayons de courbure principaux est

$$(14) \quad \frac{1}{R^2} - (\alpha_x + \beta_y + \gamma_z) \frac{1}{R} - \begin{vmatrix} \alpha_x & \alpha_y & \alpha_z & \alpha \\ \beta_x & \beta_y & \beta_z & \beta \\ \gamma_x & \gamma_y & \gamma_z & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

J'ignore si cette forme parfaitement symétrique a déjà été considérée.

LE JACOBIEN J ET LES J BORDÉS.

[6] Nous pouvons maintenant résumer, d'une manière extrêmement symétrique, les résultats essentiels contenus dans les paragraphes précédents. Soient toujours α, β, γ les cosinus directeurs de la normale en un point $M(x, y, z)$ d'une surface. Considérons le jacobien

$$(15) \quad J = \begin{vmatrix} \alpha_x & \alpha_y & \alpha_z \\ \beta_x & \beta_y & \beta_z \\ \gamma_x & \gamma_y & \gamma_z \end{vmatrix}.$$

Il est identiquement nul puisque α, β, γ sont liés par une relation, savoir la relation (10), mais cette nullité n'intervient pas explicitement dans ce qui suit.

La courbure totale en M est

$$(16) \quad \frac{1}{R_1 R_2} = - \left| \begin{array}{ccc|c} & & & \alpha \\ & & & \beta \\ & & & \gamma \\ \hline & & & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \end{array} \right|.$$

Le J ainsi bordé donne naissance au célèbre invariant de Gauss

$$(17) \quad \iint_{\Gamma} \frac{d\sigma}{R_1 R_2}.$$

Bordé davantage, il donne naissance au pseudo-déterminant

$$(18) \quad \Delta = \left| \begin{array}{ccc|ccc} & & & -1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & -1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & -1 \\ \hline \alpha & \beta & \gamma & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial \alpha} & \frac{\partial}{\partial \beta} & \frac{\partial}{\partial \gamma} \\ P & Q & R & S & T & U \end{array} \right|$$

engendrant l'invariant intégral

$$(19) \quad \iint_{\Gamma} \Delta d\sigma$$

de construction beaucoup plus générale que celui de Gauss. Les deux invariants ont la même propriété essentielle : ils se conservent pour toutes les déformations de la cloison Γ conservant son contour γ et toutes les normales le long de γ . Il reste entendu que P, Q, R, S, T, U sont des fonctions pouvant contenir chacune les six quantités $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$.

[7] *Formule d'Ossian Bonnet.* — La recherche de l'intégrale de ligne étendue au contour γ de la cloison Γ et égale à l'invariant de Gauss (17) conduit à la non moins célèbre formule d'Ossian Bonnet

$$\iint_{\Gamma} \frac{d\sigma}{R_1 R_2} = \int_{\gamma} d\omega - \int_{\gamma} \frac{ds}{\rho_g}$$

où ω mesure la rotation de la tangente quand on parcourt le contour γ d'élément ds et de rayon de courbure géodésique ρ_g . Cette formule a déjà joué un rôle étendu dans les Mémoires précédents, notamment dans le Premier et dans le Second, où toute une Partie lui a été consacrée sous le titre : *La Formule d'Ossian Bonnet et ses analogues.*

Pour l'instant, je me réappuierai sur la possibilité plus élémentaire de remplacer le second membre par l'une des trois expressions

$$\int_{\gamma} \alpha d. \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{\beta}{\gamma}, \quad \int_{\gamma} \beta d. \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{\gamma}{\alpha}, \quad \int_{\gamma} \gamma d. \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{\alpha}{\beta}.$$

Pour que l'égalité

$$(20) \quad \int \int_{\Gamma} \frac{d\sigma}{R_1 R_2} = \int_{\gamma} \gamma d. \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{\alpha}{\beta} = \int_{\gamma} \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{\beta}{\alpha} d\gamma$$

soit vraie, et puisse justement être démontrée comme cas particulier de (5), il faut que le déterminant Δ , récrit en (18), se réduise au second membre de (16) pour P, Q, R, S, T nuls et pour

$$(21) \quad U = \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{\beta}{\alpha}.$$

Or, dans ces conditions, il n'y a que les deux opérateurs en α et en β , de l'avant-dernière ligne de Δ , qui agissent effectivement sur U; les autres jouent le rôle de termes nuls et, par suite, Δ devient

$$\begin{vmatrix} & & & -1 & 0 \\ & & & 0 & -1 \\ & & J & 0 & 0 \\ \hline \alpha & \beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U_x & U_y \end{vmatrix}.$$

Si l'on calcule les dérivées U_x, U_y , il n'y a plus que des transformations très simples pour aboutir au second membre de (16). A coup sûr, cette digression est superflue et encombrante en tant que démonstration de (20), mais cette démonstration n'est nullement l'essentiel. Je voulais montrer que, *pour des formes convenables de P, Q, R, S, T, U, le premier membre de (5), ou Δ donné en (6), pouvaient dépendre explicitement de la courbure totale de la cloison Γ* . On obtiendrait vraisemblablement des formules de même nature et nouvelles [alors que (20) est loin d'être une nouveauté] en modifiant légèrement les formes adoptées ici pour P, Q, R, S, T, U; par exemple, en conservant, à un facteur près, l'expression (21) de U et en donnant à P, Q, R, S, T des expressions non toutes nulles et très simples. Je me borne à signaler cette étude qui n'exige que des essais patients. Mais la courbure totale est-elle la seule qu'on puisse faire apparaître *explicitement* dans le premier membre de (5)? Nous allons voir qu'il n'en est rien et que (5) peut donner une formule, construite directement par M. P. Appell, laquelle contient la courbure moyenne.

[8] *Formule de M. P. Appell.* — Soient X, Y, Z trois fonctions dont chacune ne contient que x, y, z , mais non α, β, γ . Soient S, T, U nuls et

$$(22) \quad P = \beta Z - \gamma Y, \quad Q = \gamma X - \alpha Z, \quad R = \alpha Y - \beta X.$$

Dans ces conditions, de brèves transformations de Δ donnent à (5) la forme

$$\int \int_{\Gamma} \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} d\sigma - \int \int_{\Gamma} (\alpha_x + \beta_y + \gamma_z) (\alpha X + \beta Y + \gamma Z) d\sigma = \int_{\gamma} \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & \beta & \gamma \\ X & Y & Z \end{vmatrix}.$$

Ce premier résultat pourrait être déduit de la formule de Stokes ordinaire (3) en y donnant à P, Q, R les valeurs (22) et en y traitant α, β, γ comme des fonctions de x, y, z sur lesquelles pourraient agir les opérateurs de dérivation. Peu importe la démonstration; ce qui importe, c'est que, dans la seconde intégrale double, on a fait apparaître le facteur qui, d'après (11), représente la courbure moyenne de Γ , de même que, dans la formule d'Ossian Bonnet, on s'arrange à faire apparaître le facteur représentant la courbure totale.

Si l'on pose

$$\frac{d}{dn} = \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} + \gamma \frac{\partial}{\partial z},$$

le déterminant contenu dans la première intégrale double peut se développer sous la forme

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) - \left(\alpha \frac{dX}{dn} + \beta \frac{dY}{dn} + \gamma \frac{dZ}{dn} \right).$$

On a alors la formule de M. Appell, telle que l'éminent géomètre l'a donnée dans *L'Intermédiaire des Mathématiciens* (mai 1916, question 4639). Elle a été, au fond, le point de départ de la présente Première Partie; elle me fit récrire la formule (D) de mes Premier et Second Mémoires en y introduisant $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$ au lieu de x, y, z, p, q . J'obtins ainsi la formule (5) donnée, pour la première fois, dans *L'Intermédiaire* (juillet 1916) en réponse à la question précédente. M. Appell signala également l'équation (11), relative à la courbure moyenne, ce qui me fit rechercher le résultat correspondant, relatif à la courbure totale.

[9] La formule de M. Appell paraît pouvoir donner des résultats particuliers très élégants.

Soient notamment X, Y, Z respectivement égaux à x, y, z . On obtient

$$(23) \quad 2\sigma = \int \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \varphi d\sigma + \int_{\gamma} \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & \beta & \gamma \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

σ représentant l'aire de la cloison Γ et $\varphi = \alpha x + \beta y + \gamma z$ étant la distance de l'origine au plan tangent. Il y a là une très intéressante généralisation du théorème de la projection des aires planes.

