MÉMOIRE SUR LES SURFACES ALGÉBRIQUES DOUBLES

AYANT UN NOMBRE FINI DE POINTS DE DIRAMATION

PAR LUCIEN GODEAUX,

à Liège.

Dans plusieurs Mémoires publiés récemment, j'ai étudié les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à des surfaces algébriques (¹); j'ai précisément construit des surfaces normales représentant ces involutions et déterminé les singularités de ces surfaces aux points de diramation. Lorsqu'il s'agit de surfaces de genres un ($p_a = P_4 = 1$) ou de surfaces de genres zéro et de bigenre un ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$), j'ai également montré que l'on pouvait déterminer l'ordre des involutions.

Si l'on considère une involution d'ordre deux appartenant à une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$) et n'ayant qu'un nombre fini (> 0) de points unis, il résulte de mes recherches qu'une surface normale, représentant cette involution (c'est-à-dire dont les points correspondent birationnellement aux groupes de l'involution), est de genres un et possède huit points doubles coniques qui sont huit points de diramation. Mais on peut voir tout de suite que la présence de ces huit points doubles coniques ne suffit pas pour que la surface représente une involution d'ordre deux appartenant à une surface de genres un. Il suffit de remarquer qu'il existe deux

(¹) *Mémoire sur les involutions de genres un appartenant à une surface de genres un* (Annales de l'École Normale supérieure, 1914, [3], XXXI). — *Sur les involutions appartenant à une surface de genres* $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$ (Bulletin de la Société mathématique de France, 1913, XLI). — *Classification des transformations rationnelles existant entre deux surfaces de genres* $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$ (Bulletin de l'Académie roumaine, 1913, II). — *Sur les involutions douées d'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1° sem. 1914, [5], XXIII. — Voir aussi différentes notes parues dans les C. R. : 12 août 1912, 28 avril 1913, 9 juin 1913, 23 mars 1914, 4 mai 1914).

types de surfaces du quatrième ordre ayant huit points doubles coniques, déterminés par Cayley; un seul de ces types est l'image d'une involution d'ordre deux appartenant à une surface de genres un.

Dans ce travail, je me propose de déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface algébrique donnée représente une involution d'ordre deux, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique. En d'autres termes, je déterminerai les conditions d'existence des surfaces doubles (c'est-à-dire des surfaces composées de deux feuillets superposés) ayant un nombre fini de points de diramation. Je parviendrai ainsi au théorème suivant :

Soit Φ une surface algébrique, de genre arithmétique $\pi_a \geqslant -1$, qui puisse être considérée comme une surface double ayant un nombre fini de points de diramation. On peut toujours transformer birationnellement Φ en une surface Φ_0, normale, simple, dépourvue de courbes exceptionnelles, d'ordre n, à sections planes ou hyperplanes de genre π, située dans un espace linéaire à $\rho = n - \pi + \pi_a + 1 (\geqslant 3)$ dimensions, telle que $n - \pi > \pi_a + 1$, et possédant un point double conique en chaque point de diramation.

Pour que la surface double existe, il faut et il suffit que :

1° *Le nombre σ des points de diramation soit multiple de quatre.*

2° *Il y ait, parmi les hypersurfaces découpant sur Φ_0, en dehors des courbes multiples éventuelles, le système double de celui des sections hyperplanes, certaines passant par les σ points de diramation et touchant Φ_0 en chaque point de leur courbe d'intersection avec cette surface. Ces courbes de contact sont d'ordre n, de genre $\pi - \frac{\sigma}{4}$ et forment un système linéaire complet de degré $n - \frac{\sigma}{2}$.*

Dans ces conditions, les genres arithmétique p_a et linéaire $p^{(1)}$ de la surface double sont donnés, en fonction des genres arithmétique π_a et linéaire $\pi^{(1)}$ de Φ, par les formules

$$p_a = 2\pi_a + 1 - \frac{\sigma}{4},$$
$$p^{(1)} = 2\pi^{(1)} - 1.$$

Si nous désignons par $|\Gamma|$ le système des sections hyperplanes de Φ_0, par $|\Gamma_0|$ le système des courbes dont il est question dans le 2° de l'énoncé, enfin par $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\sigma$ respectivement les courbes rationnelles de degré -2 auxquelles sont équivalents les points doubles coniques de Φ_0 au point de vue des transformations birationnelles, nous avons :

$$2\Gamma_0 + \Gamma_1 + \Gamma_2 + \ldots + \Gamma_\sigma \equiv 2\Gamma.$$

Soient, en coordonnées cartésiennes non homogènes,

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_\rho) = 0, \quad \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_\rho) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_{\rho-2}(x_1, x_2, \ldots, x_\rho) = 0$$

les équations de la surface Φ_0,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_\rho) = 0$$

l'équation d'une hypersurface touchant Φ_0 le long d'une courbe Γ_0 et appartenant à la famille des surfaces découpant sur Φ_0 le système $|2\Gamma|$; la surface double a pour équations :

$$\varphi_1 = 0, \ \varphi_2 = 0, \ \ldots, \ \varphi_{\rho-2} = 0, \ x_{\rho+1} = \sqrt{f}.$$

Dans la suite de ce travail, j'appliquerai le théorème qui vient d'être énoncé à certaines surfaces particulières : aux surfaces Φ possédant une involution d'ordre deux ayant une courbe lieu de points de coïncidence, aux surfaces de genres un ($p_a = P_4 = 1$) et aux surfaces de genres zéro et de bigenre un ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$). J'établirai notamment les théorèmes suivants :

I. *Les problèmes :*

a) *Déterminer les plans doubles de genres un* ($p_a = P_4 = 1$) *qui représentent des involutions d'ordre deux appartenant à une surface de genres un;*

b) *Déterminer les surfaces de genres un possédant deux involutions rationnelles d'ordre deux engendrées par deux transformations birationnelles permutables de la surface en elle-même, le produit de ces transformations engendrant une involution de genres un;*

Sont équivalents.

Le même théorème s'applique également aux surfaces de genres zéro et de bigenre un ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$).

II. *Si une surface du quatrième ordre dépourvue de lignes multiples représente une involution d'ordre deux appartenant à une surface de genres un, elle est l'enveloppe d'une série d'indice deux de quadriques ayant huit points communs.*

III. *Si une surface d'ordre six, à sections hyperplanes de genre quatre, de* S_4, *représente une involution d'ordre deux appartenant à une surface de genres un, celle-ci possède deux autres involutions d'ordre deux, l'une rationnelle, l'autre de genres zéro et de bigenre un.*

Conditions d'existence des surfaces doubles douées d'un nombre fini de points de diramation(¹).

[1] Soit Φ une surface algébrique dont le genre arithmétique π_a est au moins égal à -1. Considérons, sur cette surface Φ, un système linéaire régulier $|\Gamma|$, simple, de degré n, de genre π, dépourvu de points-base et tel que

$$n - \pi > \pi_a + 1.$$

Le système $|\Gamma|$ a, d'après le théorème de Riemann-Roch, la dimension

$$\rho = n - \pi + \pi_a + 1.$$

On supposera cette dimension au moins égale à trois; ceci n'est pas en réalité une condition nouvelle imposée à $|\Gamma|$, ce système ayant été supposé simple.

Il est toujours possible de trouver un système tel que $|\Gamma|$. Considérons en effet une transformée birationnelle de Φ située dans un espace linéaire à trois dimensions; il suffit de prendre pour $|\Gamma|$ le système correspondant à celui qui est découpé par les adjointes d'ordre suffisamment élevé sur cette tranformée(²).

Nous allons rechercher quelles sont les conditions auxquelles Φ doit satisfaire pour qu'il existe une surface Φ double douée d'un nombre fini de points de diramation. En d'autres termes, nous allons supposer que la surface Φ est l'image d'une involution I_2, d'ordre deux, ayant un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique F, et chercher les conditions d'existence de cette surface F.

Entre Φ et F, nous aurons, par hypothèse, une correspondance (1,2).

