SUR UN PROBLÈME D'INVERSION

POSÉ PAR ABEL,

ET SUR SES GÉNÉRALISATIONS

PAR M. PATRICK-J. BROWNE

INTRODUCTION.

[**1**] A la fin de son mémoire célèbre sur le problème de l'isochrone (¹), Abel a écrit le passage suivant :

« Je remarquerai enfin que, de la même manière qu'en partant de l'équation

$$\psi(a) = \int_{x=0}^{x=a} \frac{ds}{(a-s)^n},$$

j'ai trouvé s, de même, en partant de l'équation

$$\psi(a) = \int \varphi(xa) f(x)\,dx,$$

j'ai trouvé la fonction φ, ψ et f étant des fonctions données; mais la solution de ce problème est trop longue pour être donnée ici. »

On sait qu'Abel résolut le problème de l'isochrone par l'inversion de la première des intégrales ci-dessus. Son mémoire parut dans un journal norvégien en 1823; et il est évident, de la méthode qu'il adopte, que c'était dans sa pensée de considérer φ, ψ et f, dans le deuxième problème, comme des séries convergentes des puissances positives et entières de la variable. Trois années plus tard, il publia, dans le *Journal de Crelle*, une autre solution de la première question, sous le titre : *Résolution d'un*

(¹) *Œuvres d'Abel*, édition de Sylow et Lie, t. I, p. 18.

problème de mécanique (1), C'est ici qu'il se sert de l'artifice de calcul qui est devenu classique et trouve un résultat plus général; mais il ne dit rien du second problème. Aucune allusion n'y est faite dans tout le reste de ses œuvres publiées.

[2] En 1897, M. Volterra reprit le problème en essayant de le généraliser, comme nous le faisons ici (2). Il résolut d'abord l'équation pour déterminer $\theta(x)$

$$f(y) = \int_{\alpha y}^{y} \theta(x) H(x, y) dx,$$

en supposant que l'on ait $f(0) = 0$, et, en même temps,

$$H(y, y) \neq 0, \quad \frac{\partial H}{\partial y} \neq \infty, \quad \text{pour } y = 0.$$

Il croyait que la même méthode s'appliquait à l'équation généralisée d'Abel :

$$f(y) = \int_{q}^{p} \varphi(xy) K(x, y) dx.$$

Mais il n'en est rien; car en posant, avec M. Volterra, $xy = \xi$, on trouve

$$yf(y) = \int_{qy}^{py} \varphi(\xi) K\left(\frac{\xi}{y}, y\right) d\xi;$$

d'où l'on déduit, en différentiant par rapport à y,

$$K(p, y)\varphi(py) - K(q, y)\varphi(qy) + \int_{qy}^{py} \left[K_2\left(\frac{\xi}{y}, y\right) - \frac{\xi}{y^2} K_1\left(\frac{\xi}{y}, y\right)\right] \varphi(\xi) d\xi = f(y) + yf'(y),$$

où l'on pose

$$K_1(x, y) = \frac{\partial K(x, y)}{\partial x}; \qquad K_2(x, y) = \frac{\partial K(x, y)}{\partial y}.$$

On voit que le noyau

$$K_2\left(\frac{\xi}{y}, y\right) - \frac{\xi}{y^2} K_1\left(\frac{\xi}{y}, y\right)$$

devient, en général, infini à l'origine, et de telle manière que la méthode de M. Volterra soit inapplicable.

Ainsi, la méthode indiquée par M. Volterra en 1897 et qu'il vient à nouveau d'exposer dans son livre récent sur les équations intégrales (3), ne suffit à résoudre la question que dans des cas très particuliers.

---

(1) Abel, *Œuvres*, t. I, p. 97.

(2) Volterra, *Sopra alcuni questioni di inversione di integrali definiti* (Annali di Matematici, XXV (2), art. II).

(3) Volterra, *Leçons sur les équations intégrales*, ch. II, p. 98.

[**3**] Nous avons écrit *l'équation, avec un changement de notation, comme il suit :*

$$\int_{\mu}^{1} G(x, t) f(tx)dt = g(x),$$

où l'on a $|\mu| \leqslant 1$. Il n'y a aucune perte de généralité à supposer que la limite supérieure soit l'unité; car, fût-elle un nombre quelconque p, on pourrait être ramené au cas que nous traitons par le changement de variables $t = pu$, $x = \frac{z}{p}$. Nous avons fait de diverses hypothèses sur les fonctions $G(x, t)$ et $g(x)$, mais *toujours en supposant l'existence des dérivées* $\frac{\partial G}{\partial x}$, $\frac{\partial G}{\partial t}$ et $g'(x)$. Sauf quelques exceptions, nous avons cherché des *solutions* $f(x)$ *valables dans le domaine du point* $x = +0$, et cela nous a forcé, pour la plupart, à ajouter *la condition* $G(1) = 0$, en posant $G(t) = G(0, t)$.

Au commencement, nous supposons que *les fonctions* $G(x, t)$, $\frac{\partial G}{\partial x}$, $\frac{\partial G}{\partial t}$ *satisfassent à une condition que nous appelons la condition* (D), *c'est-à-dire qu'elles aient des développements, au moins asymptotiques, suivant les puissances positives croissantes de* x; en d'autres termes, que l'on ait, par exemple, pour tout n,

$$G(x, t) = G(t) + xG_1(t) + \ldots + x^{n-1}G_{n-1}(t) + x^n G_n(x, t),$$

$G_n(x, t)$ étant une fonction bornée au voisinage de $x = 0$. Nous supposons aussi que *l'on ait* $g(x) = x^\beta \theta(x)$, *où l'on a* $\theta(0) \neq 0$, *et la fonction* $\theta(x)$ *satisfait à la condition* (D).

La quantité β doit être telle que l'intégrale

$$\int_{\mu}^{1} G(x, t) t^\beta dt$$

ait un sens. En multipliant l'équation

$$\int_{\mu}^{1} G(x, t) f(tx)dt = g(x)$$

par x, et en intégrant par parties, on trouve

$$G(x, 1)\varphi(x) - G(x, \mu)\varphi(\mu x) = xg(x) + \int_{\mu}^{1} \frac{\partial}{\partial t} G(x, t)\varphi(tx)dt,$$

en posant

$$\varphi(x) = \int^{x} f(x)dx.$$

Cette équation peut s'écrire *sous la forme suivante :*

$$\varphi(x) - h(x)\varphi(\mu x) = x^\alpha \psi(x) + \int_\mu^1 K(x, t)\varphi(tx)\,dt,$$

où l'on pose

$$h(x) = \frac{G(x, \mu)}{G(x, 1)},$$

$$x^\alpha \psi(x) = \frac{xg(x)}{G(x, 1)},$$

$$K(x, t) = \frac{\frac{\partial}{\partial t} G(x, t)}{G(x, 1)}.$$

On prend $\alpha = \beta + 1$, et il est clair que *les fonctions* $\psi(x)$, $h(x)$, $K(x, t)$ *satisfont à la condition* (D).

[**4**] Nous écrivons cette équation *avec un paramètre* λ, comme il suit :

$$\varphi(x) = x^\alpha \psi(x) + \lambda \left\{ h(x)\varphi(\mu x) + \int_\mu^1 K(x, t)\varphi(tx)\,dt \right\}.$$

Nous commençons par la solution de *l'équation*

$$\varphi(x) = x^\alpha \psi(x) + \lambda \int_0^1 K(x, t)\varphi(tx)\,dt,$$

et nous résolvons ensuite le type plus général. Nous démontrons qu'*il existe, pour les deux cas, une solution fonction méromorphe de* λ. Lorsque λ est un pôle de cette fonction, il y a encore une solution qui est logarithmique.

Nous considérons ensuite *les équations homogènes*

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 K(x, t)\varphi(tx)\,dt,$$

$$\varphi(x) = \lambda \left\{ h(x)\varphi(\mu x) + \int_\mu^1 K(x, t)\varphi(tx)\,dt \right\},$$

et nous trouvons qu'*une solution de la première correspond à chaque racine de l'équation en* α

$$1 = \lambda \int_0^1 t^\alpha K(t)\,dt,$$

en posant $K(t) = K(o, t)$; et qu'*une solution de la seconde correspond à chaque racine de l'équation*

$$1 = \lambda \left\{ c\mu^\alpha + \int_\mu^1 t^\alpha K(t)\,dt \right\},$$

où l'on a $c = h(0)$. Au moyen de ces équations, nous obtenons *les solutions de l'équation*

$$\int_{\mu}^{1} G(x, t) f(tx)\, dt = 0,$$

qui correspondent aux racines de l'équation

$$\int_{\mu}^{1} t^{\alpha} G(t)\, dt = 0.$$

Enfin, nous résolvons les équations

$$\varphi(x) = x^{\alpha} \psi(x) + \lambda \int_{a}^{b} K(x, t) \varphi(tx)\, dt,$$

$$\varphi(x) = x^{\alpha} \psi(x) + \lambda \left\{ h(x) \varphi(\mu x) + \int_{a}^{b} K(x, t) \varphi(tx)\, dt \right\},$$

où l'on a $|a| \leqslant 1$, $|b| \leqslant 1$. Si l'on a dans la première $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$, ou dans la seconde $\mu \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$, ces équations rentrent toujours dans les types déjà considérés, si l'on pose $K(x, t) = 0$ en dehors de l'intervalle $a \leqslant t \leqslant b$. Il n'y aura donc pas besoin de parler de cette classe d'équations dans la suite.

[**6**] Notre méthode, dans tout ce qui précède, a été de multiplier $\varphi(x)$ par un certain produit de n facteurs linéaires en λ; trouver pour le résultat une expression en série de puissances de λ, et démontrer que le rayon de convergence de cette série augmente indéfiniment avec n. *Si les fonctions* $h(x)$, $\psi(x)$. $K(x, t)$ *ne sont pas susceptibles de développement en série asymptotique suivant les puissances de* x, *cette méthode ne s'applique plus*. Il y a alors trois cas à distinguer *suivant que l'on a :* 1° $\mu = 0$; 2° $\mu > 0$; 3° $\mu < 0$.

1° $\mu = 0$. — L'équation est (sans paramètre)

$$\varphi(x) = \psi(x) + \int_{0}^{1} K(x, t) \varphi(tx)\, dt.$$

Nous supposons que l'on ait $|\psi(x)| < M x^{\gamma}$, M étant une constante et γ étant supérieur à -1.

Les conditions auxquelles les fonctions $\psi(x)$, $K(x, t)$ sont assujetties, sont très larges et seront précisées dans la suite.

Nous trouvons d'abord la solution de l'équation

$$\varphi(x) = \psi(x) + \int_{0}^{1} K(t) \varphi(tx)\, dt,$$

en supposant que $K(t)$ soit un polynôme, sous la forme d'une somme de deux intégrales de contour.

A l'aide de cette solution et d'une méthode d'approximations successives, nous résolvons l'équation

$$\varphi(x) = \psi(x) + \int_0^1 K(x, t)\varphi(tx)\,dt,$$

en supposant encore que $K(t)$ soit un polynôme.

Enfin, nous prenons le cas où $K(t)$ est une fonction continue en général dans l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Nous faisons son approximation dans cet intervalle, d'après le théorème bien connu de Weierstrass, par *un polynôme convenable* $P_n(t)$. Et ici, il nous faut témoigner notre reconnaissance à M. Lebesgue, dont on sait l'autorité dans ce genre de questions, et qui nous a donné beaucoup d'indications sur les conditions qu'il faut imposer à la fonction $K(t)$ et sur les méthodes pour trouver des polynômes convenables dans chaque cas. Ayant obtenu une approximation suffisante, nous écrivons l'équation comme il suit :

$$\varphi(x) = \left[\psi(x) + \int_0^1 \Big\{K(x, t) - P_n(t)\Big\}\varphi(tx)\right] + \int_0^1 P_n(t)\varphi(tx)\,dt,$$

et nous la résolvons par une méthode d'approximations successives. Nous démontrons que *la solution dépend linéairement d'autant des constantes arbitraires qu'il y a de racines pour l'équation en* α :

$$\int_0^1 t^\alpha K(t)\,dt = 1,$$

et que l'équation homogène

$$\varphi(x) = \int_0^1 K(x, t)\varphi(tx)\,dt$$

admet le même nombre de solutions linéairement indépendantes.

2° $\mu > 0$. — Nous supposons que l'on ait $|\psi(x)| < Mx^\gamma$, où γ ne doit plus être nécessairement supérieur à -1. L'équation s'écrit :

$$\varphi(x) - h(x)\varphi(\mu x) = \psi(x) + \int_\mu^1 K(x, t)\varphi(tx)\,dt.$$

Nous mettons $h(0) = c$, et nous faisons *les hypothèses suivantes :* (*a*) $|c|\mu^\gamma < 1$, *et* (*b*) $\lim\limits_{n \to \infty} c'^n\varphi(\mu^n x) = 0$, *où l'on a* $c' > |c|$.

Nous remplaçons x successivement dans l'équation par μx, $\mu^2 x$, ..., $\mu^n x$ .... En éliminant les fonctions $\varphi(\mu x)$, $\varphi(\mu^2 x)$, ..., $\varphi(\mu^n x)$ ..., nous retombons sur une équation du type 1°.

La solution dépend linéairement d'autant de constantes arbitraires qu'il y a de racines pour l'équation en α :

$$\int_{\mu}^{1} t^{\alpha} \mathrm{K}(t)\,dt = 1 - c\mu^{\alpha}$$

satisfaisant à la condition $|c\mu^{\alpha}| < 1$; *et l'équation homogène admet le même nombre de solutions linéairement indépendantes.*

Si l'hypothèse (a) n'est pas vérifiée, ou bien si l'on s'affranchit de la condition (b), on peut assigner arbitrairement la fonction $\varphi(x)$ dans un intervalle $\mu l \leqslant x \leqslant l$, l étant une quantité positive; on peut alors faire le prolongement de $\varphi(x)$ dans les deux sens par une suite d'équations de Volterra.

3° $\mu < 0$, ou bien $\mu = -\nu$, où l'on a $0 < \nu \leqslant 1$. L'équation s'écrit comme il suit :

$$\varphi(x) - h(x)\varphi(-\nu x) = \psi(x) + \int_{-\nu}^{1} \mathrm{K}(x, t)\varphi(tx)\,dt.$$

Il y a ici une distinction à faire. Si les fonctions $h(x)$, $\psi(x)$, $\mathrm{K}(x, t)$ sont définies pour les valeurs positives et négatives de x, nous n'avons pas réussi à trouver une solution générale valable pour les valeurs positives et négatives. On peut trouver une solution unique par approximation directe si les limites supérieures de $|h(x)|$ et de $|\mathrm{K}(x, t)|$ sont assez petites; ce cas est très simple, et nous ne nous y arrêtons pas.

Si l'on cherche seulement une solution valable pour les valeurs positives de x, on peut donner $\varphi(x) = u(x)$, une fonction arbitraire, pour les valeurs négatives, et l'on trouve encore une équation du type 1°.

[**7**] Les résultats obtenus s'appliquent tout de suite, comme auparavant, à l'équation généralisée d'Abel :

$$\int_{\mu}^{1} \mathrm{G}(x, t) f(tx)\,dt = g(x).$$

Nous avons trouvé aussi les solutions de l'équation

$$\int_{0}^{1} \mathrm{G}(x, t) f(tx)\,dt = g(x)$$

dans le cas singulier où l'on a $\mathrm{G}(1) = 0$, en supposant que l'on ait en même temps $\mathrm{G}'(1) \neq 0$. Nous y ajoutons une discussion *du cas plus général où l'on a :*

$$\mathrm{G}(1) = \mathrm{G}'(1) = \ldots = \mathrm{G}^{(r-1)}(1) = 0; \qquad \mathrm{G}^{(r)}(1) \neq 0.$$

Enfin, nous avons montré comment on rencontre le problème d'inversion qui forme le sujet de ce travail dans l'étude *de l'équation aux dérivées partielles :*

$$x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} - t \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \mathrm{A}(x, t) \frac{\partial z}{\partial t}.$$

Il s'agit de trouver des solutions qui restent finies à l'intérieur du rectangle formé par les droites

$$x = 0, \qquad x = l, \qquad t = a, \qquad t = b$$

et qui prennent des valeurs données sur les trois côtés $x = 0$, $t = a$, $t = b$. Le cas 1° se présente si une des quantités a et b est zéro; le cas 2°, si elles ont le même signe; le cas 3°, si elles ont des signes opposés.

[**8**] Pour ce qui concerne la littérature de cette question, il est à remarquer que, dans le cas particulier où l'on a $\mathrm{G}(x, t) = \mathrm{K}(x, xt)$, où $\mathrm{K}(x, y)$ est une fonction continue ayant une dérivée bornée par rapport à x dans le triangle limité par les droites $y = x$, $y = \mu x$, $x = l$, et tendant vers une valeur unique différente de zéro comme x et y tendent simultanément vers zéro, on peut se servir des méthodes que M. Volterra a adoptées dans le Mémoire déjà cité; et l'on trouve une solution unique. M. Picard a fait à ce cas une application de la méthode d'approximations successives; et il a trouvé par ce moyen la solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} + c(x, y) z = d(x, y),$$

qui prend des valeurs données sur les droites $y = x$ et $y = \mu x$ (1). On devrait consulter aussi, sur ce point, des travaux de M. Goursat (2) et de M. Hadamard (3).

MM. Volterra (4) et Holmgren (5) ont étudié l'équation

$$\int_0^x \Big[\mathrm{A}_0 x^n + \mathrm{A}_1 x^{n-1} y + \ldots + \mathrm{A}_n y^n + x^{n+1} \mathrm{P}_0(x, y) + x^n y \mathrm{P}_1(x, y) \\ + \ldots + y^{n+1} \mathrm{P}_{n+1}(x, y) \Big] f(y)\, dy = \varphi(x),$$

où l'on a

$$\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 + \ldots + \mathrm{A}_n \neq 0,$$
$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \ldots = \varphi^{(n)}(0) = 0,$$

---

(1) Picard, *Sur une équation fonctionnelle se présentant dans la théorie de certaines équations aux dérivées partielles* [Comptes rendus, Paris, CXLIV (1907)].

(2) Goursat, *Sur un problème relatif à la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 2e série, tt. V et VI).

(3) Hadamard, *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXV, p. 116.

(4) Volterra, *Sulla inversione degli integrali definiti* [Atti Torino (1896), notes III et IV].

(5) Holmgren, *Sur un théorème de M. Volterra* [Atti Torino, t. XXXV (1900)].

et les fonctions $P_0(x, y)$, $P_1(x, y)$, ..., $P_{n+1}(x, y)$ sont bornées et à dérivées bornées. M. Lalesco la traite aussi par une méthode d'approximations successives, en se servant de la théorie des équations différentielles du type de Fuchs(1). En faisant le changement de variables $y = tx$, on trouve

$$\int_0^1 \left\{ A_0 + A_1 t + \dots + A_n t^n + x R(x, tx) \right\} f(tx) dt = h(x),$$

où $R(x, y)$ est une fonction bornée et à dérivées bornées, et l'on a $h(x) = \frac{\varphi(x)}{x^{n+1}}$, une fonction bornée.

On voit que c'est un cas particulier de notre problème d'inversion, $G(t)$ étant égal au polynôme

$$A_0 + A_1 t + \dots + A_n t^n.$$

M. Horn(2) a traité aussi l'équation de Volterra où le noyau est de la forme

$$ax + by + \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \dots,$$

par une méthode d'approximations successives.

MM. Holmgren, Lalesco et Horn, dans les travaux déjà cités, ont résolu l'équation avec ce dernier noyau dans le cas spécial où l'on a :

$$a + b = 0.$$

C'est un cas très particulier de la relation $G(1) = 0$, dans le problème que nous considérons.

J'ai l'honneur de dédier ce premier travail à l'illustre savant français M. Émile Picard, qui a eu la bienveillance de s'y intéresser et de m'aider par ses conseils; qui aussi m'a initié par ses cours aux théories des équations fonctionnelles, et m'a mis sur la route de recherches personnelles dans ce département des mathématiques.

(1) LALESCO, *Thèse de doctorat* (Paris, 1907); *Sur l'équation de Volterra* (Journal de mathématiques, 1908).

(2) HORN, *Volterrasche integralgleichungen und Summengleichungen* [Journal für die veine und angewandte Mathematik, t. CXL (1911)].

I.

[**1**] Nous commençons par l'étude de *l'équation*

$$\varphi(x) = x^{\alpha}\psi(x) + \lambda \int_0^1 \mathrm{K}(x, t)\varphi(tx)\,dt,$$

où la partie réelle de α *est supérieure à* -1, *et l'on n'a pas* $\psi(0) = 0$, *en supposant que les fonctions* $\psi(x)$ *et* $\mathrm{K}(x, t)$ *satisfassent à la condition* (D), *c'est-à-dire qu'elles soient développables, au moins asymptotiquement, suivant les puissances positives croissantes de* x.