Si, en effet, la cloison Γ est toute entière dans un plan dont la normale a pour cosinus directeurs les *constantes* α, β, γ , on a, comme conséquence de (23),

$$(24) \quad \sigma = \alpha \sigma_1 + \beta \sigma_2 + \gamma \sigma_3,$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ désignant les projections de σ sur les plans coordonnés. C'est une forme bien connue du théorème des projections. Sur les surfaces minima, l'intégrale double de (23) est identiquement nulle et l'analogie avec (24) est particulièrement étroite.

DEUXIÈME PARTIE

Volumes coniques. — Cyclides ⁽¹⁾. — Théorèmes abéliens et divers.

[10] Je rappelle brièvement des points démontrés en détail dans le Mémoire précédent. Soit la surface algébrique d'équation

$$(1) \quad \varphi_m(X, Y, Z) + \varphi_{m-1}(X, Y, Z) + \dots + \varphi_0 = 0.$$

Dans la suite, je ne me suis pas astreint à toujours écrire cette formule avec des variables majuscules.

Un cône quelconque, de sommet O, ayant pour directrice un contour fermé Σ , découpe, sur la surface précédente, m cloisons comprenant, entre elles et O, m volumes coniques, $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$, dont la somme abélienne est

$$(2) \quad \sum \tau_i = \int \int_{\sigma} \left(-\frac{\varphi_{m-1}^3}{3\varphi_m^3} + \frac{\varphi_{m-1}\varphi_{m-2}}{\varphi_m^2} - \frac{\varphi_{m-3}}{\varphi_m} \right) (xx + \beta y + \gamma z) d\sigma.$$

La surface d'intégration σ , en x, y, z , est une cloison quelconque jetée sur Σ .

L'élément $d\sigma$ est situé en un point de σ où cette surface admet une normale de cosinus directeurs α, β, γ . On pourrait donner à la somme (2) des expressions analytiques différentes en intégrant, par exemple, sur la surface (1) elle-même, le long d'une des m cloisons servant de base aux volumes τ_i . Mais l'expression (2) a un avantage fondamental. Comme

$$(3) \quad \Lambda = -\frac{\varphi_{m-1}^3}{3\varphi_m^3} + \frac{\varphi_{m-1}\varphi_{m-2}}{\varphi_m^2} - \frac{\varphi_{m-3}}{\varphi_m}$$

est homogène d'ordre -3 , on peut écrire

$$\Lambda = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z},$$

F, G, H étant homogènes d'ordre -2 , et alors

$$(4) \quad \sum \tau_i = \int_{\Sigma} \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & y & z \\ F & G & H \end{vmatrix}.$$

⁽¹⁾ Sur les sommes abéliennes de volumes coniques. Cas des cyclides. (Comptes rendus, 19 mars 1917.)

Pour un même être géométrique, cette dualité d'expression, par une intégrale de cloison et une intégrale de contour, ne peut probablement pas être vue plus simplement que par une telle application de la formule de Stokes, application sur laquelle je me suis déjà expliqué longuement. (Troisième Mémoire, 1^{re} Partie.)

[11] *Cas où la surface (1) est un plan.* — J'emploierai la méthode générale bien qu'un cas aussi simple puisse, plus que tout autre, être traité directement.

Soit le plan

$$(5) \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Alors φ_1 est le premier membre de cette équation et $\varphi_0 = -1$. Il n'y a évidemment qu'un seul volume τ_1 , soit τ , et (2) donne

$$(6) \quad \tau = \frac{1}{3} \int \int_{\sigma} \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^{-3} (x\alpha + \beta y + \gamma z) d\sigma.$$

Si l'on pose

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^{-3},$$

on peut prendre

$$\frac{F}{a} = \frac{G}{b} = \frac{H}{c} = -\frac{1}{6} \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^{-2}$$

d'où

$$(7) \quad \tau = \frac{1}{18} \int_{\Sigma} \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^{-2} \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

Ainsi nous avons, en (6) et (7), deux expressions du volume compris, entre O et le plan (5), dans un cône défini par le sommet O et une directrice fermée Σ ayant une forme et une position quelconques dans l'espace. En particulier, si le contour Σ devient l'intersection du plan (5) et des plans coordonnés, (6) et (7) admettent des vérifications immédiates.

[12] *Toutes les modifications de l'équation (1) qui n'altèrent point Λ n'altèrent point la somme (2).* — C'est là une assertion évidente. Elle peut être l'origine d'un grand nombre d'associations entre surfaces algébriques différentes et donnant toutes, cependant, des sommes (2) équivalentes.

Ainsi, sans modifier la somme abélienne (2), on peut multiplier les quatre premiers termes de (1) par un même facteur homogène $\Phi(x, y, z)$ et modifier les termes suivants au hasard. Pour que cette remarque s'applique effectivement, il faut que l'équation (1) ait au moins cinq termes, c'est-à-dire soit du quatrième degré. Mais certaines transformations de (1) peuvent changer Λ de manière à rendre possibles

certaines comparaisons entre sommes abéliennes de volumes coniques attachées à des surfaces différentes, ces comparaisons étant aussi intéressantes, sinon plus, que l'égalité proprement dite.

Ces remarques si simples vont donner d'élégants théorèmes géométriques. J'emprunte les principaux points de départ à l'ouvrage de G. Darboux, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques* (A. Hermann, 1896, réimpression du tirage de 1873), ainsi qu'au Mémoire purement géométrique de M. G. Humbert, *Sur les surfaces cyclides* (Journal de l'École Polytechnique, 55^e Cahier, 1885). Je me suis également servi des *Quartic Surfaces* de C. M. Jessop (Cambridge, 1916), ouvrage où sont habilement résumés des résultats de G. Darboux et de M. Humbert.

[13] *Surfaces à centre.* — Considérons toutes les droites passant par un point C, chacune coupant naturellement en m points une surface algébrique telle que (1). Si C est centre des moyennes distances pour ces m points d'intersection, C est dit *centre* de la surface. Ceci rentre d'ailleurs, comme cas très particulier, dans la théorie générale des polaires.

Lorsque le centre C est en O, ce que nous allons supposer, l'équation (1) ne contient pas de terme d'ordre $m - 1$. Nous l'écrivons

$$(8) \quad \varphi_m(X, Y, Z) + \star + \varphi_{m-2}(X, Y, Z) + \dots + \varphi_0 = 0,$$

quand il y aura avantage, au point de vue de la clarté, à signaler l'absence du terme en question.

Pour les surfaces de centre O, la somme (2) se réduit à

$$(9) \quad \sum \tau_i = - \int \int_{\sigma} \frac{\varphi_{m-3}}{\varphi_m} (\alpha x + \beta y + \gamma z) d\sigma.$$

C'est là un résultat fondamental déjà susceptible de nombreuses et élégantes applications.

Soient les surfaces pour lesquelles (λ étant un facteur de proportionnalité)

$$-\frac{\varphi_{m-3}}{\varphi_m} = \frac{\lambda}{3} \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^{-3},$$

surfaces dont l'équation générale peut s'écrire

$$(10) \quad \left[\frac{3}{\lambda} \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^3 - 1 \right] \varphi_{m-3} + \varphi_{m-2} + \varphi_{m-4} + \dots + \varphi_0 = 0.$$

En se reportant à l'expression (6), on voit que, pour les surfaces (10), la somme abélienne des volumes coniques de sommet O est égale à λ fois le volume, de même cône, compris entre O et la base plane (5).

La surface (10) la plus simple est au moins du troisième degré. Son équation peut s'écrire

$$\frac{3}{\lambda} \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^3 + \star + \left(\frac{x}{h} + \frac{y}{k} + \frac{z}{l} \right) - 1 = 0.$$

C'est un cylindre dont la direction des génératrices est en évidence. On simplifierait aisément en prenant la direction de celles-ci parallèle à l'un des axes des coordonnées.

Ce cylindre peut se décomposer en trois plans parallèles. Soient, par exemple, ceux de cotes respectives z_1, z_2, z_3 , contenus dans l'équation

$$\frac{3}{\lambda} \frac{z^3}{c^3} + \frac{z}{l} - 1 = 0.$$

Un même cône, de sommet O, détermine des volumes coniques qui, ayant ces plans pour bases, sont respectivement proportionnels à z_1^3, z_2^3, z_3^3 . La somme de ces cubes, d'après l'équation précédente, est λc^3 . Donc la somme des trois volumes coniques vaut λ fois le volume conique, de même cône, limité au plan $z = c$; c'est là une petite vérification partielle.