(¹) Il est peut-être utile de rappeler la terminologie employée ici. Par *involution d'ordre n* appartenant à une surface algébrique F, on entend une variété ∞^2 de groupes de n points de F telle qu'un point de la surface n'appartienne, en général, qu'à un seul de ces groupes. Un point de F est dit *point uni* ou *point de coïncidence* s'il doit être compté plusieurs fois dans le groupe dont il fait partie. Un système de courbes est *composé* avec une involution si les courbes de ce système passant par un point P passent en conséquence par les autres points du groupe de l'involution auquel P appartient. Un système de courbes qui n'est composé avec aucune involution est dit *simple*. Une surface Φ représente (ou est l'image) d'une involution appartenant à une surface F s'il existe une correspondance birationnelle entre les points de Φ et les groupes de l'involution. Un point de Φ auquel correspond un groupe comprenant un point uni (au moins) est dit *point de diramation* (de l'italien *diramazione*). Il existe en général ∞^1 points de diramation formant la *courbe de diramation* et ∞^1 points unis formant la *courbe unie*.

(²) F. Enriques, *Introduzione alla Geometria sopra una superficie algebrica* (Memorie della Società Italiana delle Scienze, 1896, [3], X).

Désignons par C les courbes de F qui correspondent aux courbes Γ. Les courbes C appartiennent à un système linéaire complet |C| de degré $2n$.

Nous supposerons le système |Γ| choisi de telle manière que ses courbes ne passent pas, en général, par un point de diramation de Φ. Alors, le système |C| a le genre $2\pi - 1$.

Si p_a désigne le genre arithmétique de F, la dimension r de |C| est, d'après le théorème de Riemann-Roch,

$$r \geqslant 2n - 2\pi + p_a + 2 - i,$$

i désignant l'indice de spécialité de |C|.

Observons que d'après un théorème de M. Enriques [1], une courbe canonique de Φ se transforme en une courbe canonique de F. Par conséquent, une courbe non-spéciale de Φ se transforme en une courbe non-spéciale de F. Or, les courbes Γ ne sont pas spéciales, puisque |Γ| est régulier; donc les courbes C ne sont pas spéciales et $i = 0$.

Cela étant, pour que la dimension r de |C| soit supérieure à celle ρ de |Γ|, on doit avoir :

$$n - \pi > \pi_a - p_a - 1.$$

Cette inégalité est toujours vérifiée pour $p_a \geqslant -1$, d'après nos hypothèses. Si p_a est inférieur à -1, F est réglée (ou référable à une réglée) d'après un théorème de M. Castelnuovo [2]. Mais alors, à une génératrice de F correspond une courbe rationnelle sur Φ. Cette surface est donc aussi réglée; c'est de plus, puisque $\pi_a \geqslant -1$ par hypothèse, une réglée rationnelle ou elliptique. Il est aisé de voir que pour qu'entre les deux réglées Φ, F, on ait une correspondance (1, 2) sans courbe de diramation sur Φ, ces réglées doivent être toutes deux elliptiques. On a donc $p_a \geqslant -1$ et |C| a alors une dimension supérieure à celle de |Γ|.

Rapportons projectivement les courbes de |Γ| aux hyperplans d'un espace linéaire S_ρ à ρ dimensions. La surface Φ se transforme birationnellement en une surface Φ_0, simple, d'ordre n. Nous désignerons encore par |Γ| le système des sections hyperplanes de Φ_0.

[2] Nous allons montrer qu'en chaque point de diramation, Φ possède un point double conique.

Soit P un point de coïncidence de l'involution I_2 sur F; soit P′ le point de diramation correspondant sur Φ.

Le point P est un point de *coïncidence parfaite*, c'est-à-dire que, dans le domaine

---

(1) F. Enriques, *Ricerche di Geometria sopra una superficie algebrica* (Memorie della R. Accademia di Torino, 1893, [2], XLIV).

(2) G. Castelnuovo, *Sulle superficie aventi il genere aritmetico negativo* (Rendiconti del Circolo Matem. di Palermo, 1905, XX).

de P sur la surface F, l'involution I_2 opère comme l'identité. En d'autres termes, tout point de F infiniment voisin de P, compté deux fois, forme un groupe de I_2.

Supposons, en effet, qu'il n'en soit pas ainsi. Considérons sur la surface F un système linéaire simple, sans points-base $|C_1|$, et soit $|C_2|$ son transformé au moyen de la correspondance birationnelle entre les points de F définie par I_2. Désignons par $|C'|$ le système linéaire (en général incomplet) $|C_1 + C_2|$ composé avec I_2. Si le point P n'est pas un point de coïncidence parfaite, une courbe C_1 assujettie à la seule condition de passer par P est transformée par I_2 en une courbe C_2 passant par P, mais ne touchant pas en général C_1 en ce point. Par conséquent, les courbes C' passant par P ont en général un point double à tangentes distinctes en P. Ces courbes contiennent une γ'_2, déterminée par I_2 et représentée sur Φ par une courbe d'un certain genre η. Cette γ'_2 n'ayant pas de points de coïncidence (puisqu'à un point infiniment voisin de P sur une branche d'une courbe C' correspond le point infiniment voisin de P sur l'autre branche), la formule de Zeuthen donne, pour le genre des C', $2\eta - 1$. Les courbes C' passant par P ont donc le genre virtuel 2η et les courbes C' ne passant pas par P ont le genre effectif 2η. Mais ces dernières courbes possèdent également une γ'_2, sans points de coïncidence, d'un certain genre η'. La formule de Zeuthen donne $4(\eta' - 1) = 2(2\eta - 1)$, ce qui est absurde[1].

Donc *un point de coïncidence de I_2 est un point de conïcidence parfaite.*

Retournons aux systèmes $|\Gamma|$ et $|C|$ que nous avons construits plus haut. Soit Γ' une courbe Γ passant par P', C' la courbe correspondante sur F.

La courbe C' passe un nombre pair de fois par P, car, sur cette courbe, il y a une involution γ'_2 déterminée par I_2, et une pareille involution a toujours un nombre pair de points de coïncidence. Soit 2ε la multiplicité de P pour C'.

Chaque point de C' infiniment voisin de P, compté deux fois, forme un groupe de I_2. Il lui correspond donc, sur Γ', un point infiniment voisin de P'. Par conséquent, la courbe Γ' aura, en P', un point multiple d'indice 2ε à tangentes distinctes. De plus, ces tangentes sont variables avec Γ', car P est un point multiple à tangentes variables de C'; donc Φ_0 a en P' un point multiple conique d'indice 2ε. La courbe C' a le genre $2\pi - \varepsilon(2\varepsilon - 1)$, la courbe Γ' le genre $\pi - 2\varepsilon + 1$, car le point P' doit être considéré, au point de vue des transformations birationnelles, comme une courbe rationnelle de degré -2ε. Entre Γ' et C', nous avons une correspondance (1,2) ayant 2ε coïncidences aux points de C' infiniment voisins de P. La formule de Zeuthen donne

$$4(\pi - 2\varepsilon) + 2\varepsilon = 4\pi - 4 - 2\varepsilon(2\varepsilon - 1).$$

On en déduit $\varepsilon = 1$. Par suite :

En chaque point de diramation, la surface Φ_0 possède un point double conique.

---

(1) Ce raisonnement a été employé par MM. Enriques et Severi. Voir F. Severi, *Sulle superficie algebriche che ammettono*... (Atti Istituto Veneto, 1907, LXVII).

[**3**] Désignons par σ le nombre des points de diramation de Φ_0. Chacun de ces points devant être considéré comme une courbe rationnelle de degré -2, nous désignerons respectivement par $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\sigma$ ces courbes.

La correspondance $(1,2)$ existant entre Φ_0 et F peut donc être considérée comme ayant, sur Φ_0, une courbe de diramation $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \ldots + \Gamma_\sigma$ composée de σ courbes rationnelles infiniment petites. Cette courbe a donc le genre $1 - \sigma$ et le degré -2σ. Appliquons les formules de M. Severi à cette correspondance [1], nous trouvons

$$\sigma = 4(2\pi_a - p_a + 1),$$
$$p^{(1)} - 1 = 2(\pi^{(1)} - 1),$$

$p^{(1)}$ et $\pi^{(1)}$ désignant respectivement les genres linéaires de F et de Φ_0.

