
SUR LES TRANSFORMATIONS ET EXTENSIONS

DE

LA FORMULE DE STOKES

PAR M. A. BUHL

TROISIÈME MÉMOIRE ⁽¹⁾

Ce Mémoire contient, dans sa première partie, de nouvelles applications géométriques de la formule de Stokes qui, logiquement, devraient être rapprochées du travail consacré à de telles applications et publié en 1910. Mais je ne puis évidemment donner les résultats que dans l'ordre où je les obtiens.

L'idée fondamentale est de déterminer des aires, sur une surface donnée E , par un contour fermé Σ non tracé sur E , mais pris de manière tout à fait quelconque dans l'espace. C'est le cône ayant pour sommet l'origine O et Σ pour directrice qui découpe sur E les aires à étudier. Celles-ci sont des fonctions de Σ , des fonctions de ligne, au sens de M. V. Volterra, et il semble que les propriétés à obtenir dans une telle voie soient nombreuses et d'une simplicité remarquable.

Au sujet des fonctions de ligne, on peut faire une remarque fort curieuse et générale.

Si l'on possède un jour une théorie de ces fonctions dont tous les chapitres correspondront aux chapitres de la théorie des fonctions de points (géométriques ou analytiques), elle sera vraisemblablement, *dans son ensemble*, plus étendue et plus complexe que la théorie des fonctions ponctuelles. Mais ceci n'empêche pas qu'il semble y avoir, dans la théorie des fonctions de lignes, des chapitres particulièrement simples n'ayant point, quant à cette simplicité, d'analogues dans la théorie des fonctions de points. Ainsi sur un cercle de rayon rationnel je ne puis, à l'aide de

(¹) Ces trois Mémoires ont été précédés par deux autres : *Sur les applications géométriques de la formule de Stokes* et *Sur la formule de Stokes dans l'hyperespace*, publiés aussi dans ce Recueil. Le présent travail est donc, en réalité, le cinquième d'une série de publications consacrées au même sujet.

droites et d'autres cercles, déterminer un arc rationnel; au contraire, en coupant une sphère par un cylindre circulaire, Viviani, au dix-septième siècle, y déterminait déjà très simplement un contour enfermant une aire rationnelle.

Sur une ellipse, je ne puis déterminer des arcs liés par une relation imposée qu'en faisant appel, en général, aux ressources de la théorie des fonctions elliptiques. Or, il ressort du présent Mémoire que ce n'est nullement nécessaire pour construire, sur l'ellipsoïde, des aires ainsi liées.

Dans la seconde partie, j'examine surtout la proposition suivante : *le théorème de Cauchy-Poincaré, pour les fonctions de n variables complexes, revient simplement à la formule générale de Green où les variables deviennent imaginaires.*

On a ainsi non pas le théorème de l'intégrale multiple à variables complexes qui est nulle pour une certaine variété fermée, mais un théorème exprimant la valeur d'une telle intégrale étendue à une portion ouverte de la variété en question. Et cela vaut peut-être un peu plus, car le second théorème donne immédiatement le premier sans que la réciproque soit vraie.

L'attention a été réattirée sur ce sujet par M. Émile Picard, qui a précisément consacré son Cours de 1914 à la formule de Green et à ses applications aux fonctions de variables complexes. Je dois avouer, qu'à mon grand regret, je n'ai pu me procurer sur ce Cours que des renseignements fort vagues; je dois même craindre en avoir inconsciemment reproduit certains points. La plus grande ambition que je puisse avoir, bien qu'elle ne corresponde même pas à celle d'un auditeur direct, est que mon travail soit simplement rangé avec ceux suscités par l'enseignement du Maître.

Quant à la formule de Green proprement dite, je la rattache à une identité, comme toutes les formules analogues étudiées dans mes précédents travaux; la transformation fait alors retrouver la théorie générale du multiplicateur de Jacobi. La première idée à cet égard me paraît avoir été émise par M. P. Appell dans une Note qui m'a été d'un très important secours.

Enfin les deux parties du Mémoire ne sont pas aussi disparates qu'il pourrait sembler au premier abord. Que la variable qui doit, en général, être complexe sur une surface algébrique puisse, en redevenant réelle, nous donner des propriétés purement géométriques d'intégrales attachées à la surface, c'est ce que l'on sait suffisamment de par les si élégants résultats dus à M. G. Humbert; je dois beaucoup aussi à l'étude des travaux de ce savant.

PREMIÈRE PARTIE

Nouvelles applications géométriques ⁽¹⁾.

[1] Les applications qui vont suivre reposent sur une transformation de la formule de Stokes ordinaire qui, loin d'en être une extension, en est une particularisation; derrière celle-ci, cependant, semblent pouvoir se dérouler d'innombrables conséquences géométriques.

Dans la formule habituelle

$$(1) \quad \int \int_{\sigma} \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} d\sigma = \int_{\Sigma} P dx + Q dy + R dz,$$

posons

$$P = \gamma H, \quad Q = -xH, \quad R = 0,$$

H étant une fonction homogène d'ordre -2 en x, y, z . Il vient :

$$\int \int_{\sigma} \left[\alpha x \frac{\partial H}{\partial z} + \beta y \frac{\partial H}{\partial z} - \gamma \left(2H + x \frac{\partial H}{\partial x} + y \frac{\partial H}{\partial y} \right) \right] d\sigma = \int_{\Sigma} H(y dx - x dy).$$

Or, d'après le théorème d'Euler,

$$x \frac{\partial H}{\partial x} + y \frac{\partial H}{\partial y} + z \frac{\partial H}{\partial z} = -2H$$

et, par suite,

$$(2) \quad \int \int_{\sigma} \frac{\partial H}{\partial z} (\alpha x + \beta y + \gamma z) d\sigma = \int_{\Sigma} H(y dx - x dy).$$

On peut observer que $\alpha x + \beta y + \gamma z$ est la distance de l'origine O au plan tangent mené, à la cloison σ , en l'élément $d\sigma$, là où les cosinus directeurs de la normale sont α, β, γ . Donc

$$(\alpha x + \beta y + \gamma z) d\sigma = 3d\Gamma$$

⁽¹⁾ Sur de nouvelles applications géométriques de la formule de Stokes (Comptes rendus, 17 mai 1915).

si $d\Gamma$ est le volume du cône élémentaire qui a pour sommet O et pour base $d\sigma$.

Par suite, (2) peut s'écrire

$$3 \int \int_{\sigma} \frac{\partial H}{\partial z} d\Gamma = \int_{\Sigma} H(y dx - x dy).$$

Par permutations circulaires et avec deux autres fonctions F et G, analogues à H, on a deux autres formules telles que l'addition des trois donne :

$$3 \int \int_{\sigma} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \right) d\Gamma = \int_{\Sigma} \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & y & z \\ F & G & H \end{vmatrix}$$

ou, plus explicitement,

$$(3) \quad \int \int_{\sigma} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \right) (zx + \beta y + \gamma z) d\sigma = \int_{\Sigma} \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & y & z \\ F & G & H \end{vmatrix}.$$

Telle est la formule qu'il s'agissait d'obtenir et sur laquelle va reposer tout ce qui suit. Elle est évidemment moins générale que (1), car P, Q, R sont des fonctions quelconques, tandis que F, G, H *sont des fonctions homogènes d'ordre - 2*.

Pour ce que nous avons à faire, c'est surtout la formule (2) qui interviendra comme étant plus maniable que (3). Toutefois, (2) a le léger inconvénient de ne pas être parfaitement symétrique dans des questions géométriques où la symétrie est cependant manifeste. Dans de tels cas, on se rappellera qu'il est toujours possible d'adjoindre à (2) deux autres formules analogues avec lesquelles on aurait une formule (3) parfaitement symétrique.

[2] Aires définies sur une surface par un contour non situé sur la surface. -- Soit une surface E ayant pour équation

$$(4) \quad f(X, Y, Z) = 1,$$

f étant homogène d'ordre *m* en X, Y, Z. Hors de cette surface et, pour le moment, sans aucune relation avec elle, considérons un contour fermé Σ qui pourra servir de directrice à un cône de sommet O; ce cône découpera sur E une cloison dont l'aire σ_E sera déterminée par le choix du contour Σ .

Nous allons d'abord nous proposer d'exprimer cette aire σ_E au moyen d'une intégrale double attachée à une cloison σ jetée sur le contour Σ .

Sur la cloison σ considérons, en M, un élément $d\sigma$ que nous joindrons à O par un

cône élémentaire donnant, en N, sur E, un élément $d\sigma_E$. La normale en N, à E, a pour cosinus directeurs :

$$\frac{f_x}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}, \quad \frac{f_y}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}, \quad \frac{f_z}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}.$$

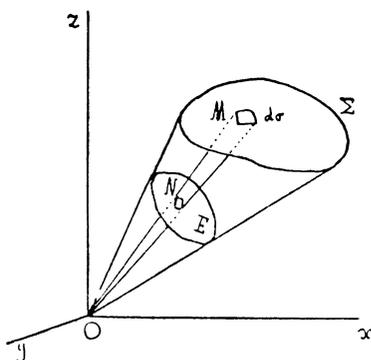


FIG. 1.

Or, en vertu de l'homogénéité de f , ces expressions sont homogènes d'ordre zéro et ne doivent point changer si l'on y remplace X, Y, Z par x, y, z coordonnées de M .

Si l'on projette $d\sigma_E$, en N, sur la sphère de centre O et de rayon ON, cette projection a pour valeur :

$$\frac{xf_x + yf_y + zf_z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}} d\sigma_E.$$

De même, pour la projection, en M, de $d\sigma$ sur la sphère de rayon OM, on a :

$$\frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} d\sigma.$$

Or, ces projections doivent être entre elles comme les carrés de ON et OM. On a donc :

$$\frac{xf_x + yf_y + zf_z}{(\alpha x + \beta y + \gamma z) \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}} \frac{d\sigma_E}{d\sigma} = \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

De plus, on voit immédiatement que le point N, appartenant à la droite OM et à la surface d'équation (4), a pour coordonnées :

$$X = x[f(x, y, z)]^{-\frac{1}{m}}, \quad Y = y[f(x, y, z)]^{-\frac{1}{m}}, \quad Z = z[f(x, y, z)]^{-\frac{1}{m}}.$$

Portant ces valeurs de X, Y, Z dans l'équation précédente, on en tire définitivement :

$$(5) \quad d\sigma_E = \frac{1}{m} [f(x, y, z)]^{-\frac{m+2}{m}} (f_x^2 + f_y^2 + f_z^2)^{\frac{1}{2}} (\alpha x + \beta z + \gamma z) d\sigma.$$

Donc

$$(6) \quad \sigma_E = \frac{1}{m} \int_{\sigma} [f(x, y, z)]^{-\frac{m+2}{m}} (f_x^2 + f_y^2 + f_z^2)^{\frac{1}{2}} (\alpha x + \beta y + \gamma z) d\sigma.$$

Telle est l'expression de l'aire de la cloison E par une intégrale double attachée à une cloison σ de contour Σ .

[3] Il est maintenant évident, au point de vue géométrique, que la cloison σ n'a joué qu'un rôle intermédiaire dans le raisonnement précédent. Peu importe sa forme; son contour Σ a seul de l'importance. *L'aire σ_E est une fonction de ligne*, au sens de M. V. Volterra, savoir une fonction du contour fermé Σ . L'intégrale double de l'égalité (6) doit sûrement être transformable en une intégrale de ligne par la formule de Stokes. On peut même dire que la formule de Stokes ne joue pas ici un rôle plus ou moins accidentel; elle est profondément d'accord avec la nature des questions qui vont être développées, puisqu'elle est essentiellement relative à l'invariance d'intégrales superficielles quand celles-ci sont attachées à des cloisons variables à frontières invariables.

Mais la première remarque particulière au présent sujet est que la formule de Stokes (1) n'a pas besoin d'y intervenir dans toute sa généralité. La particularisation (2) suffira. Les intégrales doubles de (2) et (6) seront, en effet, identifiables si, dans celle de l'égalité (6), les termes dépendant de f forment un ensemble homogène d'ordre -3 . C'est bien ce qui a lieu.

[4] Remarquons, avant d'aller plus loin, que l'expression (5) de $d\sigma_E$ est susceptible de quelques vérifications partielles immédiates.

Tout d'abord, si la cloison σ vient se confondre avec σ_E , (5) doit donner $d\sigma_E = d\sigma$.

Dans ce cas, α, β, γ désignant aussi bien les cosinus de la normale en N , on a :

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \frac{x f_x + y f_y + z f_z}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}} = \frac{m f}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}$$

et, comme $f = 1$, on a bien $d\sigma_E = d\sigma$.

Autre vérification. Élevons à la puissance k les deux membres de l'équation (4) de la surface E . Tout se passe comme si f était remplacé par f^k , fonction dont l'ordre d'homogénéité serait alors mk . Donc l'expression de $d\sigma_E$ ne doit point changer si l'on

y remplace f par f^k et m par mk . Cela est immédiatement vérifiable en écrivant cette expression (5) sous la forme

$$(7) \quad d\sigma_E = -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} f^{-\frac{2}{m}} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} f^{-\frac{2}{m}} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z} f^{-\frac{2}{m}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} (x\alpha + \beta y + \gamma z) d\sigma.$$

[5] *Carte plane conservant, dans Oxy, les aires* σ_E . — De la comparaison des formules (2) et (6), on conclut

$$(8) \quad \sigma_E = \int_{\Sigma} H(y dx - x dy)$$

en posant

$$(9) \quad \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{1}{m} f^{-\frac{m+2}{m}} (f_x^2 + f_y^2 + f_z^2)^{\frac{1}{2}},$$

d'où

$$(10) \quad H = -\frac{1}{2} \Omega(x, y) + \frac{1}{m} \int f^{-\frac{m+2}{m}} (f_x^2 + f_y^2 + f_z^2)^{\frac{1}{2}} dz.$$

L'intégrale qui figure dans cette dernière égalité est évidemment une intégrale partielle en z ; l'intégration indéfinie doit entraîner, en général, l'adjonction du terme en Ω .

Ce terme doit être ou nul ou homogène d'ordre -2 .

Ceci posé, nous arrivons au point essentiel de la première partie de ce Mémoire.