Soient

$$|\mathrm{K}(x, t)| < \mathrm{K}; \qquad |\psi(x)| < \mathrm{M},$$

K et M étant des quantités fixes. Soit une solution

$$\varphi(x) = x^{\alpha}\left\{\mathrm{B}_0(x) + \lambda \mathrm{B}_1(x) + \ldots + \lambda^n \mathrm{B}_n(x) + \ldots\right\}.$$

En égalant les coefficients des puissances de λ dans l'équation, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}_0(x) &= \psi(x), \\
\mathrm{B}_1(x) &= \int_0^1 \mathrm{K}(x, t)\, t^{\alpha}\, \mathrm{B}_0(tx)\,dt, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathrm{B}_n(x) &= \int_0^1 \mathrm{K}(x, t)\, t^{\alpha}\, \mathrm{B}_{n-1}(tx)\,dt, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Soit $\alpha = a_1 + ia_2$, a_1 et a_2 étant des quantités réelles; on trouve :

$$\begin{aligned}
|\mathrm{B}_0(x)| &< \mathrm{M}, \\
|\mathrm{B}_1(x)| &< \mathrm{M}\left(\frac{\mathrm{K}}{1 + a_1}\right), \\
&\ldots\ldots\ldots \\
|\mathrm{B}_n(x)| &< \mathrm{M}\left(\frac{\mathrm{K}}{1 + a_1}\right)^n, \\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

La série des puissances de λ a donc un rayon de convergence au moins égal à

$$\frac{1 + a_1}{\mathrm{K}}.$$

[**2**] En posant

$$c_0 = \int_0^1 t^\alpha K(t)\,dt,$$
$$\Phi_1(x) = \varphi(x)(1 - \lambda c_0),$$

on voit que $\Phi_1(x)$ satisfait à l'équation

$$\Phi_1(x) = x^\alpha \psi(x)(1 - \lambda c_0) + \lambda \int_0^1 K(x, t)\Phi_1(tx)\,dt.$$

Soit

$$\Phi_1(x) = x^\alpha \psi(x) + \lambda u_1(x);$$

alors on aura

$$u_1(x) = -c_0 x^\alpha \psi(x) + \int_0^1 K(x, t) x^\alpha t^\alpha \psi(tx)\,dt + \lambda \int_0^1 K(x, t) u_1(tx)\,dt.$$

Mais nous avons, par hypothèse,

$$\psi(x) = \psi(0) + x\theta_1(x),$$
$$K(x, t) = K(t) + xK_1(x, t),$$

où les fonctions $\theta_1(x)$, $K(x, t)$ satisfont à la condition (D). Par conséquent, l'expression

$$-c_0 x^\alpha \psi(x) + \int_0^1 K(x, t) x^\alpha t^\alpha \psi(tx)\,dt$$

est égale à

$$x^\alpha \left\{ \int_0^1 t^\alpha K(t)\,dt - c_0 \right\} - c_0 x^{\alpha+1}\theta_1(x)$$
$$+ x^{\alpha+1} \int_0^1 t^\alpha \left\{ \psi(0)K_1(x, t) + tK(t)\theta_1(tx) + xtK_1(x, t)\theta_1(tx) \right\} dt,$$

c'est-à-dire égale à

$$x^{\alpha+1}\psi_1(x),$$

$\psi_1(x)$ étant une fonction satisfaisant à la condition (D).

Nous obtenons donc l'équation :

$$u_1(x) = x^{\alpha+1}\psi_1(x) + \lambda \int_0^1 K(x, t) u_1(tx)\,dt.$$

En posant, de même,

$$c_1 = \int_0^1 t^{\alpha+1} K(t)\,dt,$$
$$v_1(x) = u_1(x)(1 - \lambda c_1),$$

nous obtenons

$$v_1(x) = x^{\alpha+1}\psi_1(x) + \lambda u_2(x),$$

$u_2(x)$ étant une solution de l'équation

$$u_2(x) = x^{\alpha+2}\psi_2(x) + \int_0^1 \mathrm{K}(x,\ t)u_2(tx)dt,$$

où la fonction $\psi_2(x)$ satisfait à la condition (D).

[**3**] Nous avons, maintenant,

$$\varphi(x) = \frac{x^\alpha\psi(x) + \dfrac{\lambda\left\{x^{\alpha+1}\psi_1(x) + \lambda u_2(x)\right\}}{1-\lambda c_1}}{1-\lambda c_0} = \frac{x^\alpha\psi(x) + \lambda x^\alpha w_1(x) + \lambda^2 u_2(x)}{(1-\lambda c_0)(1-\lambda c_1)},$$

où $w_1(x)$ satisfait à la condition (D). Il est clair que l'on peut continuer indéfiniment ce procédé, et qu'*en posant, en général,*

$$c_r = \int_0^1 t^{r+\alpha}\mathrm{K}(t)dt, \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$\Phi_n(x) = \varphi(x)(1-\lambda c_0)(1-\lambda c_1)\ldots(1-\lambda c_{n-1}),$$

on obtient

$$\Phi_n(x) = x^\alpha\left\{\xi_0(x) + \lambda\xi_1(x) + \ldots + \lambda^{n-1}\xi_{n-1}(x)\right\} + \lambda^n u_n(x),$$

la fonction $u_n(x)$ étant une solution de l'équation

$$u_n(x) = x^{\alpha+n}\psi_n(x) + \lambda\int_0^1 \mathrm{K}(x,\ t)u_n(tx)dt,$$

et les fonctions $\xi_0(x)$, $\xi_1(x)$, ..., $\xi_{n-1}(x)$, $\psi_n(x)$ satisfaisant toutes à la condition (D).

De là, nous trouvons

$$u_n(x) = x^{n+\alpha}\left\{\mathrm{C}_0(x) + \lambda\mathrm{C}_1(x) + \ldots + \lambda^m\mathrm{C}_m(x) + \ldots\right\},$$

une série de puissances de λ, dont le rayon de convergence est au moins égal à

$$\frac{n+1+a_1}{\mathrm{K}},$$

et, par conséquent, augmente indéfiniment avec n.

On a donc

$$\Phi_n(x) = x^\alpha[\xi_0(x) + \lambda\xi_1(x) + \ldots + \lambda^{n-1}\xi_{n-1}(x) + \lambda^n x^n\mathrm{C}_0(x) + \lambda^{n+1}x^{n+1}\mathrm{C}_1(x) + \ldots],$$

une série dont le rayon de convergence croît indéfiniment avec n.

[**4**] Nous avons posé :

$$c_r = \int_0^1 t^{r+\alpha} K(t)\,dt.$$

Il s'ensuit que l'on a

$$|c_r| < \frac{K}{r+1+a_1},$$

et, par conséquent, le produit infini

$$P(\lambda) = (1-\lambda c_0)e^{\lambda c_0}(1-\lambda c_1)e^{\lambda c_1}\ldots(1-\lambda c_n)e^{\lambda c_n}\ldots$$

est une fonction entière de λ. Nous supposons que λ ne soit pas égal à aucune des quantités $\frac{1}{c_r}$. En posant

$$\Phi(x) = P(\lambda)\varphi(x),$$

nous obtenons l'équation :

$$\Phi(x) = P(\lambda)x^\alpha\psi(x) + \lambda\int_0^1 K(x,t)\Phi(tx)\,dt.$$

Si l'on pose

$$P(\lambda) = b_0 + b_1\lambda + \ldots + b_n\lambda^n + \ldots,$$
$$\Phi(x) = x^\alpha[D_0(x) + \lambda D_1(x) + \ldots + \lambda^n D_n(x) + \ldots],$$

on trouve, en égalant les coefficients des puissances de λ,

$$D_0(x) = b_0\psi(x),$$
$$D_1(x) = b_1\psi(x) + \int_0^1 K(x,t)t^\alpha D_0(tx)\,dt,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$D_n(x) = b_n\psi(x) + \int_0^1 K(x,t)t^\alpha D_{n-1}(tx)\,dt,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nous trouvons ainsi les coefficients d'une solution holomorphe au voisinage de $\lambda = 0$. Cette solution est évidemment le produit de $\Phi_n(x)$ par

$$e^{\lambda(c_0+c_1+\ldots+c_{n-1})}(1-\lambda c_n)e^{\lambda c_n}(1-\lambda c_{n+1})e^{\lambda c_{n+1}}\ldots$$

qui est une série entière. Donc, la série représentant cette solution a un rayon de convergence au moins égal à celui de la série $\Phi_n(x)$, et, par conséquent, cette solution est holomorphe dans tout le plan.

Nous avons donc établi le théorème suivant :

L'équation

$$\varphi(x) = x^\alpha \psi(x) + \lambda \int_0^1 K(x, t)\varphi(tx)\,dt,$$

où la partie réelle de α *est supérieure à* -1, *et l'on n'a pas* $\psi(0)=0$, *et les fonctions* $\psi(x)$, $K(x, t)$ *satisfont à la condition* (D), *admet la solution*

$$\text{(A)} \qquad \varphi(x) = \frac{x^\alpha H(x, \alpha, \lambda)}{P(\lambda)},$$

$H(x, \alpha, \lambda)$ *étant une fonction entière de* λ *qui satisfait à la condition* (D) *en tant que fonction de* x, *et* $P(\lambda)$ *étant la fonction entière de* λ

$$(1-\lambda c_0)e^{\lambda c_0}(1-\lambda c_1)e^{\lambda c_1}\dots(1-\lambda c_n)e^{\lambda c_n}\dots,$$

où l'on pose

$$c_r = \int_0^1 t^{r+\alpha} K(0, t)\,dt \qquad (r = 0, 1, 2, \dots);$$

cette solution existe lorsque λ *est différent de toutes les quantités* $\frac{1}{c_r}$.

[**6**] Avant d'aller plus loin, nous noterons deux formes sous lesquelles cette solution $\varphi(x)$ peut s'écrire, et qui nous seront nécessaires dans la suite. Nous avons, par hypothèse, pour n quelconque,

$$\psi(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n \theta_n(x),$$

les $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ étant des constantes, et $\theta_n(x)$ étant une fonction qui satisfait à la condition (D).

Soit, en général,

$$P_r(\lambda) = (1-\lambda c_r)e^{\lambda c_r}(1-\lambda c_{r+1})e^{\lambda c_{r+1}}\dots \qquad (r = 1, 2, \dots),$$

et soit

$$v_r(x) = \frac{x^{\alpha+r} S_r(x, \alpha, \lambda)}{P_r(\lambda)}$$

la solution, donnée par la formule (A), de l'équation

$$v_r(x) = x^{\alpha+r} + \lambda \int_0^1 K(x, t) v_r(tx)\,dt \qquad (r = 0, 1, 2, \dots).$$

Soit aussi

$$w_n(x) = \frac{x^{\alpha+n}\Theta_n(x, \alpha, \lambda)}{P_n(\lambda)}$$

la solution, donnée par la même formule, de l'équation

$$w_n(x) = x^{\alpha+n}\theta_n(x) + \lambda \int_0^1 K(x, t) w_n(tx)\,dt \qquad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Il est clair que nous avons

$$\varphi(x) = \frac{x^\alpha \mathrm{H}(x, \alpha, \lambda)}{\mathrm{P}(\lambda)}$$
$$= \frac{a_0 x^\alpha \mathrm{S}_0(x, \alpha, \lambda)}{\mathrm{P}(\lambda)} + \frac{a_1 x^{\alpha+1} \mathrm{S}_1(x, \alpha, \lambda)}{\mathrm{P}_1(\lambda)} + \ldots + \frac{a_{n-1} x^{\alpha+n-1} \mathrm{S}_{n-1}(x, \alpha, \lambda)}{\mathrm{P}_{n-1}(\lambda)} + \frac{x^{\alpha+n} \Theta_n(x, \alpha, \lambda)}{\mathrm{P}_n(\lambda)},$$

ce qui nous donne :

$$(\mathrm{B}) \left\{ \begin{aligned} & x^\alpha \mathrm{H}(x, \alpha, \lambda) = a_0 x^\alpha \mathrm{S}_0(x, \alpha, \lambda) + a_1 x^{\alpha+1} \mathrm{S}_1(x, \alpha, \lambda)(1 - \lambda c_0) e^{\lambda c_0} \\ & + \ldots + a_{n-1} x^{\alpha+n-1} \mathrm{S}_{n-1}(x, \alpha, \lambda)(1 - \lambda c_0) e^{\lambda c_0} (1 - \lambda c_1) e^{\lambda c_1} \ldots (1 - \lambda c_{n-2}) e^{\lambda c_{n-2}} \\ & + x^{\alpha+n} \Theta_n(x, \alpha, \lambda)(1 - \lambda c_0) e^{\lambda c_0} (1 - \lambda c_1) e^{\lambda c_1} \ldots (1 - \lambda c_{n-1}) e^{\lambda c_{n-1}}. \end{aligned} \right.$$

D'autre part, il est évident, d'après la méthode par laquelle nous sommes arrivés à la formule (A), que l'on doit avoir

$$\varphi(x) = \frac{x^\alpha \mathrm{H}(x, \alpha, \lambda)}{\mathrm{P}(\lambda)}$$
$$= \frac{x^\alpha \psi(x)}{1 - \lambda c_0} + \frac{\lambda x^{\alpha+1} \psi_1(x, \alpha)}{(1 - \lambda c_0)(1 - \lambda c_1)} + \ldots + \frac{\lambda^{n-1} x^{\alpha+n-1} \psi_{n-1}(x, \alpha)}{(1 - \lambda c_0)(1 - \lambda c_1) \ldots (1 - \lambda c_{n-1})}$$
$$+ \frac{\lambda^n u_n(x)}{(1 - \lambda c_0)(1 - \lambda c_1) \ldots (1 - \lambda c_{n-1})},$$

$u_n(x)$ étant la solution, donnée par la formule (A), de l'équation

$$u_n(x) = x^{\alpha+n} \psi_n(x, \alpha) + \lambda \int_0^1 \mathrm{K}(x, t) u_n(tx)\, dt.$$

Par conséquent, $u_n(x)$ est égale à une expression de la forme

$$u_n(x) = \frac{x^{\alpha+n} \Psi_n(x, \alpha, \lambda)}{\mathrm{P}_n(\lambda)};$$

et nous déduisons, en multipliant par $\mathrm{P}(\lambda)$, que l'on a

$$(\mathrm{C}) \left\{ \begin{aligned} & x^\alpha \mathrm{H}(x, \alpha, \lambda) = x^\alpha \rho(x, \alpha) \mathrm{P}_1(\lambda) + \lambda x^{\alpha+1} \rho_1(x, \alpha) \mathrm{P}_2(\lambda) + \ldots \\ & \qquad + \lambda^{n-1} x^{\alpha+n-1} \rho_{n-1}(x, \alpha) \mathrm{P}_n(\lambda) + \lambda^n x^{\alpha+n} \mathrm{R}_n(x, \alpha, \lambda), \end{aligned} \right.$$

où l'on a

$$\rho(x, \alpha) = e^{\lambda c_0} \psi(x)$$

et, en général,

$$\rho_r(x, \alpha) = e^{\lambda(c_0 + c_1 + \ldots + c_r)} \psi_r(x, \alpha) \qquad (r = 1, 2, \ldots, n - 1).$$

On a aussi :

$$\mathrm{R}_n(x, \alpha, \lambda) = e^{\lambda(c_0 + c_1 + \ldots + c_n)} \Psi_r(x, \alpha, \lambda).$$

Par conséquent, $\mathrm{R}_n(x, \alpha, \lambda)$ est une fonction entière de λ; et toutes les fonctions $\rho(x, \alpha)$, $\rho_1(x, \alpha)$, ..., $\rho_{n-1}(x, \alpha)$ satisfont à la condition (D).

[**7**] Maintenant, en partant de la formule

$$\text{(E)} \qquad \Phi(x) = x^{\alpha}\psi(x)\mathrm{P}(\lambda) + \lambda\int_0^1 \mathrm{K}(x, t)\Phi(tx)\,dt,$$

où l'on a

$$\Phi(x) = x^{\alpha}\mathrm{H}(x, \alpha, \lambda),$$

on peut déduire toute une foule de résultats.

Mettons d'abord $\lambda = \frac{1}{c_r}$ et supposons que l'on n'ait jamais $c_r = c_{r+s}$ pour $s \geqslant 1$. Nous trouvons qu'*une solution de l'équation homogène*

$$u(x) = \frac{1}{c_r}\int_0^1 \mathrm{K}(x, t)u(tx)\,dt$$

est la fonction suivante :

$$u(x) = x^{\alpha}\mathrm{H}\left(x, \alpha, \frac{1}{c_r}\right).$$

En prenant $n = r$, dans la formule (C), nous voyons que l'on a

$$x^{\alpha}\mathrm{H}\left(x, \alpha, \frac{1}{c_r}\right) = \frac{1}{c_r^r}x^{\alpha+r}\mathrm{R}_r\left(x, \alpha, \frac{1}{c_r}\right);$$

d'où l'on déduit

$$u(x) = \frac{e^{\frac{1}{c_r}(c_0+c_1+\ldots+c_r)}}{c_r^r}x^{\alpha+r}\Psi_r\left(x, \alpha, \frac{1}{c_r}\right).$$

et nous savons que la fonction

$$u_r(x) = \frac{x^{\alpha+r}\Psi_r(x, \alpha, \lambda)}{\mathrm{P}_r(\lambda)}$$

est la solution de l'équation

$$u_r(x) = x^{\alpha+r}\psi_r(x, \alpha) + \lambda\int_0^t \mathrm{K}(x, t)u_r(tx)\,dt.$$

On déduit, par une formule analogue à (B), que l'on a

$$x^{\alpha+r}\Psi_r(x, \alpha, \lambda) = k_0x^{\alpha+r}\mathrm{S}_r(x, \alpha, \lambda) + x^{\alpha+r-1}\mathrm{T}(x, \alpha, \lambda)(1 - \lambda c_r)e^{\lambda c_r},$$

k_0 étant égal $\psi_r(0, \alpha)$, et $\mathrm{T}(x, \alpha, \lambda)$ étant une fonction entière de λ.

Nous avons, par conséquent,

$$u(x) = kx^{\alpha+r}\mathrm{S}_r\left(x, \alpha, \frac{1}{c_r}\right),$$

k étant une constante; donc *la fonction*

$$u(x) = x^{\alpha+r} S_r\left(x, \alpha, \frac{1}{c_r}\right)$$

est une solution de l'équation homogène

$$u(x) = \frac{1}{c_r}\int_0^1 K(x, t)u(tx)\,dt.$$

Nous voyons, en particulier, que si l'on n'a jamais $c_0 = c_s$, la fonction

$$u(x) = x^\alpha S_0\left(x, \alpha, \frac{1}{c_0}\right) = x^\alpha H\left(x, \alpha, \frac{1}{c_0}\right)$$

(l'égalité ayant lieu à un multiplicateur constant près), est une solution de l'équation

$$u(x) = \frac{1}{c_0}\int_0^1 K(x, t)u(tx)\,dt.$$

En nous rappelant que l'on a

$$c_0 = \int_0^1 t^\alpha K(t)\,dt,$$

nous pouvons énoncer le théorème suivant :

L'équation homogène

$$\varphi(x) = \lambda\int_0^1 K(x, t)\varphi(tx)\,dt$$

admet les solutions

$$\varphi(x) = x^\beta H(x, \beta, \lambda) = x^\beta S_0(x, \beta, \lambda),$$

β *étant une racine quelconque de l'équation en* α,

$$\int_0^1 t^\alpha K(t)\,dt = \frac{1}{\lambda},$$

pourvu qu'il n'y ait pas une autre racine $\beta + s$, *s étant un entier positif.*

[**8**] Nous trouvons d'autres résultats en différentiant p fois successivement par rapport à α la formule (E), que nous écrivons encore une fois

$$\text{(E)} \qquad \Phi(x) = P(\lambda)x^\alpha\psi(x) + \lambda\int_0^1 K(x, t)\Phi(tx)\,dt.$$

En nous rappelant que $P(\lambda)$ est une fonction de α, nous obtenons

$$\text{(E')} \quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^p\Phi(x)}{\partial\alpha^p} = &\left[\frac{\partial^p P(\lambda)}{\partial\alpha^p} + p\frac{\partial^{p-1}P(\lambda)}{\partial\alpha^{p-1}}\log x + \frac{p(p-1)}{2\,!}\frac{\partial^{p-2}P(\lambda)}{\partial\alpha^{p-2}}(\log x)^2\right.\\ &\left. + \ldots + p\frac{\partial P(\lambda)}{\partial\alpha}(\log x)^{p-1} + P(\lambda)(\log x)^p\right]x^\alpha\psi(x) + \lambda\int_0^1 K(x, t)\frac{\partial^p\Phi(tx)}{\partial\alpha^p}\,dt, \end{aligned}\right.$$

p étant un entier quelconque.

On pourrait déduire de ces équations que *la solution de l'équation*

$$w(x) = x^\alpha (\log x)^p \psi(x) + \lambda \int_0^1 \mathrm{K}(x, t) w(tx)\, dt$$

est de la forme

$$\frac{x^\alpha [\mathrm{U}_0(x, \alpha, \lambda) + (\log x)\mathrm{U}_1(x, \alpha, \lambda) + \ldots + (\log x)^p \mathrm{U}_p(x, \alpha, \lambda)]}{\{\mathrm{P}(\lambda)\}^p},$$

les U *étant des fonctions entières de* λ *qui satisfont à la condition* (D); mais on le voit plus facilement en différentiant p fois successivement la solution

$$\varphi(x) = \frac{x^\alpha \mathrm{H}(x, \alpha, \lambda)}{\mathrm{P}(\lambda)}$$

de l'équation

$$\varphi(x) = x^\alpha \psi(x) + \lambda \int_0^1 \mathrm{K}(x, t) \varphi(tx)\, dt.$$

Supposons encore que l'on n'ait jamais $c_r = c_{r+s}$, mais que *l'on ait pour une certaine valeur de* α

$$\frac{\partial c_r}{\partial \alpha} = \frac{\partial^2 c_r}{\partial \alpha^2} = \ldots = \frac{\partial^q c_r}{\partial \alpha^q} = 0,$$

ou bien

$$\int_0^1 t^{\alpha+r} (\log t)^m \mathrm{K}(t)\, dt = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots, q).$$

Il est aisé de voir que le nombre q doit être limité; autrement, toutes les dérivées de la fonction de α, $\int_0^1 t^{\alpha+r} \mathrm{K}(t)\, dt$, seraient nulles dans un certain point, et cette fonction devrait par conséquent être une constante. Cette constante doit être nulle, puisque la fonction tend vers zéro quand la partie réelle de α croît indéfiniment. Nous avons donc, pour tout entier positif n,

$$\int_0^1 t^{n+r} \mathrm{K}(t)\, dt = 0.$$

Or, par un théorème bien connu, cela ne peut avoir lieu que dans le cas, banal pour nous, où l'on a $\mathrm{K}(t) \equiv 0$. Nous supposerons donc que l'on ait

$$\frac{\partial^{q+1} c_r}{\partial \alpha^{q+1}} = \int_0^1 t^{\alpha+r} (\log t)^{q+1} \mathrm{K}(t)\, dt \neq 0.$$

Prenons $p \leqslant q$ dans la formule (E'). Nous avons

$$\mathrm{P}(\lambda) = (1 - \lambda c_0) e^{\lambda c_0} \ldots (1 - \lambda c_r) e^{\lambda c_r} \ldots .$$

Les q premières dérivées successives de la fonction $(1-\lambda c_r)e^{\lambda c_r}$, par rapport à α, sont nulles; par conséquent, la fonction $\frac{\partial^p P(\lambda)}{\partial \alpha^p}$ devient nulle pour $\lambda = \frac{1}{c_r}$, si l'on a $p \leqslant q$. Donc, en mettant $\lambda = \frac{1}{c_r}$ dans les formules (E'), *nous voyons que les fonctions*

$$u_p(x) = \left[\frac{\partial^p}{\partial \alpha^p}\{x^\alpha H(x,\, \alpha,\, \lambda)\}\right]_{\lambda=\frac{1}{c_r}} \qquad (p = 1, 2, \ldots, q)$$

satisfont à l'équation homogène

$$u(x) = \frac{1}{c_r}\int_0^1 K(x,\, t)\,u(tx)\,dt.$$

Puisque les q premières dérivées de c_r par rapport à α sont nulles, nous pouvons mettre $\lambda = \frac{1}{c_r}$ à l'intérieur. Nous obtenons alors

$$u_p(x) = \frac{\partial^p}{\partial \alpha^p}\left\{x^{\alpha+r} S_r\left(x,\, \alpha,\, \frac{1}{c_r}\right)\right\};$$

$u_p(x)$ est donc de la forme

$$x^{\alpha+r}\left[\varphi_{r0}(x)(\log x)^p + p\varphi_{r1}(x)(\log x)^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2\,!}\varphi_{r2}(x)(\log x)^{p-2} + \ldots + \varphi_{rp}(x)\right],$$

où les fonctions $\varphi_{r0}(x)$, $\varphi_{r1}(x)$, $\ldots$, $\varphi_{rq}(x)$ satisfont à la condition (D).