[**4**] Le système complet $|C|$ est simple. En effet, par construction, il est plus ample que $|\Gamma|$ et n'est donc pas composé avec I_2. D'autre part, s'il était composé avec une autre involution, $|\Gamma|$ serait également composé avec une involution, ce qui est contre l'hypothèse.

Par conséquent, si nous rapportons projectivement les courbes de $|C|$ aux hyperplans d'un espace linéaire S_r à r dimensions, la surface F se transformera en une surface simple, d'ordre $2n$, de cet S_r. Nous désignerons toujours cette surface par F et ses sections hyperplanes seront appelées C.

L'involution I_2 transforme une courbe C en une courbe C en général distincte de la première. Par conséquent I_2 est engendrée sur F par une homographie involutive de S_r laissant cette surface invariante. Cette homographie involutive possède deux espaces linéaires unis, A_1, A_2, dont les dimensions r_1, r_2 respectives vérifient l'égalité

$$r_1 + r_2 = r - 1.$$

Les hyperplans de S_r passant par l'un de ces espaces, par exemple par A_1, découpent sur F les courbes C homologues des courbes de $|\Gamma|$. On doit donc avoir, le système complet $|\Gamma|$ ayant la dimension ρ, $r_1 = r - \rho - 1$. De plus, A_1 ne peut pas rencontrer la surface F, car les courbes Γ ne passent pas, en général, par des points de diramation de Φ_0.

L'espace A_2 est de dimension $r_2 = \rho$ et tous les points unis de I_2 doivent lui appartenir; il s'appuie donc en $\sigma = 4(2\pi_a - p_a + 1)$ points sur F. Les hyperplans passant par A_2 découpent sur F un système (incomplet) de genre $2\pi - 1$, possédant σ points-base et composé avec l'involution I_2.

Aux courbes de ce système correspondent, sur Φ_0, certaines courbes Γ_0 formant

---

(1) F. Severi, *Sulle relazioni che legano i caratteri invarianti*... (Rend. R. Istituto Lombardo, 1903, [2], XXXVI).

un système linéaire $|\Gamma_0|$ de dimension $r - \rho - 1$ égale au nombre d'hyperplans passant par A_2.

Entre une courbe Γ_0 et sa transformée, nous avons une correspondance (1,2) ayant σ points de coïncidence. Ces courbes Γ_0 ont donc, d'après la formule de Zeuthen, le genre $\pi - (2\pi_a - p_a + 1)$.

Le système découpé sur F par les hyperplans contenant A_2 étant de degré $2n$ et ayant σ points-base, $|\Gamma_0|$ a le degré $n - 2(2\pi_a - p_a + 1)$. De plus, les courbes Γ_0 sont d'ordre n, car elles rencontrent chaque section hyperplane Γ de Φ_0 en n points.

A une courbe C non homologue d'une courbe Γ ou d'une courbe Γ_0 correspond, sur Φ_0, une courbe D de genre effectif $2\pi - 1$. A chacun des n groupes de I_2 situés sur cette courbe C correspond un point double de cette courbe D de Φ_0. Elle a donc n points doubles et son genre virtuel est par suite $2\pi + n - 1$.

Faisons varier la courbe C considérée de manière à ce que l'hyperplan qui la contient passe par A_1. La courbe D se réduit alors à la courbe 2Γ. Donc les courbes de Φ_0 qui correspondent aux courbes génériques de $|C|$ appartiennent au système $|2\Gamma|$.

Considérons encore une courbe C non homologue d'une courbe Γ et Γ_0 et faisons-la varier de manière à ce qu'elle vienne coïncider avec une courbe C dont l'hyperplan contient A_2. La courbe D correspondante sur Φ_0 se réduit à

$$2\Gamma_0 + \Gamma_1 + \Gamma_2 + \ldots + \Gamma_\sigma.$$

On a donc

$$2\Gamma_0 + \Gamma_1 + \Gamma_2 + \ldots + \Gamma_\sigma \equiv 2\Gamma.$$

[**5**] Pour établir que l'existence des σ points doubles coniques et du système $|\Gamma_0|$ est suffisante pour que, Φ_0 étant donnée, F existe, il faut tout d'abord faire une remarque bien simple de géométrie projective.

Considérons les hypersurfaces V de S_ρ découpant, sur Φ_0, les courbes du système complet $|2\Gamma|$ (¹). Exprimer qu'une courbe de $|2\Gamma|$ a une partie double, c'est dire qu'elle est découpée sur Φ_0 par une hypersurface touchant Φ_0 en chaque point de cette partie double. Ainsi, une courbe de $|2\Gamma|$ se réduisant à une section hyperplane Γ comptée deux fois est découpée sur Φ_0 par une hyperquadrique réductible en un hyperplan double; cette hyperquadrique doit donc être considérée comme touchant Φ_0 en chaque point de la courbe d'intersection.

D'après cela, une courbe Γ_0 quelconque sera découpée par une des hypersurfaces V considérées, passant par les σ points doubles et touchant Φ_0 en chaque point de la courbe Γ_0.

(¹) Si Φ_0 est dépourvue de lignes multiples, les V sont des hyperquadriques.

Soient

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_\rho) = 0, \quad \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_\rho) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_{\rho-2}(x_1, x_2, \ldots, x_\rho) = 0$$

les équations de la surface Φ_0,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_\rho) = 0$$

l'équation d'une des hypersurfaces V considérée, touchant Φ_0 le long d'une courbe Γ_0, les $x_1, x_2, \ldots, x_\rho$ désignant les coordonnées cartésiennes de S_ρ.

Considérons la surface représentée par les équations

$$(1) \qquad \varphi_1 = 0, \ \varphi_2 = 0, \ \ldots, \ \varphi_{\rho-2} = 0, \ x^2_{\rho+1} = f,$$

et rappelons que les composantes doubles de la courbe de diramation d'une surface double doivent être défalquées de cette courbe.

La courbe de diramation de la surface double (1) est la courbe intersection de la surface Φ_0 et de l'hypersurface $f = 0$. Or, le polynôme f a été choisi de telle sorte que cette intersection est

$$2\Gamma_0 + \Gamma_1 + \Gamma_2 + \ldots + \Gamma_\sigma.$$

Par conséquent, il n'y a diramation que dans les domaines des σ points doubles coniques de Φ_0.

En d'autres termes, la surface double (1), irréductible, ne possède qu'un nombre fini de points de diramation. On voit donc que l'existence des σ points doubles et du système $|\Gamma_0|$ est suffisante.

[**6**] Nous allons faire subir une petite modification au théorème précédent, modification qui nous sera utile dans la suite.

Considérons une transformée birationnelle Φ' de la surface Φ_0 qui soit dépourvue de points multiples. On sait que cela est toujours possible pourvu que la surface Φ' se trouve dans un espace linéaire ayant au moins cinq dimensions.

Sur la surface Φ', aux σ points doubles coniques de diramation correspondent σ courbes rationnelles de degré -2, sans points communs, que nous désignerons toujours par respectivement $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\sigma$.

Considérons, sur la surface Φ', un système linéaire complet $|\Gamma'|$, de degré n' et de genre π', quelconque, mais dont les courbes ne rencontrent pas, en général, les courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\sigma$. Soit $|C'|$ le système linéaire complet, de degré $2n'$ et de genre $2\pi' - 1$, comprenant les transformées des courbes Γ' sur F.

On pourra toujours trouver un entier $k \geqslant 1$ tel que le système complet $|kC'|$ soit plus ample que le système $|k\Gamma'|$. Il suffit de prendre k suffisamment grand pour que la dimension effective de $|k\Gamma'|$ soit égale à sa dimension virtuelle

$$\frac{1}{2}k(k+1)n' - (k-1)\pi' + \pi_a,$$

et que l'on ait en plus

$$\frac{1}{2}k(k+1)n' - (k-1)\pi' > \pi_a + 2.$$

Alors, d'après le théorème de Riemann-Roch, le système $|kC'|$ a une dimension au moins égale à

$$k(k+1)n' - (k-1)(2\pi'-1) + p_a,$$

par conséquent supérieure à celle de $|k\Gamma'|$.