Nous prenons l'expression (8) de σ_E avec la valeur de H formée en (10). Soit H_1 une fonction *quelconque* de x, y, z et *considérons la surface*

$$(11) \quad H = H_1$$

sur laquelle nous tracerons le contour Σ . Alors

$$(12) \quad \sigma_E = \int_{\Sigma} H_1(y dx - x dy)$$

et l'aire σ_E est ainsi ou particulièrement facile à exprimer ou comparable de manière intéressante avec quelque autre grandeur géométrique ayant pour expression le second membre de (12).

Ainsi soit

$$(13) \quad H = H_1 = \text{const.} = -\frac{1}{2}.$$

L'équation (10) devient :

$$(14) \quad 1 = \Omega(x, y) - \frac{2}{m} \int f^{-\frac{m+2}{m}} (f_x^2 + f_y^2 + f_z^2)^{\frac{1}{2}} dz.$$

C'est là l'équation d'une surface σ tel qu'un contour Σ y tracé donne sur Oxy une projection contenant une aire Π égale à l'aire σ_E déterminée sur E par le cône $O\Sigma$.

Si l'on déforme la projection Π en lui conservant son aire, Σ se déformera sur la surface d'équation (14) et ainsi nous obtiendrons sur E une infinité de cloisons ayant toutes même aire.

Même conclusion si, sans toucher à Π , on fait varier (14) en modifiant Ω . Enfin les deux procédés peuvent être combinés pour l'obtention de cloisons équivalentes sur E .

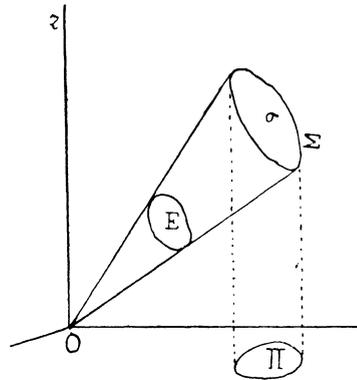


FIG. 2.

En général, et tout au moins pour des contours suffisamment petits, il n'y aura point de difficultés à faire correspondre un seul point de σ , et par suite un seul point de Π , à un seul point de E . Ainsi nous aurons en Π une carte de E avec conservation des aires. C'est d'abord ce problème cartographique qui nous donnera des résultats simples, nombreux et élégants qu'on pourrait évidemment rattacher à d'autres méthodes de représentation des surfaces sur un plan. Mais il ne faut pas perdre de vue que la méthode précédente semble dépasser de beaucoup, en puissance, le dit problème cartographique. Celui-ci correspond à la valeur constante de H_1 indiquée en (13), alors que H_1 pourrait être une fonction quelconque de x, y, z , ce qui, en vertu de (12), ferait correspondre à σ_E non pas une autre aire, mais des expressions géométriques fort diverses. D'ailleurs, nous donnerons plus loin (n^{os} 26 à 29) quelques exemples de cette dernière catégorie.

CORRESPONDANCES ENTRE AIRES PLANES.

[6] Des correspondances entre aires planes, en nombre infini, peuvent être obtenues avec une extrême facilité comme applications très élémentaires des généralités précédentes. Il serait même puéril de profiter de cette abondance pour réunir ici un grand nombre d'exemples, mais il n'est pas mauvais de montrer brièvement quels

sont les résultats rudimentaires qui peuvent être considérés comme les germes, les prototypes de résultats plus élevés qui seront établis ensuite.

L'équation (4) la plus simple est évidemment celle où f est fonction homogène du premier ordre. On a ainsi le plan E

$$\frac{1}{p}(\lambda x + \mu y + \nu z) = 1$$

où λ, μ, ν seront des cosinus directeurs pour la distance p le séparant de O.

L'équation (14) des surfaces σ est alors

$$(15) \quad 1 = \Omega(x, y) + \frac{p^2}{\nu(\lambda x + \mu y + \nu z)^2}.$$

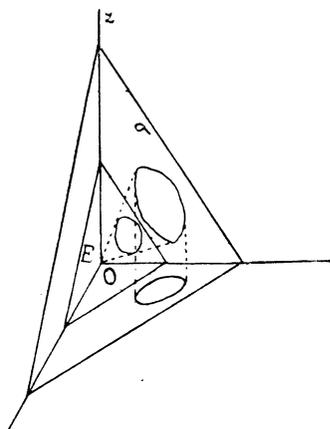


FIG. 3.

Si l'on prend $\Omega = 0$, on a deux plans, symétriques par rapport à l'origine, dont l'un est

$$\lambda x + \mu y + \nu z = \frac{p}{\sqrt{\nu}}.$$

Un contour d'aire σ_E , tracé dans E, se projette coniquement, de O, dans le plan σ , suivant un contour enfermant une aire $\frac{1}{\nu} \sigma_E$ et celle-ci, projetée orthogonalement sur Oxy, redonne bien σ_E . Rien de plus évident; mais, si l'on remplace maintenant $\Omega(x, y)$ par une fonction homogène d'ordre -2 , on voit, par exemple, que le plan σ peut être remplacé par une infinité de surfaces du quatrième degré. Et celles-ci ne correspondent encore qu'à un choix de Ω qui est des plus simples.

[7] Pour préciser, prenons maintenant le cas où le plan E est parallèle à Oxy et a pour équation $z = c$. On a $\lambda = \mu = 0, \nu = 1, p = c$ et l'équation des surfaces σ devient :

$$1 = \Omega(x, y) + \frac{c^2}{z^2}.$$

Prenons, en particulier, le cylindre

$$\frac{a^2}{x^2} + \frac{c^2}{z^2} = 1$$

dont la section droite par le plan Oxz est une quartique AB bien connue sous le nom de *Kreuzcurve*. Dans le plan $z=c$, prenons, par exemple, le rectangle $A'B'C'D'$ dont le côté $A'B'$ est dans Oxz .

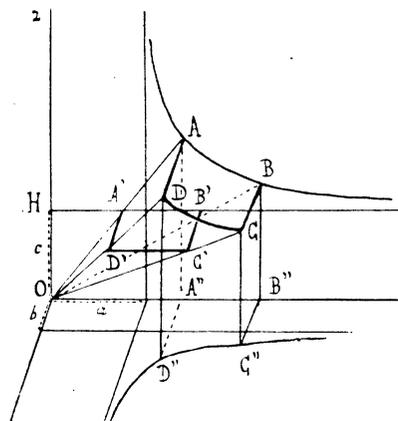


FIG. 4.

De O , ce rectangle se projette coniquement en $ABCD$ sur le cylindre cruciforme, et le quadrilatère $ABCD$ se projette, parallèlement à Oz , sur Oxy , suivant $A''B''C''D''$. L'aire $A''B''C''D''$ doit être égale à celle du rectangle $A'B'C'D'$. C'est ce qu'il est bien simple de vérifier directement. Soient

$$HA' = \xi_1, \quad HB' = \xi_2, \quad A'D' = B'C' = b,$$

d'où facilement

$$OA'' = \sqrt{a^2 + \xi_1^2}, \quad OB'' = \sqrt{a^2 + \xi_2^2}.$$

Quant à la courbe CD , elle est l'intersection du cylindre cruciforme et du plan $OC'D'$ d'équation $cy = bz$; éliminant z entre cette dernière et l'équation du cylindre, on a, pour la courbe projection $C''D''$,

$$\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1.$$

C'est une autre *Kreuzcurve* pour laquelle l'aire $A''B''C''D''$ est

$$\int_{OA''}^{OB''} \frac{bx \, dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = b(\xi_2 - \xi_1).$$

C'est bien l'aire du rectangle $A'B'C'D'$.

On voit ainsi, d'une manière purement géométrique, pourquoi la *Kreuzcurve* est une courbe facilement quarrable.

[8] Le raisonnement du paragraphe 6 ne s'applique pas pour des plans E parallèles à Oz, l'équation (15) ne conservant pas de signification immédiate pour $v=0$. Revenons pour le plan E d'équation $x=a$. Alors, pour $f=\frac{x}{a}$, l'équation (14) devient :

$$r = \Omega(x, y) \pm 2a^2 \frac{z}{x^3}.$$

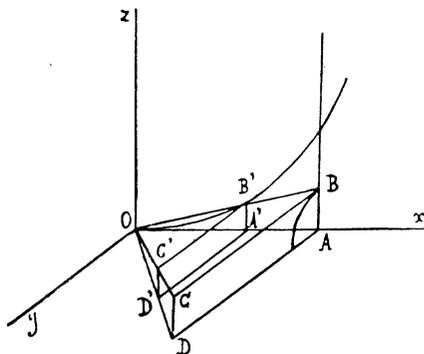


FIG. 5.

Prenons, en particulier,

$$2a^2z = x^3.$$

Cette surface σ est un cylindre de génératrices parallèles à Oy et dont la section par Oxz est la parabole cubique OB'. Dans le plan $x=a$, considérons le rectangle ABCD servant de base au cône de sommet O qui, dans de telles conditions, est une pyramide. Celle-ci pénètre dans le cylindre σ suivant un contour dont la projection sur Oxy est le triangle OA'D'. *Ce triangle doit avoir même aire que le rectangle ABCD.*

En effet, si $AB=b$, $AD=c$, on calcule immédiatement que

$$OA' = \sqrt{2ab}, \quad A'D' = \frac{c}{a} \sqrt{2ab}.$$

L'aire du triangle OA'D' est bien bc .

Autre exemple. — Remplaçons le rectangle ABCD par un cercle de centre A et de rayon $AB=b$. Le cône de sommet O ayant ce cercle pour base coupe le cylindre suivant la courbe gauche

$$2a^2z = x^3, \quad a^2(z^2 + y^2) = b^2x^2$$

dont la projection sur Oxy a pour équation

$$y^2 = \frac{x^2}{a^2} \left(b^2 - \frac{x^4}{4a^2} \right).$$

C'est une sorte de huit dont on aperçoit immédiatement la forme en se basant précisément sur sa définition spatiale. *La demi-boucle de cette courbe doit avoir même aire que le quart du cercle A.* Or

$$\int_0^{\sqrt{ab}} \frac{x}{a} \sqrt{b^2 - \frac{x^4}{4a^2}} dx = \int_0^b \sqrt{b^2 - u^2} du = \frac{\pi}{4} b^2.$$

AIRES SPHÉRIQUES.

[9] La question des aires sphériques a donné lieu à un nombre considérable de travaux et ce à des points de vue assez divers. Dans le domaine purement géométrique, on sait le grand intérêt qui s'attacha, pour l'époque, aux résultats de Viviani concernant les aires sphériques exactement quarrables. D'autre part, la nécessité de conserver les aires dans les cartes géographiques, quoique moins impérieuse que celle de conserver les angles, donne des résultats extrêmement variés.

D'autre part encore, l'aire, sur la sphère de rayon unité, correspond à la notion d'*angle sphérique* ou *solide* qui s'introduit dans de nombreuses questions de Physique. M. Émile Picard a précisément effectué, en ce sens, un important rapprochement en le faisant dépendre de la formule de Stokes (*Traité d'Analyse*, t. I, 2^e édit., p. 135).

Dans un ordre d'idées plus abstrait et qui fait penser à nouveau aux recherches géométriques de Viviani, M. G. Humbert généralise, pour la sphère transpercée par un cône, le théorème de l'angle plan mesuré par la somme ou la différence des arcs qu'il intercepte sur une circonférence quelconque (*Sur quelques propriétés des aires sphériques*. Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1888). La question, qui débute d'une manière élémentaire, peut être élevée jusqu'aux hautes régions de l'Analyse. M. Humbert a montré (*Sur le théorème d'Abel et quelques-unes de ses applications à la Géométrie*. loc. cit., 1890, p. 241) qu'elle se généralisait pour la sphère coupée par certains faisceaux de surfaces algébriques.

Il est intéressant de rattacher certains des résultats de M. Humbert à la formule de Stokes particularisée sous la forme (3). Les autres résultats qui suivent ont surtout pour but de préparer la difficile étude des aires ellipsoïdales; celle-ci serait inextricable si l'on ne pouvait considérer l'ellipsoïde comme une sphère déformée sur laquelle on cherche, en vertu de la continuité, ce que deviennent certains théorèmes sphériques.

Les méthodes exposées au début du présent Mémoire donnent le moyen d'obtenir, sur la sphère, une foule d'aires équivalentes, ou d'aires rationnelles, ou d'aires ayant des irrationalités algébriques fixées à l'avance, le tout en n'employant que des surfaces algébriques tantôt de révolution, tantôt quelconques. Il est, à coup sûr, beaucoup plus facile d'obtenir des aires sphériques rationnelles que d'en obtenir de planes, construites par arcs de cercle, comme les lunules d'Hipparque.

[10] Pour surface E. d'équation (4), prenons la sphère

$$(16) \quad f = \frac{1}{R^3}(x^2 + y^2 + z^2) = 1.$$

L'équation (14) des surfaces σ est alors

$$(17) \quad 1 = \Omega(x, y) - 2R^2 \int (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} dz$$

ou

$$(18) \quad 1 = \Omega(x, y) - \frac{2R^2 z}{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Ces surfaces ne sont pas nécessairement de révolution, ce qui est déjà une remarque assez curieuse, mais les plus simples le sont et nous prendrons d'abord, k étant un paramètre assimilable à une longueur,

$$\Omega(x, y) = \frac{2k^2}{x^2 + y^2}.$$

Posant $x^2 + y^2 = r^2$, nous aurons pour équation, en coordonnées semi-polaires, des surfaces σ ou du méridien de ces surfaces :

$$(19) \quad 1 = \frac{2k^2}{r^2} - \frac{2R^2 z}{r^2 \sqrt{z^2 + r^2}}.$$

Cette équation, ordonnée sous la forme

$$(20) \quad r^3(r^2 - 4k^2)(r^2 + z^2) + 4[k^4 r^2 + (k^4 - R^4)z^2] = 0,$$

est celle d'une courbe plane qui, en général, est du sixième degré, ce degré s'abaissant au quatrième pour $k = R$. Ce n'est donc point ici pour $\Omega = 0$ qu'on obtient les surfaces σ les plus simples. Pour $k = R$, l'équation précédente peut s'écrire

$$(r^2 + z^2)(2R^2 - r^2)^2 = 4R^4 z^2.$$

Dans le plan de cette courbe méridienne et avec l'origine pour pôle, prenons des coordonnées polaires ρ et ω , c'est-à-dire posons $r = \rho \sin \omega$, $z = \rho \cos \omega$, l'axe polaire étant Oz. Il viendra :

$$\rho \cos \frac{\omega}{2} = R.$$

Cette courbe se trace avec facilité et élégance en partant de la circonférence de centre O et de rayon R. A partir de A, sur Oz, on considère deux arcs AB et BC égaux; la tangente en B et le rayon OC donnent un point D dont le lieu est la courbe

en question. Elle est évidemment symétrique par rapport aux axes et l'équation cartésienne écrite sous la forme

$$z = \frac{2R^2 - r^2}{\sqrt{4R^2 - r^2}}$$

montre que les points doubles E, E' ont pour abscisses $\pm R\sqrt{2}$ cependant que les asymptotes réelles parallèles à Oz sont d'abscisses $\pm 2R$. La courbe est étudiée avec de plus nombreux détails géométriques dans les *Ebene Kurven* de M. Gino Loria (1^{re} édit., p. 215). Un géomètre de Vérone, P. Delanges, la construisait déjà en 1783, pour résoudre le problème de la *trisection de l'angle* et, en conséquence, l'appelait *trisécante*; il est curieux de constater qu'elle réunit ce fameux problème à celui de la *planification des aires sphériques*.