Ce résultat s'obtient tout de suite en différentiant q fois successivement la solution connue

$$u(x) = x^{\alpha+r} S_r\left(x,\, \alpha,\, \frac{1}{c_r}\right)$$

de l'équation

$$u(x) = \frac{1}{c_r}\int_0^1 K(x,\, t)\,u(tx)\,dt.$$

En particulier, si l'on a

$$\frac{\partial c_0}{\partial \alpha} = \frac{\partial^2 c_0}{\partial \alpha^2} = \ldots = \frac{\partial^q c_0}{\partial \alpha^q} = 0; \qquad \frac{\partial^{q+1} c_0}{\partial \alpha^{q+1}} \neq 0,$$

l'équation

$$u(x) = \frac{1}{c_0}\int_0^1 K(x,\, t)\,u(tx)\,dt$$

admettra un système de solutions que l'on peut écrire sous la forme

$$u_p(x) = x^\alpha[\varphi_{00}(x,\, \alpha)(\log x)^p + p\varphi_{01}(x,\, \alpha)(\log x)^{p-1} + \ldots + \varphi_{0p}(x,\, \alpha)]$$
$$(p = 0, 1, \ldots, q).$$

Par conséquent, *si l'on a*

$$\int_0^1 t^\beta \mathrm{K}(t)\,dt = \frac{1}{\lambda},$$

$$\int_0^1 t^\beta (\log t)^p \mathrm{K}(t)\,dt = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots, q),$$

$$\int_0^1 t^\beta (\log t)^{q+1} \mathrm{K}(t)\,dt \neq 0,$$

l'équation homogène

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \mathrm{K}(x, t)\varphi(tx)\,dt$$

admet un système de solutions

$$\varphi(x) = x^\beta [\varphi_{00}(x, \beta)(\log x)^p + p\varphi_{01}(x, \beta)(\log x)^{p-1} + \ldots + \varphi_{0p}(x, \beta)]$$
$$(p = 0, 1, \ldots, q),$$

où les fonctions $\varphi_{00}, \varphi_{01}, \ldots, \varphi_{0p}$ *satisfont à la condition* (D).

On suppose toujours, bien entendu, qu'il n'y ait pas d'autre racine $\beta + s$, s étant un entier positif.

On pourrait s'attendre à ce résultat : les conditions que nous avons posées indiquent une coïncidence au point β de $q + 1$ racines de l'équation

$$\int_0^1 t^\alpha \mathrm{K}(t)\,dt = \frac{1}{\lambda}.$$

[**9**] Supposons maintenant que l'on prend $p \geqslant q + 1$ dans la formule (E'). Prenons d'abord $p = q + 1$. La dérivée $\dfrac{\partial^p \mathrm{P}(\lambda)}{\partial\alpha^p}$ n'est plus égale à zéro pour $\lambda = \dfrac{1}{c_r}$.

Supposons qu'elle soit égale à k_r, une fonction de α; en mettant $\lambda = \dfrac{1}{c_r}$ dans la formule (E), nous voyons que la fonction

$$w(x) = \left[\frac{\partial^{q+1}}{\partial\alpha^{q+1}}\left\{x^\alpha \mathrm{H}(x, \alpha, \lambda)\right\}\right]_{\lambda=\frac{1}{c_r}}$$

est une solution de l'équation

$$w(x) = k_r x^\alpha \psi(x) + \frac{1}{c_r}\int_0^1 \mathrm{K}(x, t) w(tx)\,dt.$$

Nous voyons par conséquent que la fonction

$$\varphi(x) = \frac{\dfrac{\partial^{q+1}}{\partial\alpha^{q+1}}\left\{x^\alpha \mathrm{H}(x, \alpha, \lambda)\right\}}{\dfrac{\partial^{q+1}\mathrm{P}(\lambda)}{\partial\alpha^{q+1}}}$$

est une solution de l'équation

$$\varphi(x) = x^\alpha \psi(x) + \lambda \int_0^1 K(x, t)\varphi(tx)dt,$$

dans le cas singulier où l'on a $1 - \lambda c_r = 0$, *et*

$$\frac{\partial c_r}{\partial \alpha} = \frac{\partial^2 c_r}{\partial \alpha^2} = \dots = \frac{\partial^q c_r}{\partial \alpha^q} = 0; \qquad \frac{\partial^{q+1} c_r}{\partial \alpha^{q+1}} \neq 0.$$

Si l'on prend $p = q + 2$, $q + 3$, etc., on obtient par des éliminations successives les solutions des équations

$$\varphi(x) = x^\alpha (\log x)^s \psi(x) + \lambda \int_0^1 K(x, t)\varphi(tx)dt \qquad (s = 1, 2, 3, \dots),$$

dans le même cas singulier.

[**10**] Nous allons étudier maintenant *le cas où l'on a, pour une certaine valeur* α_0 *de* α

$$c_h = c_i = \dots = c_k,$$

$h, i, \dots, k$ étant des entiers qui doivent être en nombre fini, puisque les quantités c_n tendent vers zéro quand n croît indéfiniment. Appelons c la valeur commune de toutes ces quantités; nous pouvons supposer que l'on ait $c \neq c_r$, r étant un entier quelconque autre que $h, i, \dots, k$. Nous supposons aussi au commencement *que l'on ait*

$$\frac{\partial c_h}{\partial \alpha_0} \neq 0; \quad \frac{\partial c_i}{\partial \alpha_0} \neq 0; \quad \dots \frac{\partial c_k}{\partial \alpha_0} \neq 0.$$

La fonction $P(\lambda)$ contient le facteur

$$(1 - \lambda c_h)(1 - \lambda c_i) \dots (1 - \lambda c_k).$$

Il est donc clair que si l est le nombre des entiers $h, i, \dots, k$, les $l - 1$ premières dérivées successives de $P(\lambda)$ par rapport à α sont nulles pour $\alpha = \alpha_0$, $\lambda = \frac{1}{c}$.

Prenons donc $p \leqslant l - 1$ dans la formule (E); en mettant $\alpha = \alpha_0$, $\lambda = \frac{1}{c}$, nous trouvons que *l'équation homogène*

$$w(x) = \frac{1}{c} \int_0^1 K(x, t) w(tx)dt$$

admet les solutions

$$x^{\alpha_0} H\left(x, \alpha_0, \frac{1}{c}\right); \quad \left[\frac{\partial^p}{\partial \alpha^p}\{x^\alpha H(x, \alpha, \lambda)\}\right]_{\alpha=\alpha_0,\ \lambda=\frac{1}{c}} \qquad (p = 1, 2, \dots, l-1).$$

Examinons la nature de ces solutions, en supposant que l'on ait $h < i < \ldots < k$. Nous écrivons encore une fois les formules :

$$
\text{(B)} \quad \begin{cases} x^\alpha \mathrm{H}(x, \alpha, \lambda) = a_0 x^\alpha \mathrm{S}_0(x, \alpha, \lambda) + a_1 x^{\alpha+1} \mathrm{S}_1(x, \alpha, \lambda)(1 - \lambda c_0) e^{\lambda c_0} \\ + \ldots + a_{n-1} x^{\alpha+n-1} \mathrm{S}_{n-1}(x, \alpha, \lambda)(1 - \lambda c_0) e^{\lambda c_0}(1 - \lambda c_1) e^{\lambda c_1} \ldots (1 - \lambda c_{n-1}) e^{\lambda c_{n-1}} \\ + x^{\alpha+n} \Theta_n(x, \alpha, \lambda)(1 - \lambda c_0) e^{\lambda c_0}(1 - \lambda c_1 e^{\lambda c_1} \ldots (1 - \lambda c_{n-1}) e^{\lambda c_{n-1}}; \end{cases}
$$

$$
\text{(C)} \quad \begin{cases} x^\alpha \mathrm{H}(x, \alpha, \lambda) = x^\alpha \rho(x, \alpha) \mathrm{P}_1(\lambda) + \lambda x^{\alpha+1} \rho_1(x, \alpha) \mathrm{P}_2(\lambda) + \ldots \\ + \lambda^{n-1} x^{\alpha+n-1} \rho_{n-1}(x, \alpha) \mathrm{P}_n(\lambda) + \lambda^n x^{\alpha+n} \mathrm{R}_n(x, \alpha, \lambda). \end{cases}
$$

Nous déduisons comme auparavant, de ces formules, que l'on a

$$
x^{\alpha_0} \mathrm{H}\left(x, \alpha_0, \frac{1}{c}\right) = x^{\alpha_0} \mathrm{H}\left(x, \alpha_0, \frac{1}{c_k}\right) = x^{\alpha_0 + k} \mathrm{S}_k\left(x, \alpha_0, \frac{1}{c_k}\right),
$$

à un multiplicateur constant près.

Soit j le prochain des entiers moindres que k.

Nous avons, en supposant $n - 1 > k$,

$$
\text{(C)} \quad \begin{cases} x^\alpha \mathrm{H}(x, \alpha, \lambda) = x^\alpha \rho(x, \alpha) \mathrm{P}_1(\lambda) + \ldots + \lambda^{h-1} x^{\alpha+h-1} \rho_{h-1}(x, \alpha) \mathrm{P}_h(\lambda) \\ \quad + \lambda^h x^{\alpha+h} \rho_h(x, \alpha) \mathrm{P}_{h+1}(\lambda) + \ldots + \lambda^{i-1} x^{\alpha+i-1} \rho_{i-1}(x, \alpha) \mathrm{P}_i(\lambda) \\ \quad + \lambda^i x^{\alpha+i} \rho_i(x, \alpha) \mathrm{P}_{i+1}(\lambda) + \ldots + \lambda^{j-1} x^{\alpha+j-1} \rho_{j-1}(x, \alpha) \mathrm{P}_j(\lambda) \\ \quad + \lambda^j x^{\alpha+j} \rho_j(x, \alpha) \mathrm{P}_{j+1}(\lambda) + \ldots + \lambda^{k-1} x^{\alpha+k-1} \rho_{k-1}(x, \alpha) \mathrm{P}_k(\lambda) \\ \quad + \lambda^k x^{\alpha+k} \rho_k(x, \alpha) \mathrm{P}_{k+1}(\lambda) + \ldots + \lambda^{n-1} x^{\alpha+n-1} \rho_{n-1}(x, \alpha) \mathrm{P}_n(\lambda) \\ \quad + \lambda^n x^{\alpha+n} \mathrm{R}_n(x, \alpha, \lambda). \end{cases}
$$

On voit que les termes avant $\lambda^j x^{\alpha+j} \rho_j(x, \alpha) \mathrm{P}_{j+1}(\lambda)$ contiennent, pour $\alpha = \alpha_0$, le facteur $(1 - \lambda c)^2$; par conséquent, leurs dérivées par rapport à α deviennent nulles pour $\alpha = \alpha_0$, $\lambda = \frac{1}{c}$. D'autre part, ce terme, que nous venons d'écrire, contient $1 - \lambda c$ seulement comme facteur simple; le même a lieu pour tous les termes jusqu'à

$$
\lambda^k x^{\alpha+k} \rho_k(x, \alpha) \mathrm{P}_{k+1}(\lambda)
$$

exclusivement; à partir de ce terme, il n'y a plus de facteur $1 - \lambda c$. Nous voyons donc que la fonction

$$
\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}\left\{x^\alpha \mathrm{H}(x, \alpha, \lambda)\right\}\right]_{\alpha = \alpha_0,\ \lambda = \frac{1}{c}}
$$

est de la forme

$$
x^{\alpha+j} \mathrm{F}(x) + x^{\alpha+k} \log x \mathrm{F}_1(x)
$$

où les fonctions $\mathrm{F}(x)$, $\mathrm{F}_1(x)$ satisfont à la condition (D).

Soit, en général, s un entier quelconque du groupe, de rang $p+1$ à partir de k. Les termes dans (C) avant $\lambda^s x^{\alpha+s}\rho_s(x,\alpha)P_{s+1}(\lambda)$ contiennent $(1-\lambda c)^{p+1}$ en facteur pour $\alpha=\alpha_0$; par conséquent, leurs dérivées $p^{\text{ièmes}}$ par rapport à α sont nulles pour

$$\alpha=\alpha_0, \quad \lambda=\frac{1}{c}.$$

Ce terme lui-même contiendra seulement $(1-\lambda c)^p$ en facteur, et sa dérivée $p^{\text{ième}}$ ne sera pas nulle. En continuant de la sorte, nous voyons que *la fonction*

$$\left[\frac{\partial^p}{\partial\alpha^p}\left\{x^\alpha H(x,\alpha,\lambda)\right\}\right]_{\alpha=\alpha_0;\ \lambda=\frac{1}{c}}$$

est de la forme

$$x^{\alpha_0+s}\varphi_0(x,\alpha_0)+\ldots+x^{\alpha_0+j}\varphi_{p-1}(x,\alpha_0)(\log x)^{p-1}+x^{\alpha_0+k}\varphi_p(x,\alpha_0)(\log x)^p$$

où les fonctions $\varphi_0(x,\alpha_0), \ldots, \varphi_p(x,\alpha_0), \ldots$ *satisfont à la condition* (D).

Par conséquent, *si l'équation*

$$\int_0^1 t^\alpha K(t)\,dt=\frac{1}{\lambda}$$

a des racines $\alpha=\beta+h, \beta+i, \ldots, \beta+r, \ldots, \beta+j, \beta+k$, *les* $h, i, \ldots, r, \ldots, j, k$ *étant des entiers arrangés dans l'ordre de grandeur croissante, dont le nombre est* l, *et si* $p+1$ *est le rang d'un entier quelconque* s *du groupe, à partir de* k, *l'équation homogène*

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^1 K(x,t)\varphi(tx)\,dt$$

admet les l *solutions*

$$\varphi(x)=\left[\frac{\partial^p}{\partial\alpha^p}\left\{x^\alpha H(x,\alpha,\lambda)\right\}\right]_{\alpha=\beta} \qquad (p=0, 1, 2, \ldots, l-1)$$

qui sont de la forme suivante :

$$x^{\beta+s}\varphi_0(x,\beta)+\ldots+x^{\beta+j}\varphi_{p-1}(x,\beta)(\log x)^{p-1}+x^{\beta+k}\varphi_p(x,\beta)(\log x)^p,$$

où les fonctions $\varphi_0(x,\beta), \ldots, \varphi_p(x,\beta), \ldots$ *satisfont à la condition* (D).

Nous supposons que l'on ait pour tout s *du groupe*

$$\int_0^1 t^{\beta+s}(\log t)K(t)\,dt \neq 0.$$

[**11**] Si l'on prend, maintenant, $p \geqslant l$ dans la formule

$$(\mathrm{E}') \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^p \Phi(x)}{\partial \alpha^p} = \left[\dfrac{\partial^p \mathrm{P}(\lambda)}{\partial \alpha^p} + p \log x \dfrac{\partial^{p-1} \mathrm{P}(\lambda)}{\partial \alpha^{p-1}} + \ldots + \mathrm{P}(\lambda)(\log x)^p \right] x^\alpha \psi(x) \\ \qquad + \lambda \displaystyle\int_0^1 \mathrm{K}(x, t) \dfrac{\partial^p \Phi(tx)}{\partial \alpha^p}, \end{cases}$$

la dérivée $\dfrac{\partial_p \mathrm{P}(\lambda)}{\partial \alpha^p}$ ne devient plus égale à zéro pour $\alpha = \alpha_0$, $\lambda = \dfrac{1}{c}$. En mettant $p = l$, nous voyons que la fonction

$$w(x) = \left[\frac{\partial^l}{\partial \alpha^l} \left\{ x^\alpha \mathrm{H}(x, \alpha, \lambda) \right\} \right]_{\alpha = \alpha_0,\ \lambda = \frac{1}{c}}$$

est une solution de l'équation

$$w(x) = x^{\alpha_0} \psi(x) \left\{ \frac{\partial^l \mathrm{P}(\lambda)}{\partial \alpha^l} \right\}_{\substack{\alpha = \alpha_0 \\ \lambda = \frac{1}{c}}} + \frac{1}{c} \int_0^1 \mathrm{K}(x, t) w(tx) \, dt.$$

Par conséquent, *la fonction*

$$\varphi(x) = \frac{\dfrac{\partial^l}{\partial \alpha^l} \left\{ x^\alpha \mathrm{H}(x, \alpha, \lambda) \right\}}{\dfrac{\partial^l}{\partial \alpha^l} \mathrm{P}(\lambda)}$$

est la solution de l'équation

$$\varphi(x) = x^\alpha \psi(x) + \lambda \int_0^1 \mathrm{K}(x, t) \varphi(tx) \, dt$$

dans le cas singulier où l'on a

$$\lambda = \frac{1}{c_h} = \frac{1}{c_i} = \ldots = \frac{1}{c_k},$$

l étant le nombre des entiers $h, i, \ldots, k$.

En mettant, dans (E'), $p = l + 1,\ l + 2, \ldots,$ on trouve, par des éliminations successives, la solution de l'équation

$$\varphi(x) = x^\alpha (\log x)^s \psi(x) + \lambda \int_0^1 \mathrm{K}(x, t) \varphi(tx) \, dt$$

dans le même cas singulier.

[**12**] Supposons, enfin, *que l'on ait*

$$c_h = c_i = \ldots = c_k = c,$$

et que l'on ait, en même temps,

$$\frac{\partial c_h}{\partial \alpha} = \frac{\partial^2 c_h}{\partial \alpha^2} = \dots = \frac{\partial^{r_h - 1} c_h}{\partial \alpha^{r_h - 1}} = 0; \qquad \frac{\partial^{r_h} c_h}{\partial \alpha^{r_h}} \neq 0,$$
$$\frac{\partial c_i}{\partial \alpha} = \frac{\partial^2 c_i}{\partial \alpha^2} = \dots = \frac{\partial^{r_i - 1} c_i}{\partial \alpha^{r_i - 1}} = 0; \qquad \frac{\partial^{r_i} c_i}{\partial \alpha^{r_i}} \neq 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots \qquad \dots\dots$$
$$\frac{\partial c_k}{\partial \alpha} = \frac{\partial^2 c_k}{\partial \alpha^2} = \dots = \frac{\partial^{r_k - 1} c_k}{\partial \alpha^{r_k - 1}} = 0; \qquad \frac{\partial^{r_k} c_k}{\partial \alpha^{r_k}} \neq 0.$$

Alors on voit facilement que toutes les dérivées par rapport à α de la fonction

$$(1 - \lambda c_h)(1 - \lambda c_i) \dots (1 - \lambda c_k)$$

jusqu'à la $(l - 1 + r_h + r_i + \dots + r_k)^{\text{ième}}$ inclusivement, deviennent nulles pour

$$\alpha = \alpha_0, \ \lambda = \frac{1}{c},$$

tandis que la $(l + r_h + r_i + \dots + r_k)^{\text{ième}}$ dérivée ne s'annule pas pour ces valeurs, l étant, comme auparavant, le nombre des entiers $h, i, \dots, k$. En effet, dans chaque terme de toutes les dérivées jusqu'à la $(l - 1 + r_h + r_i + \dots + r_k)^{\text{ième}}$ inclusivement, il y aura ou bien un facteur $1 - \lambda c_s$, ou bien un facteur $\frac{\partial^p c_s}{\partial \alpha^p}$, p étant moindre que r_s; et dans la $(l + r_h + r_i + \dots + r_k)^{\text{ième}}$ dérivée il y a le seul terme

$$(-1)^l \lambda^l \frac{\partial^{r_h} c_h}{\partial \alpha^{r_h}} \frac{\partial^{r_i} c_i}{\partial \alpha^{r_i}} \dots \frac{\partial^{r_k} c_k}{\partial \alpha^{r_k}}$$

qui ne devient pas nul.

En raisonnant de même qu'auparavant sur la formule (E'), nous voyons que si l'on a

$$p \leqslant l - 1 + r_h + r_i + \dots + r_k,$$

les fonctions

$$\left[\frac{\partial^p}{\partial \alpha^p}\left\{x^\alpha \mathrm{H}(x, \alpha, \lambda)\right\}\right]_{\alpha = \alpha_0, \ \lambda = \frac{1}{c}}$$

sont des solutions de l'équation homogène

$$u(x) = \frac{1}{c} \int_0^1 \mathrm{K}(x, t) u(tx) \, dt.$$

On a, en effet,

$$\left\{\frac{\partial^p \mathrm{P}(\lambda)}{\partial \alpha^p}\right\}_{\substack{\alpha = \alpha_0 \\ \lambda = \frac{1}{c}}} = \left\{\frac{\partial^{p-1} \mathrm{P}(\lambda)}{\partial \alpha^{p-1}}\right\}_{\substack{\alpha = \alpha_0 \\ \lambda = \frac{1}{c}}} = \dots = \left\{\mathrm{P}(\lambda)\right\}_{\substack{\alpha = \alpha_0 \\ \lambda = \frac{1}{c}}} = 0.$$

Nous déduisons de la formule C que ces fonctions sont de la forme suivante :

$$\begin{aligned} & x^{\alpha+s}\Big[\varphi_0(x,\alpha_0)+\log x\,\varphi_1(x,\alpha_0)+\ldots+(\log x)^q\varphi_q(x,\alpha_0)\Big] \\ & +x^{\alpha+\sigma}\Big[(\log x)^{q+1}\varphi_{q+1}(x,\alpha_0)+\ldots+(\log x)^{q+r_\sigma-1}\varphi_{q+r_\sigma-1}(x,\alpha_0)\Big] \\ & +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

s étant un entier quelconque du groupe, et σ l'entier plus grand voisin à s. Le nombre q peut prendre les valeurs $0, 1, 2, \ldots (r_s-1)$; et les fonctions $\varphi_0(x,\alpha_0)$, $\varphi_1(x,\alpha_0)$, ... satisfont à la condition (D). Il est peut-être nécessaire d'ajouter que ces fonctions ne restent pas les mêmes lorsqu'on change les entiers s ou q.