L'involution I_2 change en lui-même le système $|kC'|$ sans cependant changer en elles-mêmes toutes les courbes de ce système. Dans le système $|kC'|$, où l'on considère les courbes comme éléments, I_2 engendre donc une homographie involutive. Il y aura donc deux systèmes linéaires partiels, dans $|kC'|$, composé avec I_2 : l'un est formé par les courbes kC' homologues des courbes $k\Gamma'$ et n'a donc, pour point-base, aucun point uni de I_2; l'autre a les points unis de I_2 pour points-base et il lui correspond sur Φ' un système linéaire $|\Gamma'_{0k}|$. On démontrerait comme précédemment que l'on a

$$2\Gamma'_{0k} + \Gamma_1 + \Gamma_2 + \ldots + \Gamma_\sigma \equiv 2k\Gamma'.$$

Cela signifie que parmi les hypersurfaces découpant sur Φ' le système $|2k\Gamma'|$, il y en a qui passent (un nombre impair de fois) par les courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\sigma$ et qui touchent Φ' en chaque point de leur intersection Γ'_{0k} avec cette surface.

En particulier, soit $|\Gamma'|$ un système dépourvu de points-base, simple, tel que le système $|C'|$ ne soit pas plus ample que $|\Gamma'|$. En rapportant projectivement les courbes Γ' aux hyperplans d'un espace linéaire (dont la dimension ρ' égale celle de $|\Gamma'|$), Φ' se transforme en une surface Φ'_0 ayant σ points doubles coniques. Soient

$$\varphi'_1(x_1, x_2, \ldots, x_{\rho'}) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi'_{\rho'-2}(x_1, x_2, \ldots, x_{\rho'}) = 0$$

les équations de Φ'_0. La surface F a pour équations

$$\varphi'_1 = 0, \quad \varphi'_2 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi'_{\rho'-2} = 0, \quad x^2_{\rho'+1} = f'_k(x_1, x_2, \ldots, x_{\rho'}),$$

$f'_k(x_1, x_2, \ldots, x_{\rho'}) = 0$ étant une hypersurface passant par les points doubles et touchant Φ'_0 le long d'une courbe Γ'_{0k}. On voit donc que :

Pour qu'une surface simple, normale, représente une involution d'ordre deux, douée d'un nombre fini de points unis, appartenant à une certaine surface algébrique, il faut et il suffit que :

1° *La surface possède en chaque point de diramation un point double conique :*

2° *Le nombre de ces points de diramation soit multiple de quatre;*

3° *Parmi les hypersurfaces découpant le système $2k$ — uple du système des sections hyperplanes, il y en ait qui passent par les points de diramation et touchent la surface en chaque point d'intersection.*

[7] Retournons à la surface Φ_0 du n° 5 et supposons que cette surface possède une involution I'_2 d'ordre deux. Cette involution sera engendrée sur Φ_0 par une transformation birationnelle de cette surface en elle-même. Soient

$$x'_i = \chi_i(x_1, x_2, \dots x_\rho) \qquad (i = 1, 2, \dots, \rho)$$

les formules qui définissent cette transformation; les χ_i sont donc des fonctions rationnelles réversibles de leurs arguments.

La surface F, dont les équations sont (n° 5)

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \dots, \quad \varphi_{\rho-2} = 0, \quad x^2_{\rho+1} = f,$$

admet trois transformations birationnelles en elle-même, à savoir :

$$\text{(I)} \qquad x'_i = x_i, \qquad x'_{\rho+1} = -x_{\rho+1};$$

$$\text{(II)} \qquad x'_i = \chi_i, \qquad x'_{\rho+1} = +x_{\rho+1};$$

$$\text{(III)} \qquad x'_i = \chi_i, \qquad x'_{\rho+1} = -x_{\rho+1};$$

$$(i = 1, 2, \dots, \rho).$$

La première de ces transformations engendre l'involution I_2, les autres engendrent respectivement des involutions d'ordre deux que nous désignerons par $I_2^{(1)}$, $I_2^{(2)}$.

Les trois transformations qui viennent d'être définies sont deux à deux permutables. Elles engendrent une involution d'ordre quatre à chaque groupe de laquelle correspond, sur Φ_0, un groupe de I'_2.

La remarque que nous voulons faire ici concerne le cas où les involutions $I_2^{(1)}$, $I_2^{(2)}$ ont toutes deux une infinité de points de coïncidence formant des courbes que nous désignerons respectivement par D_1, D_2.

Remarquons tout d'abord que :

1° Si un point de F est uni pour deux des trois involutions I_2, $I_2^{(1)}$, $I_2^{(2)}$, il l'est pour la troisième et il lui correspond, sur Φ_0, un point uni de I'_2.

2° Si un point de F est uni pour I_2 mais non pour $I_2^{(1)}$, $I_2^{(2)}$, ces involutions le transforment en un même point uni pour I_2.

3° Si un point de F est uni pour $I_2^{(1)}$ (ou $I_2^{(2)}$) mais non pour I_2 et $I_2^{(2)}$ (ou $I_2^{(1)}$), I_2 et $I_2^{(2)}$ (ou $I_2^{(1)}$) transportent ce point en un point uni pour la même involution. Par conséquent D_1, D_2 sont transformées en elles-mêmes par I_2.

Soient Δ_1, Δ_2 les courbes qui correspondent sur Φ_0 à D_1, D_2 respectivement. Des trois remarques qui précèdent, on déduit que :

1° L'involution I'_2 a comme courbe de coïncidence la courbe $\Delta_1 + \Delta_2$;

2° Les points communs à ces deux courbes sont des points de diramation de Φ_0;

3° Les points de diramation de Φ_0 non situés sur Δ_1, Δ_2 se groupent en couples conjugués par rapport à I'_2;

4° Le nombre des points de diramation de Φ_0 étant pair, Δ_1 et Δ_2 ont un nombre pair d'intersections.

Considérons, dans un espace linéaire S_ν à ν dimensions ($\nu \geqslant 2$), une surface normale Ψ image de l'involution I'_2. Supposons qu'aux sections hyperplanes de Ψ correspondent sur Φ_0 des courbes ne passant pas, en général, par les σ points doubles de diramation.

Désignons par Δ_1^*, Δ_2^* les courbes qui correspondent sur Ψ aux courbes Δ_1, Δ_2 respectivement et soit 2τ le nombre de points communs à ces deux courbes ($2\tau \leqslant \sigma$).

Aux σ points de diramation de Φ_0 correspondent, sur Ψ :

1° $2\tau (\leqslant \sigma)$ points communs à Δ_1^*, Δ_2^*, c'est-à-dire 2τ points doubles de la courbe diramation $\Delta_1^* + \Delta_2^*$ de Φ_0 considérée comme surface Ψ double.

2° $\frac{1}{2}\sigma - \tau$ points doubles coniques de Ψ.

Pour notre objet, nous supposerons $2\tau = \sigma$. Soient alors

$$\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) = 0, \quad \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) = 0, \quad \ldots, \quad \psi_{\nu-2}(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) = 0$$

les équations de la surface Ψ en coordonnées cartésiennes,

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) = 0, \quad f_2(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) = 0$$

les équations de deux hypersurfaces découpant respectivement Δ_1^*, Δ_2^* sur la surface Ψ.

La surface Φ_0 a pour équations

$$\psi_1 = 0, \quad \psi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \psi_{\nu-2} = 0, \quad x_{\nu+1}^2 = f_1 f_2,$$

et la surface F,

$$\psi_1 = 0, \quad \psi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \psi_{\nu-2} = 0, \quad x_{\nu+1}^2 = f_1, \quad x_{\nu+2}^2 = f_2.$$

Inversement :

Si une surface double possède une courbe de diramation formée de deux parties Δ_1^*, Δ_2^*, elle est l'image d'une involution d'ordre deux douée d'un nombre fini de points *de coïncidence, appartenant à une surface algébrique. Le nombre des points de coïncidence est égal au nombre des intersections de* Δ_1^{σ}, Δ_2^{σ}.