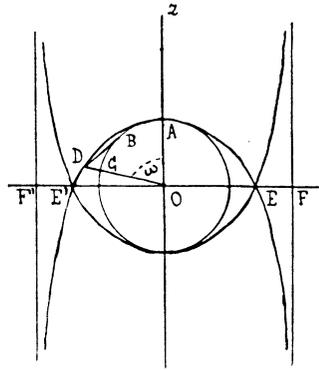


FIG. 6.

A ce dernier point de vue, que l'on fasse tourner la figure autour de Oz et tout cône de sommet O interceptera sur la sphère une aire σ_E et donnera, sur la surface de révolution ayant pour méridienne la trisécante, un contour Σ dont la projection sur Oxy aura une aire égale à σ_E .

En particulier, si le cône s'ouvre de manière à se confondre avec le plan Oxy, on voit aisément que *l'aire de l'hémisphère doit être égale à celle d'un cercle de rayon $OE = R\sqrt{2}$* . C'est bien ce qui a lieu. Si le cône continue à s'ouvrir de manière à se refermer de l'autre côté du plan Oxy, l'aire σ_E peut tendre vers l'aire de la sphère entière, le contour Σ s'en allant à l'infini vers le cylindre de révolution asymptote à la surface σ . Le contour Σ a alors pour projection sur Oxy le cercle de diamètre FF' et, par suite, *l'aire de la sphère doit être égale à celle d'un cercle de rayon $OF = 2R$* . C'est bien encore ce qui a lieu. Plus généralement, un plan normal à Oz et passant par C donne sur la sphère une calotte dont la flèche est $R(1 - \cos \omega)$ et dont l'aire est $2\pi R^2(1 - \cos \omega)$.

Le cône de sommet O qui passe par le contour de cette calotte donne, sur la

surface de révolution σ , un cercle dont le rayon est la distance de D à l'axe Oz, soit $2R \sin \frac{\omega}{2}$.

L'aire de ce cercle, qui se conserve par projection sur le plan Oxy, est bien égale à celle de la calotte précédente.

[11] Il ne paraît pas difficile de faire l'étude géométrique des courbes méridiennes (20) pour k quelconque. Bornons-nous à $k=0$, c'est-à-dire à $\Omega=0$. Nous venons de voir que ce cas n'est pas le plus simple, contrairement à ce qu'on pourrait croire au premier abord, mais, au point de vue de la simplicité, il vient vraisemblablement en second lieu.

Pour $k=0$, l'équation (20) devient

$$r^4(r^2 + z^2) = 4R^4 z^2$$

ou

$$z = \frac{r^3}{\sqrt{4R^4 - r^4}}$$

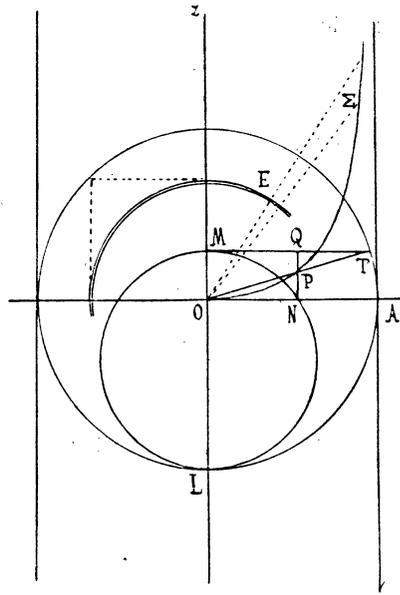


FIG. 7.

Avec les coordonnées polaires $r = \rho \cos \omega$, $z = \rho \sin \omega$, prises cette fois comme à l'ordinaire avec l'axe polaire dans le plan $z=0$, l'équation précédente devient :

$$\rho^2 \cos^2 \omega = 2R^2 \sin \omega.$$

Les courbes de ce type admettent une construction géométrique simple. Soit une circonférence de rayon $OL = a$; sur LO, c'est-à-dire sur Oz, prenons un point M,

considérons la circonférence de diamètre ML qui coupe l'axe polaire en N et sa tangente en M qui donne T sur la première circonférence. La droite NQ , parallèle à LM , et le rayon OT donnent un point P dont le lieu est une courbe du type indiqué.

En effet,

$$OM = OT \sin \omega = a \sin \omega, \quad \overline{ON^2} = OL \cdot OM = a^2 \sin \omega$$

D'autre part, $ON = OP \cos \omega = \rho \cos \omega$ et la comparaison des deux expressions de ON donne

$$\rho^2 \cos^2 \omega = a^2 \sin \omega.$$

La grande circonférence qui sert de base à la construction doit avoir un rayon a égal à $R\sqrt{2}$ si R est le rayon de la sphère donnée E . La courbe a quatre branches symétriques dont une seule est représentée sur la figure.

Tout cône de sommet O , déterminé en Σ par un contour tracé sur la surface de révolution σ ayant la courbe OP pour méridien, intercepte sur la sphère E une aire σ_E égale à celle contenue dans la projection du contour Σ sur le plan $z = 0$.

En particulier, considérons la calotte située sur E au-dessus du cône de révolution d'axe Oz et dont une génératrice serait OP . Cette calotte a pour flèche $R - R \sin \omega$ et pour aire $2\pi R^2(1 - \sin \omega)$. Il est facile de voir qu'une telle calotte correspond à un contour Σ dont la projection s'étend, sur le plan $z = 0$, suivant une couronne circulaire de centre O ayant pour rayons

$$OA = R\sqrt{2}, \quad ON = R\sqrt{2 \sin \omega}.$$

L'aire d'une telle couronne est bien celle trouvée pour la calotte. Plus particulièrement encore, l'aire de l'hémisphère E doit être celle d'un cercle de rayon OA , ce qui se vérifie immédiatement.

On pourrait objecter que, dans ces derniers raisonnements, on emploie des contours qui ne sont pas simplement connexes, d'où des difficultés possibles pour l'emploi de la formule de Stokes; mais il est aisé de voir que la couronne, par exemple, pourrait être divisée en plusieurs parties pour lesquelles la légitimité serait hors de doute.

[12] *Travaux de M. G. Humbert.* — Dans son Mémoire *Sur quelques propriétés des aires sphériques*, déjà cité, M. G. Humbert considère un cône dont le sommet S est pris pour origine et une sphère de rayon R dont le centre est un point $O(a, b, c)$. Le cône pénètre dans la sphère suivant un contour Σ_1 enfermant une aire sphérique σ_1 et en ressort suivant un contour Σ_2 enfermant une aire σ_2 . Ici nous continuerons le cône de manière à lui faire couper une surface σ , indéterminée pour le moment, suivant un contour Σ . Enfin, sur une sphère SA , de rayon r , le cône découpe une aire ω qui est, si l'on veut, l'angle solide au sommet de ce cône.

Un cône élémentaire SM permet d'apercevoir de même, en allant de S vers M, les éléments d'aire $d\omega$, $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, $d\sigma$. J'écrirai, avec M. Humbert, les angles PM_2O et PM_1O étant égaux,

$$d\omega = \frac{d\sigma_2 \cos PM_2O}{SM_2^2} = \frac{d\sigma_1 \cos PM_1O}{SM_1^2} = \frac{d\sigma_2 - d\sigma_1}{SM_2^2 - SM_1^2} \cos PM_2O.$$

De plus,

$$2R \cos PM_2O = SM_2 - SM_1$$

et, par suite, si x, y, z sont les coordonnées de M,

$$d\sigma_2 - d\sigma_1 = 4RSP d\omega = 4R \frac{ax + by + cz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} d\omega.$$

On a donc :

$$\sigma_2 - \sigma_1 = 4R \iint_{\omega} \frac{ax + by + cz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} d\omega.$$

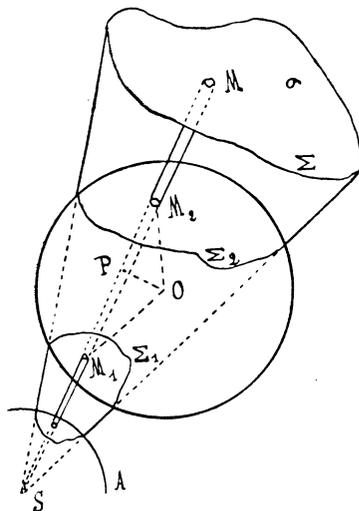


FIG. 8.

On a ainsi, d'après MM. Darboux et Humbert, une différence d'aires relatives à la sphère O exprimée par une intégrale double étendue à l'aire ω qui est sur la sphère SA.

Proposons-nous, au contraire, d'exprimer $\sigma_2 - \sigma_1$ en faisant intervenir la cloison σ pour laquelle on a, en M, l'élément $d\sigma$ avec une normale dont les cosinus directeurs sont α, β, γ . On a :

$$d\omega = \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \frac{d\sigma}{x^2 + y^2 + z^2}$$

et, par suite,

$$\sigma_2 - \sigma_1 = 4R \int \int_{\sigma} \frac{ax + by + cz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} (xx + \beta y + \gamma z) d\sigma.$$

Or, dans cette intégrale double, le coefficient de $(xx + \beta y + \gamma z)d\sigma$ est homogène d'ordre -3 en x, y, z . Donc, d'après la formule (3), l'intégrale doit être immédiatement transformable en une intégrale de ligne relative au contour Σ . En fait si, dans la formule (3), on pose

$$F = \frac{a}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad G = \frac{b}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad H = \frac{c}{x^2 + y^2 + z^2},$$

cette formule (3) devient :

$$2 \int \int_{\sigma} \frac{ax + by + cz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} (xx + \beta y + \gamma z) d\sigma = \int_{\Sigma} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

Donc

$$\sigma_2 - \sigma_1 = 2R \int_{\Sigma} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

C'est encore là un résultat donné par M. G. Humbert, en premier lieu d'ailleurs (*loc. cit.*, p. 318). En résumé, le but du présent paragraphe est simplement de montrer que les deux expressions de $\sigma_2 - \sigma_1$, par une intégrale de surface et par une intégrale de ligne, sont transformées l'une de l'autre par la formule de Stokes ou, d'une manière plus précise, par une forme particulière de la formule de Stokes, forme particulière exprimée en (3).

Les aires sphériques précédentes ont inspiré une Note, *Ueber die von Humbert untersuchten Kugelflächenstücke*, due à R. HOPPE (*Archiv der Mathematik und Physik*, 1890). Cet auteur considère d'abord le premier point de vue de M. Humbert dans lequel la sphère est transpercée par une pyramide qui ne donne le cône que comme cas limite. Il remplace des raisonnements géométriques par le calcul et obtient finalement des propriétés des polygones, particulièrement des quadrilatères sphériques. L'article commence par cette phrase : *Der Aufsatz von Humbert ist sehr geeignet zu weiterer Verfolgung des Gegenstandes anzuregen.*

[13] Essayons maintenant de reprendre, pour la différence $\sigma_2 - \sigma_1$, des raisonnements analogues à ceux faits précédemment pour les cloisons σ_k . Supposons que le centre O de la sphère de la figure 8 vienne sur l'axe Sz, d'où $a=0$, $b=0$. La symétrie, ainsi légèrement sacrifiée, serait facile à rétablir en vertu de la remarque générale terminant le paragraphe 1. Alors

$$\sigma_2 - \sigma_1 = 4Rc \int \int_{\sigma} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} (xx + \beta y + \gamma z) d\sigma$$

et, en vertu de la formule (2), ceci peut immédiatement s'écrire

$$\sigma_2 - \sigma_1 = 2Rc \int_{\Sigma} \left[\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} - \Omega(x, y) \right] (x dy - y dx),$$

si bien que, si le contour Σ se trouve sur une surface σ d'équation

$$\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} - \Omega(x, y) = \frac{1}{4Rc},$$

sa projection sur le plan Oxy enfermera une aire égale à $\sigma_2 - \sigma_1$.

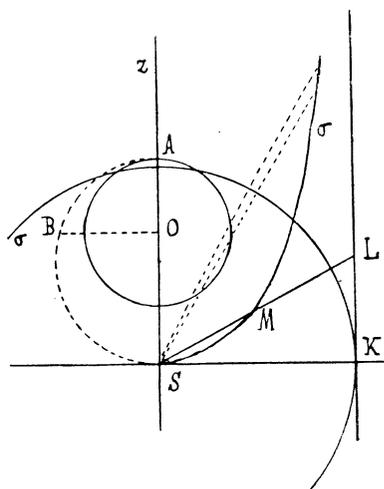


FIG. 9.

Pour $\Omega = 0$, la surface σ est une sphère de centre S et de rayon $2\sqrt{Rc}$. Sur la figure 9, $OS = c$ et $AO = R$, si bien qu'une construction fort élémentaire donne $OB = \sqrt{Rc}$ et qu'il n'y a plus qu'à tracer la sphère σ de rayon $2OB$. Tout cône de sommet S qui détermine sur la sphère O deux aires σ_2 et σ_1 , détermine sur la sphère σ un contour dont la projection sur Sxy contient l'aire $\sigma_2 - \sigma_1$. Ainsi, pour prendre un exemple simple, le cône de sommet S, circonscrit à la sphère O, y détermine deux calottes dont les aires, très facilement calculables, sont :

$$2\pi R^2 \left(1 + \frac{R}{c} \right), \quad 2\pi R^2 \left(1 - \frac{R}{c} \right).$$

Ce même cône découpe sur la sphère σ un cercle qui se conserve en projection et dont le rayon est $2R\sqrt{\frac{R}{c}}$; son aire est bien la différence des deux précédentes.