[14] *Cyclides*. — Parmi les surfaces quartiques, pour lesquelles l'origine peut jouer tout naturellement le rôle de centre, les plus intéressantes sont, à coup sûr, celles qui passent deux fois par le cercle imaginaire de l'infini, ou *cyclides*. Je prendrai leur équation sous la forme

$$(11) \quad S^2 + 4U \equiv (x^2 + y^2 + z^2)^2 + 4h(Ax^2 + By^2 + Cz^2) - 4k^2(ax + by + cz) + 4l^2 = 0$$

rendue homogène par rapport à toutes les lettres y figurant. Alors

$$(12) \quad \sum \tau_i = 4k^2 \int \int_{\sigma} \frac{ax + by + cz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} (zx + \beta y + \gamma z) d\sigma.$$

Considérons maintenant la sphère

$$(13) \quad S - 2R \equiv (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - R^2 = 0.$$

Le cône qui transperce les cyclides, pour donner la somme de volumes (12), transperce cette sphère en y détachant deux cloisons d'aires σ_2 et σ_1 . Or, d'après les résultats de M. G. Humbert, sur lesquels je suis déjà revenu (Troisième Mémoire, n° 12), on a

$$(14) \quad \sigma_2 - \sigma_1 = 4R \int \int_{\sigma} \frac{ax + by + cz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} (zx + \beta y + \gamma z) d\sigma.$$

Donc

$$(15) \quad \sum \tau_i = k^2 \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{R}.$$

C'est là un théorème remarquable entre une cyclide et la sphère associée (13). On ne changerait rien à l'aspect de ce théorème en modifiant le rayon de la sphère ou en remplaçant a, b, c par des valeurs proportionnelles, ce qui revient à déplacer le centre C de cette sphère sur une droite fixe le joignant à l'origine. Cette remarque permet d'utiliser un autre théorème, dû encore à M. G. Humbert (*Sur les surfaces cyclides*, p. 135). Soit toujours $S \equiv x^2 + y^2 + z^2$.

La famille de quadriques $4(U + L^2) + \lambda(S - 2L) = 0$ coupe la cyclide $S^2 + 4U = 0$ sur les sphères $S - 2L = 0$ et $S + 2L - \lambda = 0$.

Or, comme les sphères en λ ont un centre commun C' , symétrique de C par rapport à O , chacune d'elles est dans les conditions requises pour donner un théorème analogue à (15).

Enfin, comme nous l'avons vu, la formule de Stokes permet de remplacer l'intégrale de surface de (12) par une intégrale de ligne étendue au contour Σ de la cloison σ .

On a ainsi

$$\sum \tau_i = 2h^2 \int_{\Sigma} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

Cette intégrale de ligne, déjà étudiée par M. Humbert à propos de la différence d'aires sphériques $\sigma_2 - \sigma_1$, prend ainsi une importance nouvelle quant aux sommes abéliennes de volumes coniques attachées aux cyclides. Il est clair qu'on peut la former uniquement à ce dernier point de vue, sans passer par aucune considération d'aires sphériques.

SURFACES ASSOCIÉES A DES SURFACES CENTRÉES EN O.

[15] Les surfaces que je désigne ainsi n'ont point de centre en O et cependant la somme abélienne de volumes coniques attachée à ces surfaces s'exprime exactement comme pour d'autres surfaces centrées en O . Ceci tient à ce que l'expression Λ , écrite en (3), se réduit à son dernier terme non seulement pour φ_{m-1} identiquement nul, mais aussi pour

$$(16) \quad \varphi_{m-1}^2 = 3\varphi_m \varphi_{m-2}.$$

Cette relation définit toute une nouvelle classe de surfaces aussi importantes que celles de centre O .

Son étude comprend autant de cas particuliers qu'il y a de manières de décomposer le second membre en facteurs distincts.

Soit d'abord φ_{m-2} ne contenant aucun facteur multiple, ce qui est le cas général. Alors, en désignant par λ_1 un facteur homogène du premier degré, on doit avoir

$$\varphi_m = 3\lambda_1^2 \varphi_{m-2}, \quad \varphi_{m-1} = 3\lambda_1 \varphi_{m-2}.$$

Donc, pour les surfaces d'équation complète

$$(3\lambda_1^2 + 3\lambda_1 + 1)\varphi_{m-2} + \varphi_{m-3} + \dots + \varphi_0 = 0,$$

comme pour les surfaces de centre O

$$3\lambda_1^2\varphi_{m-2} + \star + \theta_{m-2} + \varphi_{m-3} + \theta_{m-4} + \dots + \theta_0 = 0,$$

on a

$$\sum \tau_i = -\frac{1}{3} \int \int_{\sigma} \frac{\varphi_{m-2}}{\lambda_1^2 \varphi_{m-2}} (\alpha x + \beta y + \gamma z) d\sigma.$$

Ce théorème peut avoir une première application dans le cas de surfaces du second degré, très dégénérées il est vrai. Soient les systèmes de deux plans parallèles

$$3z^2 + 3z + 1 = 0, \quad 3z^2 - \theta_0 = 0.$$

Pour le second système, les plans sont de part et d'autre de Oxy et équidistants de ce dernier plan. Les volumes coniques à ajouter sont égaux et de signes contraires et il n'y a rien que de très banal dans la nullité de leur somme. Mais il est remarquable que les plans *imaginaires* du premier système donnent le même résultat sans qu'il soit explicable par la même symétrie.

Si nous passons au troisième degré, nous avons les surfaces associées

$$(3\lambda_1^2 + 3\lambda_1 + 1)\varphi_1 - 1 = 0, \quad 3\lambda_1^2\varphi_1 + \star + \theta_1 - 1 = 0.$$

La première est un cylindre, la seconde, coupée par les plans $\lambda_1 = \text{const.}$, suivant des droites, est une surface réglée à plan directeur.

[16] Supposons maintenant que φ_{m-2} contienne λ_1 comme facteur double. Alors, d'après (16),

$$\varphi_{m-2} = \lambda_1^2 \psi_{m-4}, \quad \varphi_m = 3\mu_2^2 \psi_{m-4}, \quad \varphi_{m-1} = 3\lambda_1 \mu_2 \psi_{m-4}.$$

Pour les surfaces d'équation complète

$$(3\mu_2^2 + 3\lambda_1 \mu_2 + \lambda_1^2)\psi_{m-4} + \varphi_{m-3} + \varphi_{m-4} + \dots + \varphi_0 = 0,$$

comme pour les surfaces de centre O

$$3\mu_2^2\psi_{m-4} + \star + \theta_{m-2} + \varphi_{m-3} + \theta_{m-4} + \dots + \theta_0 = 0,$$

on a

$$\sum \tau_i = -\frac{1}{3} \int \int_{\sigma} \frac{\varphi_{m-2}}{\mu_2^2 \psi_{m-4}} (\alpha x + \beta y + \gamma z) d\sigma.$$

Ici il y a des applications très intéressantes. D'abord les surfaces de centre O peuvent être identifiées aux cyclides (11). Il suffit, pour cela, de poser

$$\begin{aligned} \mu_2 &= x^2 + y^2 + z^2, & 3\psi_{m-4} &= 1, & \theta_{m-2} &= 4h(Ax^2 + By^2 + Cz^2), \\ \varphi_{m-3} &= -4k^2(ax + by + cz), & \theta_{m-4} &= 4l^4. \end{aligned}$$

Pour les surfaces associées, d'équation complète, on a alors l'équation

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 + \lambda_1(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{1}{3}\lambda_1^2 - 4k^2(ax + by + cz) + 4l^4 = 0.$$

Ce sont encore des cyclides n'ayant point, cette fois, leur centre en O. Pour préciser, soit

$$\lambda_1 = 12(a'x + b'y + c'z), \quad \varphi^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2.$$

Alors l'équation précédente peut s'écrire

$$[x^2 + y^2 + z^2 + 6(a'x + b'y + c'z)]^2 + 12(a'x + b'y + c'z)^2 - 4k^2(ax + by + cz) + l^4 = 0.$$

Cette cyclide a son centre en un point O'(-3a', -3b', -3c'). Si l'on prend O' pour origine, en posant

$$x = x' - 3a', \quad y = y' - 3b', \quad z = z' - 3c',$$

il vient

$$(x'^2 + y'^2 + z'^2 - 9\varphi^2)^2 + 12(a'x' + b'y' + c'z' - 3\varphi^2)^2 - 4k^2[ax' + by' + cz' - 3(aa' + bb' + cc')] + 4l^4 = 0.$$

Les termes du troisième degré ont bien disparu. Ceux du premier degré sont

$$-72\varphi^2(a'x' + b'y' + c'z') - 4k^2(ax' + by' + cz').$$

Dans ces conditions, en revenant au théorème du paragraphe 14, théorème exprimé particulièrement par l'égalité (15), on voit que, relativement à la dernière cyclide, la somme abélienne des volumes coniques, de sommet O', s'exprime par

$$\sum_{O'} \tau_i = 18\varphi^2 \frac{\sigma'_2 - \sigma'_1}{R'} + k^2 \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{R}.$$

Le cône découpe des aires σ_2 et σ_1 sur une sphère (a, b, c, R) et des aires σ'_2 et σ'_1 sur une sphère (a', b', c', R'). En résumé :

Soit la cyclide C, de centre O,

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 4h(Ax^2 + By^2 + Cz^2) - 4k^2(ax + by + cz) + 4l^4 = 0$$

et la cyclide C', de centre O'(-3a', -3b', -3c')

$$[x^2 + y^2 + z^2 + 6(a'x + b'y + c'z)]^2 + 12(a'x + b'y + c'z)^2 - 4k^2(ax + by + cz) + l^4 = 0.$$

Elles ont toutes deux, par rapport à O, même somme abélienne de volumes coniques

$$\sum_O \tau_i = k^2 \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{R},$$

le cône, de sommet O, découpant, sur une sphère (a, b, c, R), des aires σ_2 et σ_1 .