En particulier, si Ψ est un plan, on a nécessairement $2\tau = \sigma$, car un plan ne peut évidemment pas avoir de points doubles. On obtient ainsi le théorème dont nous ferons usage dans la suite :

Un plan double dont la courbe de diramation se scinde en deux parties :

$$z^2 = f_1(x, y) f_2(x, y),$$

est l'image d'une involution d'ordre deux, ayant un nombre fini de points unis, appartenant à la surface

$$z^2 = f_1(x, y), \quad u^2 = f_2(x, y).$$

Notons que la courbe $f_1(x, y) f_2(x, y)$ est d'ordre pair et que les courbes $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ ne peuvent avoir de partie commune (à cause de l'hypothèse faite sur les sections hyperplanes de Ψ), ces deux courbes ont donc l'ordre pair.

Surfaces de genres un doubles douées d'un nombre fini de points de diramation.

[8] Supposons que la surface Φ soit une surface de genres un. Cette surface est caractérisée par deux conditions (1) :

1° Son genre arithmétique est $\pi_a = 1$;

2° Son quadrigenre est $\Pi_4 = 1$.

Toute courbe de genre virtuel π, tracée sur Φ, appartient totalement à un système linéaire de degré $2\pi - 2$ et de dimension π, dépourvu de points-base. Ce système est son propre adjoint.

Les courbes canoniques et pluricanoniques de Φ sont d'ordre zéro.

Il résulte de ceci qu'une surface normale Φ_0 birationnellement identique à Φ est d'ordre $2\pi - 2$, située dans un espace S_π et que ses sections hyperplanes sont de genre π.

Nous allons voir que la surface F qui, par hypothèse, contient une involution d'ordre deux douée d'un nombre fini de points unis, dont Φ est une image, est une surface hyperelliptique de Picard ($p_a = -1$, $p_g P_4 = 1$) ou une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$).

(1) F. Enriques, *Intorno alle superficie algebriche di genere lineare* $p^{(1)} = 1$ (Rend. R. Accad. di Bologna, 1906).

En effet, il résulte d'un théorème de M. Enriques déjà invoqué plusieurs fois (n^{os} 1, 2) qu'une courbe i— canonique de Φ se transforme en une courbe i— canonique de F. Or, Φ possède une seule courbe i— canonique d'ordre zéro, donc la courbe i— canonique de F est unique et d'ordre zéro; par suite, on a :

$$p_g = P_2 = P_3 = P_4 = \ldots = P_i = \ldots = 1.$$

Il en résulte $p_a = \pm 1$ [1].

Si $p_a = -1$, F est une surface hyperelliptique (de Picard ou, en particulier, de Jacobi) et Φ_0 est une surface de Kummer généralisée. On a $\sigma = 16$.

Si $p_a = +1$, F est une surface de genres un. On a $\sigma = 8$.

[9] Envisageons le cas où F est une surface de Picard ou, en particulier, une surface de Jacobi ($p_a = -1$, $p_g P_4 = 1$). La surface Φ_0 est alors une surface d'ordre $2\pi - 2$, de S_π, à sections hyperplanes de genre $\pi (\pi \geqslant 3)$, possédant seize points doubles coniques.

Soit $|\Gamma|$ le système des sections hyperplanes de Φ_0 et soit $|C|$ le système de F comprenant les transformées des courbes Γ. $|C|$ a le degré $4\pi - 4$, le genre $2\pi - 1$ et la dimension $2\pi - 3$ [2]. Par conséquent, sauf pour $\pi = 3$, $|C|$ est plus ample que $|\Gamma|$. On pourra donc appliquer le théorème établi au n° 5 aux surfaces Φ_0 pour lesquelles $\pi > 3$ et le théorème du n° 6 aux surfaces Φ_0 pour lesquelles $\pi = 3$.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface algébrique d'ordre $2\pi - 2$, de S_π, à sections hyperplanes de genre π ($\pi \geqslant 4$), représente une involution d'ordre deux appartenant à une surface de Picard, sont :

1° Que cette surface possède seize points doubles coniques;

2° Qu'il y ait des hyperquadriques passant par ces seize points doubles et touchant la surface en chaque point de la courbe d'intersection.

Ce théorème n'est pas nouveau, il a été établi par MM. Enriques et Severi d'une manière plus précise, permettant notamment de déterminer la valeur du diviseur de la surface de Picard [3].

Pour le cas $\pi = 3$, on a ce théorème :

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface d'ordre quatre représente une involution d'ordre deux appartenant à une surface de Picard sont que :

---

(1) Enriques, *Intorno...* (*loc. cit.*).

(2) Enriques et Severi, *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques* (Acta Mathematica, 1909, XXXII, XXXIII).

(3) Enriques et Severi, *Surfaces hyperelliptiques* (*loc. cit.*, 1re partie, n^{os} 50, 51, 52 et 53).

1° Elle ait seize points doubles coniques;

2° Il y ait des surfaces du quatrième ordre passant par les seize points doubles et touchant la surface en chaque point de la courbe d'intersection (d'ordre huit et de genre cinq).

On sait qu'actuellement la surface de Picard est de diviseur un (surface de Jacobi) et que la deuxième condition est une conséquence nécessaire de la première [1].

Nous ne nous arrêterons pas plus longtemps sur ces propriétés bien connues.

[**10**] Passons au cas où F est une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$). On a $\sigma = 8$ et la surface Φ_0 est une surface d'ordre $2\pi - 2$, à sections de genre $\pi (\geqslant 3)$, de S_π.

Le système linéaire comprenant les transformées des sections hyperplanes de Φ_0 sur F a le degré $4\pi - 4$, le genre $2\pi - 1$ et la dimension $2\pi - 1$ toujours supérieure à celle, π, du système des sections hyperplanes de Φ_0. Par conséquent :

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface normale de genres un représente une involution d'ordre deux appartenant à une surface de genres un, sont que :

1° *La surface possède huit points doubles coniques, et que :*

2° *Il y ait des hyperquadriques passant par ces huit points doubles et touchant la surface en chaque point de leur courbe d'intersection.*

Si nous désignons comme d'habitude par $|\Gamma|$ le système des sections hyperplanes de Φ_0 et par $|\Gamma_0|$ le système découpé par les hyperquadriques tangentes à Φ_0, $|\Gamma|$ a le degré $2\pi - 6$, le genre et la dimension $\pi - 2$, et on a :

$$2\Gamma_0 + \Gamma_1 + \Gamma_2 + \ldots + \Gamma_8 \equiv 2\Gamma.$$

Nous appliquerons ce théorème successivement dans les cas $\pi = 3$, $\pi = 4$; nous nous occuperons ensuite des plans doubles de genres un. Rappelons que nous avons déjà construit une surface de genres un possédant une involution d'ordre deux et de genres un, correspondant au cas $\pi = 6$ [2].

[**11**] Une surface du quatrième ordre Φ_0, sans lignes multiples, pour pouvoir représenter une involution d'ordre deux appartenant à une surface de genres un (une section plane n'ayant pas, en général, de diramation) doit posséder huit points doubles coniques et il doit y avoir ∞^1 quadriques passant par ces huit points et touchant Φ_0 le long de quartiques gauches elliptiques Γ_0.

---

[1] ENRIQUES et SEVERI, *Surfaces hyperelliptiques* (*loc. cit.*, 1re partie, nos 46, 47, 48, 49).

[2] L. GODEAUX, *Sur la surface du quatrième ordre contenant une sextique gauche de genre trois* (Bull. de l'Acad. des Sc. de Cracovie, 1913).

