CONTRIBUTION

A LA

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES ÉQUATIONS INTÉGRALES

PAR J. MARTY,

Professeur au Lycée d'Albi.

Dans ce qui va suivre je me propose de montrer, en appliquant une formule que j'ai donnée aux Comptes rendus le 6 juin 1910, comment, sans faire appel à la théorie des fonctions (¹), on peut définir l'ordre d'une valeur singulière et démontrer la convergence absolue de la série $\sum \frac{1}{\lambda^2}$.

I

$H(x, y)$ étant une fonction réelle ou imaginaire des variables réelles x, y, on sait que l'on appelle *valeur singulière* et *solution singulière* relatives au noyau H un nombre λ et une fonction φ tels que (²)

$$\varphi(x) = \lambda H\varphi(x).$$

Soit φ_1 une solution singulière correspondant à la valeur singulière λ_1; en la multipliant par une constante convenable, on peut toujours la supposer *normée*, c'est-à-dire telle que

$$(\varphi \overline{\varphi}_1) = 1.$$

(¹) Cf. J. SCHUR, *Mathem. Annalen* (1909), pp. 408 et suiv.

(²) $(\varphi\psi)$, $H\varphi(x)$ désignent respectivement

$$\int \varphi(x)\psi(x)\,dx \qquad \text{et} \qquad \int H(x, z)\varphi(z)\,dz;$$

la notation $\overline{a}$ représente l'imaginaire conjuguée de la quantité a.

Posons

$$H_1(x, y) = H(x, y) - \frac{\varphi_1(x)\,\bar{\varphi}_1(y)}{\lambda_1};$$

comme

$$\frac{\varphi_1(x)}{\lambda_1} = H\varphi_1(x),$$

on aura $H_1\varphi_1(x) = 0$, et aussi :

$$\int H_1(x, z)\,\overline{H}_1(y, z)\,dz = \int H(x, z)\,\overline{H}(y, z)\,dz - \frac{\varphi_1(x)\,\bar{\varphi}_1(y)}{|\lambda_1|^2}.$$

D'une solution singulière φ_2 pour H_1, correspondant à la valeur λ_2, on déduira une fonction H_2 ; de même, de H_2 nous pourrons déduire H_3, et, ainsi de suite, en supposant que les noyaux successifs obtenus aient des valeurs singulières. Nous aurons la suite d'égalités

$$H_p(x, y) = H_{p-1}(x, y) - \frac{\varphi_p(x)\,\bar{\varphi}_p(y)}{\lambda_p},$$

$$\int H_p(x, z)\,\overline{H}_p(y, z)\,dz = \int H_{p-1}(x, z)\,\overline{H}_{p-1}(y, z)\,dz - \frac{\varphi_p(x)\,\bar{\varphi}_p(y)}{|\lambda_p|^2},$$

$$p = 1, 2, \ldots, n,$$

en posant $H = H_0$ pour plus de symétrie.

En ajoutant membre à membre ces relations pour $p = m,\ m+1,\ m+2, \ldots, n$, il vient :

$$(\alpha) \qquad H_{m-1}(x, y) = \sum_{p=m}^{n} \frac{\varphi_p(x)\,\bar{\varphi}_p(y)}{\lambda_p} + H_n(x, y)$$

et

$$(\beta) \qquad \int H_{m-1}(x, z)\,\overline{H}_{m-1}(y, z)\,dz = \sum_{p=m}^{n} \frac{\varphi_p(x)\,\bar{\varphi}_p(y)}{|\lambda_p|^2} + \int H_n(x, z)\,\overline{H}_n(y, z)\,dz.$$

II

Si dans (β) nous faisons $x = y$, il vient

$$\int |H_{m-1}(x, z)|^2\,dz = \sum_{p=m}^{n} \left|\frac{\varphi_p(x)}{\lambda_p}\right|^2 + \int |H_n(x, z)|^2\,dz,$$

et, en intégrant par rapport à x,

$$(\gamma) \qquad \iint |H_{m-1}(x, y)|^2\,d(x, y) = \sum_{p=m}^{n} \frac{1}{|\lambda_p|^2} + \iint |H_n(x, y)|^2\,d(x, y),$$

d'où nous déduisons l'inégalité

$$(\gamma') \qquad \sum_{p=m}^{n} \frac{1}{|\lambda_p|^2} \leqslant \int\int |\mathrm{H}_{m-1}(x, y)|^2 \, d(x, y),$$

l'égalité n'étant possible que si

$$\int\int |\mathrm{H}_n(x, y)|^2 \, d(x, y) = 0.$$

En particulier, si $m = 1$, on a :

$$(\gamma'') \qquad \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{|\lambda_p|^2} \leqslant \int\int |\mathrm{H}(x, y)|^2 \, d(x, y).$$