Si une translation du cône transporte son sommet en O' , on a

$$\sum_{O'} \tau_i - \sum_{O} \tau_i = 18(a'^2 + b'^2 + c'^2) \frac{\sigma'_2 - \sigma'_1}{R'},$$

alors que ce cône découpe sur une sphère (a', b', c', R') des aires σ'_2 et σ'_1 .

On pourrait varier la forme du dernier résultat en prenant, pour centre de la dernière sphère, un point dont les coordonnées seraient proportionnelles à a', b', c' , ce qui revient à dire qu'on peut toujours s'arranger à placer le centre de cette sphère en un point quelconque de OO' .

On voit que les sommes abéliennes de volumes coniques offrent, dans les cyclides, des associations particulièrement intéressantes, surtout parce qu'y interviennent les aires sphéro-coniques de M. G. Humbert.

[17] *Quadriques et surfaces dérivées.* — Jusqu'ici nous avons eu surtout en vue des égalités entre sommes de volumes coniques déterminées par un même cône dans des surfaces différentes. Or, comme on l'a déjà remarqué au paragraphe 12, de telles sommes peuvent ne pas être égales et avoir une différence intéressante. Voyons quelques cas de ce genre.

Soit la quadrique Q

$$\mu_2 + \mu_1 + \mu_0 = 0$$

et la surface, d'ordre quelconque, qui en dérive très simplement

$$\varphi_{m-2}(\mu_2 + \mu_1 + \mu_0) + \varphi_{m-3} + \dots + \varphi_0 = 0.$$

D'après (3), on a, pour chacune de ces surfaces respectivement,

$$\Lambda_Q = -\frac{\mu_1^3}{3\mu_2^3} + \frac{\mu_1\mu_0}{\mu_2^2}, \quad \Lambda = \Lambda_Q - \frac{\varphi_{m-3}}{\mu_2\varphi_{m-2}}.$$

On conclut de là

$$\sum_Q \tau_i - \sum \tau_i = \int \int_{\sigma} \frac{\varphi_{m-3}}{\mu_2\varphi_{m-2}} (zx + \beta y + \gamma z) d\sigma.$$

Pour appliquer cette formule, prenons les deux surfaces

$$\begin{aligned} Q &\equiv Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2h(ax + by + cz) + k^2 = 0, \\ (Ax^2 + By^2 + Cz^2)Q + h^2(a'x + b'y + c'z) + k^2 &= 0, \end{aligned}$$

dont les équations sont construites de manière à être homogènes par rapport à toutes les lettres qui, de ce fait, représentent toutes des longueurs. On aura

$$(17) \quad \sum_Q \tau_i - \sum \tau_i = h^2 \int \int_{\sigma} \frac{a'x + b'y + c'z}{(Ax^2 + By^2 + Cz^2)^2} (zx + \beta y + \gamma z) d\sigma.$$

Or, si l'on pose

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{a'x + b'y + c'z}{(Ax^2 + By^2 + Cz^2)^2},$$

on obtient

$$F = -\frac{a'}{2A} \frac{1}{Ax^2 + By^2 + Cz^2}, \quad G = -\frac{b'}{2B} \frac{1}{Ax^2 + By^2 + Cz^2},$$

$$H = -\frac{c'}{2C} \frac{1}{Ax^2 + By^2 + Cz^2},$$

et, d'après la formule de Stokes employée comme au paragraphe 10,

$$(18) \quad \sum_Q \tau_i - \sum \tau_i = \frac{1}{2} h^4 \int_{\Sigma} \frac{1}{Ax^2 + By^2 + Cz^2} \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \frac{a'}{A} & \frac{b'}{B} & \frac{c'}{C} \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

On a ici, tant par le second membre de (17) que par celui de (18), une généralisation des résultats de M. G. Humbert quant à ses différences d'aires sphéro-coniques; ces différences s'exprimaient, en effet, par des intégrales analogues où l'on avait $A = B = C$ (Troisième Mémoire, n° 12).

Il suit de là que c'est encore cette dernière hypothèse qui donnera les résultats géométriques les plus élégants; elle donnera une nouvelle association entre sphères et cyclides.

Ainsi, si l'on considère la sphère S

$$x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1 + \lambda_0 = 0$$

et la cyclide C

$$(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1 + \lambda_0) + 4h^2(ax + by + cz) + l^4 = 0$$

on a, toujours avec un cône de sommet O,

$$\sum_S \tau_i - \sum_C \tau_i = 4h^2 \int \int_{\sigma} \frac{ax + by + cz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} (ax + \beta y + \gamma z) d\sigma = h^2 \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{R},$$

si σ_2 et σ_1 sont les aires découpées par le cône sur une nouvelle sphère (a, b, c, R) .

La somme $\tau_1 + \tau_2$, relative à une sphère telle que S a été formée explicitement dans le Quatrième Mémoire (n° 17); on pourrait donc exprimer, tout aussi explicitement, la somme, des τ_i , relative à la cyclide C.

[18] *Associations diverses.* — En somme, les Λ relatifs à des surfaces différentes n'ont été comparés jusqu'ici que dans des cas particuliers. On pourrait vraisemblablement poursuivre indéfiniment des recherches de ce genre. Voici, par exemple, un autre mode d'association entre surfaces ayant même Λ .

Soient les surfaces d'équations respectives

$$\begin{aligned} \varphi_m + \varphi_{m-1} + \star_{m-2} + \star_{m-3} + \varphi_{m-4} + \dots + \varphi_0 &= 0, \\ 3\varphi_m^3 + \star_{3m-1} + \theta_{3m-2} + \varphi_{m-1}^3 + \theta_{3m-4} + \dots + \theta_0 &= 0. \end{aligned}$$

Pour toutes deux, on a

$$\sum \tau_i = -\frac{1}{3} \int \int_{\sigma} \left(\frac{\varphi_{m-1}}{\varphi_m} \right)^3 (\alpha x + \beta y + \gamma z) d\sigma.$$

On peut encore partir du cas, déjà traité, où la première surface est une sphère qui, pour l'instant, doit passer par l'origine; il n'y a plus alors qu'un seul volume τ . A celui-ci est égale la somme des six τ_i correspondant à une surface sextique passant trois fois par le cercle imaginaire de l'infini et ayant l'origine pour centre. Les degrés des surfaces étant doublés, c'est là un résultat analogue à celui du paragraphe 13, résultat qui concernait un plan pour lequel on n'avait qu'un seul volume τ égal à la somme des volumes analogues relatifs à des surfaces cubiques associées au plan.

Enfin, toujours parmi beaucoup d'autres questions, on pourrait chercher les surfaces en lesquelles tout même cône de sommet O détermine des volumes de somme nulle. Alors, Λ devant être nul, il faut trouver des polynômes homogènes satisfaisant à l'égalité

$$\varphi_{m-1}^3 - 3\varphi_m \varphi_{m-1} \varphi_{m-2} + 3\varphi_m^2 \varphi_{m-3} = 0.$$

La question est vraisemblablement difficile et encombrée de surfaces imaginaires. Ainsi, pour les surfaces du second degré, on trouve les conditions

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_1^2 - 3\varphi_2 \varphi_0 = 0.$$

La première a une signification évidente. Elle donne les quadriques de centre O pour lesquelles les volumes coniques s'opposent, de part et d'autre de O, avec des signes contraires. Mais la seconde condition donne les cylindres imaginaires réduits à deux plans parallèles

$$\varphi^2 + 3\varphi_0 \varphi_1 + 3\varphi_0^2 = 0.$$

SUR QUELQUES CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES DE M. MAURICE D'OCAGNE.