Par conséquent, *si l'équation*

$$\int_0^1 t^\alpha \mathrm{K}(t)\,dt=\frac{1}{\lambda}$$

admet les racines $\beta+h, \ldots, \beta+s, \beta+\sigma, \ldots, \beta+k$, *les* $h, \ldots, s, \sigma, \ldots, k$ *étant des entiers rangés dans l'ordre de grandeur croissante, et si l'on a en même temps*

$$\int_0^1 t^{\beta+h}\log t\,\mathrm{K}(t)\,dt=\int_0^1 t^{\beta+h}(\log t)^2\mathrm{K}(t)\,dt=\ldots=\int_0^1 t^{\beta+h}(\log t)^{r_h-1}\mathrm{K}(t)\,dt=0;$$

$$\int_0^1 t^{\beta+h}(\log t)^{r_h}\mathrm{K}(t)\,dt \neq 0,$$

. . . .

$$\int_0^1 t^{\beta+k}\log t\,\mathrm{K}(t)\,dt=\int_0^1 t^{\beta+k}(\log t)^2\mathrm{K}(t)\,dt=\ldots=\int_0^1 t^{\beta+k}(\log t)^{r_k-1}\mathrm{K}(t)\,dt=0;$$

$$\int_0^1 t^{\beta+k}(\log t)^{r_k}\mathrm{K}(t)\,dt \neq 0,$$

alors l'équation homogène

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^1 \mathrm{K}(x,t)\varphi(tx)\,dt$$

admet les solutions

$$\left[\frac{\partial^p}{\partial\alpha^p}\left\{x^\alpha \mathrm{H}(x,\alpha,\lambda)\right\}\right]_{\alpha=\beta} \qquad \left[\begin{matrix} p=0,1,2,\ldots \\ (l-1+r_h+r_i+\ldots+r_k)\end{matrix}\right],$$

l étant le nombre des entiers $h, i, \ldots, k$.

On peut mettre ces solutions sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & x^{\beta+s}\Big[\varphi_0(x,\beta)+\log x\,\varphi_1(x,\beta)+\ldots+(\log x)^q\varphi_q(x,\beta)\Big] \\ & +x^{\beta+\sigma}\Big[(\log x)^{q+1}\varphi_{q+1}(x,\beta)+\ldots+\log x)^{q+r_\sigma-1}\varphi_{q+r_\sigma-1}(x,\beta)\Big] \\ & +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

où les fonctions $\varphi_0(x, \beta)$, $\varphi_1(x, \beta)$, ... *satisfont à la condition* (D); *s est un entier quelconque du groupe et q peut prendre les valeurs* $0, 1, 2, \ldots (r_s - 1)$. *Les fonctions* $\varphi_0(x, \beta)$, $\varphi_1(x, \beta)$, ... *changent avec s et q.*

[**13**] Posons maintenant $\nu = l + r_h + r_i + \ldots + r_k$, et mettons $p = \nu$ dans la formule (E'). Nous savons que la dérivée $\frac{\partial^\nu P(\lambda)}{\partial \alpha^\nu}$ ne s'annule pas pour $\alpha = \alpha_0$, $\lambda = \frac{1}{c}$. Par conséquent, la fonction

$$u(x) = \left[\frac{d^\nu}{\partial \alpha^\nu} x^\alpha \mathrm{H}(x, \alpha, \lambda)\right]_{\substack{\alpha = \alpha_0 \\ \lambda = \frac{1}{c}}}$$

est une solution de l'équation

$$u(x) = x^{\alpha_0} \psi(x) \left\{ \frac{\partial^\nu P(\lambda)}{\partial \alpha^\nu} \right\}_{\substack{\alpha = \alpha_0 \\ \lambda = \frac{1}{c}}} + \frac{1}{c} \int_0^1 \mathrm{K}(x, t) u(tx)\, dt.$$

On en déduit que *la fonction*

$$\varphi(x) = \frac{\dfrac{\partial^{l+r_h+r_i+\ldots+r_k}}{\partial \alpha^{l+r_h+r_i+\ldots+r_k}} \left\{ x^\alpha \mathrm{H}(x, \alpha, \lambda) \right\}}{\dfrac{\partial^{l+r_h+r_i+\ldots+r_k}}{\partial \alpha^{l+r_h+r_i+\ldots+r_k}} \left\{ \mathrm{P}(\lambda) \right\}}$$

est une solution de l'équation

$$\varphi(x) = x^\alpha \psi(x) + \lambda \int_0^1 \mathrm{K}(x, t) \varphi(tx)\, dt,$$

dans le cas singulier où l'on a

$$\lambda = \frac{1}{c_h} = \frac{1}{c_i} = \ldots = \frac{1}{c_k},$$

et, en même temps,

$$\frac{\partial c_h}{\partial \alpha} = \frac{\partial^2 c_h}{\partial \alpha^2} = \ldots = \frac{\partial^{r_h - 1} c_h}{\partial \alpha^{r_h - 1}} = 0; \quad \frac{\partial^{r_h} c_h}{\partial \alpha^{r_h}} \neq 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial c_k}{\partial \alpha} = \frac{\partial^2 c_k}{\partial \alpha^2} = \ldots = \frac{\partial^{r_k - 1} c_k}{\partial \alpha^{r_k - 1}} = 0; \quad \frac{\partial^{r_k} c_k}{\partial \alpha^{r_k}} \neq 0,$$

l étant le nombre des entiers h, i, ..., k.

En mettant $p = \nu + 1, \nu + 2, \ldots$, on trouve par des éliminations successives la solution de l'équation

$$\varphi(x) = x^\alpha (\log x)^s \psi(x) + \lambda \int_0^1 \mathrm{K}(x, t) \varphi(tx)\, dt$$

dans le même cas singulier.

[**14**] Nous avons maintenant achevé la discussion de l'équation

$$\varphi(x) = x^{\alpha}\psi(x) + \lambda \int_0^1 K(x, t)\varphi(tx)\,dt$$

où les fonctions $\psi(x)$, $K(x, t)$ satisfont à la condition (D). Nous avons trouvé une solution dans tous les cas, et puisqu'on peut évidemment y ajouter une fonction linéaire des solutions de l'équation homogène, nous avons démontré *qu'il y a une solution générale dépendant linéairement d'autant de constantes arbitraires qu'il y a de racines de l'équation en* β :

$$\int_0^1 t^{\beta} K(t)\,dt = \frac{1}{\lambda},$$

chaque racine étant comptée avec son degré de multiplicité.

Nous verrons plus loin que, sous des hypothèses très larges sur $K(t)$, *cette solution est la plus générale que l'on puisse trouver.*

L'application au *problème généralisé d'Abel*

$$\int_0^1 G(x, t) f(tx)\,dt = x^{\alpha} g(x)$$

est immédiate. Nous supposons que *la partie réelle de* α *soit supérieure à* -1, *que l'on n'ait pas* $G(1) = 0$, *que la dérivée* $\frac{\partial G}{\partial t}$ *existe, et que les fonctions* $G(x, t)$, $\frac{\partial G}{\partial t}$ et $g(x)$ *satisfassent à la condition* (D).

En mettant

$$\varphi(x) = \int_0^x f(x)\,dx,$$

et en multipliant l'équation par x, on trouve, après une intégration par parties,

$$G(x, 1)\varphi(x) - \int_0^1 \frac{\partial G(x, t)}{\partial t}\varphi(tx)\,dt = x^{\alpha+1} g(x),$$

ou bien

$$\varphi(x) = x^{\alpha+1}\psi(x) + \int_0^1 K(x, t)\varphi(tx)\,dt,$$

où l'on pose

$$\psi(x) = \frac{g(x)}{G(x, 1)},$$

$$K(x, t) = \frac{\frac{\partial}{\partial t} G(x, t)}{G(x, 1}.$$

On voit que les fonctions $\psi(x)$ et $K(x, t)$ satisfont à la condition (D); par conséquent, *la formule* (A), *si l'on y met* $\lambda = 1$ *et* $\alpha + 1$ *au lieu de* α, *nous donne, en général, la solution de cette équation. Nous aurons* $f(x) = \frac{d\varphi}{dx}$.

[**15**] Les solutions de *l'équation*

$$\int_0^1 G(x, t) f(tx)\, dt = 0$$

s'obtiennent par une différentiation de celles de l'équation homogène

$$\varphi(x) = \int_0^1 K(x, t)\varphi(tx)\, dt.$$

Celles-ci sont de la forme

$$\varphi(x) = x^\beta \theta(x),$$

où l'on a $\theta(0) \neq 0$ et $\theta(x)$ satisfait à la condition (D); β *est une racine de l'équation*

$$\int_0^1 t^\beta K(t)\, dt = 0,$$

laquelle se réduit, par une intégration par parties, *à la suivante :*

$$\int_0^1 t^{\beta-1} G(t)\, dt = 0.$$

Lorsque β est une racine multiple de cette équation, ou bien lorsqu'il y a des racines qui diffèrent par un entier, il y aura des solutions logarithmiques.

En tout cas, il y aura autant de solutions de l'équation

$$\int_0^1 G(x, t) f(tx)\, dt = 0,$$

qu'il y a de racines de l'équation en α

$$\int_0^1 t^\alpha G(t)\, dt = 0,$$

chaque racine étant comptée avec son degré de multiplicité.

La formule (A) ne s'applique pas à l'équation

$$\int_0^1 G(x, t) f(tx)\, dt = x^\alpha g(x)$$

dans *le cas singulier où l'on a*

$$\int_0^1 t^{\alpha+n+1} K(t)\, dt = 1,$$

ou bien

$$\int_0^1 t^{\alpha+n} G(t)\, dt = 0,$$

n étant un entier positif ou zéro. Les complications sont encore plus grandes lorsque cette égalité a lieu pour plusieurs entiers n, et aussi lorsque quelques dérivées successives, par rapport à α, de la fonction $\int_0^1 t^{\alpha+n} G(t)\,dt$, sont nulles. Nous avons donné des méthodes pour obtenir, dans chaque cas, une solution logarithmique.

Pour que nous trouvions une solution $f(x)$, il faut que la fonction $\varphi(x)$ ait une dérivée. Nous sommes certains d'avoir une solution dans le cas où les fonctions $G(x, t)$, $\dfrac{\partial G(x,t)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial G(x,t)}{\partial t}$, $g'(x)$ satisfont à la condition (D). En effet, en multipliant l'équation d'Abel par x, et en différentiant ensuite par rapport à x, nous obtenons

$$G(x, 1) f(x) + \int_0^1 \left[x \frac{\partial G(x,t)}{\partial t} - t \frac{\partial G(x,t)}{\partial t} \right] f(tx) = x^\alpha \left\{ x g'(x) + (\alpha + 1) g(x) \right\}.$$

De là nous obtenons directement $f(x)$. Il est aisé de voir que les cas singuliers sont les mêmes qu'auparavant.

[**16**] On résout par la même méthode *l'équation*

$$\varphi(x) = x^\alpha \psi(x) + \lambda \int_\mu^\omega K(x, t) \varphi(tx)\,dt$$

avec les mêmes hypothèses sur $\psi(x)$ et $K(x, t)$; on a aussi $|\mu| \leqslant 1$, $|\omega| \leqslant 1$, et la partie réelle de α est plus grande que -1 si μ et ω ont des signes opposés. Pour x négatif, on prend $x^\alpha = e^{\alpha(\log|x| + i\pi)}$ et l'on pose toujours $(tx)^\alpha = t^\alpha x^\alpha$.

Ici nous mettons :

$$c_n = \int_\mu^\omega t^{\alpha+n} K(t)\,dt.$$

On démontre de la même façon qu'auparavant que si l'on pose

$$\Phi_n(x) = \varphi(x)(1 - \lambda c_0)(1 - \lambda c_1) \dots (1 - \lambda c_{n-1}),$$

on trouve

$$\Phi_n(x) = x^\alpha \left[\xi_0(x) + \lambda \xi_1(x) + \dots + \lambda^{n-1} \xi_{n-1}(x) \right] + \lambda^n u_n(x)$$

où la fonction $u_n(x)$ satisfait à une équation de la forme

$$u_n(x) = x^{\alpha+n} \psi_n(x) + \lambda \int_\mu^\omega K(x, t) \varphi(tx)\,dt.$$

Nous avons dans tous les cas

$$\int_\mu^\omega |t^{\alpha+n}|\,dt < q \left[\int_0^{|\omega|} t^{\gamma+n}\,dt + \int_0^{|\nu|} t^{\gamma+n}\,dt \right],$$

où l'on a $\alpha = \gamma + i\delta$, et q est la plus grande des quantités 1 et $e^{-\pi\delta}$. Cela nous donne

$$\int_{\mu}^{\omega} |t^{\alpha+n}|\, dt < \frac{2q\xi^{\gamma+n+1}}{\gamma+n+1},$$

ξ étant la plus grande des quantités $|\nu|$ et $|\omega|$.

De là nous voyons facilement que $u_n(x)$ est égal à une série des puissances de λ dont le rayon de convergence augmente indéfiniment avec n, et nous arrivons comme auparavant à *la solution*

$$\varphi(x) = \frac{x^{\alpha}\mathrm{I}(x, \alpha, \lambda)}{(1-\lambda c_0)e^{\lambda c_0}(1-\lambda c_1)e^{\lambda c_1}\ldots(1-\lambda c_n)e^{\lambda c_n}\ldots},$$

la fonction $\mathrm{I}(x, \alpha, \lambda)$ *étant une fonction entière de* λ. Les facteurs exponentiels dans le dénominateur ne sont pas nécessaires si l'on a $\xi < 1$.

La recherche des solutions dans les cas singuliers, et des solutions de l'équation homogène, est exactement analogue à celle que nous avons déjà faite, et il n'y a pas besoin de la répéter.

II.

[**1**] Nous allons étudier dans cette section *l'équation*

$$\varphi(x) = x^{\alpha}\psi(x) + \lambda\left\{h(x)\varphi(\mu x) + \int_{\mu}^{1}\mathrm{K}(x, t)\varphi(tx)\,dt\right\},$$

où l'on a $h(0) = c$, $\psi(0) \neq 0$, $|\mu| < 1$, *et* $\alpha = a_1 + ia_2$, a_1 *étant supérieur à* -1 *si* μ *est négatif; on suppose aussi que les fonctions* $h(x)$, $\psi(x)$, $\mathrm{K}(x, t)$ *satisfassent à la condition* (D).

Si μ est positif, il suffit de considérer seulement les valeurs positives de x; si μ est négatif, il faut considérer les valeurs positives et négatives. Nous prenons pour x négatif la détermination

$$x^{\alpha} = e^{\alpha(\log|x| + i\pi)},$$

et nous mettons toujours $\qquad (tx)^{\alpha} = t^{\alpha}x^{\alpha}.$

Soient $|\psi(x)| < \mathrm{M}$; $|h(x)| < a$; $|\mathrm{K}(x, t)| < \mathrm{K}$, M, a et K étant des constantes. Cherchons une solution sous la forme

$$\varphi(x) = x^{\alpha}\left\{\mathrm{B}_0(x) + \lambda\mathrm{B}_1(x) + \ldots + \lambda^n\mathrm{B}_n(x) + \ldots\right\}.$$

Nous trouvons, en égalant les coefficients des puissances de λ :

$$B_0(x) = \psi(x),$$
$$B_1(x) = \mu^{\alpha} h(x) B_0(\mu x) + \int_{\mu}^{1} K(x, t) t^{\alpha} B_0(tx)\, dt,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$B_n(x) = \mu^{\alpha} h(x) B_{n-1}(\mu x) + \int_{\mu}^{1} K(x, t) t^{\alpha} B_{n-1}(tx)\, dt,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Nous avons, par conséquent,

$$|B_0(x)| < M,$$

et nous trouvons, si μ est positif,

$$|B_1(x)| < \left[a\mu^{a_1} + K \int_{\mu}^{1} t^{a_1} dt \right] M$$
$$< \left(a\mu^{a_1} + \frac{K}{a_1 + 1} \right) M;$$

et si μ est négatif,

$$|B_1(x)| < \left[a|\mu|^{a_1} e^{-\pi a_2} + K(1 + e^{-\pi a_2}) \int_{0}^{1} t^{a_1} dt \right] M$$
$$< \left[a|\mu|^{a_1} e^{-\pi a_2} + \frac{K(1 + e^{-\pi a_2})}{1 + a_1} \right] M.$$

Donc, si ρ est la plus grande des quantités 1 et $e^{-\pi a_2}$, on a toujours :

$$B_1(x) < \rho \left(a|\mu|^{a_1} + \frac{2K}{1 + a_1} \right) M.$$

De là, on obtient en général

$$|B_n(x)| < \rho^n \left(a|\mu|^{a_1} + \frac{2K}{1 + a_1} \right)^n M.$$

Par conséquent, la série des puissances de λ

$$\varphi(x) = x^{\alpha} \left\{ B_0(x) + \lambda B_1(x) + \ldots + \lambda^n B_n(x) + \ldots \right\}$$

a un rayon de convergence au moins égal à

$$\frac{1}{\rho \left((a|\mu|^{a_1} + \frac{2K}{1 + a_1} \right)}$$

On voit que ce rayon augmente indéfiniment avec a_1.

[2] Posons maintenant

$$\zeta_r = c\mu^{r+\alpha} + \int_\mu^1 t^{r+\alpha} K(t)\,dt) \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots),$$

et supposons que nous n'ayons jamais $1 - \lambda\zeta_r = 0$.

En posant

$$\Phi_1(x) = \varphi(x)(1 - \lambda\zeta_0),$$

nous obtenons

$$\Phi_1(x) = x^\alpha \psi(x)(1 - \lambda\zeta_0) + \lambda \left\{ h(x)\Phi_1(\mu x) + \int_\mu^1 K(x, t)\Phi_1(tx)\,dt \right\},$$

d'où nous déduisons

$$\Phi_1(x) = x^\alpha \psi(x) + \lambda u_1(x),$$

$u_1(x)$ étant une solution de l'équation

$$u_1(x) = -\zeta_0 x^\alpha \psi(x) + \mu^\alpha x^\alpha h(x)\psi(\mu x) + \int_\mu^1 K(x, t) x^\alpha t^\alpha \psi(tx)\,dt$$
$$+ \lambda \left\{ h(x) u_1(\mu x) + \int_\mu^1 K(x, t) u_1(tx)\,dt \right\},$$

ou bien

$$u_1(x) = x^\alpha \theta_1(x) + \lambda \left\{ h(x) u_1(\mu x) + \int_\mu^1 K(x, t) u_1(tx)\,dt \right\},$$

où l'on a

$$\theta_1(x) = -\zeta_0 \psi(x) + \mu^\alpha h(x)\psi(\mu x) + \int_\mu^1 K(x, t) t^\alpha \psi(tx)\,dt.$$

Cela nous donne

$$\theta_1(0) = \psi(0) \left\{ -\zeta_0 + c\mu^\alpha + \int_\mu^1 t^\alpha K(t)\,dt \right\} = 0,$$

et la fonction $\theta_1(x)$ satisfait évidemment à la condition (D). Nous trouvons donc

$$u_1(x) = x^{\alpha+1} \psi_1(x) + \lambda \left\{ h(x) u_1(\mu x) + \int_\mu^1 K(x, t) u_1(tx)\,dt \right\},$$

où $\psi_1(x)$ satisfait à la condition (D). Il est clair que l'on peut continuer indéfiniment, comme dans la première section, ce procédé, et qu'en posant

$$\Phi_n(x) = \varphi(x)(1 - \lambda\zeta_0)(1 - \lambda\zeta_1) \ldots (1 - \lambda\zeta_{n-1}),$$

on trouve

$$\Phi_n(x = x^\alpha \left\{ \xi_0(x) + \lambda\xi_1(x) + \ldots + \lambda^{n-1}\xi_{n-1}(x) \right\} + \lambda^n u_n(x),$$

$u_n(x)$ étant une solution d'une équation de la forme

$$u_n(x) = x^{\alpha+n}\psi_n(x) + \lambda \left\{ h(x)u_n(\mu x) + \int_\mu^1 \mathrm{K}(x, t)u_n(tx)dt \right\},$$

où $\psi_n(x)$ satisfait à la condition (D).

Cette équation nous donne $u_n(x)$ en série de puissances de λ, dont le rayon de convergence est au moins égal à

$$\frac{1}{\rho\left(a|\mu|^{a_1+n} + \dfrac{2\mathrm{K}}{a_1+n+1}\right)}.$$

Ce rayon augmente indéfiniment avec n, et nous avons, par conséquent,

$$\Phi_n(x) = x^\alpha \left\{ \xi_0(x) + \lambda\xi_1(x) + \ldots + \lambda^n \xi_n(x) + \ldots \right\},$$

une série de puissances de λ dont le rayon de convergence augmente indéfiniment avec n.

Le produit infini

$$\mathrm{Q}(\lambda) = (1 - \lambda\zeta_0)e^{\lambda\zeta_0}(1 - \lambda\zeta_1)e^{\lambda\zeta_1} \ldots (1 - \lambda\zeta_n)e^{\lambda\zeta_n} \ldots$$

est une fonction entière de λ. On a, en effet,

$$\zeta_n = c\mu^{n+\alpha} + \int_\mu^1 t^{n+\alpha}\mathrm{K}(t)dt,$$

ce qui nous donne toujours

$$|\zeta_n| < \rho\left(a|\mu|^{n+a_1} + \frac{2\mathrm{K}}{n+a_1+1}\right),$$

et, par conséquent, pour une quantité quelconque Γ supérieure à $2\rho\mathrm{K}$, on peut trouver un nombre N tel que l'on ait, pour $n \geqslant \mathrm{N}$,

$$|\zeta_n| < \frac{\Gamma}{n}.$$

Cela démontre la convergence de $\mathrm{Q}(\lambda)$ pour toute valeur de λ.