Multiplions les deux membres de (α) par $\varphi_m(y)$ et intégrons par rapport à y en tenant compte de ce que

$$\frac{\varphi_m(x)}{\lambda_m} = \mathrm{H}_{m-1}\varphi_m(x),$$

nous obtiendrons :

$$(\delta') \qquad 0 = \sum_{p=m+1}^{n} \frac{(\varphi_m \overline{\varphi}_p)}{\lambda_p} \varphi_p(x) + \mathrm{H}_n \varphi_m(x);$$

Multiplions les deux membres de (α) par $\varphi_n(y)$ et intégrons par rapport à y en tenant compte de ce que

$$\mathrm{H}_n \varphi_n(x) = 0,$$

il vient

$$\mathrm{H}_{m-1}\varphi_n(x) = \sum_{p=m}^{n} \frac{(\varphi_n \overline{\varphi}_p)}{\lambda_p} \varphi_p(x)$$

ou

$$(\delta'') \qquad \mathrm{H}_{m-1}\varphi_n(x) = \sum_{p=m}^{n-1} \frac{(\varphi_n \overline{\varphi}_p)}{\lambda_p} \varphi_p(x) + \frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n}.$$

III

Supposons que n augmente indéfiniment, c'est-à-dire que les H successifs aient tous des valeurs singulières. Des inégalités (γ') et (γ''), nous déduisons aussitôt :

Théorème I. — *Une valeur λ des λ_p ne peut être trouvée qu'un nombre fini de fois.*

Supposons, en effet, que λ figure k fois parmi les n premières valeurs des λ_p; on aura

$$\frac{k}{|\lambda|^2} \leqslant \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{|\lambda_p|^2} \leqslant \int\int |\mathrm{H}(x, y)|^2 \, d(x, y);$$

donc

$$k \leqslant |\lambda|^2 \int\int |\mathrm{H}(x, y)|^2 \, d(x, y),$$

limite indépendante de n.

Théorème II. — *Les λ_p croissent indéfiniment en module avec p.*

Si, en effet, jusqu'à $p = n$ tous les $|\lambda|$ étaient inférieurs à a, on aurait

$$\frac{n}{a^2} \leqslant \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{|\lambda_p|^2} \leqslant \int\int |\mathrm{H}(x, y)|^2 \, d(x, y),$$

donc

$$n \leqslant a^2 \int\int |\mathrm{H}(x, y)|^2 \, d(x, y);$$

a ne peut donc être fini.

Théorème III. — *L'ensemble des λ_p est dénombrable.*

La formule précédente montre, en effet, qu'il n'y a qu'un nombre fini de λ dont le module est inférieur à un nombre a.

Théorème IV. — *La série $\sum \frac{1}{|\lambda_p|^2}$ converge.*

C'est une conséquence immédiate de l'inégalité (γ'').

IV

L'égalité (δ''), où $m = 1$, $n = k$, montre que $H\varphi_k(x)$ s'exprime linéairement en fonction de

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{k-1}, \varphi_k;$$

l'égalité (δ'), où $m = k$, montre que $H_n\varphi_k(x)$ s'exprime linéairement en fonction de

$$\varphi_{k+1}, \varphi_{k+2}, \dots, \varphi_n.$$

On déduit de cette remarque les théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — *Les fonctions φ sont linéairement indépendantes.*

Supposons le théorème démontré pour n; il est vrai pour $n+1$; si, en effet, on avait

$$\varphi_{n+1}(x) = c_k\varphi_k(x) + \dots + c_n\varphi_n(x),$$

c_k n'étant pas nul, on aurait

$$c_k\varphi_k(x) + c_{k+1}\varphi_{k+1} + \dots + c_n\varphi_n = \lambda_{n+1}[c_k H_n\varphi_k(x) + \dots + c_n H_n\varphi_n(x)]:$$

mais le second membre ne dépend que de $\varphi_{k+1}, \varphi_{k+2}, \varphi_{n-1}, \varphi_n$, le premier, au contraire, contient φ_k; il faudrait que c_k fut nul.