Signalons le cas particulier où $OS = OA$; les deux sphères sont alors tangentes, celle qui est intérieure ayant un rayon moitié du rayon de l'autre.

[14] Prenons maintenant

$$\Omega(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

et changeons c en $-c$, ce qui est sans inconvénient, car, après avoir mis O de l'autre côté du plan Sxy , on peut remettre ce point en sa position primitive, étant donnée la symétrie de la surface σ que nous allons obtenir. Cette surface est de révolution et, avec $r^2 = x^2 + y^2$, a pour équation en coordonnées semi-polaires :

$$r^2(r^2 + z^2) = 4Rc z^2.$$

Ceci est, en coordonnées cartésiennes r et z , l'équation du méridien, laquelle, par introduction des coordonnées polaires définies par $r = \rho \cos \omega$, $z = \rho \sin \omega$, peut s'écrire

$$\rho = 2\sqrt{Rc} \operatorname{tang} \omega.$$

C'est encore là une courbe bien connue sous le nom de *courbe de Gutschoven* ou de *cappa* (G. LORIA, *Ebene Kurven*, 1^{re} édit., p. 182; H. BROCARD, *Bibliographie des courbes géométriques*, t. I, p. 10; t. II, p. 48). La forme de la courbe, comme l'indique le dernier nom, est celle de la lettre grecque κ . Ici la manière la plus simple de rattacher la courbe aux constructions déjà effectuées sur la figure 9 est de considérer le cercle σ , déjà tracé avec un rayon $SK = 2OB = 2\sqrt{Rc}$, d'y mener un segment tangent KL et de prendre, sur SL , $SM = KL$. Le lieu du point M est la courbe cherchée; KL est une asymptote. La courbe est symétrique par rapport aux axes. Tel est le méridien d'une surface de révolution σ qui, quant à l'évaluation de la différence d'aires sphériques $\sigma_2 - \sigma_1$, considérée au paragraphe précédent, a la même propriété que la sphère σ .

AIRES ELLIPSOÏDALES.

[15] Pour situer convenablement la question des aires ellipsoïdales, je ne puis mieux faire que de reproduire textuellement les lignes suivantes écrites par M. G. Humbert, en 1890, dans son Mémoire déjà cité, *Sur le théorème d'Abel et quelques-unes de ses applications à la Géométrie* (*loc. cit.*, 1890, p. 234).

« Les propriétés des aires sur l'ellipsoïde ont été jusqu'ici à peine effleurées par
 « les géomètres; nous ne connaissons, sur ce sujet, en dehors des travaux relatifs à
 « l'aire totale de la surface, que les recherches de Jellett et Lebesgue qui ont donné
 « l'expression, à l'aide des intégrales elliptiques, d'aires ellipsoïdales limitées par
 « des courbes algébriques d'ailleurs très particulières. Nous démontrons qu'on peut
 « déterminer simplement sur l'ellipsoïde une infinité de courbes algébriques à deux
 « boucles fermées, comprenant entre elles une aire réductible aux fonctions ellip-

« tiques et, sur une quadrique quelconque, une infinité d'aires dont la somme algébrique s'exprime à l'aide de fonctions rationnelles et logarithmiques. Ce sujet « étant nouveau, nous avons cru devoir le développer assez longuement. »

Ainsi, il y a vingt-cinq ans, un géomètre d'une haute compétence pouvait considérer le sujet comme à peu près vierge. Et il ne semble pas que les travaux de M. Humbert aient entraîné depuis des adjonctions bien sensationnelles. Les méthodes du présent Mémoire me semblent éclairer d'une manière assez curieuse les difficultés de la question. Ce serait une méthode imparfaite que de vouloir délimiter sur l'ellipsoïde des aires à propriétés simples ou remarquables au moyen de contours directement tracés sur cet ellipsoïde. Ainsi l'aire totale de la surface, que l'on trouve dans de nombreux traités d'Analyse ou ouvrages sur les fonctions elliptiques (par exemple dans celui de Tannery et Molk, t. IV, p. 170), n'a rien de spécialement intéressant.

Quant aux courbes de M. Humbert, généralisations de celles de Jellett et Lebesgue, ce sont les lieux des points N de l'ellipsoïde où la normale à celui-ci fait un angle constant φ avec une direction fixe (de cosinus directeurs λ, μ, ν).

Ce sont les courbes de contact des hélicoïdes développables circonscrits à l'ellipsoïde, car de tels hélicoïdes sont des surfaces dont la normale fait un angle constant avec une direction fixe; ils peuvent devenir d'ailleurs des cônes de révolution dont le sommet décrit les focales de l'ellipsoïde.

Les courbes ellipsoïdales envisagées sont donc définies par l'équation de l'ellipsoïde

$$(21) \quad f = Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

et par la seconde équation

$$\frac{\lambda f_x + \mu f_y + \nu f_z}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}} = \cos \varphi,$$

qui s'écrit

$$\frac{\lambda Ax + \mu By + \nu Cz}{\sqrt{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2}} = \cos \varphi.$$

C'est là l'équation d'un cône qui a son sommet à l'origine O et passe par une section plane Σ de l'ellipsoïde auxiliaire

$$(22) \quad A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 = 1,$$

cône qu'on aperçoit immédiatement et qui coupe le premier ellipsoïde suivant les contours étudiés par M. Humbert. Or c'est ici le contour Σ , *non situé sur l'ellipsoïde à étudier*, qui joue un rôle simplificateur. Nous aurons, en effet, au paragraphe 18, une intégrale simple pour représenter une aire ellipsoïdale σ_r (fig. 1), intégrale qui sera attachée à un contour Σ qu'on pourra tracer sur de tout autres surfaces que

l'ellipsoïde donné. Cette intégrale aura des singularités diverses qui se simplifieront quand Σ sera sur l'ellipsoïde auxiliaire.

Pour commencer, nous allons essayer de traiter l'ellipsoïde comme la sphère; tous les résultats sphériques déjà obtenus ne semblent pas également faciles à généraliser, mais nous obtiendrons au moins, pour l'ellipsoïde, une surface σ analogue à celle qui, dans le cas de la sphère, était de révolution et avait pour méridien une trisécante (n° 10).

[16] Soit donc l'ellipsoïde (21). Je suppose $A > B > C$ si bien que, contrairement aux figures les plus habituelles de la géométrie analytique, le plus petit axe sera dirigé suivant Ox et le plus grand suivant Oz . Quand l'ellipsoïde deviendra de révolution autour de Oz , il sera *allongé* dans le sens Oz .

L'équation (14) des surfaces σ est maintenant

$$(23) \quad \mathbf{r} = \Omega(x, y) - 2 \int \frac{\sqrt{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2}}{(Ax^2 + By^2 + Cz^2)^2} dz.$$

L'intégration partielle en z est élémentaire, mais laborieuse; enfin on a, toutes réductions faites :

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathbf{r} = \Omega(x, y) &- \frac{z \sqrt{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2}}{(Ax^2 + By^2)(Ax^2 + By^2 + Cz^2)} \\ &+ \frac{(Ax^2 + By^2)^{-\frac{3}{2}}(A^2x^2 + B^2y^2)}{\sqrt{AC(A-C)x^2 + BC(B-C)y^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{Ax^2 + By^2} \sqrt{AC(A-C)x^2 + BC(B-C)y^2}}{C(Ax^2 + By^2 + Cz^2 + z \sqrt{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2})} \end{aligned} \right.$$

Il semble, au premier abord, que de telles surfaces soient incomparablement plus compliquées que les surfaces σ obtenues dans le cas de la sphère. On pourrait notamment se demander si, sur les surfaces σ de l'ellipsoïde, il n'y aurait pas à considérer une infinité de nappes ou régions qui correspondraient aux différentes déterminations présentées, dans l'équation (24), par la fonction arc tangente. La considération de cette première difficulté ne s'impose peut-être pas absolument. Le coefficient de l'arc tangente est une fonction homogène, d'ordre -2 , ne contenant que x et y ; faire varier l'arc tangente de multiples de π , c'est ajouter, à tout le second membre de l'équation, de telles fonctions homogènes *et cela revient à modifier* Ω .

Considérer, à la fois, toutes les déterminations de l'arc tangente ne s'impose donc pas beaucoup plus que de considérer, à la fois, toutes les formes qu'on peut attribuer à Ω .

Je dis maintenant que si l'on pose

$$(25) \quad \Omega(x, y) = \frac{\mathbf{r}}{Ax^2 + By^2}$$

on a vraisemblablement, pour l'ellipsoïde, la plus simple des surfaces σ ; celle-ci correspond à celle obtenue en premier lieu pour la sphère (n° 10). Essayons de vérifier cette assertion en faisant

$$A = B = C = \frac{1}{R^2}$$

dans (24), où Ω aura la forme (25). Le terme qui contient l'arc tangente est de la forme

$$\frac{1}{\rho} \text{arc tang } h\rho = h - \frac{h^3 \rho^2}{3} + \dots,$$

ce qui se réduit à h quand ρ tend vers zéro. Cette remarque faite, l'équation (24) devient :

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{z}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Le troisième terme du second membre pouvant s'écrire

$$\frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{z}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

on retrouve bien l'équation (19) dans l'hypothèse $k = R$ qui, nous l'avons vu, est aussi simple que possible.

[17] La surface d'équation (24), où Ω est toujours déterminé par (25), paraît, de prime abord, d'une excessive complication; mais, en vertu de la continuité, on peut admettre que, pour un ellipsoïde peu différent d'une sphère, elle diffère peu de la surface σ , d'équation (19), relative à la sphère. Cette intuition est susceptible de quelques vérifications qui, pour être partielles, n'en sont pas moins remarquables.

Ainsi nous avons vu, à propos de la figure 6, que le cercle de diamètre EE' , suivant lequel la surface σ coupe le plan $z = 0$, avait une aire égale à l'aire de l'hémisphère. Ici l'intersection de la surface σ , d'équation (24), par le plan $z = 0$, donne la courbe d'équation

$$1 = \frac{1}{Ax^2 + By^2} + \frac{(Ax^2 + By^2)^{-\frac{3}{2}}(A^2x^2 + B^2y^2)}{\sqrt{AC(A-C)x^2 + BC(B-C)y^2}} \text{arc tg } \frac{\sqrt{AC(A-C)x^2 + BC(B-C)y^2}}{C\sqrt{Ax^2 + By^2}}$$

ou bien

$$1 = \frac{1}{Ax^2 + By^2} + \frac{(Ax^2 + By^2)^{-\frac{3}{2}}(A^2x^2 + B^2y^2)}{\sqrt{AC(A-C)x^2 + BC(B-C)y^2}} \text{arc cos } \sqrt{C \frac{Ax^2 + By^2}{A^2x^2 + B^2y^2}}.$$

Cette courbe plane doit enfermer une aire égale à celle du demi-ellipsoïde.

Posons $x = \varphi \cos \omega$, $y = \varphi \sin \omega$ et, en coordonnées polaires φ , ω , nous aurons, pour ladite courbe, l'équation *explicite*

$$\varphi^2 = \frac{1}{A \cos^2 \omega + B \sin^2 \omega} + \frac{(A \cos^2 \omega + B \sin^2 \omega)^{-\frac{3}{2}} (A^2 \cos^2 \omega + B^2 \sin^2 \omega)}{\sqrt{AC(A-C) \cos^2 \omega + BC(B-C) \sin^2 \omega}} \arccos \sqrt{C \frac{A \cos^2 \omega + B \sin^2 \omega}{A^2 \cos^2 \omega + B^2 \sin^2 \omega}}.$$

Le premier terme du second membre correspond au carré du rayon vecteur de l'ellipse principale suivant laquelle l'ellipsoïde donné coupe le plan $z = 0$. Le dernier terme, pris d'abord positivement, ne peut changer de signe tout seul; il représente une adjonction, toujours finie et bien déterminée, au carré du rayon vecteur précédent. On est donc bien en présence d'une courbe fermée. Vérifions qu'elle a une aire moitié de celle de l'ellipsoïde dans le cas où celui-ci serait de révolution autour de Oz et correspondrait à

$$A = B = \frac{1}{b^2}, \quad C = \frac{1}{a^2}, \quad a > b.$$

Alors l'équation précédente devient, si $a^2 e^2 = a^2 - b^2$,

$$\varphi^2 = b^2 + \frac{a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arccos \frac{b}{a} = ab \left(\sqrt{1 - e^2} + \frac{1}{e} \arcsin e \right).$$

C'est celle d'un cercle de rayon φ constant et l'aire $\pi \varphi^2$ est bien celle que l'on peut trouver directement pour le demi-ellipsoïde de révolution allongé (Cf. P. APPELL, *Éléments d'Analyse*, 1^{re} édit., p. 114).

[18] C'est maintenant que nous allons pouvoir situer aussi bien que possible les résultats précédents en montrant comment le choix des contours Σ , extérieurs à l'ellipsoïde E, influe sur la nature analytique plus ou moins simple des aires σ_E (fig. 1).

Pour l'ellipsoïde (21), la formule (6) donne

$$\sigma_E = \int \int_{\Sigma} \frac{\sqrt{A^2 x^2 + B^2 y^2 + C^2 z^2}}{(Ax^2 + By^2 + Cz^2)^{\frac{3}{2}}} (\alpha x + \beta y + \gamma z) d\sigma,$$

ce que (2) transforme en

$$(26) \quad 2\sigma_E = \int_{\Sigma} \left[-\frac{z\sqrt{N}}{M} + \frac{N - C^2 z^2}{\sqrt{C(N - CM)(M - Cz^2)}} \arccos \frac{\sqrt{(M - Cz^2)(N - CM)}}{\sqrt{C(M + z\sqrt{N})}} \right] \frac{x dy - y dx}{M - Cz^2}.$$

L'intégration est celle qui a déjà été indiquée au paragraphe 16; on a simplement posé, pour simplifier l'écriture,

$$M = Ax^2 + By^2 + Cz^2, \quad N = A^2 x^2 + B^2 y^2 + C^2 z^2.$$

Au second membre de (26) on doit pouvoir ajouter un terme de la forme

$$\int_{\Sigma} \Omega(x, y) (x dy - y dx),$$

$\Omega(x, y)$ étant toujours une fonction homogène d'ordre -2 , terme qui peut s'écrire

$$\int_{\Sigma} \Phi\left(\frac{y}{x}\right) d \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$$

Il est alors l'intégrale d'une différentielle exacte le long d'un contour fermé et est nul au moins pour des contours Σ suffisamment petits ou évitant des régions singulières qu'il conviendra d'abord de repérer. Peu importe pour ce que nous avons à dire à présent.