Il n'y a pas besoin maintenant de répéter le raisonnement, exactement pareil à celui de la première section, par lequel on arrive au théorème suivant :

L'équation

$$\varphi(x) = x^\alpha\psi(x) + \lambda \left\{ h(x)\varphi(\mu x) + \int_\mu^1 \mathrm{K}(x, t)\varphi(tx)dt \right\},$$

où l'on a $\psi(0) \neq 0$, $|\mu| < 1$, $h(0) = c$, $\alpha = a_1 + ia_2$, a_1 *étant supérieur à* -1 *si* μ *est négatif, et l'on suppose que les fonctions* $\psi(x)$, $h(x)$, $\mathrm{K}(x, t)$ *satisfassent à la condition* (D), *admet une solution de la forme*

$$\text{(A')} \qquad \varphi(x) = \frac{x^\alpha \mathrm{R}(x, \alpha, \lambda)}{\mathrm{Q}(\lambda)},$$

$R(x, \alpha, \lambda)$ *étant une fonction entière de* λ, *et* $Q(\lambda)$ *étant la fonction entière*

$$Q(\lambda) = (1 - \lambda\zeta_0)e^{\lambda\zeta_0}(1 - \lambda\zeta_1)e^{\lambda\zeta_1} \dots (1 - \lambda\zeta_n)e^{\lambda\zeta_n} \dots,$$

en posant

$$\zeta_r = c\mu^{r+\alpha} + \int_\mu^1 t^{r+\alpha} K(t)\,dt \qquad (r = 0, 1, 2, \dots).$$

On doit avoir, bien entendu, $1 - \lambda\zeta_n \neq 0$, *pour tout* n.

[**3**] En mettant maintenant

$$Q_r(\lambda) = (1 - \lambda\zeta_r)e^{\lambda\zeta_r}(1 - \lambda\zeta_{r+1})e^{\lambda\zeta_{r+1}} \dots,$$
$$\psi(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n \theta_n(x),$$

nous trouvons, par les méthodes employées dans la section précédente, les deux formules suivantes analogues à (B) et (C)

$$\text{(B')} \quad \left\{ \begin{aligned} & x^\alpha R(x, \alpha, \lambda) = a_0 x^\alpha T_0(x, \alpha, \lambda) + a_1 x^{\alpha+1} T_1(x, \alpha, \lambda)(1 - \lambda\zeta_0)e^{\lambda\zeta_0} \\ & + \dots + a_{n-1} x^{\alpha+n-1} T_{n-1}(x, \alpha, \lambda)(1 - \lambda\zeta_0)e^{\lambda\zeta_0} \dots (1 - \lambda\zeta_{n-2})e^{\lambda\zeta_{n-2}} \\ & + x^{\alpha+n}\Gamma_n(x, \alpha, \lambda)(1 - \lambda\zeta_0)e^{\lambda\zeta_0} \dots (1 - \lambda\zeta_{n-1})e^{\lambda\zeta_{n-1}}; \end{aligned} \right.$$

$$\text{(C')} \quad \left\{ \begin{aligned} & x^\alpha R(x, \alpha, \lambda) = x^\alpha \tau(x, \alpha) Q_1(\lambda) + \lambda x^{\alpha+1} \tau_1(x, \alpha) Q_2(\lambda) + \dots \\ & + \lambda^{n-1} x^{\alpha+n-1} \tau_{n-1}(x, \alpha) Q_n(\lambda) + \lambda^n x^{\alpha+n} \Delta_n(x, \alpha, \lambda), \end{aligned} \right.$$

les fonctions

$$x^{\alpha+r} T_r(x, \alpha, \lambda), \qquad x^{\alpha+n}\Gamma_n(x, \alpha, \lambda), \qquad x^{\alpha+n}\Delta_n(x, \alpha, \lambda)$$

étant respectivement les numérateurs dans les solutions, données par la formule (A'), des équations suivantes pour $u_r(x)$, $v_n(x)$, $w_n(x)$,

$$u_r(x) = x^{\alpha+r} + \lambda \left\{ h(x) u_r(\mu x) + \int_\mu^1 K(x, t) u_r(tx)\,dt \right\} \qquad (r = 0, 1, 2, \dots),$$

$$v_n(x) = x^{\alpha+n}\theta_n(x) + \lambda \left\{ h(x) v_n(\mu x) + \int_\mu^1 K(x, t) v_n(tx)\,dt \right\},$$

$$w_n(x) = x^{\alpha+n}\psi_n(x, \alpha) + \lambda \left\{ h(x) w_n(\mu x) + \int_\mu^1 K(x, t) w_n(tx)\,dt \right\}.$$

Nous avons aussi une formule analogue à (E)

$$\text{(E}_1\text{)} \qquad \Phi(x) = x^\alpha \psi(x) Q(\lambda) + \lambda \left\{ h(x)\Phi(\mu x) + \int_\mu^1 K(x, t)\Phi(tx)\,dt \right\},$$

où $\Phi(x)$ est égal à la fonction entière de λ, $x^\alpha R(x, \alpha, \lambda)$. En différentiant la formule (E_1) p fois par rapport à α, nous trouvons une autre formule, analogue à (E′)

$$(E_1') \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^p \Phi(x)}{\partial \alpha^p} &= \left[\frac{\partial^p Q(\lambda)}{\partial \alpha^p} + p \log x \frac{\partial^{p-1} Q(\lambda)}{\partial \alpha^{p-1}} + \ldots + (\log x)^p Q(\lambda) \right] x^\alpha \psi(x) \\ &\quad + \lambda \left\{ h(x) \frac{\partial^p \Phi(\mu x)}{\partial \alpha^p} + \int_\mu^1 K(x, t) \frac{\partial^p \Phi(tx)}{\partial \alpha^p} dt \right\}. \end{aligned} \right.$$

Nous déduisons de toutes ces formules une foule de résultats analogues à celles de la section précédente. Nous les donnerons simplement, sans la démonstration, qui est exactement pareille à celle qui a été déjà faite.

1° *L'équation*

$$w(x) = x^\alpha (\log x)^p \psi(x) dx + \lambda \left\{ h(x) w(\mu x) + \int_\mu^1 K(x, t) w(tx) dt \right\}$$

admet une solution de la forme

$$w(x) = \frac{x^\alpha [V_0(x, \alpha, \lambda) + \log x\, V_1(x, \alpha, \lambda) + \ldots + (\log x)^p V_p(x, \alpha, \lambda)]}{\{Q(\lambda)\}^p},$$

les V étant des fonctions entières de λ qui satisfont à la condition (D).

2° *Si l'équation en α*

$$\zeta_0 = c\mu^\alpha + \int_\mu^1 t^\alpha K(t) dt = \frac{1}{\lambda}$$

admet les racines, $\alpha = \beta + h, \ldots, \beta + s, \beta + \sigma, \ldots, \beta + k$, *les* $h, \ldots, s, \sigma, \ldots, k$ *étant des entiers arrangés dans l'ordre de grandeur croissante, et si l'on a en même temps pour* $\alpha = \beta + s$ *(où s représente tout entier du groupe)*

$$\frac{\partial \zeta_0}{\partial \alpha} = \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial \alpha^2} = \ldots = \frac{\partial^{r_s - 1} \zeta_0}{\partial \alpha^{r_s - 1}} = 0; \qquad \frac{\partial^{r_s} \zeta_0}{\partial \alpha^{r_s}} \neq 0,$$

ou bien

$$\int_0^1 t^{\beta+s} \log t\, K(t) dt = \int_0^1 t^{\beta+s} (\log t)^2 K(t) dt = \ldots = \int_0^1 t^{\beta+s} (\log t)^{r_s - 1} K(t) dt = 0,$$
$$\int_0^1 t^{\beta+s} (\log t)^{r_s} K(t) dt \neq 0,$$

alors l'équation homogène

$$\varphi(x) = \lambda \left\{ h(x) \varphi(\mu x) + \int_\mu^1 K(x, t) \varphi(tx) dt \right\}$$

admet les solutions

$$\varphi(x) = \left[\frac{\partial^p}{\partial \alpha^p} \{ x^\alpha R(x, \alpha, \lambda) \} \right]_{\alpha = \beta} \qquad \left[\begin{matrix} p = 0, 1, 2, \ldots \\ (l - 1 + r_h + r_i + \ldots + r_k) \end{matrix} \right],$$

l étant le nombre des entiers $h, i, \ldots, k$.

On peut mettre ces solutions sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & x^{\beta+s}\Big[\varphi_0(x,\beta)+\log x\,\varphi_1(x,\beta)+\ldots+(\log x)^q\varphi_q(x,\beta)\Big] \\ & + x^{\beta+\sigma}\Big[(\log x)^{q+1}\varphi_{q+1}(x,\beta)+\ldots+(\log x)^{q+r_\sigma-1}\varphi_{q+r_\sigma-1}(x,\beta)\Big] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

où les fonctions $\varphi_0(x,\beta)$, $\varphi_1(x,\beta)$, ... *satisfont à la condition* (D); *s est un entier quelconque du groupe et q peut prendre les valeurs* o, 1, 2, ... r_{s-1}. *Les fonctions* $\varphi_0(x,\beta)$, $\varphi_1(x.\beta)$, ... *changent avec s et q.*

3° *La fonction*

$$\varphi(x)=\frac{\dfrac{\partial^\nu}{\partial\alpha^\nu}\Big\{x^\alpha R(x,\alpha,\lambda)\Big\}}{\dfrac{\partial^\nu}{\partial\alpha^\nu}\Big\{Q(\lambda)\Big\}},$$

où l'on pose $\nu=l+r_h+r_i+\ldots,+r_k$ *est une solution de l'équation*

$$\varphi(x)=x^\alpha\psi(x)+\lambda\Big\{h(x)\varphi(\mu x)+\int_\mu^1 K(x,t)\varphi(tx)\,dt\Big\},$$

dans le cas singulier où l'on a

$$\lambda=\frac{1}{\zeta_h}=\frac{1}{\zeta_i}=\ldots=\frac{1}{\zeta_k},$$

et en même temps

$$\frac{\partial\zeta_s}{\partial\alpha}=\frac{\partial^2\zeta_s}{\partial\alpha^2}=\ldots=\frac{\partial^{r_s-1}\zeta_s}{\partial\alpha^{r_s-1}}=0;\qquad \frac{\partial^{r_s}\zeta_s}{\partial\alpha^{r_s}}\neq 0,$$

où s représente tout entier du groupe, dont le nombre total est l.

On déduit par des éliminations successives la solution de l'équation

$$\varphi(x)=x^\alpha(\log x)^q\psi(x)+\lambda\Big\{h(x)\varphi(\mu x)+\int_\mu^1 K(x,t)\varphi(tx)\,dt\Big\}$$

dans le même cas singulier.

Le nombre s est limité, puisque les quantités ζ_n tendent vers zéro quand n croît indéfiniment. Les nombres r_h, ..., r_s, ..., r_k sont limités; autrement, par exemple, la fonction holomorphe de α

$$\zeta_s=c\mu^{\alpha+s}+\int_\mu^1 t^{\alpha+s}K(t)\,dt$$

serait une constante, qui devrait être zéro, et nous aurions :

$$c\mu^{\alpha+s} + \int_{\mu}^{1} t^{\alpha+s}\mathrm{K}(t)\,dt = 0,$$

$$c\mu^{\alpha+s+1} + \int_{\mu}^{1} t^{\alpha+s+1}\mathrm{K}(t)\,dt = 0,$$

d'où l'on déduit :

$$\int_{\mu}^{1} t^{\alpha+s}(t-\mu)\mathrm{K}(t)\,dt = 0.$$

Mais cela ne pourrait avoir lieu que dans le cas banal où l'on a $\mathrm{K}(t) \equiv 0$.

[**4**] Les résultats s'appliquent tout de suite au *problème d'Abel*,

$$\int_{\mu}^{1} \mathrm{G}(x, t) f(tx)\,dt = x^{\alpha} g(x).$$

En multipliant par x et en intégrant par parties nous trouvons

$$\mathrm{G}(x, 1)\varphi(x) - \mathrm{G}(x, \mu)\varphi(\mu x = x^{\alpha+1} g(x) + \int_{\mu}^{1} \frac{\partial \mathrm{G}(x, t)}{\partial t}\varphi(tx)\,dt,$$

ou bien

$$\varphi(x) = x^{\alpha+1}\psi(x) + \left\{ h(x)\varphi(\mu x) + \int_{\mu}^{1} \mathrm{K}(x, t)\varphi(tx)\,dt \right\},$$

où l'on pose :

$$\varphi(x) = \int^{x} f(x)\,dx,$$

$$\psi(x) = \frac{g(x)}{\mathrm{G}(x, 1)},$$

$$h(x) = \frac{\mathrm{G}(x, \mu)}{\mathrm{G}(x, 1)},$$

$$\mathrm{K}(x, t) = \frac{\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{G}(x, t)}{\mathrm{G}(x, 1)}.$$

On suppose que *les fonctions* $\mathrm{G}(x, t)$, $\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{G}(x, t)$, $g(x)$ *satisfassent à la condition* (D) *et que l'on n'ait pas* $\mathrm{G}(1) = 0$. Alors il est clair que les fonctions $\psi(x)$, $h(x)$, $\mathrm{K}(x, t)$ satisfont aussi à la condition (D).

La solution $\varphi(x)$ se trouve, en général, par la formule (A'), si l'on y met $\lambda = 1$, et $\alpha + 1$ au lieu de α. *Cette formule n'est plus applicable si l'on a*

$$c\mu^{\alpha+n+1} + \int_{\mu}^{1} t^{\alpha+n+1}\mathrm{K}(t)\,dt = 1,$$

ou bien, comme on le trouve en intégrant par parties

$$\int_{\mu}^{1} t^{\alpha+n}\,G(t)\,dt = 0,$$

pour un ou plusieurs entiers n (aussi pour $n = 0$*).*

Les complications deviennent plus grandes encore, *si quelques dérivées de la fonction,* $\int_{\mu}^{1} t^{\alpha+n}G(t)\,dt$, *sont nulles.* Nos méthodes nous fournissent, pour chacun de ces cas, des solutions logarithmiques.

Les solutions de *l'équation*

$$\int_{\mu}^{1} G(x,\, t)f(tx)\,dt = 0$$

s'obtiennent par une différentiation de celles de l'équation homogène

$$\varphi(x) = h(x)\varphi(\mu x) + \int_{\mu}^{1} K(x,\, t)\,\varphi(tx)\,dt$$

Celles-ci sont de la forme

$$\varphi(x) = x^{\beta}\,\theta(x),$$

où l'on a $\theta(0) \neq 0$ *et* $\theta(x)$ *satisfait à la condition* (D); β *est une racine de l'équation*

$$c\mu^{\beta} + \int_{\mu}^{1} K(t)\,t^{\beta}\,dt = 1,$$

ou bien

$$\int_{\mu}^{1} t^{\beta-1}\,K(t)\,dt = 0.$$

Lorsque β est une racine multiple de cette équation, ou bien lorsqu'il y a des racines qui diffèrent par un entier, il y a des solutions logarithmiques.

En tout cas, il y aura autant de solutions de l'équation

$$\int_{\mu}^{1} G(x,\, t)f(tx)\,dt = 0$$

qu'il y a de racines de l'équation

$$\int_{\mu}^{1} t^{\beta}\,G(t)\,dt = 0,$$

chaque racine étant comptée avec son degré de multiplicité.

Il faut toujours, bien entendu, que la dérivée $\dfrac{d\varphi}{dx}$ existe. Nous sommes certains de trouver des solutions $f(x)$ si $\frac{\partial G(x, t)}{\partial x}$, $g'(x)$ existent, et si les fonctions

$$G(x, t), \quad \frac{\partial G}{\partial x}, \quad \frac{\partial G}{\partial t}, \quad g'(x)$$

satisfont à la condition (D). En effet, en multipliant par x l'équation

$$\int_{\mu}^{1} G(x, t) f(tx)\, dt = x^{\alpha} g(x),$$

et en différentiant ensuite par rapport à x, on obtient l'équation

$$G(x, 1) f(x) - \mu G(x, \mu) f(\mu x) = x^{\alpha} \left\{ (\alpha + 1) g(x) + x g'(x) \right\} - \int_{\mu}^{1} \left\{ x \frac{\partial G}{\partial x} - t \frac{\partial G}{\partial t} \right\} f(tx)\, dt,$$

que l'on peut résoudre directement pour $f(x)$. On voit facilement que les cas singuliers sont les mêmes.

[5] On démontre de la même manière que *l'équation*

$$\varphi(x) = x^{\alpha} \psi(x) + \lambda \left\{ h(x) \varphi(\mu x) + \int_{a}^{b} K(x, t) \varphi(tx)\, dt \right\},$$

où l'on a $|a| \leqslant 1$, $|b| \leqslant 1$, *et les fonctions* $\psi(x)$, $h(x)$, $K(x, t)$ *satisfont à la condition* (D), *et l'on pose* $h(0) = c$, *et*

$$\omega_n = c \mu^{n+\alpha} + \int_{a}^{b} t^{n+\alpha} K(t)\, dt \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

admet la solution

$$\varphi(x) = \frac{x^{\alpha} X(x, \alpha, \lambda)}{(1 - \lambda\omega_0) e^{\lambda\omega_0} (1 - \lambda\omega_1) e^{\lambda\omega_1} \ldots (1 - \lambda\omega_n) e^{\lambda\omega_n} \ldots},$$

où $X(x, \alpha, \lambda)$ *est une fonction entière de* λ. Les facteurs exponentiels dans le dénominateur ne sont pas nécessaires si l'on a $|a| < 1$, $|b| < 1$.

La recherche des solutions de l'équation homogène et la discussion des cas singuliers sont les mêmes qu'auparavant.

[6] Ajoutons quelques remarques sur *l'équation*

$$\int_{-1}^{+1} G(x, t) f(tx)\, dt = x^{\alpha - 1} g(x),$$

où la partie réelle de α est positive ou zéro, et les fonctions $G(x, t)$, $g(x)$ *satisfont* aux mêmes conditions qu'auparavant. Cette équation est d'un type spécial et forme une généralisation de l'équation en $u(x)$,

$$\int_{-x}^{+x} K(x,\xi)\,u(\xi)\,d\xi = \varphi(x),$$

laquelle a été traitée par M. Volterra[1].

Rappelons que nous avons $x^\alpha = e^{\alpha(\log|x|+i\pi)}$ pour x négatif, et que nous mettons toujours $(tx)^\alpha = t^\alpha x^\alpha$.

En multipliant l'équation par x et en intégrant par parties, nous obtenons

$$G(x,1)\varphi(1x) - G(x,-1)\varphi(-1x) = x^\alpha g(x) + \int_{-1}^{+1} \frac{\partial}{\partial t} G(x,t)\,\varphi(tx)\,dt.$$

Nous cherchons une solution de la forme $x^\alpha\theta(x)$, où $\theta(x)$ satisfait à la condition (D); pour éviter la confusion, nous mettrons $x^\alpha\theta(x)$ au lieu de $\varphi(x)$.

Nous obtenons en divisant par x^α,

$$G(x,1)\theta(x) - (-1)^\alpha G(x,-1)\theta(-x) = g(x) + \int_{-1}^{+1} t^\alpha \frac{\partial}{\partial t} G(x,t)\,\theta(tx)\,dt,$$

ou bien

$$\eta(x)\theta(x) - \chi(x)\theta(-x) = g(x) + \int_{-1}^{+1} H(x,t)\,\theta(tx)\,dt, \tag{1}$$

en posant

$$\eta(x) = G(x,1); \quad \chi(x) = (-1)^\alpha G(x,-1); \quad H(x,t) = t^\alpha \frac{\partial}{\partial t} G(x,t).$$

En mettant $-x$ au lieu de x, nous trouvons

$$\eta(-x)\theta(-x) - \chi(-x)\theta(x) = g(-x) + \int_{-1}^{+1} H(-x,-t)\,\theta(tx)\,dt, \tag{2}$$

et l'élimination de $\theta(-x)$ entre (1) et (2) nous donne :

$$\left\{\begin{aligned} \Big[\eta(x)\eta(-x) - \chi(x)\chi(-x)\Big]\theta(x) &= g(x)\eta(-x) + g(-x)\chi(x) \\ &+ \int_{-1}^{+1} \Big[\eta(-x)H(x,t) + \chi(x)H(-x,-t)\Big]\theta(tx)\,dt. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Réciproquement, il est aisé de voir que nous pouvons déduire (1) et (2), en partant de (3).

---

[1] VOLTERRA, *Annali di Matematica*, loc. cit. (art. II). — IBID., *Théorie des équations intégrales*, p. 97.

L'équation (3) est du type suivant, que nous avons résolu à la fin de la section précédente,

$$\theta(x) = \psi(x) + \lambda \int_{-1}^{+1} \mathrm{K}(x,\ t)\,\theta(tx)\,dt,$$

où nous avons $\lambda = 1$, et l'on pose

$$\psi(x) = \frac{g(x)\eta(-x) + g(-x)\chi(x)}{\eta(x)\eta(-x) - \chi(x)\chi(-x)},$$

$$\mathrm{K}(x,t) = \frac{\eta(-x)\mathrm{H}(x,\ t) + \chi(x)\mathrm{H}(-x,\ -t)}{\eta(x)\eta(-x) - \chi(x)\chi(-x)}.$$

Pour appliquer notre méthode, il faut que nous ayons $\{\eta(0)\}^2 - \{\chi(0)\}^2 \neq 0$, c'est-à-dire $\eta(0) \neq \pm\chi(0)$.

Il faut donc que nous ayons

$$\mathrm{G}(1) \neq \pm(-1)^\alpha\,\mathrm{G}(-1).$$

Si cette inégalité a lieu, la formule obtenue à la fin de la section précédente donne, en général, la solution.