THÉORÈME II. — *Si l'on a des fonctions indépendantes $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ telles que*

$$\frac{\psi_p(x)}{\lambda_p} + \sum_{k=1}^{p-1} \alpha_{pk}\psi_k(x) = H\psi_p(x), \qquad p = 1, 2, \dots, n,$$

on peut trouver un système de fonctions φ_p analogues aux fonctions précédentes et telles que φ_p soit une combinaison linéaire des ψ d'indice inférieur ou égal.

Le théorème est vrai pour $p = 1$; il suffit de poser $\psi_1(x) = c_1\varphi_1(x)$, φ_1 étant normée.

Supposons le démontré pour $p = n-1$; il est vrai pour $p = n$. On aura, en effet, les relations

$$\frac{\varphi_q(x)}{\lambda_q} + \sum_{k=1}^{q-1} \frac{(\varphi_q\bar{\varphi}_k)}{\lambda_k}\varphi_k(x) = H\varphi_q(x), \qquad q = 1, 2, \dots, n-1;$$

de plus

$$\frac{\psi_n(x)}{\lambda_n} + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{nk}\psi_k(x) = H\psi_n(x),$$

ou, comme $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$ sont combinaisons des φ,

$$\frac{\psi_n(x)}{\lambda_n} + \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k \varphi_k(x) = \mathrm{H}\psi_n(x);$$

posons alors

$$\psi_n(x) = c_n \varphi_n(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k \varphi_k(x),$$

il viendra

$$c_n \frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\gamma_k}{\lambda_n} + \beta_k\right) \varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k \mathrm{H}\varphi_k(x) + c_n \mathrm{H}\varphi_n(x),$$

ou enfin

$$(1) \qquad c_n \frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n} + \sum_{k=1}^{n-1} f_k \varphi_k(x) = c_n \mathrm{H}\varphi_n(x)$$

en posant, en vertu des formules (δ'') où $m = 1$ et où n est remplacé par $1, 2, 3, \ldots, n-1$,

$$f_k = \frac{\gamma_k}{\lambda_n} + \beta_k - \frac{\gamma_k + \gamma_{k+1}(\varphi_{k+1}\overline{\varphi}_k) + \ldots + \gamma_{n-1}(\varphi_{n-1}\overline{\varphi}_k)}{\lambda_k};$$

enfin

$$(2) \qquad f_k = \frac{\gamma_k}{\lambda_n} + \beta_k - \frac{1}{\lambda_k} \sum_{u=k}^{n-1} \gamma_u(\varphi_u \overline{\varphi}_k), \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Il suffit alors pour que la formule (1) soit identique à la formule (δ'') correspondant à φ_n, que

$$(3) \qquad f_k = c_n \frac{(\varphi_n \overline{\varphi}_k)}{\lambda_k}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1;$$

or,

$$c_n \varphi_n(x) = \psi_n(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k \varphi_k(x)$$

et les équations (2) et (3) deviennent

$$\frac{\gamma_k}{\lambda_n} + \beta_k - \frac{1}{\lambda_k} \sum_{u=k}^{n-1} \gamma_u(\varphi_u \overline{\varphi}_k) = \frac{(\psi_n \overline{\varphi}_k) - \sum_{u=1}^{n-1} \gamma_u(\varphi_u \overline{\varphi}_k)}{\lambda_k}$$

ou

$$\frac{\lambda_k}{\lambda_n}\gamma_k = (\psi_n \bar{\varphi}_k) - \lambda_k \beta_k - \sum_{u=1}^{k-1} \gamma_u(\varphi_u \bar{\varphi}_k), \qquad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

équations qui déterminent successivement

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1};$$

comme c_n est arbitraire, on peut supposer toujours φ_n normée, et le théorème est démontré, la fonction $c_n \varphi_n$ contenant effectivement ψ_n n'étant pas identiquement nulle.

Théorème III. — *Si l'on a des relations de la forme*

$$\frac{\psi_p(x)}{\mu_p} + \sum_{k=1}^{p-1} \beta_{pk}\psi_k(x) = \mathrm{H}\psi_p(x) \qquad p = 1, 2, \dots, n$$

entre n fonctions indépendantes, on peut, en remplaçant les ψ par des combinaisons linéaires, obtenir des formules analogues où les valeurs des μ sont prises dans un ordre quelconque.