Comment peut-on choisir, dans l'espace, les contours Σ pour qu'ils déterminent sur l'ellipsoïde E des aires σ_E aussi simples que possible?

L'idée de tracer directement ces contours sur l'ellipsoïde, qui semble d'abord la plus simple au point de vue géométrique, semble aussi être, comme je l'ai déjà dit au paragraphe 15, une des plus imparfaites que l'on puisse avoir. Cela revient à faire $M=1$ dans (26) et ne simplifie en rien les singularités de l'intégrale de ligne.

Le procédé de M. G. Humbert, comme je l'ai rappelé, consiste à prendre le contour Σ sur l'ellipsoïde auxiliaire $N=1$; cette fois, \sqrt{N} disparaît de l'intégrale à étudier, simplification importante à laquelle correspondent les élégants et profonds résultats obtenus par le savant géomètre dans son Mémoire précité.

Enfin, en suivant le même ordre de considérations, on est amené à égaler à l'unité tout l'ensemble de termes en M et N qui figure dans l'intégrale en litige. C'est alors tracer le contour Σ sur une surface σ telle que celle étudiée aux paragraphes 16 et 17.

AIRES PARABOLOÏDALES.

[19] M. G. Humbert, après l'étude des aires ellipsoïdales précédemment rappelée, a montré que les résultats perdaient leur caractère transcendant quand on les transportait sur le paraboloidé, notamment sur le paraboloidé elliptique (*Bulletin de la Société mathématique de France*, 1893). Il y a ici une remarque absolument analogue à faire, bien qu'il ne s'agisse pas forcément des mêmes aires.

Soit le paraboloidé elliptique. Pour qu'il ait une équation de la forme $f=1$, avec f homogène, j'écrirai cette équation

$$\frac{2z}{\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}} = 1.$$

Alors $m = -1$ et l'équation (14) des surfaces σ devient

$$r = \Omega(x, y) + 8 \left(\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} \right)^{-3} \int z \sqrt{\left(\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} \right)^2 + 4 \left(\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} \right) z^2} dz$$

ou bien

$$r = \Omega(x, y) + \frac{2}{3} \left(\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} \right)^{-3} \left(\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} \right)^{-1} \left[\left(\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} \right)^2 + 4 \left(\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} \right) z^2 \right]^{\frac{3}{2}}.$$

[20] On étudie aisément ces surfaces dans le cas où le parabolôïde est de révolution. Soit donc $q = p$ et de plus $\Omega = 0$. L'équation précédente devient :

$$9r^{10} = 4p^4 (r^2 + 4z^2)^3.$$

Elle représente une surface qui est aussi de révolution ou, si l'on veut, le méridien de cette surface dans le plan Orz . Pour ce méridien, on a explicitement :

$$4z^2 = \left(\frac{3}{2p^2} \right)^{\frac{2}{3}} r^{\frac{10}{3}} - r^2,$$

$$4z \frac{dz}{dr} = \frac{5}{3} \left(\frac{3}{2p^2} \right)^{\frac{2}{3}} r^{\frac{7}{3}} - r.$$

Pour que z soit réel, il faut $3r^2 \geq 2p^2$. Pour $125r^4 = 12p^4$, $\frac{dz}{dr}$ s'annule, mais il n'y a là ni maximum ni minimum réel pour la courbe méridienne, car, pour la valeur de r ainsi déterminée, la condition de réalité relative à z n'est pas satisfaite. Pour $3r^2 = 2p^2$, la courbe coupe Or orthogonalement; comme elle est symétrique par rapport aux axes, il suffit de construire la branche qui est dans l'angle Orz .

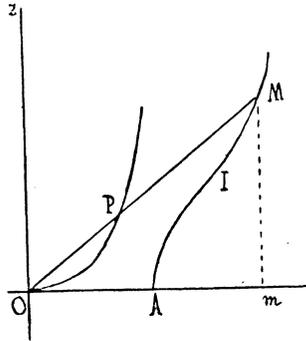


FIG. 10.

Si l'on part du point A, sur Or , où la courbe a une pente infinie, cette pente commence à décroître avec r croissant, mais elle tend à redevenir infinie pour les grandes valeurs de r . Il y a donc un point d'inflexion I sur la branche envisagée et, en formant la dérivée seconde de z , on trouve que son abscisse r est donnée par la relation

$$\left(\frac{3r^2}{2p^2} \right)^2 = \left(\frac{7}{5} \right)^3.$$

La courbe AM ne coupe nulle part la parabole OP d'équation $2pz = r^2$. Si on élimine r entre les équations des deux courbes, on a, pour déterminer les z des intersections supposées,

$$9pz^2 = (p + 2z)^2.$$

Or cette équation ne peut avoir de racine positive et à un z négatif correspondrait un r imaginaire. Tout ceci détermine bien suffisamment le méridien AM de la surface de révolution σ . Un cône, dont OPM, par exemple, est une génératrice, détermine sur le paraboloidé, dans le voisinage de P, une aire σ_E , et sur la surface σ , dans le voisinage de M, un contour Σ dont la projection sur le plan $z = 0$ doit enfermer une aire égale à σ_E .

En particulier, considérons la calotte paraboloidale limitée par un parallèle passant, si l'on veut, par P. Elle doit avoir une aire égale à celle de la couronne formée, dans le plan $z = 0$, par des cercles de centre O ayant respectivement pour rayons OA et Om.

En effet, P ayant pour coordonnées r et $\frac{r^2}{2p}$, on a

$$\overline{Om}^2 = \frac{2p^2}{3} \left(1 + \frac{r^2}{p^2} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad \overline{OA}^2 = \frac{2p^2}{3}$$

et la différence de ces carrés, multipliée par π , est bien l'expression très élémentaire qu'on peut former directement pour l'aire de la calotte paraboloidale considérée.

[21] Toujours pour le paraboloidé de révolution, soit maintenant $\Omega = \frac{\lambda^2}{r^2}$. La surface σ a alors pour équation :

$$9r^6(r^2 - \lambda^2)^2 = 4p^4(r^2 + 4z^2)^3.$$

Il n'y a rien d'essentiel à changer aux considérations précédentes. On a notamment

$$\overline{Om}^2 = \frac{2p^2}{3} \left(1 + \frac{r^2}{p^2} \right)^{\frac{3}{2}} + \lambda^2, \quad \overline{OA}^2 = \frac{2p^2}{3} + \lambda^2,$$

et la différence des seconds membres n'est pas modifiée. Mais il est bien remarquable, dans ce cas, de voir avec quelle facilité on obtient toute une famille de surfaces σ .

AIRES CONOÏDALES.

[22] Les conoïdes droits, d'axe Oz, offrent un exemple de surfaces dépendant d'une fonction arbitraire qu'il n'y a nul besoin de préciser pour pouvoir déterminer les surfaces σ correspondantes.

La manière la plus simple, quant aux calculs subséquents, d'écrire l'équation du conoïde semble être

$$f = ze^{\varphi(\theta)} = 1;$$

on fait usage de coordonnées semi-polaires et θ désigne arc tang $\frac{y}{x}$. Alors f est homogène d'ordre 1 et l'équation (14) des surfaces σ devient :

$$1 = \Omega(x, y) - 2e^{-2\varphi} \int \sqrt{1 + \left(\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2} \frac{dz}{z^3}.$$

On a, a désignant une constante quelconque,

$$-2 \int \sqrt{1 + az^2} \frac{dz}{z^3} = \frac{1}{z^2} \sqrt{1 + az^2} - a \log \frac{\sqrt{1 + az^2} - 1}{z}.$$

On prouverait facilement que cette égalité se conserve pour $a=0$, le terme logarithmique disparaissant alors.

Finalement on a pour équation des surfaces σ , en coordonnées z, r, θ ,

$$e^{2\varphi}(1 - \Omega) = \frac{1}{z} \sqrt{\frac{1}{z^2} + \left(\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2} - \left(\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2 \log \left[\sqrt{\frac{1}{z^2} + \left(\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2} - \frac{1}{z} \right].$$

Mais ce résultat explicite ne m'a pas semblé pouvoir donner, même pour les conoïdes les plus simples, des conséquences géométriques aussi tangibles et intéressantes que celles précédemment obtenues quant au plan et aux quadriques. Remarquons toutefois, bien que ce soit là une vérification fort insignifiante, que, pour $\varphi(\theta) = \text{constante} = -\log c$, le conoïde se change en le plan $z=c$ et la surface σ correspondante en

$$\frac{1}{c^2}(1 - \Omega) = \frac{1}{z^2}.$$

C'est le résultat établi directement au paragraphe 7.

GÉNÉRALITÉS SUR LA CONSERVATION DES AIRES.

[23] Ainsi que je l'ai indiqué au début du paragraphe 9, la question de la conservation des aires sphériques sur un plan a donné lieu à un nombre considérable de travaux se rapportant surtout au point de vue géographique. L'examen de la plupart de ceux-ci serait hors de propos par rapport aux considérations précédentes, mais, dans l'ensemble, on peut tracer une voie plus géométrique que géographique qui permettrait d'aboutir à des résultats intimement liés à ceux ici exposés. C'est ce que je me propose d'indiquer en quelques mots.

A. Tissot, de 1878 à 1880, publie dans les *Nouvelles Annales* des travaux auxquels il ajoute un Complément plus étendu encore; cela donne, sous forme de publication isolée, le *Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques* (Paris, Gauthier-Villars, 1881). Il y fait l'historique de la question depuis l'antiquité égyptienne. Point n'est besoin de remonter jusque-là. Pour les modernes, les noms d'Euler, Gauss, Lambert, Lagrange suffiraient à asseoir le problème. Une bifurcation analytique intéressante se présente avec la Thèse d'Ossian Bonnet *Sur la théorie mathématique des cartes géographiques* (Journal de Mathématiques, t. XVII, pp. 301-340). Dans les dernières pages, O. Bonnet s'occupe, en effet, des cartes conservant les aires; il montre que le problème dépend d'une équation aux dérivées partielles, mais il ne tente rien pour intégrer celle-ci. Il s'agissait, d'une manière plus précise, de conserver non seulement les aires, mais aussi l'orthogonalité des méridiens et des parallèles. Il est assez étrange de constater que la question posée par O. Bonnet ait attendu sa solution jusqu'en 1890, époque où un géomètre russe, A. Korkine, la reprend dans un *Mémoire Sur les cartes géographiques* (Mathematische Annalen, Bd. XXXV, 1890, S. 588-604). A. Korkine dit, en effet, que personne n'a repris la question depuis O. Bonnet et qu'il va en donner la solution générale dans le cas des surfaces de révolution.

En 1896, un autre géomètre russe, D.-A. Gravé, dans un *Mémoire Sur la construction des cartes géographiques* (Journal de Mathématiques, 5^e série, t. II, 1896, pp. 317-361), poursuit le but déjà poursuivi par A. Korkine, mais par une méthode analytique plus profonde. Ainsi, pour les simples correspondances d'aires planes, tout revient à trouver des fonctions $X(u, v)$ et $Y(u, v)$ satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial Y}{\partial u} = 1.$$

C'est ici qu'intervient l'idée fort ingénieuse de transformer cette équation en y prenant pour nouvelles fonctions $Y(X, v)$ et $u(X, v)$; elle devient alors

$$\frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial u}{\partial X} = 0$$

et est, par suite, résolue par les formules

$$Y = \frac{\partial \Phi}{\partial X}, \quad u = \frac{\partial \Phi}{\partial v},$$

où Φ est une fonction quelconque de X et v .

En 1913, M. A. Demoulin, dans une Note intitulée *Résolution d'un problème de calcul intégral* (Comptes rendus, 29 décembre 1913), résout complètement l'équation

$$(E_n) \quad \frac{\partial(u_1, \dots, u_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = F(x_1, \dots, x_n)$$

par une méthode qui généralise celle de M. D. Gravé et après avoir attribué aussi à ce dernier la résolution d'équations (E_2) particulières. Le résultat de M. A. Demoulin est de la plus haute importance; il permet d'établir, entre deux surfaces données, des correspondances ponctuelles telles que, si (u, v) , (u', v') sont les coordonnées curvilignes de deux points correspondants, on ait

$$\iint F(u, v) d\omega = \iint \Phi(u', v') d\omega',$$

$d\omega$, $d\omega'$ désignant deux éléments d'aire correspondants et $F(u, v)$, $\Phi(u', v')$ deux fonctions données. Le problème de la carte avec conservation des aires est dépassé de beaucoup.

Mais de même qu'au point de vue géographique on sera toujours pratiquement forcé de recourir à de certaines constructions et non à la solution analytique générale, le procédé de conservation des aires étudié dans les paragraphes précédents (perspective de l'aire σ_E sur une surface σ et projection sur un plan, ce qui correspond, ne l'oublions pas, à un usage particulier de la formule de Stokes) garde évidemment une valeur géométrique spéciale et même remarquablement simple qui ne se retrouverait certainement pas dans d'autres procédés.

Quel est le degré de généralité de celui ici employé par rapport au degré de généralité de l'ensemble des transformations admettant l'aire pour invariant intégral?

Pour le cas des correspondances entre aires planes, l'équation de M. Gravé, rappelée tout à l'heure, est résolue aussi généralement que possible par l'introduction de $\Phi(X, v)$, c'est à-dire d'une fonction *arbitraire* de deux variables. La conclusion serait la même pour les correspondances entre aires planes et sphériques ou entre aires planes et aires de révolution, le problème n'étant pas essentiellement différent au point de vue analytique (Cf. E. PICARD, *Traité d'Analyse*, t. I, 2^e édit., p. 483). Elle est encore la même, pour les correspondances entre aires gauches quelconques, de par la méthode de résolution de l'équation (E_2) de M. Demoulin. Or, dans les planifications d'aires effectuées par la méthode géométrique précédemment développée, on disposait de la fonction arbitraire $\Omega(x, y)$ non pas *quelconque*, mais *homogène d'ordre* -2 . Et, dans ces conditions, on peut prétendre que la planification conserve encore un degré de généralité assez élevé.