Les cas singuliers, dans lesquels la solution est logarithmique, arrivent lorsqu'on a

$$\int_{-1}^{+1} t^n \mathrm{K}(t)\,dt = 1,$$

n étant un entier quelconque ou zéro. Cette équation est identique à la suivante :

$$\begin{aligned}\{\mathrm{G}(1)\}^2 - (-1)^{2\alpha}\{\mathrm{G}(-1)\}^2 &= \eta(0)\int_{-1}^{+1} t^n \mathrm{H}(t)\,dt + \chi(0)\int_{-1}^{+1} t^n \mathrm{H}(-t)\,dt \\ &= \mathrm{G}(1)\int_{-1}^{+1} t^{n+\alpha}\frac{d}{dt}\mathrm{G}(t)\,dt - (-1)^{n+\alpha}\mathrm{G}(-1)\int_{-1}^{+1}(-t)^{n+\alpha}\frac{d}{dt}\mathrm{G}(-t)\,dt;\end{aligned}$$

d'où l'on trouve, en intégrant par parties :

$$\begin{aligned}&\{\mathrm{G}(1)\}^2 - (-1)^{2\alpha}\{\mathrm{G}(-1)\}^2 \\ &= \{\mathrm{G}(1)\}^2 - (-1)^{n+\alpha}\mathrm{G}(1)\mathrm{G}(-1) - (-1)^{2\alpha+2n}\{\mathrm{G}(-1)\}^2 + (-1)^{n+\alpha}\mathrm{G}(1)\mathrm{G}(-1) \\ &+ (n+\alpha)\left[\mathrm{G}(1)\int_{-1}^{+1} t^{\alpha+n-1}\mathrm{G}(t)\,dt + (-1)^{n+\alpha}\mathrm{G}(-1)\int_{-1}^{+1}(-t)^{\alpha+n-1}\mathrm{G}(-t)\,dt\right].\end{aligned}$$

De là, on trouve facilement :

$$\{\mathrm{G}(1) + (-1)^{n+\alpha}\mathrm{G}(-1)\}\int_{-1}^{+1} t^{\alpha+n-1}\mathrm{G}(t)\,dt = 0.$$

Par conséquent, puisque nous n'avons pas $G(1)+(-1)^{n+\alpha}G(-1)=0$, *les cas singuliers, à solution logarithmique, arrivent lorsqu'on a*

$$\int_{-1}^{+1} t^{\alpha+n}\,G(t)\,dt=0,$$

n étant $-1, 0, 1, 2, \ldots$. Il y a encore des complications si cette égalité a lieu pour plusieurs valeurs de n, ou si quelques dérivées successives de la fonction de α,

$$\int_{-1}^{+1} t^{\alpha+n}\,G(t)\,dt=0,$$

sont nulles.

On démontre de la même façon que *l'équation*

$$\int_{-1}^{+1} G(x, t) f(tx)\,dt=0$$

a autant de solutions linéairement indépendantes qu'il y a de racines de l'équation en α

$$\int_{-1}^{+1} t^{\alpha}\,G(t)\,dt=0.$$

Tous les résultats sont donc les mêmes; il nous a fallu seulement ajouter une nouvelle condition

$$G(1)\neq\pm(-1)^{\alpha}G(-1).$$

III.

[**1**] Jusqu'ici, nous avons supposé que les fonctions $K(x, t)$, $\psi(x)$ avaient des développements au moins asymptotiques suivant les puissances de x; nous allons maintenant nous affranchir de cette hypothèse.

Commençons par l'étude de l'*équation*

$$\varphi(x)=\psi(x)+\int_0^1 P_{r-1}(t)\,\varphi(tx)\,dt,$$

où la fonction $\psi(x)$ *est continue au voisinage de l'origine, sauf peut-être pour* $x=0$, *et l'on a*

$$|\psi(x)|<Mx^{\gamma},$$

M *étant une constante et* γ *une quantité supérieure à* -1, *et*

$$P_{r-1}(t)=b_1+b_2t+\ldots+b_rt^{r-1}.$$

Supposons pour le moment que les racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ de l'équation en α

$$1 - \frac{b_1}{1+\alpha} - \frac{b_2}{2+\alpha} - \ldots - \frac{b_r}{r+\alpha} = 0$$

soient toutes distinctes. On voit tout de suite que les solutions de l'équation homogène

$$\varphi(x) = \int_0^1 \mathrm{P}_{r-1}(t)\varphi(tx)\,dt$$

sont les fonctions x^{α_p}, les α_p étant les racines de l'équation en α dont la partie réelle est plus grande que -1.

[**2**] En posant

$$z(x) = \int_0^x \frac{(x-s)^{r-1}}{(r-1)!}\varphi(s)\,ds,$$

on voit que l'équation

$$\varphi(x) = \psi(x) + \int_0^1 \mathrm{P}_{r-1}(t)\varphi(tx)\,dt$$

peut s'écrire comme il suit :

$$\frac{d^r z}{dx^r} = \psi(x) + \frac{b_1}{x}\frac{d^{r-1}z}{dx} + b_2\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{d^{r-2}z}{dx^{r-2}}\right) + \ldots$$
$$+ b_{r-1}\frac{d^{r-2}}{dx^{r-2}}\left(\frac{1}{x}\frac{dz}{dx}\right) + b_r\frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}}\left(\frac{z}{x}\right).$$

Nous avons, en effet,

$$\int_0^1 t^q\varphi(tx)\,dt = \frac{d^q}{dx^q}\int_0^1 \theta(tx)\,dt,$$

où l'on a

$$\frac{d^q\theta}{dx^q} = \varphi(x).$$

Donc, si q est moindre que r, on peut mettre

$$\theta(x) = \frac{d^{r-q}z}{dx^{r-q}},$$

et l'on trouve, par conséquent,

$$\int_0^1 t^q\varphi(tx)\,dt = \frac{d^q}{dx^q}\left\{\frac{1}{x}\frac{d^{r-q-1}z}{dx^{r-q-1}}\right\}.$$

L'équation différentielle à laquelle nous sommes ramenés est du type de Fuchs, à coefficients constants.

L'équation sans $\psi(x)$

$$\frac{d^r z}{dx^r} = \frac{b_1}{x}\frac{d^{r-1} z}{dx^{r-1}} + b_2 \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{d^{r-2} z}{dx^{r-2}}\right) + \ldots + b_r \frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}}\left(\frac{z}{x}\right)$$

admet, on le voit facilement, les solutions

$$x^{r+\alpha_1}, \quad x^{r+\alpha_2}, \quad \ldots, \quad x^{r+\alpha_r}.$$

Cherchons par la méthode de variation des constantes une solution de l'équation avec $\psi(x)$ sous la forme

$$c_1 x^{r+\alpha_1} + c_2 x^{r+\alpha_2} + \ldots + c_r x^{r+\alpha_r}.$$

Cette méthode nous donne :

$$\begin{gathered}
c_1' x^{r+\alpha_1} + c_2' x^{r+\alpha_2} + \ldots + c_r' x^{r+\alpha_r} = 0, \\
c_1'(r+\alpha_1) x^{r-1+\alpha_1} + c_2'(r+\alpha_2) x^{r-1+\alpha_2} + \ldots + c_r'(r+\alpha_r) x^{r-1+\alpha_r} = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
c_1'(r+\alpha_1)(r-1+\alpha_1)\ldots(3+\alpha_1) x^{2+\alpha_1} + \ldots + c_r'(r+\alpha_r)\ldots(3+\alpha_r) x^{2+\alpha_r} = 0, \\
c_1'(r+\alpha_1)\ldots(2+\alpha_1) x^{1+\alpha_1} + \ldots + c_r'(r+\alpha_r)\ldots(2+\alpha_r) x^{1+\alpha_r} = \psi(x).
\end{gathered}$$

De ces équations, nous déduisons les suivantes :

$$\begin{gathered}
c_1' x^{\alpha_1} + c_2' x^{\alpha_2} + \ldots + c_r' x^{\alpha_r} = 0, \\
c_1' \alpha_1 x^{\alpha_1} + c_2' \alpha_2 x^{\alpha_2} + \ldots + c_r' \alpha_r x^{\alpha_r} = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
c_1' \alpha_1^{r-2} x^{\alpha_1} + c_2' \alpha_2^{r-2} x^{\alpha_2} + \ldots + c_r' \alpha_r^{r-2} x^{\alpha_r} = 0, \\
c_1' \alpha_1^{r-1} x^{\alpha_1} + c_2' \alpha_2^{r-1} x^{\alpha_2} + \ldots + c_r' \alpha_r^{r-1} x^{\alpha_r} = x^{-1}\psi(x).
\end{gathered}$$

On a donc, au signe près,

$$c_1' x^{\alpha_1} \begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_r \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{r-1}, & \alpha_2^{r-1}, & \ldots, & \alpha_r^{r-1} \end{vmatrix} = x^{-1}\psi(x) \begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ \alpha_2, & \alpha_3, & \ldots, & \alpha_r \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_2^{r-2}, & \alpha_3^{r-2}, & \ldots, & \alpha_r^{r-2} \end{vmatrix};$$

ce qui nous donne, encore au signe près,

$$c_1' x^{\alpha_1} = \frac{x^{-1}\psi(x)}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)\ldots(\alpha_1-\alpha_r)}.$$

Au moyen de la formule bien connue

$$\sum_{p=1}^{r} \frac{\alpha_p^{r-1}}{(\alpha_p-\alpha_1)(\alpha_p-\alpha_2)\ldots(\alpha_p-\alpha_{p-1})(\alpha_p-\alpha_{p+1})\ldots(\alpha_p-\alpha_r)} = 1,$$

nous voyons que l'égalité a lieu exactement.

[**3**] Nous avons aussi

$$H(\alpha) \equiv 1 - \frac{b_1}{1+\alpha} - \frac{b_2}{2+\alpha} - \ldots - \frac{b_r}{r+\alpha} = \frac{(\alpha-\alpha_1)(\alpha-\alpha_2)\ldots(\alpha-\alpha_r)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+r)},$$

d'où l'on obtient, en différentiant par rapport à α et en mettant ensuite $\alpha = \alpha_1$:

$$(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)\ldots(\alpha_1-\alpha_r) = (\alpha_1+1)(\alpha_1+2)\ldots(\alpha_1+r)H'(\alpha_1).$$

Cela nous donne, en général,

$$c'_p x^{\alpha_p} = \frac{x^{-1}\psi(x)}{(\alpha_p+1)(\alpha_p+2)\ldots(\alpha_p+r)H'(\alpha_p)},$$

d'où l'on déduit

$$c_p x^{\alpha_p} = \frac{x^{\alpha_p}\displaystyle\int_0^x y^{-1-\alpha_p}\psi(y)\,dy}{(\alpha_p+1)(\alpha_p+2)\ldots(\alpha_p+r)H'(\alpha_p)}$$

si la partie réelle de α_p est égale ou inférieure à -1, et

$$c_p x^{\alpha_p} = \frac{x^{\alpha_p}\displaystyle\int_a^x y^{-1-\alpha_p}\psi(y)\,dy}{(\alpha_p+1)(\alpha_p+2)\ldots(\alpha_p+r)H'(\alpha_p)}$$

si cette partie réelle est supérieure à -1, a étant une quantité positive.

Nous avons enfin

$$\varphi(x) = \frac{d^r z}{dx^r} = \frac{d^r}{dx^r}\left(c_1 x^{r+\alpha_1} + c_2 x^{r+\alpha_2} + \ldots + c_r x^{r+\alpha_r}\right)$$

$$= \psi(x) + \sum_{p=1}^{r} c_p x^{\alpha_p}(\alpha_p+1)(\alpha_p+2)\ldots(\alpha_p+r)$$

$$= \psi(x) + \sum_p{}_1 \frac{x^{\alpha_p}\displaystyle\int_0^x y^{-1-\alpha_p}\psi(y)\,dy}{H'(\alpha_p)}$$

$$+ \sum_p{}_2 \frac{x^{\alpha_p}\displaystyle\int_a^x y^{-1-\alpha_p}\psi(y)\,dy}{H'(\alpha_p)},$$

où le Σ_1 s'étend aux racines α_p, dont la partie réelle est égale ou inférieure à -1, et le Σ_2 à celles dont la partie réelle est supérieure à -1.

Toutes les fonctions $z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{r-1}z}{dx^{r-1}}$ prennent la valeur zéro pour $x=0$; donc, il est clair que l'on a, en général,

$$\int_0^1 t^p \varphi(tx)\,dt = \frac{d^p}{dx^p}\left\{\frac{1}{x}\frac{d^{r-p-1}z}{dx^{r-p-1}}\right\},$$

p étant inférieur ou égal à $r-1$. Par conséquent, $\varphi(x)$ satisfait à l'équation que nous cherchons à résoudre. On peut évidemment y ajouter l'expression

$$\sum_s k_s x^{\alpha_s},$$

les k_s étant des constantes arbitraires et le Σ s'étendant aux racines dont la partie réelle est supérieure à -1.

[**4**] Nous allons *maintenant mettre cette solution sous la forme de la somme de deux intégrales de contour prises dans le plan des quantités imaginaires* α. Soit $\alpha = a_1 + ia_2$, a_1 et a_2 étant des quantités réelles. Rappelons-nous que nous avons $|\psi(x)| < Mx^\gamma$, γ étant une quantité supérieure à -1; soit $-\delta$ une quantité supérieure à -1, mais inférieure à γ et à toutes les parties réelles des racines qui sont supérieures à -1. Décrivons la droite infinie $a_1 = -\delta$ et appelons-la D; alors, la fonction

$$x^\alpha \int_0^x y^{-1-\alpha}\psi(y)\,dy$$

est une fonction holomorphe de α partout à gauche de D, tandis que la fonction

$$x^\alpha \int_a^x y^{-1-\alpha}\psi(y)\,dy \qquad (a>0)$$

est holomorphe dans tout le plan des α.

Décrivons maintenant un contour fermé C_1 entièrement à gauche de D et enfermant toutes les racines dans cette partie du plan; et un deuxième contour fermé C_2 entièrement à droite de D et ayant à son intérieur toutes les racines qui se trouvent à droite. Alors nous aurons évidemment, par le théorème de Cauchy,

$$\sum_p{}_1 \frac{x^{\alpha_p}\int_0^x y^{-1-\alpha_p}\psi(y)\,dy}{H'(\alpha_p)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{x^\alpha\int_0^x y^{-1-\alpha}\psi(y)\,dy}{H(\alpha)}\,d\alpha;$$

$$\sum_p{}_2 \frac{x^{\alpha_p}\int_a^x y^{-1-\alpha_p}\psi(y)\,dy}{H'(\alpha_p)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{x^\alpha\int_a^x y^{-1-\alpha}\psi(y)\,dy}{H(\alpha)}\,d\alpha.$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

L'équation

$$\varphi(x) = \psi(x) + \int_0^1 P_{r-1}(t)\varphi(tx)\,dt,$$

où la fonction $\psi(x)$ *est continue, sauf peut-être pour* $x=0$, *au voisinage de* $x=+0$, *et l'on a*

$$|\psi(x)| < Mx^{\gamma},$$

M étant une constante et γ *une quantité supérieure à* -1, *et* $P_{r-1}(t)$ *est le polynôme de degré* $r-1$,

$$b_1 + b_2 t + \ldots + b_r t^{r-1},$$

admet les solutions

$$\varphi(x) = \sum_s k_s x^{\alpha_s} + \psi(x) + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{x^{\alpha}\int_0^x y^{-1-\alpha}\psi(y)\,dy}{H(\alpha)}\,d\alpha$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{x^{\alpha}\int_a^x y^{-1-\alpha}\psi(y)\,dy}{H(\alpha)}\,d\alpha,$$

a étant une quantité positive, et les k des constantes arbitraires; on a

$$H(\alpha) = 1 - \frac{b_1}{1+\alpha} - \frac{b_2}{2+\alpha} - \ldots - \frac{b_r}{r+\alpha},$$

et le Σ_s *s'étend aux racines* α_s *de l'équation* $H(\alpha)=0$, *dont la partie réelle est supérieure à* -1 ; C_1 *et* C_2 *sont des contours fermés que nous venons de définir.*

Il résulte de la forme à laquelle nous avons réduit la solution qu'elle est encore valable quand quelques-unes des racines de l'équation $H(\alpha)=0$ sont multiples; on aurait seulement à substituer pour l'expression $\Sigma_s k_s x^{\alpha_s}$ la suivante :

$$\sum_s x^{\alpha_s}\left\{k_{s0} + k_{s1}\log x + \ldots + k_{sp_s}(\log x)^{p_s}\right\},$$

les k étant encore des constantes arbitraires, et α_s une racine $(p_s+1)^{\text{tuple}}$ dont la partie réelle est supérieure à -1.

On voit aussi *que la fonction* $\psi(x)$, *que nous avons supposée continue au voisinage de l'origine, peut avoir dans ce voisinage des points de discontinuité formant un ensemble de mesure nulle.* En effet, il suffit que les intégrales

$$\int_0^x y^{-1-\alpha}\psi(y)\,dy, \qquad \int_a^x y^{-1-\alpha}\psi(y)\,dy$$

existent et soient des fonctions holomorphes de α.

IV.

[1] A l'aide de la solution que nous venons de trouver, nous étudierons dans cette section *l'équation suivante* :

$$\varphi(x) = \psi(x) + \int_0^1 \mathrm{K}(x, t)\varphi(tx)\,dt,$$

où la fonction $\psi(x)$ *satisfait aux mêmes conditions qu'auparavant, la fonction* $\mathrm{K}(x, t)$ *est bornée et est une fonction uniformément continue de* x *lorsque* t *varie entre* o *et* 1, *sauf peut-être pour un ensemble de valeurs de* t *de mesure nulle, et l'on a :*

$$\mathrm{K}(0, t) = \mathrm{K}(t) = \mathrm{P}_{r-1}(t) = b_1 + b_2 t + \ldots + b_r t^{r-1}.$$

Cette équation peut s'écrire :

$$\varphi(x) = \rho(x) + \int_0^1 \mathrm{P}_{r-1}(t)\varphi(tx)\,dt,$$

où l'on pose :

$$\rho(x) = \psi(x) + \int_0^1 \eta(x, t)\varphi(tx)\,dt,$$

$$\eta(x, t) = \mathrm{K}(x, t) - \mathrm{K}(t).$$

Pour que cette dernière équation soit vérifiée, il faut et il suffit que nous ayons

$$\varphi(x) = \sum_s x^{\alpha_s} \left\{ k_{s0} + k_{s1}\log x + \ldots + k_{sp_s}(\log x)^{p_s} \right\} + \rho(x)$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}_1} \frac{x^\alpha \int_0^x y^{-1-\alpha}\rho(y)\,dy}{\mathrm{H}(\alpha)}\,d\alpha + \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}_2} \frac{x^\alpha \int_a^x y^{-1-\alpha}\rho(y)\,dy}{\mathrm{H}(\alpha)}\,d\alpha,$$

en nous servant des notations expliquées dans la section dernière.

[2] La nouvelle équation peut s'écrire

$$\varphi(x) = \mathrm{F}(x) + \mathrm{S}\varphi(x),$$

où l'on pose

$$\mathrm{F}(x) = \sum_s x^{\alpha_s} \left\{ k_{s0} + k_{s1}\log x + \ldots + k_{sp_s}(\log x)^{p_s} \right\} + \psi(x)$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}_1} \frac{x^\alpha \int_0^x y^{-1-\alpha}\psi(y)\,dy}{\mathrm{H}(\alpha)}\,d\alpha + \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}_2} \frac{x^\alpha \int_a^x y^{-1-\alpha}\psi(y)\,dy}{\mathrm{H}(\alpha)}\,d\alpha,$$

et $S\varphi(x)$ représente l'opération fonctionnelle suivante sur $\varphi(x)$

$$S\varphi(x) = \int_0^1 \eta(x, t)\varphi(tx)\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{x^\alpha \int_0^x dy\, y^{-1-\alpha} \int_0^1 \eta(y, t)\varphi(ty)\,dt}{H(\alpha)}\,d\alpha$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{x^\alpha \int_a^x dy\, y^{-1-\alpha} \int_0^1 \eta(y, t)\varphi(ty)\,dt}{H(\alpha)}\,d\alpha.$$

Nous allons résoudre cette équation par une suite d'approximations successives. Posons :

$$\varphi_0(x) = F(x),$$
$$\varphi_1(x) = F(x) + S\varphi_0(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_{n+1}(x) = F(x) + S\varphi_n(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Nous démontrerons que la série

$$u_0(x) + u_1(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots,$$

où l'on pose $u_n(x) = \varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)$, $u_0(x) = \varphi_0(x)$, converge et satisfait à l'équation pour toutes les valeurs de x comprises dans un domaine suffisamment petit au voisinage de $x = +0$.

[**3**] Nous avons évidemment

$$u_0(x) = F(x), \quad u_1(x) = Su_0(x), \quad \ldots\ldots, \quad u_{n+1}(x) = Su_n(x), \quad \ldots\ldots$$

Soient L_1 la longueur du contour C_1, L_2 celle de C_2; H_1 la valeur minimum de la fonction $|H(\alpha)|$ sur C_1, H_2 sa valeur minimum sur C_2.

Nous avons posé $\alpha = a_1 + ia_2$; soit $a_1 = -\delta_1$ l'équation d'une ligne, que nous appelons D_1, entièrement à droite de C_1 et à gauche de D; et soit $a_1 = -\delta_2$ l'équation d'une autre ligne D_2 entièremeni à gauche de C_2 et à droite de D; δ_1 et δ_2 étant des quantités positives moindres que l'unité. On a donc $\delta_1 > \delta > \delta_2$.