Par une quartique Γ_0^c passent ∞^1 quadriques dont une touche Φ_0. Ces quadriques découpent, sur Φ_0, le faisceau $|\Gamma_0|$. En effet, les quadriques passant par Γ_0^c découpent sur Φ_0 un faisceau de quartiques elliptiques, l'une de celles-ci est Γ_0^c; une surface de genres un ne pouvant posséder deux faisceaux de courbes elliptiques ayant une courbe commune (car alors on obtiendrait un réseau de genre 1), notre assertion s'en suit.

A chaque Γ_0 est donc attaché un faisceau de quadriques et tous ces faisceaux sont nécessairement différents. Par suite, les huit points doubles de Φ_0 appartiennent à ∞^2 quadriques, ils sont les points-base d'un réseau de quadriques.

Cette dernière propriété n'est pas une conséquence de l'existence des huit points doubles arbitraires (¹).

Les surfaces du quatrième ordre ayant huit points doubles coniques $P_1, P_2, \ldots, P_8$, communs à ∞^2 quadriques, sont ∞^5. En effet, si nous désignons par $P_1, P_2, \ldots, P_8$ les huit points doubles de Φ_0, les surfaces d'ordre quatre ayant ces mêmes points doubles découpent, sur Φ_0, le système $|4\Gamma_0|$, réductible, ∞^4.

D'autre part, l'enveloppe d'un système d'indice deux de quadriques passant par $P_1, P_2, \ldots, P_8$ est une surface d'ordre quatre, ayant des points doubles coniques en $P_1, P_2, \ldots, P_8$. Dans le réseau des quadriques ayant les points-base $P_1, P_2, \ldots, P_8$, il y a ∞^5 séries d'indice deux.

Observons que la surface Φ_0 ne possède qu'un faisceau de quartiques elliptiques et que l'enveloppe d'une série d'indice deux de quadriques passant par $P_1, P_2, \ldots, P_8$ jouit de la même propriété, c'est-à-dire qu'elle ne peut, en général, être obtenue que d'une façon par ce procédé. Par suite, Φ_0 est l'enveloppe d'une série d'indice deux de quadriques.

Si une surface du quatrième ordre représente une involution d'ordre deux appartenant à une surface de genres un (*de manière qu'une section plane n'ait pas, en général, de points de diramation*), *elle est l'enveloppe d'une série d'indice deux de quadriques ayant huit points communs* (*et huit seulement*).

[**12**] Considérons une surface Φ_0 d'ordre six, de S_4 à sections hyperplanes Γ de genre quatre. Pour qu'elle représente une involution d'ordre deux appartenant à une surface F de genres un, il faut qu'elle ait huit points doubles coniques $P_1, P_2, \ldots, P_8$ et qu'il y ait ∞^2 hyperquadriques passant par $P_1, P_2, \ldots, P_8$ et touchant Φ_0 le long de courbes Γ_0 de genre deux.

Le système $|\Gamma_0|$, de genre deux, a le degré deux. Il définit donc une transformation birationnelle de Φ_0 en elle-même.

(¹) Voir par exemple K. Rohn, *Ueber Flächen 4. Ordnung mit acht bis sechzehn Knotenpuncten* (Berichte K. Gesellsch. zu Leipzig, 1884, XXXVI).

Soient

$$\varphi_1(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \quad \varphi_2(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

les équations de Φ_0 en coordonnées homogènes,

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

l'équation d'une hyperquadrique touchant Φ_0 le long d'une courbe Γ_0. On sait que la surface Φ_0 est l'intersection d'une hyperquadrique et d'une hypersurface cubique; φ_1 sera donc du deuxième, φ_2 du troisième degré.

Soient

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = \chi_0(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) : \chi_1 : \chi_2 : \chi_3 : \chi_4$$

les équations de la transformation birationnelle de Φ_0 en elle-même. Cette transformation change en elle-même toute courbe Γ_0, c'est-à-dire le système des solutions communes aux équations $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $f = 0$.

La surface F peut être représentée par les équations

$$y_0 = x_0, \quad y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_3, \quad y_4 = x_4, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0,$$
$$y_5^2 = f(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4).$$

Cette surface admet trois transformations birationnelles en elle-même, à savoir :

(I) $$y'_0 : y'_1 : y'_2 : y'_3 : y'_4 : y'_5 = y_0 : y_1 : y_2 : y_3 : y_4 : -y_5;$$

(II) $$y'_0 : y'_1 : y'_2 : y'_3 : y'_4 : y'_5 = \chi_0 : \chi_1 : \chi_2 : \chi_3 : \chi_4 : y_5;$$

(III) $$y'_0 : y'_1 : y'_2 : y'_3 : y'_4 : y'_5 = \chi_0 : \chi_1 : \chi_2 : \chi_3 : \chi_4 : -y_5.$$

Ces trois transformations sont deux à deux permutables.

La première engendre l'involution I_2 dont Φ_0 est l'image; elle admet donc huit points invariants (unis de I_2).

La transformation (II) engendre une involution I'_2 d'ordre deux et laisse invariants tous les points pour lesquels on a

$$\frac{y_0}{\chi_0(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4)} = \frac{y_1}{\chi_1} = \frac{y_2}{\chi_2} = \frac{y_3}{\chi_3} = \frac{y_4}{\chi_4},$$
$$\varphi_1(y) = 0, \quad \varphi_2(y) = 0, \quad y_5^2 = f(y).$$

Ces points sont en nombre infini; ils correspondent, sur F, aux points de la jacobienne Δ du réseau de genre deux $|\Gamma_0|$.

La transformation (III) ne peut laisser invariant aucun point de F en dehors des points invariants pour (I) ou (II). On sait d'ailleurs que si un point est invariant pour (III) et pour l'une des transformations (I), (II), il l'est pour l'autre. Les points invariants pour (III) sont donc des points unis de I_2.

Remarquons que si un point uni de I_2 est invariant pour la transformation (II), la jacobienne Δ de $|\Gamma_0|$ passe par le point de diramation correspondant de Φ_0. En d'autres termes, si $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_8$ désignent les courbes rationnelles de degré -2 équivalentes aux points doubles de Φ_0. Δ contient comme partie l'une de ces courbes. Or, Δ rencontre en six points chaque courbe Γ_0 (de degré deux) et chaque courbe Γ_0 rencontre en un point chacune des courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_8$. On en conclut que la transformation (III) laisse au plus six points unis de I_2 invariants.

La transformation (III) engendre une involution I''_2 d'ordre deux. Cette involution possède, d'après ce que nous venons de voir, un certain nombre τ de points unis $(0 \leqslant \tau \leqslant 6)$. Si π'_a désigne le genre arithmétique d'une surface image de l'involution I''_2, nous avons, d'après ce qui a été établi dans la première partie, $\tau = 8\pi'_a$. Par conséquent, on a $0 \leqslant 8\pi'_a \leqslant 6$, c'est-à-dire $\pi'_a = 0$, $\tau = 0$. Ainsi, l'involution I''_2 ne possède aucun point uni et, par conséquent, la jacobienne Δ de $|\Gamma_0|$ ne passe par aucun des points $P_1, P_2, \ldots, P_8$.

Observons que les transformations (II) et (III) transportent un point uni de I_2 en un autre point uni de I_2. Par conséquent, la transformation de Φ_0 en elle-même définie par le réseau de degré deux $|\Gamma_0|$ fait correspondre quatre des courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_8$ aux quatre autres. Pour fixer les idées, nous supposerons que les courbes $\Gamma_5, \Gamma_6, \Gamma_7, \Gamma_8$ correspondent respectivement aux courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$.

Rapportons projectivement les courbes Γ_0 aux droites d'un plan α. La surface Φ_0 se transforme en un plan α double dont la courbe de diramation D est du sixième ordre et correspond à la jacobienne Δ de $|\Gamma_0|$.

Aux couples de courbes Γ_1, Γ_5; Γ_2, Γ_6; Γ_3, Γ_7; Γ_4, Γ_8 correspondent respectivement des droites D_1, D_2, D_3, D_4. Comme deux des courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_8$ ne peuvent avoir de points communs, il faut nécessairement que la courbe D passe deux fois par chaque sommet du quadrilatère complet formé par les quatre droites D_1, D_2, D_3, D_4.