[24] *Remarque sur les surfaces de direction.* — Quelles sont les surfaces E, d'équation

$$f(x, y, z) = 1,$$

pour lesquelles la détermination des surfaces σ pourra s'effectuer par l'emploi des seules fonctions élémentaires, comme dans tous les exemples précédemment traités?

D'après (14), la condition nécessaire et suffisante est évidemment que

$$f^{-\frac{m+2}{m}} (f_x^2 + f_y^2 + f_z^2)^{\frac{1}{2}}$$

soit intégrable, par rapport à z , au moyen des fonctions élémentaires. Plus symétriquement, d'après la forme donnée en (7) à $d\sigma_r$, on peut considérer l'expression

$$(27) \quad \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} f^{-\frac{2}{m}} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} f^{-\frac{2}{m}} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z} f^{-\frac{2}{m}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

dont l'intégration, en z , par les fonctions élémentaires, rapproche la question de celle des *surfaces de direction*. A ces surfaces, définies à l'image des *courbes de direction* de Laguerre et particulièrement étudiées par M. G. Humbert, je suppose une équation $\varphi(x, y, z) = \text{const.}$, φ étant homogène; alors

$$(28) \quad \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

doit être une fonction rationnelle de x, y, z . Si, de plus, je prends

$$f = \varphi^{-\frac{m}{2}},$$

c'est l'expression (27) précédente, en f , qui deviendra rationnelle et sera, par suite, intégrable élémentairement. Donc, à chacune des surfaces de direction considérées, correspond immédiatement une surface $f=1$ pour laquelle on pourra trouver élémentairement la surface σ .

[25] Tout ceci conduit maintenant au problème inverse de celui traité jusqu'ici : *Déterminer les surfaces E possédant une surface σ donnée à l'avance. C'est égal à une des expressions (27) ou (28) à une fonction donnée et chercher f ou φ . C'est donc résoudre, par rapport à Θ , une équation*

$$\left(\frac{\partial \Theta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} \right)^2 = F(x, y, z).$$

AIRES QUELCONQUES ET VOLUMES CYLINDRO-COINIQUES.

[26] Si la planification des aires vient d'être traitée avec beaucoup de détails, parce qu'elle était facilement comparable à des questions d'invariance bien connues, il ne faut point perdre de vue que la méthode générale de ce Mémoire peut donner des correspondances tout aussi intéressantes entre aires et autres concepts géométriques. Ceci d'après la méthode du paragraphe 5 qui, jusqu'ici, a été particularisée par l'égalité (13) et qui pourrait l'être avec une autre hypothèse. Pour traiter briève-

ment un exemple, je rappelle d'abord ce que j'ai appelé volume *cylindro-conique* dans mes *Applications géométriques de la formule de Stokes*, publiées dans ces *Annales* en 1910.

Soit un contour fermé Σ par lequel passe une cloison σ quelconque. En projetant le tout sur Oxy , parallèlement à Oz , on définit le volume cylindrique qui est le plus simple du Calcul intégral et que j'ai désigné par U_z ; en projetant σ coniquement, vers O , on définit un volume conique, compris entre O et σ , que j'ai appelé V_o . Le volume *cylindro-conique* est $U_z - V_o$; *il ne dépend pas de σ* , mais seulement de son contour Σ . C'est une fonction de ce contour, une fonction de ligne au sens de M. V. Volterra. On peut aussi considérer, sur Σ , un point M , de projection m sur Oxy , et définir le volume cylindro-conique comme celui qui est balayé dans l'espace par le triangle OMm quand M décrit Σ . C'est même cette dernière définition qui permet d'écrire tout de suite :

$$U_z - V_o = \frac{1}{3} \int_{\Sigma} z(x dy - y dx).$$

Ceci étant rappelé, remplaçons l'égalité (13), du paragraphe 5, par

$$H = H_1 = -\frac{z}{3k},$$

k étant une constante quelconque qu'on se représentera comme une longueur, quant à l'homogénéité.

Alors l'équation (10) est remplacée par

$$(29) \quad \frac{z}{k} = \Omega(x, y) - \frac{3}{m} \int f^{-\frac{m+z}{m}} (f_x^2 + f_y^2 + f_z^2)^{\frac{1}{2}} dz$$

et (12) par

$$(30) \quad k\sigma_E = U_z - V_o.$$

Je dirai, pour abrégé, que l'équation (29) représente une surface τ associée à la surface E qui, bien entendu, a toujours pour équation $f=1$. *A tout contour Σ , tracé sur la surface τ , correspond, par perspective de centre O , une aire σ_E sur E , puis le volume cylindro-conique attaché à Σ , volume lié à σ_E par la relation (30).*

[27] On pourrait évidemment appuyer ce théorème par des exemples aussi nombreux que ceux développés pour les correspondances entre aires. Ce serait peu utile et je serai bref.

Pour surface E , $f=1$, prenons d'abord le plan $z=k$. On trouve immédiatement, pour équation (29) des surfaces τ ,

$$(31) \quad \frac{z}{k} = \Omega(x, y) + \frac{3k^2}{2z^2},$$

$\Omega(x, y)$ étant toujours ou nul ou homogène d'ordre -2 .

Prenons Ω nul. Alors la surface τ est le plan

$$z = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} k.$$

A l'aire σ_E , quelconque dans E , correspond l'aire τ de contour Σ pour laquelle les volumes U_z et V_o sont :

$$U_z = \frac{3}{2} k \sigma_E, \quad V_o = \frac{1}{2} k \sigma_E.$$

On a bien $U_z - V_o = k \sigma_E$, ce qui est d'ailleurs le petit volume cylindrique de la figure, volume défini en projetant σ_E sur le plan Oxy .

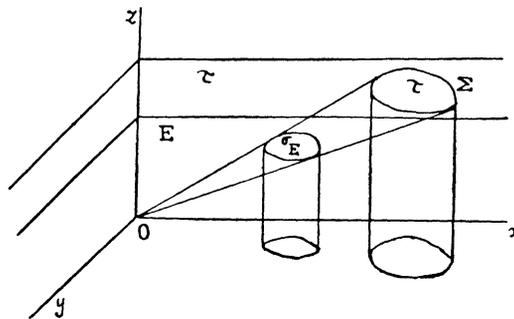


FIG. 11.

Un tel exemple est tellement élémentaire qu'il en devient banal ; mais la question reprend immédiatement de l'intérêt si l'on songe que la propriété indiquée doit se conserver en remplaçant le plan τ par de certaines surfaces τ , d'équations de la forme (31) où Ω est, cette fois, une fonction homogène d'ordre -2 tout à fait quelconque. Les familles τ sont étendues ; elles comprennent notamment une infinité de cylindres ou de surfaces de révolution.

[28] Pour surface E prenons encore la sphère de centre O et de rayon R définie par l'équation (16) du paragraphe 10. L'équation (29) des surfaces τ est alors

$$\frac{z}{k} = \Omega(x, y) - 3R^2 \int (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} dz$$

ou bien

$$\frac{z}{k} = \Omega(x, y) - \frac{3R^2 z}{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Ici, contrairement à ce qui se passait pour la simple planification des aires sphériques, la surface sera aussi simple que possible pour Ω nul à cause de la suppression, alors possible, du facteur z . L'équation précédente peut ainsi s'écrire

$$r^4(r^2 + z^2) = 9k^2 R^4$$

ou, si (ρ, ω) sont coordonnées polaires pour un point (r, z) du plan méridien Orz ,

$$(32) \quad \rho^3 \cos^2 \omega = 3kR^2.$$

De telles courbes sont fort simples et ont déjà été rencontrées depuis fort longtemps mais, semble-t-il, dans des recherches très différentes de celles du présent Mémoire (Cf. G. LORIA, *Ebene Kurven, Die Multiplikatrix- und die Mediatrix-Kurven*). Avec des axes Ox, Oy , qu'on peut d'ailleurs échanger l'un en l'autre, on a évidemment affaire avec une équation du type

$$y^{m-1} \sqrt{x^2 + y^2} = a^m,$$

représentant des courbes déjà utilisées par Clairaut, pour diverses valeurs de m , sous le nom de *Courbes des médianes paraboliques et hyperboliques*. Pour plus de détail, je renvoie à l'ouvrage de M. G. Loria, car nous n'avons à nous occuper ici que de la courbe (32) très facile à construire. Elle est évidemment symétrique par rapport aux axes Or, Oz et la branche comprise dans l'angle zOr a un point A , sur Or , tel que

$$\overline{OA}^3 = 3kR^2.$$

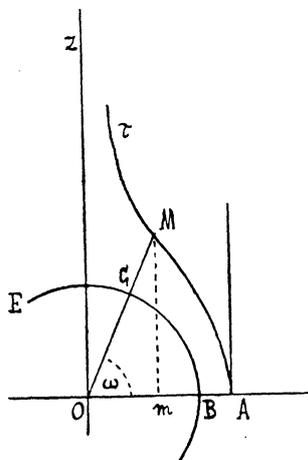


FIG. 12.

La tangente en A est parallèle à Oz . Quand ω croît, de zéro à $\frac{\pi}{2}$, le rayon vecteur croît sans cesse et donne une branche asymptote à Oz . Représentons-nous maintenant la surface de révolution τ ayant un tel méridien; si un point M y décrit un contour fermé Σ , on aura pour celui-ci $U_z - V_0 = k\sigma_E$, si σ_E est l'aire déterminée sur la sphère E , par le cône $O\Sigma$ dont OM est une génératrice.

On aura une vérification élémentaire en imaginant qu'on agrandisse le contour Σ jusqu'à en faire une zone, de la surface de révolution τ , limitée par des parallèles

passant respectivement par A et M. Alors $U_z - V_0$ correspond au volume engendré par le triangle rectangle Omm tournant autour de Oz, volume qui est

$$\frac{2}{3} \pi \overline{Om} \overline{Mm} = \frac{2}{3} \pi (\rho \cos \omega)^2 \rho \sin \omega = 2\pi k R^3 \sin \omega.$$

Quant à σ_E , c'est l'aire de la zone sphérique engendrée par la rotation de CB autour de Oz, aire égale à $2\pi R^2 \sin \omega$. On a bien $U_z - V_0 = k\sigma_E$.

Pour revenir au cas du contour Σ quelconque, remarquons que celui-ci pourrait être tracé sur des surfaces τ fort différentes de celles de la figure; elles correspondraient à Ω non nul et ne seraient même pas forcément des surfaces de révolution.

[29] Les surfaces τ précédentes acquièrent une propriété particulièrement remarquable pour $3k = -R$. On a alors $U_z = V_0 - V'_0$, si V'_0 désigne le volume commun au cône O Σ et à la sphère E. Définitivement $U_z = V''_0$, si V''_0 désigne le volume compris, dans le cône O Σ , entre la surface τ et la sphère E. Considérant la cloison τ intérieure à Σ , on peut dire que le volume U_z , à base plane, est défini par la projection orthogonale de τ sur le plan Oxy; on peut dire, de même, que le volume V''_0 , à base sphérique, est défini par la projection orthogonale de τ sur la sphère E. Il y a donc là deux volumes, de définitions comparables, mais de formes bien différentes, dont l'équivalence était digne d'être notée.

DEUXIÈME PARTIE

Formules de Green à variables réelles ou complexes.

[30] *L'identité (1) et la formule de Riemann.* — On sait que, si l'on part de l'identité

$$(1) \quad \int_C X dY = \int_A dX dY,$$

relative, dans le plan YOX, à une aire A de contour C, le changement de variables

$$X = X(x, y), \quad Y = Y(x, y)$$

change A en une aire S de contour Σ et l'égalité (1) en

$$\int_{\Sigma} X \left(\frac{\partial Y}{\partial x} dx + \frac{\partial Y}{\partial y} dy \right) = \int_S \left(\frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy.$$

Si l'on pose

$$(2) \quad P = X \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad Q = X \frac{\partial Y}{\partial y},$$

la nouvelle égalité devient la formule de Riemann :

$$(3) \quad \int_{\Sigma} P dx + Q dy = \int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Pour plus de détails, on se reportera à mon *Mémoire Sur la formule de Stokes dans l'hyperespace*, publié dans ces mêmes *Annales* en 1911. Je disais d'ailleurs, en cet endroit, que le raisonnement précédent était à considérer comme fort banal, comme déjà employé dans des buts fort divers. Ainsi les égalités (2) reviennent à l'égalité unique

$$P dx + Q dy = X dY$$

toujours possible et qui rappelle, entre autres choses, l'existence du facteur intégrant pour une équation différentielle du premier ordre.

Le raisonnement inverse, consistant à étudier la transformation des intégrales

doubles en partant de la formule de Riemann, a donné lieu également à des considérations intéressantes où transparait surtout un grand souci de rigueur⁽¹⁾.

[31] *L'identité (4) et la formule de Green.* — Suivant la marche du paragraphe précédent, nous allons considérer l'identité

$$(4) \quad \int \int_S X dY dZ = \int \int \int_V dX dY dZ,$$

relative à une surface fermée S enfermant un volume V, et montrer qu'à l'aide d'un changement de variables

$$(5) \quad X = X(x, y, z), \quad Y = Y(x, y, z), \quad Z = Z(x, y, z)$$

l'identité (4) est susceptible de se transformer en la formule de Green :

$$(6) \quad \int \int_{\Sigma} (\alpha F + \beta G + \gamma H) d\sigma = \int \int \int_W \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \right) d\tau.$$

Ce sera même là une démonstration de la formule de Green, parmi beaucoup d'autres bien entendu. A ce dernier point de vue, on pourrait être tenté de déclarer que la démonstration qui suit est bien longue par rapport aux deux ou trois principales démonstrations classiques; mais l'important n'est pas de donner une nouvelle démonstration à une formule qui en possède déjà un grand nombre; c'est plutôt de montrer, au point de vue des principes, que la formule (6) n'est pas plus générale que (4) et d'éclairer le rôle de (6), dans de nombreuses questions, en employant le changement de variables qui ramène cette formule (6) à la forme (4). forme sous laquelle elle n'est plus qu'une identité.

Partons donc de l'égalité (4) et de la transformation (5) qui change le volume V, supposé d'un seul tenant, en un volume W, supposé aussi d'un seul tenant; d'ordinaire, on ne fait point d'autres hypothèses pour établir la formule de Green.

A la surface fermée Σ , transformée de S, je suppose l'équation $z = f(x, y)$, si bien que si, entre celle-ci et les trois relations (5), on éliminait x, y, z , on aurait une équation en X, Y, Z qui serait celle de S.