Il suffit de montrer qu'on peut intervertir deux μ consécutifs non identiques. Soit, en effet,

$$\frac{\psi_p(x)}{\mu_p} + \sum_{k=1}^{p-1} \beta_{pk}\psi_k(x) = \mathrm{H}\psi_p(x)$$

et

$$\frac{\psi_{p+1}(x)}{\mu_{p+1}} + \sum_{k=1}^{p} \beta_{p+1\,k}\psi_k(x) = \mathrm{H}\psi_{p+1}(x);$$

posons

$$\psi_{p+1}(x) = \rho_{p+1}(x) + c_1\psi_p(x),$$

il vient

$$\frac{\rho_{p+1}(x)}{\mu_{p+1}} + c_1\frac{\psi_p(x)}{\mu_{p+1}} + \beta_{p+1\,p}\psi_p(x) + \sum_{k=1}^{p-1} \beta_{p+1\,k}\psi_k(x) = \mathrm{H}\rho_{p+1}(x) + c_1\mathrm{H}\psi_p(x),$$

et, en posant

$$\frac{c_1}{\mu_{p+1}} + \beta_{p+1\,p} = \frac{c_1}{\mu_p},$$

on aura une relation où ψ_p ne figurera pas ; μ_{p+1} étant différent de μ_p, on a une valeur pour c_1. Alors il suffit d'intervertir μ_{p+1} et μ_p : la forme des relations n'aura pas changé.

THÉORÈME GÉNÉRAL. — *Si l'on a des fonctions ψ linéairement indépendantes qui vérifient p relations*

$$\frac{\psi_p(x)}{\mu_p} + \sum_{k=1}^{p-1} \alpha_{pk}\psi_k(x) = \mathrm{H}\psi_p(x), \qquad p = 1, 2, \ldots, n,$$

on peut trouver autant de fonctions dont elles sont combinaisons linéaires, analogues aux fonctions φ, correspondant aux mêmes valeurs des nombres μ mais prises dans un ordre arbitraire.

Il suffit d'appliquer successivement les théorèmes III et II.

V

Ce dernier théorème va nous permettre de démontrer l'identité des nombres λ avec les valeurs singulières du noyau $\mathrm{H}(x, y)$. Démontrons d'abord le lemme suivant :

LEMME. — *Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ correspondant à $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, et supposons un nombre l différent des λ tel que l'on puisse trouver des fonctions $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k, \ldots, \psi_m$ satisfaisant aux relations*

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\psi_1(x)}{l} = \mathrm{H}\psi_1(x), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\psi_k(x)}{l} + \displaystyle\sum_{u=1}^{k-1} \alpha_{ku}\psi_u(x) = \mathrm{H}\psi_k(x), \qquad k = 1, 2, \ldots, m, \end{cases}$$

les φ et ψ sont linéairement indépendants.

Supposons, en effet, une relation de la forme

$$(2) \qquad c_1\varphi_1 + \ldots + c_n\varphi_n + \gamma_1\psi_1 + \ldots + \gamma_q\psi_q \equiv 0$$

avec $c_n \neq 0$, $\gamma_q \neq 0$, q étant le plus petit nombre tel qu'il existe une relation de cette forme, en multipliant les égalités $(2'')$ respectivement par $c_1, c_2, \ldots, c_n$; les q premières égalités (1) par $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_q$ et ajoutant membre à membre, on aurait

$$(3) \qquad a_1\varphi_1 + \ldots + \frac{c_n}{\lambda_n}\varphi_n + \rho_1\psi_1 + \ldots + \frac{\gamma_q}{l}\psi_q = 0,$$

mais de (2) et (3) on déduirait

$$b_1\varphi_1 + \ldots + c_n\left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{l}\right)\varphi_n + \ldots + \rho_{q-1}\psi_{q-1} = 0.$$

relation de même forme que (2), le coefficient de φ_n n'étant pas nul et où q est remplacé par un nombre inférieur, ce qui est impossible.

Ceci posé, reprenons les noyaux successifs $H, H_1, H_2, \ldots, H_n$ avec leurs valeurs singulières $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Il est aisé de démontrer :

THÉORÈME I. — *Une valeur quelconque des λ est valeur singulière pour* H.

On peut, en effet, d'après le théorème général, amener cette valeur au premier rang.

THÉORÈME II. — *Une valeur singulière de* $H(x, y)$ *figure parmi les λ ou est valeur singulière pour* $H_n(x, y)$.

Soit l, en effet, ne figurant pas parmi les λ ; on aura

$$\psi(x) = lH\psi(x); \tag{1}$$

d'après le lemme précédent, ψ sera linéairement indépendante de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, et, en adjoignant la relation (1) aux équations (δ''), on augmentera, par application du théorème général, le nombre de ces équations d'une unité, λ_{n+1} étant égal à l, la solution singulière sera combinaison linéaire de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ et ψ.