Si une surface d'ordre six, de S_4, à sections hyperplanes de genre un, représente une involution d'ordre deux appartenant à une surface de genres un, de manière qu'une section hyperplane n'ait généralement aucun point de diramation, on peut la transformer birationnellement en un plan double dont la courbe de diramation, d'ordre six, possède six points doubles qui sont les sommets d'un quadrilatère complet.

Il est aisé de former l'équation de ce plan double. Soient

$$\alpha_i(x, y) \equiv a_i x + b_i y + c_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

les équations des quatre droites D_1, D_2, D_3, D_4. La courbe D a pour équation

$$\varphi_1(\alpha_2\alpha_3\alpha_4, \alpha_3\alpha_4\alpha_1, \alpha_4\alpha_1\alpha_2, \alpha_1\alpha_2\alpha_3) + \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\varphi_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 0,$$

φ_1 et φ_2 étant des polynômes homogènes de degré deux. Le plan double est donné par

$$z^2 = \varphi_1 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\varphi_2.$$

[**13**] Nous déterminerons actuellement les plans doubles de genres un représentant une involution d'ordre deux, appartenant à une surface de genres un, de telle manière qu'une droite générique du plan soit dépourvue de diramations.

Rappelons tout d'abord qu'il y a quatre types birationnellement irréductibles, de plans doubles de genres un, déterminés par M. Enriques[1]; ce sont :

I. Plan double dont la courbe de diramation est d'ordre six.

II. Plan double dont la courbe de diramation est d'ordre huit et possède deux points quadruples distincts ou infiniment voisins.

III. Plan double dont la courbe de diramation est d'ordre dix et possède un point multiple d'indice sept ayant deux points triples infiniment voisins distincts.

IV. Plan double dont la courbe de diramation est d'ordre douze et possède un point multiple d'indice neuf ayant trois points triples infiniment voisins distincts.

Soit Φ_0, d'équation

$$z^2 = f(x, y),$$

un de ces plans doubles. Désignons par F la surface de genres un à laquelle appartient l'involution I_2 dont Φ_0 est, par hypothèse, l'image. Une droite du plan Φ_0 ne possède pas, en général, de points de diramation pour la correspondance (1, 2) définie par I_2 entre Φ_0 et F (par hypothèse).

Nous savons (n° 7) que la courbe de diramation du plan double se décompose en deux courbes $f_1(x, y) = 0$, $f_2(x, y) = 0$ d'ordres pairs. La surface F a pour équation

$$z^2 = f_1(x, y), \qquad u^2 = f_2(x, y),$$

et les deux courbes $f_1(x, y) = 0$, $f_2(x, y) = 0$ ont huit points communs[2].

La surface F possède trois transformations birationnelles involutives en elle-même, à savoir :

$$(T_1) \qquad x' = x, \quad y' = y, \quad z' = -z, \quad u' = -u;$$

$$(T_2) \qquad x' = x, \quad y' = y, \quad z' = -z, \quad u' = u;$$

$$(T_3) \qquad x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad u' = -u.$$

Ces trois transformations sont deux à deux permutables. T_1 engendre l'involution I_2 représentée par Φ_0; T_2 et T_3 engendrent des involutions I'_2, I''_2 ayant respecti-

---

(1) F. Enriques, *Sui piani doppi di genere uno* (Memorie della Società ital. delle Scienze, 1896, [3], X).

(2) Dans l'évaluation du nombre des points d'intersection des deux courbes $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, on tiendra compte du principe suivant : *un point d'intersection n'entre en ligne de compte que s'il est de multiplicité impaire pour chacune des courbes.*

vement les courbes de coïncidence découpées sur F par $f_1=0$, $f_2=0$. Ces involutions I'_2, I''_2 sont donc rationnelles. Par conséquent, le plan double

$$z^2=f_2(x,y),$$

qui représente I'_2, et le plan double

$$z^2=f_1(x,y),$$

qui représente I''_2, sont rationnels. Il en résulte que les courbes $f_1(x,y)=0$, $f_2(x,y)=0$ peuvent se ramener, d'après un théorème de M. Nöther[1], par une transformation birationnelle, à :

1° Une quartique plane;

2° Une sextique ayant deux points triples infiniment voisins;

3° Une courbe d'ordre m ayant un point multiple d'indice $m-2$.

La détermination de la courbe de diramation des plans doubles cherchés est alors très simple; nous nous contenterons d'énoncer les résultats.

Les plans doubles de genres un qui sont images d'involution d'ordre deux appartenant à une surface de genres un, de manière qu'en général une droite du plan ne possède pas de point de diramation (relatif à cette involution), *sont les suivants :*

I. *Plan double dont la courbe de diramation se compose d'une quartique et d'une conique.*

II. *Plan double dont la courbe de diramation se compose de deux quartiques ayant deux points doubles en commun.*

III. *Plan double dont la courbe de diramation se compose d'une courbe d'ordre six, ayant deux points triples infiniment voisins, et d'une conique passant par ces points triples.*

IV. *Plan double dont la courbe de diramation se compose d'une sextique ayant un point quadruple* P *auquel sont infiniment voisins deux points doubles distincts* P_1, P_2, *et d'une quartique ayant un point triple en* P *dont deux branches passent par* P_1, P_2.

V. *Plan double dont la courbe de diramation se compose d'une courbe du huitième ordre ayant un point sextuple* P *auquel sont infiniment voisins trois points doubles distincts* P_1, P_2, P_3, *et d'une quartique ayant un point triple en* P *dont les branches passent par* P_1, P_2, P_3.

Le problème que nous venons de résoudre est identique à celui dans lequel on se propose de déterminer toutes les surfaces de genres un possédant deux transfor-

---

(1) Voir CASTELNUOVO et ENRIQUES, *Sulle condizioni di razionalità dei piani doppi* (Rendiconti del Circolo Matem. di Palermo, 1900, XIV).

mations birationnelles en elle-même engendrant des involutions rationnelles d'ordre deux et dont le produit engendre une involution d'ordre deux et de genres un. Soit en effet F une surface de genres un possédant deux transformations birationnelles en elle-même, T_2, T_3 engendrant respectivement des involutions I'_2, I''_2, d'ordre deux et rationnelles. Supposons que le produit $T_1 = T_2 T_3$ engendre une involution I_2 d'ordre deux et de genres un. Soit Φ une surface représentative de I_2.

Les transformations I_2, I_3 engendrent, sur F, une involution I_4, d'ordre quatre, qui est rationnelle. Aux groupes de I_4 correspondent, sur Φ, des couples de points engendrant une involution rationnelle. Φ est donc un plan double de genres un, et sa détermination a été faite en résolvant le problème précédent.

La détermination des surfaces de genres un possédant deux transformations birationnelles en elle-même engendrant des involutions rationnelles d'ordre deux et dont le produit engendre une involution d'ordre deux et de genres un, se ramène à la détermination des plans doubles de genres un, image d'involutions d'ordre deux appartenant à une surface de genres un (1).

Surfaces de genres zéro et de bigenre un doubles, douées d'un nombre fini de points de diramation.

[**14**] Soit Φ une surface algébrique de genres zéro et de bigenre un. Elle est caractérisée par les conditions suivantes (2) :

1° Son genre arithmétique est nul ($\pi_a = 0$);

2° Son bigenre est égal à l'unité ($\Pi_2 = 1$);

3° Son trigenre est nul ($\Pi_3 = 0$).

Une courbe de genre virtuel π, tracée sur Φ, a le degré $2\pi - 2$ et appartient à un système linéaire de dimension $\pi - 1$. On peut toujours transformer Φ en :

1° Une surface d'ordre six, de S_3, passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre ou en :

2° Un plan double dont la courbe de diramation se compose : *a)* d'une sextique douée de deux tacnodes et d'un point double au point d'intersection des deux tangentes tacnodales; *b)* de ces deux tangentes.

---

(1) Voir à ce sujet notre note : *Recherches sur les surfaces de genres un* (*première note*) (Bull. de l'Acad. roumaine, 1914, II).