[19] Je place ici quelques compléments géométriques se rapportant à la Première Partie du précédent Mémoire. Il s'agissait surtout de déterminer des familles de surfaces sur lesquelles un même cône, de sommet O, découpait des aires équivalentes. Un cas relativement simple est celui où ces surfaces sont des cylindres de génératrices parallèles à Oz. Considérons deux de ces cylindres ayant, dans le plan Oxy, des directrices respectives (M) et (M₁). Un rayon vecteur, dans Oxy, ren-

contre (M) en M et (M₁) en M₁; les éléments d'arc de ces courbes planes sont ds en M et ds₁ en M₁. Je pose OM = ρ, OM₁ = ρ₁. Pour que des contours fermés, respectivement situés sur ces deux cylindres et sur un même cône de sommet O, enferment des aires égales, on doit avoir, pour les éléments d'arc se correspondant sur une même génératrice du cône,

$$z ds = z_1 ds_1.$$

Mais comme

$$\frac{z}{z_1} = \frac{\rho}{\rho_1},$$

la relation précédente peut s'écrire

$$(19) \quad \rho ds = \rho_1 ds_1 \quad \text{ou} \quad 2\pi y ds = 2\pi y_1 ds_1.$$

Donc, les arcs correspondants des courbes (M) et (M₁) ont aussi la propriété, en tournant autour de Ox, d'engendrer des aires de révolution équivalentes.

Il y a là un raisonnement complètement équivalent au raisonnement analytique des paragraphes 4 et 5 du précédent Mémoire. Sous la forme géométrique exposée maintenant, il m'a été communiqué par M. P. Montel.

Je rappelle que, si (M₁) est un cercle, (M) est une lemniscate de Bernoulli de même centre et inscrite dans ce cercle.

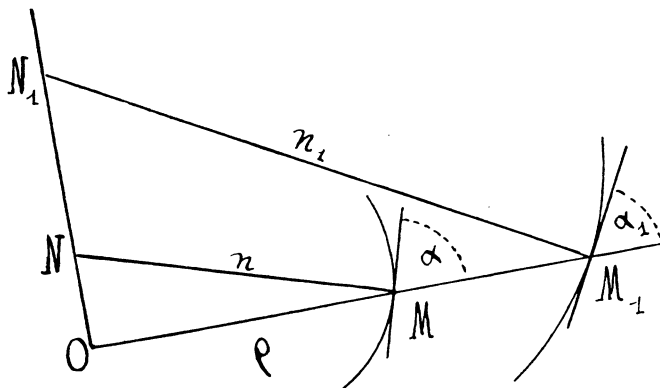


FIG. 1.

[20] La recherche des courbes planes associées d'une manière telle que $\rho ds = \rho_1 ds_1$, est tout à fait de même nature que celle des courbes définies par $ds = ds_1$, lesquelles rentrent dans une théorie générale des trajectoires isométriques exposée par M. Maurice d'Ocagne dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* (1884-85, p. 71 et 1888-89, p. 171).

La méthode de détermination des normales et des rayons de courbure, donnée par M. d'Ocagne pour certaines courbes $ds = ds_1$, peut s'appliquer aux courbes de définition (19), ce que je me propose de montrer.

Aux points correspondants, M et M_1 , considérons les normales polaires, n et n_1 , lesquelles pourront porter des rayons de courbure r et r_1 . On a

$$ds = n d\omega, \quad ds_1 = n_1 d\omega_1,$$

si bien que l'équation de définition peut être remplacée par

$$(20) \quad \rho n = \rho_1 n_1.$$

Comme on a $\rho = n \sin \alpha$, $\rho_1 = n_1 \sin \alpha_1$, l'équation (20) peut, à son tour, être remplacée par

$$(21) \quad \rho^2 \sin \alpha_1 = \rho_1^2 \sin \alpha.$$

Si l'on différentie cette relation et si l'on tient compte de

$$\begin{aligned} d\rho &= \rho \cotang \alpha d\omega, & d\rho_1 &= \rho_1 \cotang \alpha_1 d\omega_1, \\ dx &= \left(\frac{n}{r} - 1 \right) d\omega, & dx_1 &= \left(\frac{n_1}{r_1} - 1 \right) d\omega_1, \end{aligned}$$

on trouve

$$(22) \quad 3 \frac{\rho_1 \sin (\alpha_1 - \alpha)}{\rho \sin \alpha_1} = \frac{\rho_1 \cos \alpha}{r \sin \alpha} - \frac{\rho \cos \alpha_1}{r_1 \sin \alpha_1},$$

relation qui permet de déduire r de r_1 et réciproquement.

Si l'on suppose connue la courbe (M_1) les relations (20) ou (21) permettent de déterminer la normale à (M) et (22) permet d'en déterminer le rayon de courbure.

Ainsi soit, pour (M_1) , un cercle de centre O et de rayon R . Les relations (20) ou (21) seront

$$\rho n = R^2 \quad \text{ou} \quad \rho^2 = R^2 \sin \alpha.$$

Il est aisé de voir qu'une telle égalité définit la famille de lemniscates

$$\rho^2 = R^2 \cos 2(\omega - C).$$

On retrouve ainsi le résultat du paragraphe 6 du précédent Mémoire. Quant à la relation (22), elle devient, toujours pour l'angle α , droit et $\rho_1 = R$,

$$3\rho r = R^2.$$

C'est bien la formule qui donne le rayon de courbure r en un point d'une des lemniscates considérées.

[21] Prenons maintenant le cas où (M_1) se réduit à une droite D qu'il est naturel de placer perpendiculairement à l'axe polaire. Sur la courbe (M) , soit M un point en lequel nous voulons d'abord déterminer la normale. La relation (20), mise d'accord avec la figure 2, s'écrit

$$n \cdot OM = M_1 N_1 \cdot OM_1.$$

On détermine donc $n = MN$ par une construction de quatrième proportionnelle.

Je prends $M_1R = OM$ et, menant par N_1 une parallèle à OR , j'ai

$$\frac{M_1N_2}{M_1N_1} = \frac{OM_1}{RM_1}.$$

Donc M_1N_2 ainsi déterminé est n et je puis porter ce segment en MN , ce qui détermine la normale en M .

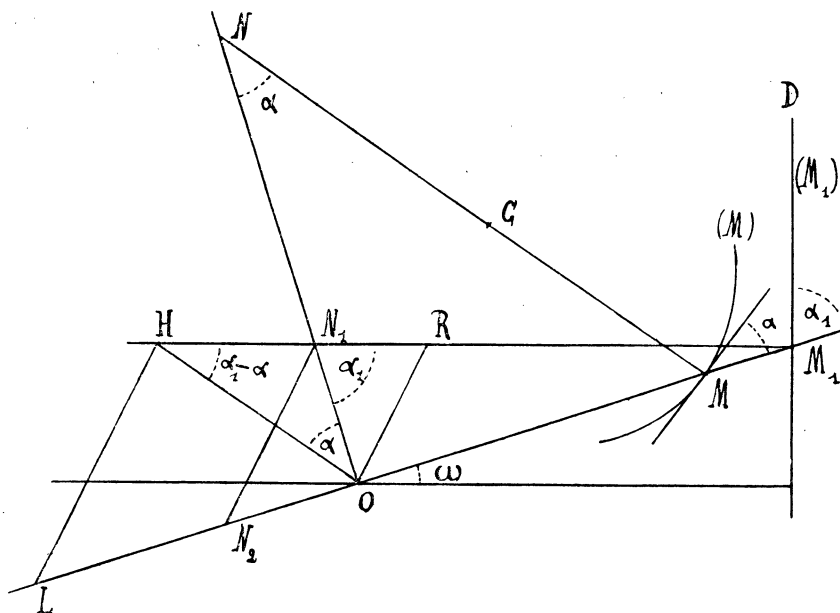


FIG. 2.

Cherchons maintenant le rayon de courbure en ce même point M . La relation (22), où r_1 est infini, combinée avec (21), donne

$$(23) \quad 3r = \frac{\rho_1^2}{\rho} \frac{\cos \alpha}{\sin (\alpha_1 - \alpha)}.$$

Par O , je mène OH parallèle à MN .