Il est clair que nous pouvons trouver un nombre N tel que l'on ait, au voisinage de l'origine,

$$\left| \sum_s x^{\alpha_s} \left\{ k_{s0} + k_{s1} \log x + \ldots + k_{sp_s} (\log x)^{p_s} \right\} + \psi(x) \right| < N x^{-\delta}.$$

Nous avons aussi

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{x^\alpha\displaystyle\int_0^x y^{-1-\alpha}\psi(y)\,dy}{H(\alpha)}\,d\alpha\right| < \frac{L_1 Q_1}{2\pi H_1},$$

Q_1 étant le maximum sur C_1 de l'expression

$$M x^{a_1}\int_0^x y^{-1-a_1+\gamma}\,dy,$$

c'est-à-dire de l'expression

$$\frac{M x^\gamma}{\gamma - a_1},$$

laquelle est moindre que

$$\frac{M x^{-\delta}}{\delta_1 - \delta}.$$

Nous obtenons donc

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{x^\alpha\displaystyle\int_0^x y^{-1-\alpha}\psi(y)\,dy}{H(\alpha)}\,d\alpha\right| < \frac{M L_1 x^{-\delta}}{2\pi H_1(\delta_1-\delta)}.$$

De même on a, pour x plus petit ou égal à a,

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{x^\alpha\displaystyle\int_a^x y^{-1-\alpha}\psi(y)\,dy}{H(\alpha)}\,d\alpha\right| < \frac{L_2 Q_2}{2\pi H_2},$$

Q_2 étant le maximum sur C_2 de l'expression

$$M x^{a_1}\int_x^a y^{-1-a_1+\gamma}\,dy.$$

On a, si a est plus petit que l'unité,

$$\begin{aligned}
M x^{a_1}\int_x^a y^{-1-a_1+\gamma}\,dy &< M x^{a_1}\int_x^a y^{-1-a_1-\delta}\,dy\\
&= M x^{a_1}\frac{x^{-a_1-\delta}-a^{-a_1-\delta}}{a_1+\delta}\\
&< M x^{-\delta}\frac{1-\left(\dfrac{x}{a}\right)^{a_1+\delta}}{a_1+\delta}\\
&< \frac{M x^{-\delta}}{\delta-\delta_2}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{x^\alpha \int_a^x y^{-1-\alpha} \psi(y)\, dy}{H(\alpha)} d\alpha \right| < \frac{ML_2 x^{-\delta}}{2\pi H_2(\delta - \delta_2)};$$

et des inégalités que nous avons démontrées, on déduit la suivante :

$$|F(x)| < \left[N + \frac{ML_1}{2\pi H_1(\delta_1 - \delta)} + \frac{ML_2}{2\pi H_2(\delta - \delta_2)} \right] x^{-\delta},$$

ou bien

$$|u_0(x)| = |F(x)| < Vx^{-\delta},$$

où l'on pose

$$V = N + \frac{ML_1}{2\pi H_1(\delta_1 - \delta)} + \frac{ML_2}{2\pi H_2(\delta - \delta_2)}.$$

[**4**] Cherchons maintenant une limite supérieure de la fonction

$$|u_1(x)| = |Su_0(x)|.$$

Nous avons

$$Su_0(x) = \int_0^1 \eta(x, t) u_0(tx)\, dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{x^\alpha \int_0^x dy\, y^{-1-\alpha} \int_0^1 \eta(y, t) u_0(ty)\, dt}{H(\alpha)} d\alpha$$
$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{x^\alpha \int_a^x dy\, y^{-1-\alpha} \int_0^1 \eta(y, t) u_0(ty)\, dt}{H(\alpha)} d\alpha.$$

Les points pour lesquels la fonction $\eta(x, t) = K(x, t) - K(t)$ ne tend pas vers zéro avec x forment un ensemble de mesure nulle; nous pouvons donc les entourer par des segments de droite dont la somme totale l est aussi petite que l'on veut. Soit K une limite supérieure de $K(x, t)$ dans la partie de son domaine que nous considérons; alors, lorsque t est sur un de ces petits segments, on aura :

$$|K(x, t) - K(t)| < 2K.$$

Partout ailleurs on aura :

$$|\eta(x, t)| < \eta,$$

η étant une quantité qui tend vers zéro avec x.

Nous obtenons, par conséquent,

$$\left| \int_0^1 \eta(x, t) u_0(tx)\, dt \right| < Vx^{-\delta} \left[\int_0^l t^{-\delta}\, dt + \eta \int_0^1 t^{-\delta}\, dt \right]$$
$$= \frac{Vx^{-\delta}(l^{1-\delta} + \eta)}{1 - \delta} = cVx^{-\delta},$$

c étant une quantité qui peut être rendue aussi petite que l'on veut, en prenant x et l assez petits.

Maintenant l'analyse déjà faite nous montre que l'on a

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{x^\alpha\int_0^x dy\, y^{-1-\alpha}\int_0^1 \eta(y,t)\,u_0(ty)\,dt}{H(\alpha)}\,d\alpha\right| < \frac{cVL_1 x^{-\delta}}{2\pi H_1(\delta_1-\delta)},$$

et aussi

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{x^\alpha\int_a^x dy\, y^{-1-\alpha}\int_0^1 \eta(y,t)\,u_0(ty)\,dt}{H(\alpha)}\,d\alpha\right| < \frac{cVL_2 x^{-\delta}}{2\pi H_2(\delta-\delta_2)}.$$

Nous avons, par conséquent,

$$|Su_0(x)| < c\left[1+\frac{L_1}{2\pi H_1(\delta_1-\delta)}+\frac{L_2}{2\pi H_2(\delta-\delta_2)}\right]Vx^{-\delta} = qVx^{-\delta},$$

où l'on pose

$$q = c\left[1+\frac{L_1}{2\pi H_1(\delta_1-\delta)}+\frac{L_2}{2\pi H_2(\delta-\delta_2)}\right].$$

Il est clair que la quantité q peut être aussi rendue très petite en choisissant x et l assez petits. Nous n'avons qu'à prendre a et l assez petits pour que l'on ait $q<1$; x doit être au plus égal à a.

Nous aurons alors

$$|u_0(x)| < Vx^{-\delta},$$
$$|u_1(x)| = |Su_0(x)| < qVx^{-\delta}.$$

De même, on trouve

$$|u_2(x)| = |Su_1(x)| < q^2Vx^{-\delta},$$

et, en général,

$$|u_n(x)| = |Su_{n-1}(x)| < q^nVx^{-\delta};$$

et l'on voit que la série

$$\varphi(x) = u_0(x) + u_1(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

converge absolument à la manière d'une série géométrique.

[5] Il nous reste à démontrer que cette série satisfait à l'équation

$$\varphi(x) = F(x) + S\varphi(x).$$

Nous avons

$$S\varphi(x) = S\left[u_0(x)+u_1(x)+\ldots+u_m(x)+\ldots\right]$$
$$= S\left[u_0(x)+u_1(x)+\ldots+u_m(x)\right] + SR_m(x),$$

en posant

$$R_m(x) = u_{m+1}(x) + u_{m+2}(x) + \ldots.$$

Cela nous donne

$$\begin{aligned} S\varphi(x) &= u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_{m+1}(x) + SR_m(x) \\ &= \varphi(x) - F(x) - R_{m+1}(x) + SR_m(x). \end{aligned}$$

Nous avons aussi

$$|R_m(x)| < |u_{m+1}(x)| + |u_{m+2}(x)| + \ldots < Vx^{-\delta}(q^{m+1} + q^{m+2} + \ldots) = \frac{q^{m+1}Vx^{-\delta}}{1-q},$$

d'où l'on obtient

$$|SR_m(x)| < \frac{q^{m+2}Vx^{-\delta}}{1-q}.$$

On a donc

$$|\varphi(x) - F(x) - S\varphi(x)| < \frac{2q^{m+2}Vx^{-\delta}}{1-q},$$

une fonction qui tend vers zéro quand m va vers l'infini. Or, on peut prendre m aussi grand que l'on veut; par conséquent, on doit avoir

$$\varphi(x) = F(x) + S\varphi(x).$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Considérons l'équation

$$\varphi(x) = \psi(x) + \int_0^1 K(x, t)\varphi(tx)\,dt,$$

où la fonction $\psi(x)$ est continue au voisinage de $x = 0$ sauf peut-être pour un ensemble de points de mesure nulle, et l'on a

$$|\psi(x)| < Mx^{\gamma},$$

M *étant une constante et γ une quantité supérieure à -1; où la fonction $K(x, t)$ est une fonction uniformément continue de x au voisinage de $x = 0$ lorsque t reste dans l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$, sauf peut-être pour un ensemble de valeurs de t de mesure nulle, et où la fonction $K(t)$ est égale au polynôme*

$$b_1 + b_2 t + \ldots + b_r t^{r-1}.$$

Alors cette équation admet des solutions qui dépendent linéairement d'autant de constantes arbitraires qu'il y a de racines à partie réelle supérieure à -1 pour l'équation en α

$$1 = \frac{b_1}{1+\alpha} + \frac{b_2}{2+\alpha} + \ldots + \frac{b_r}{r+\alpha} = \int_0^1 t^{\alpha} K(t)\,dt,$$

chaque racine étant comptée avec son degré de multiplicité.

On voit en même temps que l'équation homogène

$$\varphi(x) = \int_0^1 \mathrm{K}(x, t)\varphi(tx)\,dt,$$

sous les mêmes hypothèses sur $\mathrm{K}(x, t)$, *admet le même nombre de solutions linéairement indépendantes. Elle n'en admettra donc aucune si l'équation en* α *n'a pas de racine dont la partie réelle est supérieure à* -1.

[**6**] On peut appliquer ces résultats à *l'équation*

$$\int_0^1 \mathrm{G}(x, t) f(tx)\,dt = g(x),$$

où $\mathrm{G}(0, t)$ *est le polynôme*

$$\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 t + \ldots + \mathrm{A}_r t^r,$$

et l'on n'a pas

$$\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 + \ldots + \mathrm{A}_n = 0.$$

Il faut aussi que la fonction $xg(x)$ tende vers zéro avec x.

En posant

$$\varphi(x) = \int_0^x f(x)\,dx,$$

et en intégrant par parties, nous obtenons

$$\mathrm{G}(x, 1)\varphi(x) = xg(x) + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{G}(x, t)\varphi(tx)\,dt.$$

Nous avons supposé $\mathrm{G}(0, 1) \neq 0$; donc, cette équation est bien du type que nous avons considéré. En nous rappelant qu'il faut avoir $\varphi(0) = 0$, nous voyons que *la solution dépendra linéairement d'autant de constantes arbitraires qu'il y a de racines à partie réelle positive de l'équation en* β

$$\mathrm{G}(0, 1) = \int_0^1 t^\beta \frac{d}{dt}\mathrm{G}(0, t)\,dt,$$

laquelle est identique à

$$\int_0^1 t^{\beta-1}\,\mathrm{G}(0, t)\,dt = 0.$$

Ce nombre est le même que le nombre des racines à partie réelle supérieure à -1 de l'équation en α

$$\int_0^1 t^\alpha \mathrm{G}(0, t) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\mathrm{A}_0}{1+\alpha} + \frac{\mathrm{A}_1}{2+\alpha} + \ldots + \frac{\mathrm{A}_r}{r+1+\alpha} = 0.$$

Cette équation est identique à *l'équation déterminante* trouvée par MM. Volterra, Holmgren et Lalesco. Pour que l'on puisse déduire de là une solution de l'équation

$$\int_0^1 G(x, t) f(tx)\, dt = g(x),$$

il faut que la fonction $\varphi(x)$ ait une dérivée première. Si l'on suppose que *les dérivées premières* $\frac{\partial G}{\partial x}$, $\frac{\partial G}{\partial t}$, $g'(x)$ *existent*, on peut partir de l'équation

$$G(x, 1) f(x) + \int_0^1 \left[x \frac{\partial G(x, t)}{\partial x} - t \frac{\partial G(x, t)}{\partial t} \right] f(tx)\, dt = g(x) + x g'(x).$$

Il faut supposer, en outre, que $x \frac{\partial G}{\partial x}$ tend vers zéro avec x, et que la fonction

$$|g(x) + x g'(x)|$$

reste inférieure à $M x^{\gamma}$, M étant une constante et γ une quantité supérieure à -1. Les résultats sont exactement les mêmes, comme il est aisé de le voir.

On voit aussi que *l'équation*

$$\int_0^1 G(x, t) f(tx)\, dt = 0$$

admet le même nombre de solutions linéairement indépendantes qu'il y a de constantes arbitraires dans la solution de la même équation avec second membre.

V.

[**1**] Nous nous occuperons dans cette section *de l'équation*

$$\varphi(x) = \psi(x) + \int_0^1 K(x, t) \varphi(tx)\, dt,$$

où la fonction $\psi(x)$ *satisfait toujours aux mêmes conditions, et où l'on suppose que la fonction* $\eta(x, t) = K(x, t) - K(t)$ *tend uniformément vers zéro avec x lorsque t est dans l'intervalle* $0 \leqslant t \leqslant 1$, *sauf peut-être pour un ensemble de valeurs de t de mesure nulle; mais quant à la fonction* $K(t)$ *elle-même, nous dirons pour le moment qu'elle est seulement continue, sauf peut-être pour un ensemble de points de mesure nulle et qu'elle reste toujours bornée, et nous préciserons dans la suite les conditions ultérieures auxquelles elle doit satisfaire.*

Notre méthode consiste à faire, d'après le théorème bien connu de Weierstrass, l'approximation de la fonction $K(t)$ dans l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$ par *un polynôme convenable* $P_n(t)$ de degré n, en faisant exception de quelques petits intervalles, dont la somme est aussi petite que l'on veut, autour des points de discontinuité. Dans la recherche d'*un polynôme convenable*, nous aurons besoin de quelques propositions que nous allons établir d'abord.

Prop. I. — *Si une fonction $K(t)$ est continue dans l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$, sauf peut-être pour un ensemble de points de mesure nulle, et si elle reste partout bornée, on peut y faire une approximation aussi proche que l'on veut, sauf dans quelques intervalles dont la somme est arbitrairement petite, par un polynôme qui reste toujours et partout moindre qu'un nombre fixé a l'avance.*

En effet, on n'a qu'à entourer les points de discontinuité par des intervalles dont la somme totale est moindre qu'une quantité l arbitrairement petite, joindre par des droites les extrémités de chaque couple d'ordonnées $K(t)$ qui correspondent aux extrémités de chaque petit intervalle, et trouver un polynôme aussi voisin que l'on veut à la nouvelle fonction continue représentée par ces droites dans les petits intervalles, et égale partout ailleurs à la fonction $K(t)$. Appelons $K_1(t)$ cette fonction.

Prop. II. — *Si une fonction $K(t)$ est à variation bornée dans l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$, on peut faire son approximation, sauf peut-être dans quelques petits intervalles dont la somme est arbitrairement petite, par un polynôme dont la variation dans tout l'intervalle reste toujours moindre qu'un nombre fixé à l'avance.*

Construisons la fonction $K_1(t)$ comme dans la Prop. I. $K_1(t)$ est continue, et il est clair qu'elle est aussi à variation bornée. Nous avons donc, par le théorème de M. Jordan,

$$K_1(t) = Q_1(t) - Q_2(t),$$

$Q_1(t)$ et $Q_2(t)$ étant deux fonctions continues qui ne décroissent jamais comme t va en croissant depuis zéro jusqu'à un.

Nous pouvons faire l'approximation d'une fonction continue $Q(t)$ qui satisfait à la condition $Q(t_1) \geqslant Q(t_2)$ pour $t_1 > t_2$, par un polynôme qui satisfait à la même condition. Pour le démontrer, décomposons l'intervalle $(0, 1)$ dans les intervalles $(0, t_1)$, (t_1, t_2), ..., $(t_{m-1}, 1)$, dans chacun desquels l'oscillation de $Q(t)$ est moindre que $\frac{\varepsilon}{4}$, ε étant aussi petit que l'on veut. Formons une nouvelle fonction $R(t)$, représentée par la ligne polygonale qui joint les extrémités des ordonnées $Q(0)$, $Q(t_1)$, ..., $Q(t_{m-1})$, $Q(1)$. Nous avons

$$|Q(t) - R(t)| < \frac{\varepsilon}{2};$$

car, si t est dans l'intervalle $t_{r-1} \leqslant t \leqslant t_r$, on a :

$$|Q(t) - R(t)| < |Q(t) - Q(t_r)| + |R(t_r) - R(t)|$$
$$< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

La quantité

$$h_r = \frac{Q(t_r) - Q(t_{r-1})}{t_r - t_{r-1}} = \frac{R(t_r) - R(t_{r-1})}{t_r - t_{r-1}}$$

n'est jamais négative. En posant

$$h_1 = \frac{Q(t_1) - Q(0)}{t_1},$$
$$h_m = \frac{Q(1) - Q(t_{m-1})}{1 - t_{m-1}},$$

nous pouvons dire que la fonction qui est égale à h_r pour $t_{r-1} < t < t_r$ est la dérivée $R'(t)$ de la fonction $R(t)$. Cette fonction a des discontinuités dans l'ensemble de points de mesure nulle $t_1, t_2, \ldots, t_{m-1}$; nous pouvons donc trouver un polynôme $R_n'(t)$ positif partout dans l'intervalle $(0, 1)$ et tel que l'on ait

$$|R'(t) - R_n'(t)| < \frac{\varepsilon}{4},$$

sauf dans $m - 1$ petits intervalles dont la somme ne dépasse pas $\frac{\varepsilon}{8R'}$, R' étant une limite supérieure de $R'(t)$ et $R_n'(t)$ qui peut être déterminée avant de faire l'approximation.

Soit maintenant

$$R_n(t) = R(0) + \int_0^t R_n'(t)\,dt = Q(0) + \int_0^t R_n'(t)\,dt;$$

$R_n(t)$ est un polynôme, et nous avons :

$$|R(t) - R_n(t)| = \left| \int_0^t \left\{ R'(t) - R_n'(t) \right\} dt \right|$$
$$< \frac{t\varepsilon}{4} + 2R' \frac{\varepsilon}{8R'}$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il s'ensuit que nous avons

$$|Q(t) - R_n(t)| < \varepsilon,$$

et le polynôme $R_n(t)$ va toujours en croissant depuis zéro jusqu'à un, puisque sa dérivée $R_n'(t)$ est toujours positive. La variation de $R_n(t)$ est donc égale à $R_n(1) - R_n(0)$; elle est donc moindre que

$$Q(1) - Q(0) + 2\varepsilon.$$

Appliquons cette méthode aux fonctions $Q_1(t)$ et $Q_2(t)$. Nous obtenons deux polynômes $R_{n1}(t)$ et $R_{n2}(t)$ qui vont toujours en croissant de zéro à un, et tels que l'on ait :

$$|Q_1(t) - R_{n1}(t)| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |Q_2(t) - R_{n2}(t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En posant

$$P_n(t) = R_{n1}(t) - R_{n2}(t),$$

on aura

$$|K_1(t) - P_n(t)| \leqslant |Q_1(t) - R_{n1}(t)| + |Q_2(t) - R_{n2}(t)| < \varepsilon;$$

et la variation de $P_n(t)$ dans l'intervalle $(0, 1)$ est moindre que

$$\left\{R_{n1}(1) - R_{n1}(0)\right\} + \left\{R_{n2}(1) - R_{n2}(0)\right\} < \left\{Q_1(1) - Q_1(0)\right\} + \left\{Q_2(1) - Q_2(0)\right\} + 2\varepsilon.$$

Elle est donc moindre qu'un nombre qui peut être fixé à l'avance. La proposition II est ainsi démontrée.

PROP. III. — *Si une fonction* $K(t)$ *satisfait à la condition de Lipschitz généralisée*

$$|K(t) - K(\tau)| < A(t-\tau)^\beta,$$

où l'on a $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant 1$, A *étant une constante et* β *une quantité positive, on peut la représenter avec telle approximation que l'on veut par un polynôme* $P_n(t)$ *satisfaisant à la condition*

$$|P_n(t) - P_n(\tau)| < A'(t-\tau)^\beta,$$

A' *étant une constante fixée à l'avance, plus grande que* A.

Divisons l'intervalle $(0, 1)$ en m parties égales, par les points $t_1, t_2, \ldots, t_{m-1}$. Formons comme auparavant la fonction $R(t)$ en joignant par des droites les extrémités des ordonnées successives. Mettons aussi, comme dans la proposition dernière,

$$h_r = \frac{K(t_r) - K(t_{r-1})}{t_r - t_{r-1}}; \quad h_1 = \frac{K(t_1) - K(0)}{t_1}; \quad h_m = \frac{K(1) - K(t_{m-1})}{1 - t_{m-1}};$$

et définissons la fonction $R'(t)$ comme il suit :

$$R'(t) = h_r; \qquad t_{r-1} < t < t_r; \qquad r = 1, 2, \ldots, m.$$

Nous avons évidemment

$$R(t) = R(o) + \int_0^t R'(t)dt = K(o) + \int_0^t R'(t)dt.$$

On a aussi, pour $t_{r-1} < t < t_r$,

$$\begin{aligned} |K(t) - R(t)| &\leqslant |K(t) - K(t_r)| + |R(t_r) - R(t)| \\ &< A(t_r - t)^\beta + |R(t_r) - R(t_{r-1})| \\ &< 2A(t_r - t_{r-1})^\beta = \frac{2A}{m^\beta}; \end{aligned}$$

et l'on trouve

$$|h_r| < \frac{A(t_r - t_{r-1})^\beta}{t_r - t_{r-1}} = Am^{1-\beta}.$$

Faisons l'approximation de $R'(t)$, sauf pour des éléments dont la somme totale n'excède pas $\frac{1}{2mA}$, par un polynôme $P_n'(t)$, de telle façon que l'on ait en dehors de ces éléments

$$|R'(t) - P_n'(t)| < \frac{1}{2m^\beta},$$

et que l'on ait partout

$$|P_n'(t)| < Am^{1-\beta}.$$

En mettant

$$P_n(t) = K(o) + \int_0^t P_n'(t)dt,$$

on aura

$$\left|R(t) - P_n(t)\right| = \left|\int_0^t \left\{ R'(t) - P_n'(t) \right\} dt\right| < \frac{1}{2m^\beta} + \frac{Am^{1-\beta}}{2mA} = \frac{1}{m^\beta}.$$

Maintenant, si τ et t sont dans le même segment, on aura :

$$\left|P_n(t) - P_n(\tau)\right| = \left|\int_\tau^t P_n'(t)dt\right| < (t-\tau)Am^{1-\beta} \leqslant A(t-\tau)^\beta.$$

Si τ et t se trouvent dans deux segments consécutifs (t_{r-1}, t_r), (t_r, t_{r+1}), on aura

$$|P_n(t) - P_n(\tau)| < (t-\tau)Am^{1-\beta},$$

et puisque l'on a $\frac{2}{m} \geqslant t - \tau$, on obtient

$$|P_n(t) - P_n(\tau)| < 2^{1-\beta}A(t-\tau)^\beta.$$

Enfin, si τ et t sont dans deux segments différents qui ne sont pas consécutifs, on aura

$$|P_n(t) - P_n(\tau)| \leqslant |K(t) - K(\tau)| + |K(t) - P_n(t)| + |K(\tau) - P_n(\tau)|,$$

ce qui nous donne

$$|P_n(t) - P_n(\tau)| < A(t-\tau)^\beta + \frac{2}{m^\beta} < (A+2)(t-\tau)^\beta.$$

Soit maintenant A' la plus grande des quantités $2^{1-\beta}A$ et $A+2$; on a par conséquent toujours

$$|P_n(t) - P_n(\tau)| < A'(t-\tau)^\beta,$$

et nous avons démontré les inégalités

$$|K(t) - R(t)| < \frac{2A}{m^\beta}; \qquad |R(t) - P_n(t)| < \frac{1}{m^\beta}.$$

On a donc

$$|K(t) - P_n(t)| < \frac{1+2A}{m^\beta},$$

une quantité qui peut être rendue aussi petite que l'on veut, puisque m est arbitrairement grand. La proposition est donc démontrée.