⁽¹⁾ E. GOURSAT, *Sur le changement de variables dans une intégrale double* (Bulletin des Sciences mathématiques, 1894).

J.-A. GMEINER, *Rein analytische Herleitung der Transformationsgleichung für eigentliche Doppelintegrale mit Hilfe des Green'schen Satzes* (Monatshefte für Mathematik und Physik, 1893).

Le changement de variables dans (4) donne immédiatement :

$$\int \int_{\Sigma} X \begin{vmatrix} \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial z} p & \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial z} q \\ \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial z} p & \frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} q \end{vmatrix} dx dy = \int \int \int_{\mathcal{W}} \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial z} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial z} \end{vmatrix} dx dy dz.$$

Cela peut encore s'écrire :

$$\int \int_{\Sigma} \begin{vmatrix} -p & -q & 1 \\ X \frac{\partial Y}{\partial x} & X \frac{\partial Y}{\partial y} & X \frac{\partial Y}{\partial z} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial z} \end{vmatrix} dx dy = \int \int \int_{\mathcal{W}} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X \frac{\partial Y}{\partial x} & X \frac{\partial Y}{\partial y} & X \frac{\partial Y}{\partial z} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial z} \end{vmatrix} dx dy dz.$$

Si $d\sigma$ est, sur Σ , un élément de surface en lequel la normale a pour coefficients directeurs α, β, γ . on a :

$$-p dx dy = \alpha d\sigma, \quad -q dx dy = \beta d\sigma, \quad dx dy = \gamma d\sigma.$$

Si, de plus, on pose $dx dy dz = d\tau$ et

$$(7) \quad \begin{cases} X \left(\frac{\partial Y}{\partial y} \frac{\partial Z}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial z} \right) = F, \\ X \left(\frac{\partial Y}{\partial z} \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial z} \frac{\partial Y}{\partial x} \right) = G, \\ X \left(\frac{\partial Y}{\partial x} \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial y} \right) = H, \end{cases}$$

notre égalité devient bien

$$(6) \quad \int \int_{\Sigma} (\alpha F + \beta G + \gamma H) d\sigma = \int \int \int_{\mathcal{W}} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \right) d\tau.$$

Mais il est encore nécessaire de montrer que les fonctions F, G, H définies par (7) peuvent être quelconques ou, pour mieux dire, que, si l'on prend arbitrairement F, G, H , il est possible de déterminer, par le système (7), des fonctions X, Y, Z donnant toujours une réalité à la démonstration.

Or les trois équations (7) donnent :

$$(8) \quad \begin{cases} F \frac{\partial Y}{\partial x} + G \frac{\partial Y}{\partial y} + H \frac{\partial Y}{\partial z} = 0, \\ F \frac{\partial Z}{\partial x} + G \frac{\partial Z}{\partial y} + H \frac{\partial Z}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{F}{X} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{G}{X} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{H}{X} \right) = 0. \end{cases}$$

On voit que Y et Z sont deux intégrales distinctes de l'équation

$$(9) \quad F \frac{\partial \varphi}{\partial x} + G \frac{\partial \varphi}{\partial y} + H \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

et que $\frac{1}{X}$ est, si l'on veut, un multiplicateur jacobien pour cette même équation.

En résumé, on peut énoncer le résultat suivant :

Si Y et Z sont deux intégrales distinctes de l'équation

$$(9) \quad F \frac{\partial \varphi}{\partial x} + G \frac{\partial \varphi}{\partial y} + H \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

et si X est solution de l'équation

$$(10) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{F}{X} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{G}{X} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{H}{X} \right) = 0,$$

la transformation

$$(11) \quad X = X(x, y, z), \quad Y = Y(x, y, z), \quad Z = Z(x, y, z),$$

appliquée à une surface fermée S enfermant un volume V, change l'identité

$$(4) \quad \int \int_S X dY dZ = \int \int \int_V dX dY dZ$$

en la formule de Green :

$$(6) \quad \int \int_{\Sigma} (\alpha F + \beta G + \gamma H) d\sigma = \int \int \int_W \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \right) d\tau.$$

Il est à peine utile d'ajouter qu'une telle transformation peut être obtenue d'une infinité de manières, car, si Y et Z sont deux intégrales distinctes de (9), il en sera de même de $f_1(Y, Z)$ et $f_2(Y, Z)$, en désignant par f_1 et f_2 des fonctions arbitraires de Y et Z.

[32] La seule possibilité de passer de (4) à (6) par un simple changement de variables implique, *sans autres remarques*, des conséquences immédiates et capitales. C'est ce que nous verrons, par exemple, à propos du théorème de Cauchy-Poincaré étendu aux fonctions de trois variables complexes.

Mais la question précédente semble aussi liée à une foule d'autres.

Tout d'abord elle peut être considérée comme l'inverse de celle traitée par M. P. Appell dans une Note intitulée *Le théorème du dernier multiplicateur de Jacobi rattaché à la formule de Green* (Comptes rendus, 4 novembre 1912). Ici, en effet, c'est l'équation (10), définissant un multiplicateur jacobien pour (9), qui sert à parvenir à la formule de Green, tandis que M. Appell, au contraire, a tiré de celle-ci le théorème du multiplicateur. Les deux choses sont sensiblement réciproques.

L'extension du résultat de M. Appell au cas de n variables a été faite par M. de Donder (Comptes rendus, 10 février 1913) dans une Note *Sur un théorème de Jacobi*.

Je vais, à mon tour, rétablir la formule de Green dans l'espace à un nombre quelconque de dimensions. Il s'agira simplement de montrer que cette formule n'est qu'une transformation de l'identité

$$(12) \quad \int \dots \int X_1 dX_2 \dots dX_n = \int \int \dots \int dX_1 dX_2 \dots dX_n,$$

ce qui est un but légèrement différent de celui poursuivi par MM. Appell et de Donder; mais il apparaîtra toujours, conformément à l'opinion de ces géomètres, que c'est bien à Jacobi qu'il faut, au fond, faire remonter le principe de tels rapprochements. Ce qui va suivre peut n'être considéré que comme un mode d'exposition spécial de la fameuse théorie du multiplicateur pour l'équation aux dérivées partielles linéaires, du premier ordre, à un nombre quelconque de variables.

Observons qu'on aurait pu commencer par ce cas de n variables en indiquant seulement ensuite que les raisonnements des paragraphes 30 et 31 correspondent à $n=2$, $n=3$.

J'ai cependant préféré traiter en premier lieu ces cas particuliers, parce qu'ils correspondent aux fonctions de deux et trois variables complexes et qu'il vaut mieux, conformément à l'ordre historique, retrouver d'abord le théorème de Cauchy-Poincaré relatif à deux variables, pour l'étendre ensuite à 3, ..., n variables, que de vouloir réexaminer, pour n quelconque, une théorie qui n'a point commencé ainsi et qu'il serait alors beaucoup plus difficile de comparer avec sa forme acquise. Mais les raisonnements déjà faits pour deux ou trois variables me permettront d'être plus bref pour le cas général; de cette manière, l'exposition ne sera guère allongée.

[33] *L'identité (12) et la formule générale de Green.* — Dans l'espace à n dimensions, et par rapport à des axes $OX_1 X_2 \dots X_n$, le second membre de (12) exprime l'étendue d'une variété à n dimensions, d'un hypervolume enfermé dans une variété

à $n - 1$ dimensions à laquelle est étendue l'intégrale $(n - 1)$ uple du premier membre. Imaginons tous les X , déterminant si l'on veut le point (X) , fonctions de x_1, x_2, \dots, x_n déterminant un point (x) par rapport à d'autres axes. Imaginons aussi que cette correspondance soit univoque et qu'à la variété fermée des (X) corresponde pour les (x) une variété également fermée (*) limitée par l'hypersurface d'équation

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad \text{ou} \quad x_1 = x_1(x_2, \dots, x_n).$$

La première intégrale de (12) peut alors se transformer en une intégrale analogue en x , où l'élément $dx_2 \dots dx_n$ est multiplié par le facteur

$$X_1 \begin{vmatrix} \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \frac{\partial X_2}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} + \frac{\partial X_2}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial X_2}{\partial x_n} + \frac{\partial X_2}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_2} + \frac{\partial X_3}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} + \frac{\partial X_3}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial X_3}{\partial x_n} + \frac{\partial X_3}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial X_n}{\partial x_2} + \frac{\partial X_n}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_n}{\partial x_3} + \frac{\partial X_n}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial X_n}{\partial x_n} + \frac{\partial X_n}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Or ce facteur peut aussi bien s'écrire

$$X_1 \begin{vmatrix} 1 & -\frac{\partial x_1}{\partial x_2} & -\frac{\partial x_1}{\partial x_3} & \dots & -\frac{\partial x_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial X_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial X_n}{\partial x_1} & \frac{\partial X_n}{\partial x_2} & \frac{\partial X_n}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial X_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

De plus, on a

$$-\frac{\partial x_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_1}, \quad \dots, \quad -\frac{\partial x_1}{\partial x_n} = \frac{\partial F}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_1}.$$

(*) De telles hypothèses ne sont pas absolument nécessaires. Ainsi la petite formule de Riemann peut parfaitement s'appliquer à des aires à régions asymptotiques, qui peuvent d'ailleurs être en correspondance avec d'autres aires véritablement limitées; mais il n'y a pas lieu de compliquer ici les choses avec des généralités dont les traités classiques ne commencent nullement par se préoccuper quand il s'agit du point de départ élémentaire constitué par la formule de Riemann.

Quant au second membre de (12), le changement de variables s'y effectue sans explication et (12) devient alors

$$\underbrace{\int \dots \int}_{n-1} X_1 \frac{\partial(F, X_2, \dots, X_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \frac{dx_2 \dots dx_n}{\frac{\partial F}{\partial x_1}} = \underbrace{\int \int \dots \int}_n \frac{\partial(X_1, \dots, X_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} dx_1 \dots dx_n.$$

Posons, par définition,

$$\alpha_i = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)^2}},$$

$$dx_2 \dots dx_n = \alpha_i d\sigma, \quad dx_1 dx_2 \dots dx_n = d\tau.$$

Enfin, dans

$$X_1 \frac{\partial(F, X_2, \dots, X_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)},$$

soit Φ_i le coefficient de $\frac{\partial F}{\partial x_i}$. Dans ces conditions, on a enfin

$$(13) \quad \underbrace{\int \dots \int}_{n-1} (x_1 \Phi_1 + \dots + x_n \Phi_n) d\sigma = \underbrace{\int \int \dots \int}_n \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n} \right) d\tau.$$

C'est bien l'habituelle formule de Green pour n variables.

D'après la définition des Φ_i , on a

$$(14) \quad \Phi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \Phi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \Phi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

pour $f = X_2, X_3, \dots, X_n$ et de même

$$(15) \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\Phi_1}{X_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\Phi_2}{X_1} \right) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\Phi_n}{X_1} \right) = 0.$$

En résumé, la formule générale de Green (13) se change en l'identité (12) par la transformation

$$X_1 = X_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad X_2 = X_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \dots, \quad X_n = X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

si X_2, \dots, X_n sont $n-1$ intégrales distinctes de (14) et si X_1 satisfait à (15), c'est-à-dire si $\frac{1}{X_1}$ est un multiplicateur jacobien pour (14).

[34] On voit que, comme il a été annoncé au paragraphe 32, le fait de passer de (13) à (12) redonne, purement et simplement, la théorie du multiplicateur de Jacobi et, qui plus est, sous une forme identique à celle adoptée par Jacobi même. Est-il besoin de redire maintenant des choses déjà dites dans le cas de trois variables? Il n'y a nullement lieu de proposer de substituer à la formule (13), partout où elle est intervenue jusqu'ici (par exemple dans les questions de Physique généralisées dans l'hyperespace), une formule (12) qui proviendrait d'un changement de variables dépendant d'une équation (14) dont l'intégration sera, en général, impraticable. Mais ce peut être un secours singulièrement précieux, au point de vue des procédés intuitifs de découverte, que de savoir que, derrière (13), il est toujours possible d'apercevoir (12) et que les deux égalités sont, en somme, des *identités* de même nature.

C'est ainsi notamment que le théorème de Cauchy-Poincaré pour les fonctions de deux variables complexes peut être étendu, sans aucun changement d'aspect dans les raisonnements, au cas d'un nombre quelconque de variables.

Considérée en elle-même, la formule de Green, dans le cas de n variables, remonte, *au moins*, à Carl Neumann qui l'étend ainsi, après l'avoir employée pour $n=3$, dans son *Kurzer Abriss einer Theorie der Kugelfunctionen und Ultrakugelfunctionen* (Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1867).

Quant à la parenté de la formule avec l'identité (12), on pourrait aussi la rattacher à la théorie des invariants intégraux conformément aux remarques déjà faites dans les Notes de MM. Appell et de Donder mentionnées plus haut.

CAS DES VARIABLES COMPLEXES.

[35] *Le théorème de Cauchy-Poincaré.* — On voit immédiatement que l'égalité (1) conserve un sens si l'on y suppose

$$(16) \quad X = X_1(x, y) + iX_2(x, y), \quad Y = Y_1(x, y) + iY_2(x, y).$$

Cette égalité devient en effet

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} X_1 dY_1 - X_2 dY_2 + i(X_2 dY_1 + X_1 dY_2) \\ = \int \int_S dX_1 dY_1 - dX_2 dY_2 + i(dX_2 dY_1 + dX_1 dY_2); \end{aligned}$$

elle se scinde manifestement en

$$\int_{\Sigma} X_1 dY_1 = \int \int_S dX_1 dY_1,$$

et en trois autres égalités analogues; ces quatre égalités sont des formules de Riemann analogues à (3).

On peut maintenant imaginer, dans (1), une substitution analogue à (16) mais faite en deux fois. On considérera d'abord deux variables complexes

$$(17) \quad u = u_1(x, y) + iu_2(x, y), \quad v = v_1(x, y) + iv_2(x, y),$$

puis l'on posera

$$\begin{aligned} X &= X(u, v) = X_1(u_1, u_2; v_1, v_2) + iX_2(u_1, u_2; v_1, v_2), \\ Y &= Y(u, v) = Y_1(u_1, u_2; v_1, v_2) + iY_2(u_1, u_2; v_1, v_2). \end{aligned}$$

Finalement X et Y sont bien exprimables en x et y puisque u_1, u_2, v_1, v_2 sont fonctions de x, y .