Les angles α et α_1 , indiqués en M et M_1 , se reproduisent, toujours comme il est indiqué, en O et N_1 d'où un angle $\alpha_1 - \alpha$ en H . Le triangle OM_1H donne alors

$$\frac{M_1H}{\cos \alpha} = \frac{OM_1}{\sin (\alpha_1 - \alpha)},$$

d'où

$$M_1H = \frac{\rho_1 \cos \alpha}{\sin (\alpha_1 - \alpha)}.$$

Cette obtention de M_1H est identiquement celle de M . d'Ocagne; pour résoudre le problème envisagé ici, il reste, d'après (23), à multiplier M_1H par le rapport

de ρ_1 à ρ . C'est une seconde construction de quatrième proportionnelle. Menons HL parallèle à RO et on aura

$$\frac{M_1 L}{M_1 H} = \frac{M_1 O}{M_1 R} = \frac{\rho_1}{\rho}.$$

Finalement, le tiers de $M_1 L$ sera le rayon de courbure r à porter en MC.

Dans les courbes de M. d'Ocagne, définies par $ds = ds_1$, on peut déterminer explicitement celles de ces courbes qui sont associées à une droite, au moyen des fonctions elliptiques. Ici, pour les courbes (M) associées à la droite D, on tombe sur une intégrale hyperelliptique écrite au paragraphe 8 du Mémoire précédent. Il n'en est que plus précieux de pouvoir appliquer encore la méthode de M. d'Ocagne à la détermination des normales et des rayons de courbure de ces courbes.

TROISIÈME PARTIE

La Formule de Stokes pour contours ouverts.

[22] Si nous avons vu, jusqu'ici, le rôle très important et élégant joué en Géométrie par des intégrales de ligne étendues à des contours fermés, il semble qu'il y ait matière à un intérêt tout aussi grand quant à l'étude d'intégrales de constitution identique, mais étendues à des arcs à extrémités distinctes et variables.

Ainsi l'intégrale de M. G. Humbert

$$(1) \quad \int \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

étendue à un contour fermé Σ , représente la différence des aires découpées par le cône $O\Sigma$ sur la sphère (a, b, c, R) . Considérée comme intégrale indéfinie étendue à un arc quelconque, variable avec t , sur lequel x, y, z sont des fonctions de t , elle donne, comme coefficients de a, b, c , trois intégrales, évidemment fonctions de t , qui sont les coordonnées d'un point d'une courbe gauche à torsion constante (cf. G. DARBOUX, *Surfaces*, t. I, 2^e édition, p. 61). On conçoit que de tels rapprochements soient dignes d'être signalés et étudiés.

Considérons, de plus, la formule de Stokes dans le cas où elle sert à remplacer une intégrale de contour fermé par une intégrale double étendue à une cloison jetée sur ce contour. Il peut être possible d'étendre le bénéfice d'une telle transformation à une intégrale

$$(2) \quad \int_A^B P dx + Q dy + R dz,$$

étendue à un arc AB ouvert, si l'on peut fermer celui-ci par un chemin BA , distinct de AB , sur lequel l'intégrale aurait une valeur nulle (ou, plus généralement, une valeur connue).

Alors l'intégrale de ligne est finalement étendue à un contour fermé ABA et la formule de Stokes est applicable.

A l'appui de ce raisonnement on peut citer un exemple très élémentaire.

L'intégrale

$$\frac{1}{2} \int x dy - y dx,$$

étendue à un contour fermé, plan, représente l'aire y contenue. Étendue à un arc ouvert AB , elle représente l'aire triangulaire $OABO$ parce que l'expression $x dy - y dx$ est nulle sur les rayons vecteurs OA et OB .

Là encore on conçoit la recherche de résultats de ce genre, mais plus généraux, concernant les intégrales (2).

Cette recherche peut être appuyée sur l'identité, toujours possible d'une infinité de manières,

$$(3) \quad P dx + Q dy + R dz = d\alpha + \beta d\gamma.$$

Elle conduit à remplacer (2) par une partie complètement intégrée augmentée d'une intégrale

$$\int_A^B \beta d\gamma.$$

Or le chemin BA, qui doit compléter et fermer AB, peut être tracé sur des surfaces d'équation $\gamma = \text{constante}$, ou $\beta = F'(\gamma)$, ce qui donne un résultat nul ou tout intégré, et, finalement, on peut remplacer (2) par une intégrale de contour fermé.

QUELQUES REMARQUES ÉLÉMENTAIRES SUR LE PROBLÈME DE PFAFF.

[23] On sait que le problème de Pfaff consistant en la réduction de formes différentielles à des types canoniques a été profondément réétudié par Gaston Darboux, notamment dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* (1882) et, beaucoup plus récemment, quant au cas de formes telles que (3), dans les *Comptes rendus* (15 et 22 novembre 1909). Ce sont ces dernières Notes que je vais utiliser pour le but ci-dessus indiqué. J'aurais pu me borner à un emploi pur et simple de ces résultats classiques; je me permets de les réexposer brièvement avec les notations déjà introduites dans l'étude de la formule de Stokes.

L'égalité (3) mise sous la forme

$$(4) \quad P dx + Q dy + R dz - d\alpha = \beta d\gamma$$

n'est possible que si le premier membre satisfait à une condition d'intégrabilité bien connue, laquelle peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial x} - P & \frac{\partial \alpha}{\partial y} - Q & \frac{\partial \alpha}{\partial z} - R \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 0.$$

Or c'est là une équation aux dérivées partielles propre à déterminer α . Reste ensuite à déterminer des fonctions β et γ satisfaisant aux relations

$$P = \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \beta \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \beta \frac{\partial \gamma}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial \alpha}{\partial z} + \beta \frac{\partial \gamma}{\partial z}.$$

Éliminant α entre celles-ci, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} &= \frac{\partial \beta}{\partial z} \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial y} \frac{\partial \gamma}{\partial z}, \\ \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial \gamma}{\partial z} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \\ \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial \beta}{\partial y} \frac{\partial \gamma}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial \gamma}{\partial y}.\end{aligned}$$

Multipliant ces équations par $\frac{\partial \beta}{\partial x}$, $\frac{\partial \beta}{\partial y}$, $\frac{\partial \beta}{\partial z}$, puis par $\frac{\partial \gamma}{\partial x}$, $\frac{\partial \gamma}{\partial y}$, $\frac{\partial \gamma}{\partial z}$, on conclut que β et γ satisfont à l'équation

$$(5) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 0.$$

Mais ceci ne détermine complètement ni β ni γ , fonctions pour lesquelles il y a à faire des remarques plus subtiles (*) que pour α .

[24] Pour simplifier supposons α déjà déterminé ou inexistant, ce qui permettra d'écrire (4) sous la forme

$$(6) \quad X dx + Y dy + Z dz = \beta d\gamma$$

avec la condition d'intégrabilité

$$(7) \quad \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0$$

qui, maintenant, est forcément réalisée. En répétant le raisonnement du paragraphe précédent, nous concluons que β et γ satisfont à l'équation

$$(8) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0$$

(*) On lit parfois que, pour déterminer β et γ , « il suffira donc de prendre, pour β et γ , deux solutions particulières de l'équation (5) ». Ce n'est pas faux, à coup sûr, mais à condition d'entendre deux solutions particulières particulièrement déterminées. Ainsi β et γ ne sont point déterminés dans (6) par la seule intégration de (8) ou du système (9). Et cependant on peut, *au point de vue théorique*, faire dépendre la recherche de γ de l'unique système (10).

ou bien sont intégrales du système différentiel ordinaire

$$(9) \quad \frac{dx}{Z_y - Y_z} = \frac{dy}{X_z - Z_x} = \frac{dz}{Y_x - X_y}.$$

Mais si, avant d'en arriver là, on avait multiplié les deux membres de (6) par une fonction quelconque $\rho(x, y, z)$, on aurait conclu que $\rho\beta$ et γ sont intégrales du système

$$(10) \quad \frac{dx}{(\rho Z)_y - (\rho Y)_z} = \frac{dy}{(\rho X)_z - (\rho Z)_x} = \frac{dz}{(\rho Y)_x - (\rho X)_y},$$

Donc la fonction γ est tenue d'avoir une forme telle qu'elle puisse être une intégrale du système (10) quelle que soit la fonction ρ figurant dans ce système.

Supposons que, pour $\rho = \rho_1$, le système (10) ait pour intégrales u_1 et v_1 et que, pour $\rho = \rho_2$, il ait pour intégrales u_2 et v_2 . Alors la fonction γ tenue d'être constructible, d'une part avec u_1 et v_1 , d'autre part avec u_2 et v_2 aura, de ce fait et en général, une forme définitivement assignable. C'est en ce sens que l'on peut dire que la réduction (6) ou, ce qui revient au même, l'intégration de l'équation aux différentielles totales

$$X dx + Y dy + Z dz = 0,$$

peut revenir à la considération d'un seul système différentiel ordinaire lequel, ici, est le système (10). Bien entendu, il n'y a là qu'une remarque théorique qui n'implique nullement des calculs particulièrement simples, sauf peut-être pour certains systèmes symétriques spéciaux tels que ceux que nous allons rencontrer.