Ces deux théorèmes établissant l'identité de λ et des valeurs singulières nous permettent d'affirmer que leur ensemble est dénombrable.

Supposons alors que ces valeurs sont rangées par ordre de module croissant

$$|l_0| \leqslant |l_1| \leqslant |l_2| \ldots\ldots;$$

nous prendrons $\lambda_1 = l_0$, puis de nouveau $\lambda_2 = l_0$, $\lambda_3 = l_0$ jusqu'à obtenir un noyau dont l_0 ne sera plus valeur singulière, ce noyau aura l_1 comme valeur singulière; nous prendrons l_1 aussi souvent que possible, puis l_2, l_3, et ainsi de suite. Nous obtiendrons ainsi une suite de fonctions φ que nous appellerons une *suite complète* et chaque valeur sera répétée un nombre de fois que nous appellerons *ordre de la valeur singulière*.

Soit alors une valeur singulière λ_n de cette suite que nous supposerons simplement distincte de λ_{n-1}, et, par un procédé quelconque, imaginons que nous avons trouvé une suite de fonctions linéairement indépendantes $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k$ telles que

$$\left\{\begin{aligned} &\psi_1(x) = \lambda_n H\psi_1(x) \\ &\psi_q(x) + \sum_{k=1}^{q} a_{kq}\psi_q(x) = \lambda_n H\psi_q(x) \end{aligned}\right\} \quad q = 1, 2, \ldots, n,$$

nous les appellerons *fonctions fondamentales* associées [1] à λ_n; en désignant par $\varphi_{n-1}, \varphi_{n-2}, \ldots, \varphi_{n-p}$ les fonctions de la suite complète correspondant aux valeurs singulières égales à λ_n, nous pouvons démontrer :

[1] Cf. GOURSAT, *Annales de Toulouse* (1908), pp. 1-98.

THÉORÈME I. — *Les fonctions ψ sont des combinaisons linéaires de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-p}$.*

Soit, en effet, ψ_k la première fonction qui ne serait pas une telle combinaison linéaire, en adjoignant aux $n+p$ premières relations (δ'') la relation

$$\psi_k(x) + \sum_{q=1}^{n+p} a_q \varphi_q(x) = \lambda_n \mathrm{H} \psi_k(x)$$

qui se déduirait de la relation ci-dessus correspondante à ψ_k, on en déduirait une relation (δ'') de plus correspondant à λ_n, ce qui est impossible.

THÉORÈME. — *Le nombre m des fonctions ψ est inférieur ou égal au nombre p des fonctions φ de la suite complète correspondant à la même valeur singulière.*

En effet, d'après le lemme, les fonctions ψ sont linéairement indépendantes des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$; des n premières relations (δ'') et des relations ci-dessus, on déduirait pour $\mathrm{H}_n(x, y)$ un second système de fonctions $\varphi'_{n+1}, \ldots, \varphi'_{n+m}$, et le théorème I appliqué au noyau $\mathrm{H}_n(x, y)$ montre que $\varphi'_{n+1}, \ldots, \varphi'_{n+m}$ s'expriment linéairement en fonction de $\varphi_{n+1}, \ldots, \varphi_{n+p}$; il faut donc que m soit inférieur ou égal à p.

En définitive, *l'ordre d'une valeur singulière représente le nombre maximum de fonctions fondamentales linéairement indépendantes qu'on peut lui associer*, c'est le théorème qui précède, et, d'autre part, en supposant la suite complète des φ, le théorème général montre qu'il peut amener aux p premiers rangs les valeurs λ_{n+1}, $\lambda_{n+2}, \ldots, \lambda_{n+p}$, c'est-à-dire qu'effectivement ce nombre maximum peut être atteint.

Nous arrivons donc aux conclusions suivantes :

A chaque valeur singulière λ de l'équation correspond un nombre k que nous appellerons son ordre et qui est défini par les propriétés suivantes :

1° *Il n'y a pas plus de k solutions singulières linéairement distinctes appartenant à λ ;*

2° *Il existe k solutions fondamentales ;*

3° *On peut d'une infinité de manières trouver une suite complète de fonctions telles que toutes les solutions correspondant à la valeur $\lambda_n (\lambda_n \neq \lambda_{n-1})$ s'expriment en fonction linéaire des fonctions de la suite complète d'indice inférieur à n;*

4° *Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \ldots$ désigne la suite des valeurs singulières, répétées autant de fois que leur ordre le comporte, la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|^2}$$

converge.