(2) F. Enriques, *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno* (Memorie della Società ital. delle Scienze, 1909, [3], XIV).

Concernant les surfaces de genres zéro et de bigenre un, voir aussi : G. Fano, *Superficie algebriche di genere zero e bigenere uno, e loro casi particolari* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1910, XXIX).

Supposons que Φ soit l'image d'une involution d'ordre deux, appartenant à une surface F, cette involution n'ayant qu'un nombre fini de points unis. En raisonnant comme nous l'avons fait plus haut (n° 8), on trouve que F est, *a priori*, de l'un des types suivants :

a) Surface de Picard (ou, en particulier, de Jacobi) ($p_a = -1$, $p_g P_4 = 1$);

b) Surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$);

c) Surface de genres zéro et de bigenre un ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$).

Cependant, MM. Bagnera et De Franchis ont démontré que les involutions de genres zéro et de bigenre un appartenant à une surface de Picard sont d'ordre quatre ou huit [1]; F ne pourra donc pas être, actuellement, une surface de Picard.

[**15**] Supposons en premier lieu que la surface F soit une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$). On a alors $\sigma = 0$.

Prenons pour modèle projectif de Φ la surface Φ_0 d'ordre six, de S_3, passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre T, à sections planes Γ de genre quatre. Remarquons que le système $|2\Gamma|$ est découpé, sur Φ_0, par les surfaces du quatrième ordre circonscrites au tétraèdre T.

Pour que Φ_0 représente une involution d'ordre deux appartenant à une surface de genres un, il faut, d'après le théorème établi dans la première partie, qu'il y ait ∞^3 surfaces du quatrième ordre circonscrites au tétraèdre T, qui touchent Φ_0 le long de courbes Γ_0 de genre quatre et d'ordre six.

De telles surfaces existent certainement, il suffit par exemple de prendre la surface du quatrième ordre composée des quatre faces du tétraèdre T pour avoir l'une d'elles. On en conclut que :

Toute surface de genres zéro et de bigenre un représente une involution d'ordre deux appartenant à une surface de genres un.

C'est là un théorème bien connu, dû à M. Enriques [2]. J'ai ajouté récemment que la surface de genres un possède, en outre, une involution rationnelle d'ordre deux et une involution d'ordre deux et de genres un [3]. Ces trois involutions sont engendrées par trois transformations birationnelles deux à deux permutables.

---

(1) G. Bagnera et M. de Franchis, *Le superficie algebriche le quali ammettono una rappresentazione...* (Memorie della Soc. ital. delle Scienze, 1908, [3], XV).

(2) F. Enriques, *Un' osservazione relativa alle superficie di bigenere uno* (Rendiconto della R. Accad. di Bologna, Gennaio, 1908).

(3) L. Godeaux, *Sur les surfaces de genres zéro et de bigenre un* (Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, 1° sem. 1914, [5], XXIII).

La surface de genres un peut se ramener au plan double

$$z^2 = f(x, y),$$

$f(x, y) = 0$ étant une courbe huit, ayant deux points quadruples en $(0, \infty)$, $(\infty, 0)$, invariante

Remarquons qu'une involution d'ordre deux, dépourvue de points unis, appartenant à une surface de genres un, est nécessairement de genres zéro et de bigenre un, et retournons aux surfaces étudiées au n° 12. Nous conclurons que :

Si une surface de genres un possède une involution d'ordre deux et de genres un représentable sur une surface d'ordre six, de S_4 *(de manière qu'une section hyperplane de celle-ci ne possède aucun point de diramation, en général), elle possède deux autres involutions d'ordre deux, l'une rationnelle, l'autre de genres zéro et de bigenre un. Ces trois involutions sont engendrées par des transformations birationnelles deux à deux permutables.*

[**16**] Supposons actuellement que la surface F est de genres zéro et de bigenre un ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$). On a maintenant $\sigma = 4$.

Prenons comme modèle projectif de Φ le plan double Φ_0 dont la courbe de diramation se compose de :

a) Deux droites D_1, D_2;

b) Une courbe d'ordre six D ayant un tacnode sur chacune des droites D_1, D_2 et un point double en leur intersection P.

Il existe, sur Φ, une infinité (discontinue) de réseau de courbes hyperelliptiques de genre trois (¹); nous pourrons donc en choisir un dont la courbe générique soit dépourvue de diramation pour la correspondance (1, 2) existant entre Φ et F. En rapportant projectivement les courbes de ce réseau aux droites d'un plan, nous obtiendrons un plan double du type de Φ_0 (²). Nous pourrons donc supposer que Φ_0 est précisément ce plan double et que les droites de ce plan n'ont en général pas de diramation pour la correspondance (1, 2) entre Φ_0 et F. On en conclut (n° 7) que la courbe $D + D_1 + D_2$ doit se décomposer en deux parties d'ordres pair. Nous désignerons par B_1, B_2 ces parties.

Trois cas peuvent se présenter :

A) B_1 se compose de la droite D_1 et d'une cubique passant par le point P commun à D_1, D_2 et touchant D_1 et D_2 en deux points P_1, P_2; B_2 se compose de la droite D_2 et d'une cubique passant par P et touchant D_1 en P_1, D_2 en P_2.

B) B_1 se compose d'une conique touchant D_1 en P_1, D_2 en P_2; B_2 se compose des droites D_1, D_2 et d'une quartique ayant un point double en P et touchant D_1 en P_1, D_2 en P_2.

---

pour la transformation $x' = \frac{1}{x}$, $y' = \frac{1}{y}$, et ne passant pas par les points $x^2 - 1 = 0$, $y^2 - 1 = 0$. Ou encore, si l'on représente par $\varphi(x, y) = 0$ une courbe d'ordre six ayant un point double à l'origine et deux tacnodes, un sur chaque axe, la surface de genres un a pour équations :

$$z^2 = \varphi(x, y), \quad u^2 = xy.$$

(¹) ENRIQUES, *Superficie di bigenere uno*... (*loc. cit.*).

(²) ENRIQUES, *Superficie di bigenere uno*... (*loc. cit.*).

C) B_1 se compose d'une conique touchant D_1 en P_1, D_2 en P_2, et des deux droites D_1, D_2; B_2 se compose d'une quartique ayant un point double en P et touchant D_1 en P_1, D_2 en P_2.

En tenant compte de ce que toute surface de genres zéro et de bigenre un peut se ramener, par une transformation birationnelle, à un plan double du type indiqué plus haut, on voit que :

Une surface de genres zéro et de bigenre un qui représente une involution d'ordre deux appartenant à une surface de genres zéro et de bigenre un, peut se ramener, par une transformation birationnelle, à un plan double dont la courbe de diramation est formée par :

1° *Deux cubiques planes tangentes en deux points et les deux droites touchant ces cubiques en ces points, ces droites se rencontrant de plus en un point commun aux deux cubiques; ou par :*

2° *Une conique et une quartique ayant deux points de contact, jointes aux deux droites touchant ces courbes en ces points, le point de rencontre de ces droites étant de plus double pour la quartique.*

En répétant le raisonnement fait à la fin du n° 13, on verrait que l'on a, en même temps, déterminé les surfaces de genres zéro et de bigenre un ayant deux transformations birationnelles involutives permutables en elle-même, ces transformations engendrant des involutions d'ordre deux rationnelles et leur produit engendrant une involution de genres zéro, de bigenre un et d'ordre deux.

Si $\varphi(x, y) = 0$, $\psi(x, y) = 0$ sont respectivement les équations des courbes (décomposables) B_1, B_2, les surfaces possédant cette dernière propriété ont pour équations :

$$z^2 = \varphi(x, y), \qquad u^2 = \psi(x, y).$$

Les deux involutions rationnelles sont engendrées par les transformations $(x' = x,\ y' = y,\ z' = -z,\ u' = u)$, $(x' = x,\ y' = y,\ z' = z,\ u' = -u)$; l'involution de genres zéro et de bigenre un est engendrée par la transformation

$$(x' = x, \quad y' = y, \quad z' = -z, \quad u' = -u).$$