Pour $\rho = 1$ on retrouve le procédé d'intégration de J. Bertrand (E. GOURSAT, *Cours d'Analyse*, t. II, 2^e édit., p. 573; F. TISSERAND, *Recueil d'Exercices*, 2^e édit., p. 223) qui ne tire alors du système (9) que l'indication d'un changement de variables ramenant la question à une équation différentielle ordinaire qui reste à former.

Quant à l'emploi unique du système (10), avec des formes différentes de ρ , j'achèverai de m'expliquer sur un exemple particulier.

[25] L'exemple qui suit tient à l'étude de l'intégrale (1) et est aussi présenté dans le *Recueil* de F. Tisserand (*loc. cit.*, p. 221), comme exercice d'intégration concernant une certaine équation aux différentielles totales.

Soit l'identité

$$(11) \quad \beta d\gamma \equiv \frac{(bx - ay)^2}{b} d\left(\frac{cy - bz}{bx - ay}\right) = \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

Supposons que nous ne connaissions que le dernier membre qu'il faudrait alors réduire à la forme $\beta d\gamma$.

Le système (10) a pour dénominateur de dx

$$x \left(a \frac{\partial \rho}{\partial x} + b \frac{\partial \rho}{\partial y} + c \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) - a \left(2\rho + x \frac{\partial \rho}{\partial x} + y \frac{\partial \rho}{\partial y} + z \frac{\partial \rho}{\partial z} \right)$$

et, pour dénominateurs de dy et dz , des expressions d'une symétrie analogue. Ces expressions suggèrent deux manières très simples de choisir ρ , savoir $\rho = 1$ et ρ fonction homogène d'ordre -2 , car alors la dernière parenthèse est nulle en vertu du théorème d'Euler. Les systèmes (10), correspondant respectivement à chacune de ces hypothèses, sont définitivement

$$(12) \quad \frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{c}, \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

Le premier indique que γ est fonction de $bx - ay$ et de $cy - bz$, le second que γ est homogène d'ordre zéro en x, y, z . Donc γ est fonction du rapport de $bx - ay$ à $cy - bz$ et ceci suffit pour retrouver l'identité ci-dessus (11).

[26] Soient F, G, H des fonctions homogènes d'ordre -2 et reprenons la formule de Stokes aux applications géométriques nombreuses

$$(13) \quad \int \int_{\sigma} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \right) (\alpha'x + \beta'y + \gamma'z) d\sigma = \int_{\Sigma} \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & y & z \\ F & G & H \end{vmatrix}.$$

Je désigne maintenant par α', β', γ' les cosinus directeurs de la normale à la cloison σ pour ne point confondre avec les fonctions α, β, γ de l'identité canonique (3), fonctions pour lesquelles j'ai voulu maintenir les notations de Gaston Darboux.

Le déterminant figurant dans l'intégrale de ligne de (13) est toujours réductible à la forme $\beta d\gamma$.

On reconnaît sans peine que la condition d'intégrabilité (7) est vérifiée. Le système (10), pour $\rho = 1$, prend la forme du second système (12). On pourrait d'ailleurs arriver à ces conclusions d'une manière directe, le déterminant en question pouvant s'écrire

$$f d\left(\frac{y}{z}\right) + g d\left(\frac{z}{x}\right) + h d\left(\frac{x}{y}\right)$$

si f, g, h sont homogènes d'ordre zéro, c'est-à-dire fonctions de deux des rapports $\frac{y}{z}, \frac{z}{x}, \frac{x}{y}$. Ces deux rapports étant désignés par x' et y' , on aura finalement une expression

$$k(x', y') dx' + l(x', y') dy'$$

qui, avec un facteur intégrant convenable, prendra la forme $\beta d\gamma$.

En conséquence, si l'intégrale de ligne de (13) est étendue non plus à un contour fermé Σ mais à un arc AB ouvert, on peut, en général, compléter AB par un chemin BA tracé sur des surfaces $\gamma = \text{const.}$ convenablement choisies, comme nous allons le voir dans les exemples suivants. Alors le chemin BA donnant, à l'intégration, un résultat nul, l'intégrale étendue à AB sera étendue, sans changement de valeur, au contour fermé ABA; représentable encore par une intégrale double, elle aura une signification géométrique analogue à celle qu'elle avait dans le cas du contour Σ .

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

[27] Nous avons vu, au paragraphe 11, une expression du volume conique τ compris, dans un cône $O\Sigma$, entre le sommet O et le plan

$$(14) \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

à condition que Σ représente un contour fermé. Remplaçons le contour Σ par un arc ouvert AB. En nous appuyant sur l'identité (11), nous pourrions alors écrire

$$(15) \quad \tau = \frac{1}{18b} \int_A^B \frac{(bx - ay)^2}{\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^2} d\left(\frac{cy - bz}{bx - ay}\right)$$

et chercher ce qu'est ainsi τ .

Les surfaces

$$\frac{cy - bz}{bx - ay} = \text{const.}$$

sont des plans passant par O, par D(a, b, c) et par un point arbitraire (x_0, y_0, z_0) , ce qui détermine la constante. Pour équation d'un de ces plans, ainsi déterminé, on pourrait même adopter la forme très symétrique

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ x_0 & y_0 & z_0 \end{vmatrix} = 0,$$

remarquable parce qu'elle représente la surface intégrale de l'équation aux différentielles totales qui s'écrit sous la même forme à condition de remplacer x_0, y_0, z_0 respectivement par dx, dy, dz . Il serait même intéressant de rechercher s'il y a d'autres équations aux différentielles totales qui sont ainsi immédiatement intégrées en y remplaçant dx, dy, dz par les coordonnées d'un point fixe, mais je ne fais que noter la question en passant. (1). Il y a évidemment analogie avec l'équation de Clairaut.

(1) J'ai aussi posé cette question, sous le n° 4720, dans *L'Intermédiaire des Mathématiciens* (mars avril 1917).

Pour en revenir à l'intégrale ci-dessus, nous pouvons maintenant considérer deux plans AOD et BOD et un point C sur leur intersection OD, puis tracer, dans chacun de ces plans respectivement, les arcs BC et CA de forme quelconque; l'intégration, le long de ces derniers arcs, donne un résultat nul et l'intégration le long de AB revient identiquement à l'intégration le long du contour fermé ABCA. Le cône (O.ABCA) coupe le plan (14) suivant un contour A'B'C'A' dont deux côtés sont rectilignes et le τ de (15) est le volume conique (O.A'B'C'A'). Un tel résultat ne doit évidemment pas changer si C se déplace sur OD, sauf pour le cas où C viendrait en O. Alors, suivant le plan tangent que l'on donnerait, en O, à la nappe CAB, on pourrait obtenir, au lieu du volume (O.A'B'C'A'), des volumes variables. Mais ceci est précisément d'accord avec l'intégrale en litige qui, à première vue, n'apparaît point comme bien déterminée pour des chemins d'intégration passant par O.

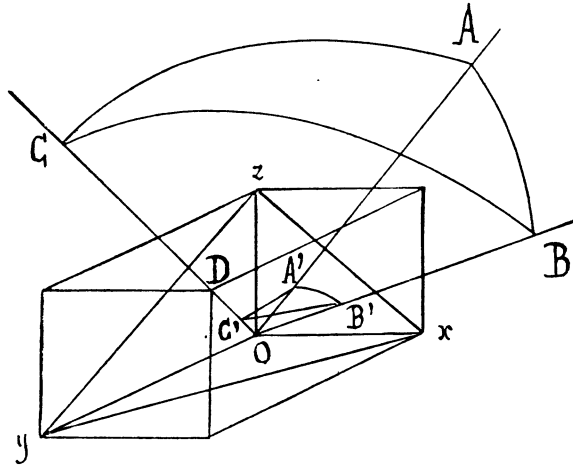


FIG. 3.

[28] Des considérations complètement analogues pourraient s'appliquer à l'intégrale de M. G. Humbert.

$$(14) \quad 2R \int \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

étendue jusqu'ici à un contour fermé Σ et représentant alors la différence $\sigma_2 - \sigma_1$ des aires découpées par le cône $O\Sigma$ sur une sphère de rayon R et de centre $D(a, b, c)$.