Mais si l'on passe seulement de X et Y à u et v on a une formule de Riemann

$$(18) \quad \int_{(v)} P du + Q dv = \iint_V \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right) du dv$$

où naturellement V est la variété (à deux dimensions dans l'espace à quatre)

$$(V) \quad u_1 = u_1(x, y), \quad v_1 = v_1(x, y), \quad u_2 = u_2(x, y), \quad v_2 = v_2(x, y),$$

dont le contour (v) dépendra d'une relation convenablement établie entre x et y .

Or la parenthèse de l'intégrale double de (18) est une fonction quelconque de u et v , soit $f(u, v)$. Nous venons donc de redéfinir l'intégrale double relative à une fonction de deux variables complexes, intégrale étendue à une variété V , mais qui ne dépend que du contour (v) de cette variété.

[36] *Le théorème analogue à celui de Cauchy-Poincaré pour les fonctions de trois variables complexes.* — Ce théorème s'établira en calquant le raisonnement précédent.

L'égalité (4) conserve un sens si l'on y suppose

$$(19) \quad \begin{cases} X = X_1(x, y, z) + iX_2(x, y, z), \\ Y = Y_1(x, y, z) + iY_2(x, y, z), \\ Z = Z_1(x, y, z) + iZ_2(x, y, z). \end{cases}$$

Cette égalité devient en effet

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma} \left[\begin{aligned} & X_1 dY_1 dZ_1 - X_2 dY_2 dZ_2 - X_2 dY_1 dZ_2 - X_1 dY_2 dZ_2 \\ & + i(X_2 dY_1 dZ_1 + X_1 dY_2 dZ_1 + X_1 dY_1 dZ_2 - X_2 dY_2 dZ_2) \end{aligned} \right] \\ &= \iint_W \left[\begin{aligned} & dX_1 dY_1 dZ_1 - dX_2 dY_2 dZ_2 - dX_2 dY_1 dZ_2 - dX_1 dY_2 dZ_2 \\ & + i(dX_2 dX_1 dZ_1 + dX_1 dY_2 dZ_1 + dX_1 dY_1 dZ_2 - dX_2 dY_2 dZ_2) \end{aligned} \right]; \end{aligned}$$

elle a un sens, car elle se scinde en huit égalités telles que

$$\int_{\Sigma} X_1 dY_1 dZ_1 = \int_W dX_1 dY_1 dZ_1,$$

et ces dernières, si W est un volume réel et simplement connexe de l'espace à trois dimensions limité par la surface fermée Σ , ne sont autre chose que huit formules de Green analogues à (6). Dans ces huit formules, W, Σ et, par suite, α, β, γ sont les mêmes, mais, d'une formule à l'autre, F, G, H sont des fonctions différentes.

On peut maintenant imaginer, dans (4), une substitution analogue à (19), mais faite en deux fois. On considérera d'abord trois variables complexes

$$(20) \quad \begin{cases} u = u_1(x, y, z) + iu_2(x, y, z), \\ v = v_1(x, y, z) + iv_2(x, y, z), \\ w = w_1(x, y, z) + iw_2(x, y, z), \end{cases}$$

puis l'on posera

$$(21) \quad \begin{cases} X = X(u, v, w) = X_1(u_1, u_2; v_1, v_2; w_1, w_2) + iX_2(u_1, u_2; v_1, v_2; w_1, w_2), \\ Y = Y(u, v, w) = Y_1(u_1, u_2; v_1, v_2; w_1, w_2) + iY_2(u_1, u_2; v_1, v_2; w_1, w_2), \\ Z = Z(u, v, w) = Z_1(u_1, u_2; v_1, v_2; w_1, w_2) + iZ_2(u_1, u_2; v_1, v_2; w_1, w_2). \end{cases}$$

Ce sont bien là des égalités qui, par leurs membres extrêmes, sont analogues à (19), puisque $u_1, u_2; v_1, v_2; w_1, w_2$ sont, d'après (20), des fonctions de x, y, z .

Mais si l'on passe seulement de X, Y, Z à u, v, w, cette transformation donnera une formule de Green

$$(22) \quad \int \int_{(w)} \left(-\frac{\partial w}{\partial u} F - \frac{\partial w}{\partial v} G + H \right) dudv = \int \int \int_U \left(\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial G}{\partial v} + \frac{\partial H}{\partial w} \right) dudvdw$$

qui aura certainement un sens aux conditions suivantes :

1° En exprimant u, v, w en x, y, z , d'après les formules (20), car ce sera achever la transformation étudiée au début du présent paragraphe et qui, nous le savons, a un sens.

2° En imaginant que le point x, y, z soit toujours à l'intérieur d'une surface fermée à trois dimensions $\Phi(x, y, z) = 0$ ou sur cette surface cas pour lequel s'établira, d'après les relations (20), une relation en u, v, w qui permettra de donner un sens aux dérivées partielles figurant dans l'intégrale double de (22).

3° En disant que l'intégrale triple de (22) est étendue à une variété U, à trois dimensions dans l'espace à six, variété qui aura pour équations

$$(23) \quad \begin{cases} u_1 = u_1(x, y, z), & v_1 = v_1(x, y, z), & w_1 = w_1(x, y, z), \\ u_2 = u_2(x, y, z), & v_2 = v_2(x, y, z), & w_2 = w_2(x, y, z) \end{cases}$$

et sur laquelle la relation $\Phi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = 0$ trace une frontière F fermée. Alors l'intégrale (25) est invariable quand V se déforme sans déformation de F . Par suite l'intégrale (25) est nulle pour l'ensemble de deux variétés V formant, par raccord le long de F , une unique variété fermée.

Au début des recherches sur les fonctions de plusieurs variables complexes, c'était surtout la dernière phrase de ce théorème qui semblait importante. Et il est fort important, en effet, de pouvoir considérer des variétés fermées rendant nulle l'intégrale (25). Mais si, sur ces variétés, on considère une étendue, une cloison non fermée sur elle-même et simplement limitée par une frontière fermée F , quelle est la valeur non nulle de l'intégrale (25)? La question a bien son importance aussi. Et une telle question est immédiatement résolue par la formule de Green (13). On voit donc tout le bénéfice des procédés déjà exposés par M. Émile Picard en vue de réunir étroitement les fonctions analytiques de n variables et la formule de Green.

Dans mon Mémoire *Sur la formule de Stokes dans l'hyperespace* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1911) j'avais, pour $n = 2$ et par une voie différente de la précédente, montré que le théorème de Cauchy-Poincaré n'était pas distinct de la petite formule de Riemann à variables imaginarisées. La démonstration donnée alors, plus longue que celle du paragraphe 35, montre, par contre, comment la démonstration fondée sur la considération de la formule de Riemann se rattache aux démonstrations classiques, données par M. Émile Picard dans ses *Fonctions algébriques de deux variables* et son *Traité d'Analyse*.

FORMULES AUXILIAIRES (1).

[38] Si la formule générale de Green est essentiellement contenue dans l'identité (12), cette dernière contient aussi, en puissance, d'autres formules, telles que la formulé de Stokes ordinaire, qui consistent en de nombreuses intégrales, d'ordre de multiplicité quelconque, invariantes quant aux déformations des champs d'intégration pourvu que les frontières de ces champs soient conservées.

J'ai beaucoup insisté sur cette affirmation dans mes précédents Mémoires et particulièrement dans la Troisième partie de celui de l'an dernier. *Toutes ces formules se conservent quand on imaginatise les variables*; cela résulte simplement du fait qu'elles proviennent aussi, par des changements de variables que l'on supposera simplement *analytiques*, d'identités du type (12).

Ces *formules auxiliaires* n'auront peut-être pas, dans la théorie des fonctions de n variables complexes, le rôle constructeur et capital de la formule de Green (13),

(1) *Sur l'intervention des formules de Riemann, Stokes, Green dans les extensions du théorème d'Abel* (Comptes rendus, 28 décembre 1914).

mais il est naturel de se demander à quoi elles correspondent au juste. Je m'expliquerai très suffisamment sur la formule de Stokes ordinaire qui peut s'écrire

$$(26) \quad \int \int_{\Gamma} \begin{vmatrix} f_x & f_y & f_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \frac{dx dy}{f_z} = \int_{\gamma} P dx + Q dy + R dz$$

si

$$(27) \quad f(x, y, z) = 0.$$

Si l'on tirait z , de $f=0$, pour le porter dans l'intégrale double, celle-ci serait une intégrale complexe ordinaire; telle qu'elle est, elle représente tout naturellement le type de l'intégrale double attachée à la surface analytique $f=0$. Et ceci semble, en effet, d'autant plus naturel que lorsqu'on veut construire directement de telles intégrales doubles, sans faire appel à la formule de Stokes, on reconnaît rapidement et par des voies diverses la nécessité d'y introduire le diviseur f_z .

L'essentiel est que l'intégrale double est ramenée, par (26), à une intégrale de ligne.

Mais il n'y a pas que des intégrales doubles qui sont attachées aux surfaces analytiques telles que (27). Il y a aussi des intégrales de la forme

$$(28) \quad \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P dx + Q dy + R dz.$$

Celles-ci sont des fonctions du point analytique (x, y, z) et non des fonctions de ligne comme le second membre de (26), mais ceci n'empêche pas que les deux intégrales simples sont facilement comparables. Et ceci explique aussi pourquoi l'on tombe sur des classifications semblables quand, sur une surface analytique, on étudie les intégrales doubles et les intégrales du type (28), notamment les intégrales de différentielles totales.

[39] Considérons maintenant plus particulièrement le cas où la surface $f=0$ est algébrique et où P, Q, R sont fonctions rationnelles de x, y, z .

Prenons l'exemple particulièrement simple (E. PICARD, *Fonctions algébriques de deux variables*, t. I, p. 190) de l'intersection de la surface $f=0$ avec les deux faisceaux de surfaces algébriques

$$(29) \quad \begin{cases} A(x, y, z) + \lambda B(x, y, z) = 0, \\ C(x, y, z) + \mu D(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

tels que (27) et (29) définissent m points (x_i, y_i, z_i) variables avec (λ, μ) .

Quand (λ, μ) décrit un certain continuum E , de contour e , le point (x_i, y_i, z_i) en décrit un autre Γ_i , de contour γ_i . Si P_i désigne $P(x_i, y_i, z_i)$, le trinôme

$$P_i dx_i + Q_i dy_i + R_i dz_i$$

peut s'écrire

$$\left(P_i \frac{\partial x_i}{\partial \lambda} + Q_i \frac{\partial y_i}{\partial \lambda} + R_i \frac{\partial z_i}{\partial \lambda} \right) d\lambda + \left(P_i \frac{\partial x_i}{\partial \mu} + Q_i \frac{\partial y_i}{\partial \mu} + R_i \frac{\partial z_i}{\partial \mu} \right) d\mu.$$

Si l'on donne à i les valeurs $1, 2, \dots, m$, la somme des expressions obtenues est fonction symétrique des points analytiques (x_i, y_i, z_i) : elle est donc fonction rationnelle de λ et μ et l'on aboutit à une égalité telle que

$$(30) \quad \sum_1^m \int P_i dx_i + Q_i dy_i + R_i dz_i = \int_e L d\lambda + M d\mu.$$

Ceci en raisonnant sur le second membre de (26). Si l'on avait raisonné sur le premier, on aurait eu de même

$$(31) \quad \sum_1^m \iint \Delta(x_i, y_i, z_i) \frac{dx_i dy_i}{f_{z_i}} = \iint_E \left(\frac{\partial M}{\partial \lambda} - \frac{\partial N}{\partial \mu} \right) d\lambda d\mu,$$

Δ désignant, pour abrégé, le déterminant symbolique écrit dans (26).

Ainsi nous avons, en les premiers membres des égalités (30) et (31), des sommes d'intégrales, constituées conformément au théorème d'Abel, qui contiennent l'une des intégrales simples, l'autre des intégrales doubles; ces sommes sont identiquement égales et doivent s'étudier ensemble. Bien plus, ces premiers membres ont conservé la marque de la cause primitive de leur identité, ceci par les seconds membres des égalités (30) et (31), égaux entre eux, à leur tour, par l'intervention de la formule de Riemann.

S'il s'agit de sommes telles que celle représentée par le premier membre de (30), mais avec cette différence que les intégrales seront attachées non à des contours fermés, mais à des contours ouverts terminés par des points analytiques, il n'y aura certainement plus identité absolue entre les premiers membres de (30) et (31). Mais il n'y aura cependant d'autre différence que celle qui existe entre intégrales de lignes, portant sur de mêmes expressions différentielles, attachées tantôt à un contour fermé et tantôt seulement à un arc de ce contour.

De là la raison de l'extrême analogie présentée par les extensions du théorème d'Abel aux intégrales doubles et, par exemple, aux intégrales de différentielles exactes.

Au point de vue géométrique, il faut faire des remarques complètement analogues.

La formule de Stokes à variables réelles a d'abord une valeur géométrique directe, comme je l'ai à nouveau montré dans la première partie du présent Mémoire. Sur des surfaces algébriques, elle peut intervenir encore pour rassembler commodément les intégrales qui sont susceptibles de l'être de par le théorème d'Abel; elle lie entre eux différents théorèmes abéliens dont les applications géométriques, plus élevées, viennent alors logiquement après les précédentes. Ici se placeraient les travaux de M. G. Humbert déjà cités (n° 15).

A vrai dire, si l'on s'en tient aux fonctions algébriques de deux variables, aux surfaces $f(x, y, z) = 0$, l'essentiel a été fait par MM. Picard et Humbert. La formule de Stokes *ordinaire* (26) n'apporte qu'un rapprochement dans des classifications et applications géométriques déjà fort élégamment exposées; mais le rôle des extensions de cette formule apparaît comme particulièrement important dans le cas d'un nombre quelconque de variables complexes. De nombreux résultats seront vraisemblablement obtenus, sous la forme la plus directe et la plus simple, en considérant les extensions de la formule de Stokes telles que celles obtenues dans mes précédents Mémoires (particulièrement dans la troisième partie du dernier) et en y imaginant les variables.

Ceci est d'ailleurs conforme à la méthode qui consiste à établir le théorème fondamental de la théorie des fonctions de n variables complexes en partant de la formule générale de Green et en montrant simplement, *sans rien changer à l'aspect de la formule*, que les variables peuvent y devenir complexes.

(A suivre.)