Ici, pour faire une figure plus commode, on suppose que la sphère passe par O, si bien que σ_1 est nul. Mais que représente l'intégrale étendue non à un contour fermé Σ mais à un arc ouvert AB. Là encore, on considérera des plans AOD et BOD, un point C de leur intersection et, dans chacun de ces plans, des arcs AC et CB de forme quelconque. Alors l'intégrale précédente, étendue à l'arc AB, est aussi bien

étendue au contour *fermé* ABCA. Elle représente l'aire sphérique A'B'C' limitée par trois côtés dont deux, A'C' et C'B', sont évidemment des arcs de grand cercle issus du point C' diamétralement opposé à O.

Là encore, comme dans l'exemple précédent, le résultat ne change évidemment point si C se déplace sur OD, sauf pour le cas où C viendrait en O.

[29] *Aires sphériques et courbes à torsion constante.* — Soient trois sphères, de même rayon R, passant par l'origine et ayant leur centre respectivement sur Ox, Oy, Oz. Un arc AB, pris de manière quelconque dans l'espace, permet de définir, sur chacune de ces sphères, une aire analogue à l'aire A'B'C'A' de la figure 4, ces trois aires ayant alors respectivement pour expression

$$2R^2 \int_A^B \frac{y dz - z dy}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad 2R^2 \int_A^B \frac{z dx - x dz}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad 2R^2 \int_A^B \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

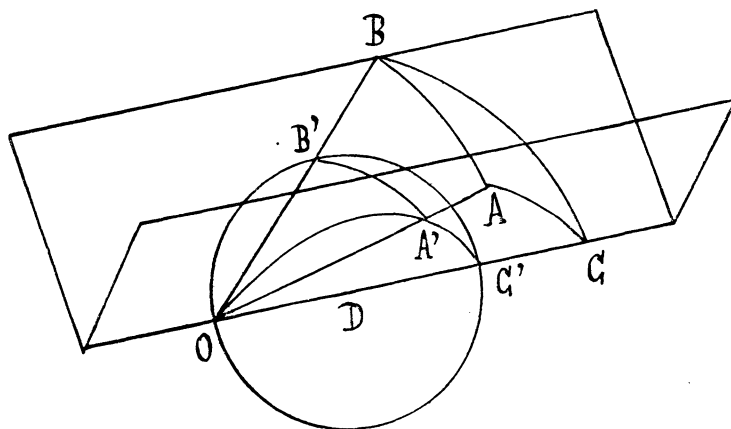


FIG. 4.

Or, si nous imaginons que A soit fixe et B mobile de par la variation d'un certain paramètre, ces trois intégrales sont identiquement celles qui donnent les coordonnées d'un point d'une courbe gauche à torsion constante, intégrales attribuées à J.-A. Serret par Gaston DARBOUX (*Surfaces*, t. I, 2^e édition, p. 61). Une comparaison exacte conduit à ce théorème :

Si, sur trois sphères S_1, S_2, S_3 , de même rayon R, de diamètres respectifs OC_1, OC_2, OC_3 sur Ox, Oy, Oz, on projette coniquement un arc AB, de l'espace, donnant sur S_1 un arc A_1B_1 limitant, avec les arcs de grand cercle A_1C_1, B_1C_1 , une aire $(A_1B_1C_1A_1)$, si l'on obtient sur S_2 et S_3 des aires analogues $(A_2B_2C_2A_2)$, $(A_3B_3C_3A_3)$ et si, enfin, ces trois aires varient avec B, on pose

$$\xi = \frac{1}{2R} (A_1B_1C_1A_1), \quad \tau_1 = \frac{1}{2R} (A_2B_2C_2A_2), \quad \zeta = \frac{1}{2R} (A_3B_3C_3A_3),$$

le point (ξ, τ_1, ζ) décrit une courbe gauche ayant un rayon de torsion constant R.

Il serait facile de donner à ce théorème des formes équivalentes et légèrement variées.

Ainsi on pourrait ne considérer qu'une seule sphère, comme sur la figure 4; on observerait ensuite que, d'après (14), l'aire A'B'C'A' est une fonction linéaire de a, b, c , et on dirait que les coefficients d'une telle forme définissent une courbe à torsion constante.

Pour en revenir au théorème en italique, il ne donne évidemment qu'une interprétation des intégrales de J.-A. Serret; celle-ci semble comparable à celle donnée par M. G. Kœnigs dans un bref et élégant Mémoire *Sur la forme des courbes à torsion constante*, publié dans les présentes *Annales* (t. I, 1887). Ici aussi on pourrait faire, sans calculs, des pronostics intéressants sur la forme des courbes en litige. Ainsi reprenons le cas où l'arc AB se ferme en un contour Σ . En général, au parcours complet de ce contour, correspondent, sur les sphères S_1, S_2, S_3 , des aires qui, divisées par $2R$, constituent des périodes pour ξ, η, ζ .

On a ainsi une représentation visuelle très simple pour les périodes des courbes périodiques à torsion constante.

[30] *Cas de la formule (D) en x, y, z, p, q .* — Si l'on reprend la formule (D) des Mémoires précédents

$$(D) \quad \int \int_{\Gamma} \Delta dx dy = \int_{\gamma} P dx + Q dy + R dz + S dp + T dq$$

en laquelle

$$\Delta = \begin{vmatrix} s & t & 0 & 0 & -1 \\ r & s & 0 & -1 & 0 \\ p & q & -1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial p} & \frac{\partial}{\partial q} \\ P & Q & R & S & T \end{vmatrix},$$

on peut aussi se demander ce que représente l'intégrale de ligne quand on l'étend non à un contour fermé γ mais à un arc AB ouvert et, bien entendu, tracé, comme γ , sur une certaine surface $z = f(x, y)$, ce qui donne un sens à p et q .

La question dépend de la réduction pfaffienne de la forme différentielle

$$(15) \quad P dx + Q dy + R dz + S dp + T dq,$$

réduction qui a donné lieu à diverses études, notamment à celle de M. E. Goursat dans son Mémoire *Sur quelques transformations des équations aux dérivées partielles du second ordre*, publié dans ces *Annales* en 1902. Mais je n'ai pu obtenir des résultats géométriques maniables et analogues à ceux des paragraphes précédents que

dans le cas très particulier où (15) est de la forme $u dv$, u et v étant des fonctions de x, y, z, p, q . Alors Δ est le premier membre d'une équation de Monge-Ampère à intégrale intermédiaire et ceci est une indication fort nette sur la forme des intégrales de surface qui représenteront encore des intégrales de ligne ayant la forme du second membre de (D) même quand ces intégrales de ligne seront données sur un arc AB, non fermé, tracé sur la surface $z=f(x, y)$. Il s'agira, sur cette surface, de fermer le contour AB par des arcs satisfaisant, en outre, à la relation $v = \text{constante}$.

Je vais m'expliquer plus complètement sur un exemple très simple et d'ailleurs analogue, au fond, aux exemples géométriques déjà traités.

Nous savons que l'on a, sur une surface quelconque, pour un contour fermé γ délimitant une cloison Γ (n° 7),

$$\int \int_{\Gamma} \frac{d\sigma}{R_1 R_2} = \int_{\gamma} \gamma d. \text{ arc tang } \frac{\alpha}{\beta}.$$

Si AB est un arc ouvert, tracé sur la même surface, que représente l'intégrale

$$(16) \quad \int_A^B \gamma d. \text{ arc tang } \frac{\alpha}{\beta}.$$

Alors

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{p}{q}$$

et cette expression prend une valeur constante sur les courbes de contact de la surface avec un cylindre circonscrit de génératrices parallèles à une droite du plan Oxy .

Ainsi, sur l'ellipsoïde rapporté à ses axes, l'arc AB devra être fermé par des arcs plans, AC et BC, aboutissant au sommet C sur Oz, car de tels arcs sont dans des plans diamétraux conjugués de directions définies dans Oxy . Dans ces conditions, l'intégrale (16) sera égale à

$$\int \int_{\Gamma} \frac{d\sigma}{R_1 R_2}$$

si Γ désigne l'aire ellipsoïdale incluse dans le contour ABCA.

[31] Remarquons encore que ces aperçus élémentaires font partie de problèmes très divers, de difficultés inégales, donnant lieu à des méthodes différentes, pouvant être proposés quant à toutes les extensions de la formule de Stokes.

Ainsi, si x et y désignent deux variables complexes, l'intégrale

$$\int \int F(x, y) dx dy,$$

définie, de manière convenable, pour une variété à deux dimensions de l'espace à quatre, est nulle pour une variété fermée; c'est le théorème de Cauchy-Poincaré.

Mais quelle serait la valeur de cette intégrale si on ne l'étendait qu'à une certaine cloison définie sur la variété précédente par un contour fermé?

Je me permets de rappeler que j'ai complètement traité cette question, pour deux et même pour n variables complexes, dans la Deuxième Partie de mon Troisième Mémoire.