Prop. IV. — *Si l'on divise l'intervalle* (0, 1) *en un nombre fini de sous-intervalles*

$$I_1, I_2, \ldots, I_r; \qquad I_1', I_2', \ldots, I_s',$$

qui ne se suivent pas nécessairement dans cet ordre, et si une fonction $K(t)$ *est à variation bornée dans* $I_1, I_2, \ldots, I_r$, *et satisfait dans l'intervalle* I_p' *à la condition*

$$|K(t) - K(\tau)| < A(t-\tau)^{\beta_p} \qquad (\tau < t;\ p = 1, 2, \ldots, s),$$

on peut la représenter avec telle approximation que l'on veut, sauf peut-être dans quelques intervalles dont la somme est arbitrairement petite, par un polynôme $P_n(t)$ *dont la variation dans* $I_1, I_2, \ldots, I_r$ *ne dépasse pas une quantité* B, *et tel que l'on ait dans les intervalles* I_p'

$$|P_n(t) - P_n(\tau)| < A'(t-\tau)^{\beta_p} \qquad (\tau < t;\ p = 1, 2, \ldots, s),$$

B *et* A' *étant deux quantités que l'on peut fixer à l'avance.*

Entourons les points de discontinuité par des segments dont la somme n'excède pas l, une quantité arbitrairement petite, et formons comme dans la proposition I la fonction $K_1(t)$ en joignant par des droites les extrémités de chaque couple d'ordonnées qui correspondent aux extrémités de chaque petit segment. La fonction $K_1(t)$ est continue partout dans l'intervalle, elle est à variation bornée dans les intervalles $I_1, I_2, \ldots, I_r$, et elle satisfait aux conditions de Lipschitz ci-dessus dans les intervalles $I_1', I_2', \ldots, I_s'$; il est donc clair qu'elle est égale à la différence de deux fonctions $Q_1(t)$ et $Q_2(t)$ partout continues, qui satisfont aux mêmes conditions de Lipschitz dans les intervalles $I_1', I_2', \ldots, I_s'$, et ne décroissent jamais comme t va en croissant dans les intervalles $I_1, I_2, \ldots, I_r$.

Prenons une fonction $Q(t)$ qui satisfait à ces conditions; divisons chacun des intervalles $I_1, I_2, \ldots, I_r, I_1', I_2', \ldots, I_s'$ en m parties égales, et formons comme auparavant la fonction $R(t)$ représentée par la ligne polygonale joignant les extrémités des ordonnées qui correspondent à chaque point de division. Prenons aussi sa dérivée $R'(t)$ qui a des discontinuités aux points de division, et qui est une constante dans chaque petite partie. Cette constante sera toujours positive ou zéro dans les intervalles $I_1, I_2, \ldots, I_r$. Nous pouvons donc faire l'approximation de $R'(t)$, sauf dans quelques petits segments dont la somme ne dépasse pas une quantité l' arbitrairement petite, par un polynôme $R_n'(t)$, qui reste toujours positif dans les intervalles $I_1, I_2, \ldots, I_r$. On aura, en dehors des petits segments,

$$|R'(t) - R_n'(t)| < \varepsilon',$$

ε' étant aussi petit que l'on veut; et si R' est une limite supérieure de $|R'(t)|$, on pourra avoir $|R_n'(t)| < R'$. En posant

$$R_n(t) = R(0) + \int_0^t R_n'(t)\,dt = Q(0) + \int_0^t R_n'(t)\,dt,$$

on obtient

$$R(t) - R_n(t) = \int_0^t \Big[R'(t) - R_n'(t)\Big]\,dt.$$

On a, par conséquent,

$$|R(t) - R_n(t)| < \varepsilon' + 2l'R',$$

et en choisissant ε' et l' de façon que l'on ait

$$\varepsilon' < \frac{1}{2m^\beta}, \qquad l' < \frac{1}{4R'm^\beta},$$

β étant la plus grande des quantités $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$, on aura

$$|R(t) - R_n(t)| < \frac{1}{m^\beta}.$$

La fonction $R_n(t)$ va toujours en croissant avec t dans les intervalles $I_1, I_2, \ldots, I_r$, puisque sa dérivée $R_n'(t)$ y est constamment positive. Donc, la variation de $R_n(t)$

dans un de ces intervalles est égale à la différence de ses valeurs à chaque extrémité de l'intervalle. On a aussi

$$|Q(t) - R(t)| < |Q(t) - Q(t_q)| + |R(t_q) - R(t)|,$$

où l'on a $t_{q-1} \leqslant t \leqslant t_q$, t_{q-1} et t_q étant deux points consécutifs de division. En faisant croître m, on peut avoir

$$|Q(t) - Q(t_q)| < \frac{\varepsilon''}{2}; \qquad |R(t_q) - R(t)| < \frac{\varepsilon''}{2},$$

ε'' étant aussi petit que l'on veut. On peut avoir $\varepsilon'' + \frac{1}{m^\beta} < \varepsilon$, une quantité arbitrairement petite; et cela nous donne, dans les intervalles $I_1, I_2, \ldots, I_r$,

$$|Q(t) - R_n(t)| \leqslant |Q(t) - R(t)| + |R(t) - R_n(t)| < \varepsilon.$$

On trouve de là que la variation de $R_n(t)$, dans un de ces intervalles, est moindre que $2Q + 2\varepsilon$, Q étant une limite supérieure de $|Q(t)|$.

Dans un intervalle I_p' on trouve, si l'on a $t_{q-1} \leqslant t \leqslant t_q$,

$$|Q(t) - R_n(t)| \leqslant |Q(t) - Q(t_q)| + |R(t_q) - R(t)| + |R(t) - R_n(t)| < 2A\left(\frac{d}{m}\right)^{\beta p} + \frac{1}{m^\beta},$$

d_p étant la longueur de I_p'. Nous avons donc

$$|Q(t) - R_n(t)| < \frac{B}{m^{\beta_p}},$$

B étant une constante que l'on peut fixer à l'avance. Cette quantité devient aussi petite que l'on veut si l'on fait croître m indéfiniment.

Cela établi, on démontre exactement comme dans la proposition III que l'on a, dans les intervalles $I_1', I_2', \ldots, I_s'$,

$$|R_n(t) - R_n(\tau)| < A'(t - \tau)^{\beta p}, \qquad (p = 1, 2, \ldots, s),$$

A' étant la plus grande des quantités $2^{1-\beta p} A$ et $A + 2$.

On peut maintenant faire l'approximation de $Q_1(t)$ et $Q_2(t)$ par deux polynômes $R_{n1}(t)$ et $R_{n2}(t)$, que l'on obtient de la même manière que $R_n(t)$.

Il est clair que le polynôme

$$P_n(t) = R_{n1}(t) - R_{n2}(t)$$

est une approximation aussi proche que l'on veut de la fonction $K_1(t) = Q_1(t) - Q_2(t)$, et qu'il satisfait aux mêmes conditions de Lipschitz dans les intervalles $I_1', I_2', \ldots, I_s$. On démontre comme dans la proposition III que sa variation reste toujours bornée dans les intervalles $I_1, I_2, \ldots, I_r$. Nous avons donc démontré la proposition IV.

[**2**] Il nous faut maintenant *établir quelques propositions relatives aux racines des équations en* α :

$$\int_0^1 t^\alpha K(t)\,dt = 1 ; \qquad \int_0^1 t^\alpha P_n(t)\,dt = 1 .$$

Nous supposons que la fonction $K(t)$ *est continue, sauf peut-être pour un ensemble de points de mesure nulle, dans l'intervalle* (o, 1), *et que l'on a*

$$K(t) = K(0) + t^\omega Q(t),$$

ω *étant une quantité positive et la fonction* $Q(t)$ *restant bornée dans l'intervalle.* On suppose que le polynôme $P_n(t)$ est obtenu par la méthode des sous-intervalles dont nous avons fait usage. Alors la fonction $R(t) - K(0)$, représentée par la ligne polygonale reste moindre en valeur absolue que $t^\omega Q$, Q étant une limite supérieure de $|Q(t)|$. Nous avons aussi

$$\left| R(t) - P_n(t) \right| = \left| \int_0^t \left\{ R'(t) - P_n'(t) \right\} dt \right| < (\varepsilon' + l')t,$$

ε' et l' étant deux quantités aussi petites que l'on veut. On a, par conséquent,

$$\left| \frac{P_n(t) - P_n(0)}{t^\omega} \right| < \frac{|R(t) - K(0)| + (\varepsilon' + l')t}{t^\omega},$$

puisque l'on a $P_n(0) = K(0)$. Cela nous donne

$$\frac{|P_n(t) - P_n(0)|}{t^\omega} < Q + (\varepsilon' + l')t^{1-\omega} < Q',$$

Q' étant une quantité fixe.

Nous avons donc toujours

$$|K(t) - P_n(t)| < (Q + Q')t^\omega,$$

et aussi

$$|K(t) - P_n(t)| < \varepsilon,$$

ε étant une quantité arbitrairement petite, sauf peut-être dans quelques segments dont la somme l est aussi petite que l'on veut.

Nous allons maintenant démontrer que *si la partie réelle de* α *est supérieure à* -1, *on peut obtenir* $P_n(t)$ *de façon à avoir*

$$\left| \int_0^1 t^\alpha \Big[K(t) - P_n(t) \Big] dt \right| < \varepsilon_1,$$

ε_1 *étant une quantité arbitrairement petite.* Nous avons, en effet, pour $0 < b < 1$,

$$\left|\int_0^1 t^\alpha \left[K(t) - P_n(t)\right] dt\right| < \int_0^b t^{-1} \left|K(t) - P_n(t)\right| dt + \int_b^1 t^{-1} \left|K(t) - P_n(t)\right| dt$$
$$< (Q + Q') \int_0^b t^{-1+\omega} dt + \varepsilon \int_b^1 t^{-1} dt + 2Klb^{-1},$$

K étant une limite supérieure de $|K(t)$ et de $|P_n(t)|$. Cette quantité est égale à

$$\frac{(Q+Q')b^\omega}{\omega} + \varepsilon \log \frac{1}{b} + 2Klb^{-1}.$$

Nous pouvons choisir b assez petit pour avoir

$$\frac{(Q+Q')b^\omega}{\omega} < \frac{\varepsilon_1}{3},$$

ε_1 étant arbitrairement petit, et ensuite on peut assigner à ε et l des valeurs qui nous donneront

$$\varepsilon \log \frac{1}{b} < \frac{\varepsilon_1}{3}; \qquad 2Klb^{-1} < \frac{\varepsilon_1}{3}.$$

Nous aurons alors

$$\left|\int_0^1 t^\alpha \left\{K(t) - P_n(t)\right\} dt\right| < \varepsilon_1.$$

On peut avoir en même temps

$$\left|\int_0^1 t^\alpha \log t \left\{K(t) - P_n(t)\right\} dt\right| < \varepsilon_1.$$

On a, en effet,

$$\left|\int_0^1 t^\alpha \log t \left\{K(t) - P_n(t)\right\} dt\right|$$
$$< (Q+Q') \int_0^b t^{-1+\omega} \log \frac{1}{t} dt + \varepsilon \int_b^1 t^{-1} \log t \, dt + 2Klb^{-1} \log \frac{1}{b}$$
$$= \frac{(Q+Q')\left(1 + \omega \log \frac{1}{b}\right) b^\omega}{\omega^2} + \frac{\varepsilon}{2}\left(\log \frac{1}{b}\right)^2 + 2Klb^{-1} \log \frac{1}{b};$$

et il est clair que l'on peut choisir b, et ensuite ε et l, de façon à avoir, avec les inégalités précédentes, celles-ci :

$$\frac{(Q+Q')\left(1 + \omega \log \frac{1}{b}\right) b^\omega}{\omega^2} < \frac{\varepsilon_1}{3}; \qquad \frac{\varepsilon}{2}\left(\log \frac{1}{b}\right)^2 < \frac{\varepsilon_1}{3}; \qquad 2Klb^{-1} \log \frac{1}{b} < \frac{\varepsilon_1}{3}.$$

Cela nous donne

$$\left| \int_0^1 t^\alpha \log t \left\{ K(t) - P_n(t) \right\} dt \right| < \varepsilon_1.$$

Nous montrerons maintenant que *les racines de l'équation*

$$\int_0^1 t^\alpha K(t)\, dt = 1$$

sont en nombre fini et à distance finie. L'équation peut s'écrire

$$\int_0^1 t^\alpha \left\{ K(0) + t^\omega Q(t) \right\} dt = 1,$$

ou bien

$$\frac{K(0)}{1+\alpha} + \int_0^1 t^{\alpha+\omega} Q(t)\, dt = 1.$$

Mettons, comme dans la section précédente, $\alpha = a_1 + ia_2$, a_1 et a_2 étant des quantités réelles. Toutes les racines doivent être à droite de la ligne $a_1 = -1$. Il est facile de voir que, *lorsque α est dans cette partie du plan ou sur la droite $a_1 = -1$ elle-même, la valeur de l'expression*

$$\left| \frac{K(0)}{1+\alpha} + \int_0^1 t^{\alpha+\omega} Q(t)\, dt \right|$$

tend uniformément vers zéro quand $|\alpha|$ tend vers l'infini. En effet, $Q(t)$ est une fonction continue de t, sauf peut-être pour un ensemble de points de mesure nulle, Nous pouvons donc trouver un polynôme

$$Q_n(t) = b_0 + b_1 + \ldots + b_n t^n$$

tel que l'on ait

$$|Q(t) - Q_n(t)| < \varepsilon,$$

ε étant une quantité arbitrairement petite, sauf peut-être dans quelques petits segments dont la somme l est arbitrairement petite. Nous aurons donc, si Q est une limite supérieure de $|Q(t)|$ et de $|Q_n(t)|$, si $|\alpha| > 1$, et $|K(t)| < K$:

$$\left| \frac{K(0)}{1+\alpha} + \int_0^1 t^{\alpha+\omega} Q(t)\, dt \right|$$

$$< \frac{K}{|\alpha| - 1} + \left| \int_0^1 t^{\alpha+\omega} Q_n(t)\, dt \right| + \varepsilon \int_0^1 t^{-1+\omega}\, dt + 2Q \int_0^l t^{-1+\omega}\, dt$$

$$= \frac{K}{|\alpha| - 1} + \frac{\varepsilon}{\omega} + \frac{2Q\, l^\omega}{\omega} + \left| \frac{b_0}{1+\alpha+\omega} + \frac{b_1}{2+\alpha+\omega} + \ldots + \frac{b_n}{n+1+\alpha+\omega} \right|.$$

Soit ε_1 une quantité aussi petite que l'on veut; il est clair que l'on peut avoir

$$\frac{\varepsilon}{\omega} < \frac{\varepsilon_1}{4}; \quad \frac{2\,Q\,l^{\omega}}{\omega} < \frac{\varepsilon_1}{4},$$

et ensuite on peut choisir R, de façon à avoir pour $|\alpha| \geqslant R$

$$\frac{K}{|\alpha| - 1} < \frac{\varepsilon_1}{4}; \quad \left| \frac{b_0}{1+\alpha+\omega} + \frac{b_1}{2+\alpha+\omega} + \ldots + \frac{b_n}{n+1+\alpha+\omega} \right| < \frac{\varepsilon_1}{4}.$$

Par conséquent, si $|\alpha| \geqslant R$, on aura :

$$\left| \frac{K(0)}{1+\alpha} + \int_0^1 t^{\alpha+\omega} Q(t)\,dt \right| < \varepsilon_1.$$

On voit donc que toutes les racines de l'équation

$$\int_0^1 t^{\alpha} K(t)\,dt = 1$$

sont à l'intérieur de la région limitée par la ligne $a_1 = -1$ et par la partie d'un cercle de rayon R avec l'origine comme centre qui se trouve à droite de cette ligne. La fonction

$$\frac{K(0)}{1+\alpha} + \int_0^1 t^{\omega+\alpha} Q(t)\,dt$$

est holomorphe dans toute cette région et sur ses bords, sauf pour le pôle simple $\alpha = -1$; donc, l'équation

$$\int_0^1 t^{\alpha} K(t)\,dt = 1$$

n'a qu'un nombre fini de racines dans cette région. L'équation

$$\frac{K(0)}{1+\alpha} + \int_0^1 t^{\omega+\alpha} Q(t)\,dt = 1$$

admet ces racines, mais elle peut aussi en avoir d'autres sur la droite $a_1 = -1$ ellemême. Décrivons avec toutes ces racines comme centres des petits cercles extérieurs les uns aux autres et tous situés entièrement à droite de la ligne $a_1 = -1$, sauf ceux, s'il y en a, dont les centres se trouvent sur cette ligne. On suppose, de plus, qu'ils sont assez petits pour que *l'on puisse tracer une ligne* $a_1 = -\delta$ *(où l'on a* $0 < \delta < 1$*) qui laisse à sa gauche tous les cercles dont les centres sont sur la droite* $a_1 = -1$, *et à sa droite tous les autres cercles, et la ligne* $a_1 = \gamma$; *nous appelons* D *cette droite.*

Nous montrerons que *l'on peut choisir le polynôme* $P_n(t)$ *tel que l'équation*

$$\int_0^1 t^\alpha P_n(t)\,dt = 1$$

n'ait pas de racine en dehors de ces petits cercles.

En effet, dans le domaine à droite de la ligne $a_1 = -1$ et en dehors des cercles (y comprises la ligne et les circonférences mêmes), la fonction

$$\left| \int_0^1 t^\alpha K(t)\,dt - 1 \right|$$

a une limite inférieure que nous appellerons ζ. Mais nous avons vu que l'on peut choisir $P_n(t)$ tel que l'on ait dans tout ce domaine

$$\left| \int_0^1 t^\alpha K(t)\,dt - \int_0^1 t^\alpha P_n(t)\,dt \right| < \varepsilon\zeta,$$

ε étant arbitrairement petit. On a donc, en dehors des cercles

$$\left| \int_0^1 t^\alpha P_n(t)\,dt - 1 \right| > \zeta(1-\varepsilon),$$

d'où l'on déduit le résultat que nous voulions démontrer.

Il y a plus : *Si* β_s *est une racine quelconque de multiplicité* $p_s + 1$ *de l'équation*

$$\int_0^1 t^\alpha K(t)\,dt = 1,$$

on peut choisir $P_n(t)$ *tel que l'équation*

$$\int_0^1 t^\alpha P_n(t)\,dt = 1$$

ait à l'intérieur du petit cercle O_s, *qui entoure le point* β_s, *des racines dont la somme des multiplicités est exactement* $p_s + 1$, *la propriété ayant lieu pour toutes les racines* β_s.

Nous avons, en effet,

$$p_s + 1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{O_s} \frac{\displaystyle\int_0^1 t^\alpha \log t\, K(t)\,dt}{\displaystyle\int_0^1 t^\alpha K(t)\,dt - 1}\,d\alpha,$$

et la somme des multiplicités des racines de l'équation $\int_0^1 t^\alpha P_n(t)\,dt = 1$ est égale à

$$q_s = \frac{1}{2\pi i}\int_{O_s} \frac{\displaystyle\int_0^1 t^\alpha \log t\, P_n(t)\,dt}{\displaystyle\int_0^1 t^\alpha P_n(t)\,dt - 1}\,d\alpha.$$

Nous pouvons choisir $P_n(t)$ de façon à avoir les fonctions

$$\left|\int_0^1 t^\alpha K(t)\,dt - \int_0^1 t^\alpha P_n(t)\,dt\right|, \qquad \left|\int_0^1 t^\alpha \log t K(t)\,dt - \int_0^1 t^\alpha \log t P_n(t)\,dt\right|$$

aussi petites que l'on veut dans tout le domaine. On peut donc le choisir de manière à avoir l'expression

$$\left|\frac{\int_0^1 t^\alpha \log t K(t)\,dt}{\int_0^1 t^\alpha K(t)\,dt - 1} - \frac{\int_0^1 t^\alpha \log t P_n(t)\,dt}{\int_0^1 t^\alpha P_n(t)\,dt - 1}\right| < \varepsilon,$$

ε étant une quantité aussi petite que l'on veut. On aura alors

$$|p_s + 1 - q_s| < \varepsilon r_s,$$

r_s étant le rayon de O_s. Mais le premier membre de cette inégalité est un entier ou zéro; par conséquent, si l'on a $\varepsilon r_s < 1$, on doit avoir aussi $p_s + 1 = q_s$. Le théorème est ainsi démontré. Il est clair d'ailleurs que les rayons des cercles O_s peuvent être aussi petits que l'on veut; on pourra toujours trouver un polynôme convenable $P_n(t)$.

[**3**] Reprenons après ces digressions l'étude de l'équation

$$\varphi(x) = \psi(x) + \int_0^1 K(x, t)\varphi(tx)\,dt,$$

sous les conditions que nous avons posées au commencement de la section, et en supposant de plus que l'on a :

$$K(t) = K(0) + t^\omega Q(t).$$

Nous obtenons un polynôme d'approximation $P_n(t)$ de l'espèce dont nous venons de parler, et nous écrivons l'équation sous la forme suivante :

$$\varphi(x) = \rho_n(x) + \int_0^1 P_n(t)\varphi(tx)\,dt,$$

en posant

$$\rho_n(x) = \psi(x) + \int_0^1 \eta(x, t)\varphi(tx)\,dt + \int_0^1 \varepsilon_n(t)\varphi(tx)\,dt,$$
$$\eta(x, t) = K(x, t) - K(t), \qquad \varepsilon_n(t) = K(t) - P_n(t).$$

Nous avons $|K(x, t)| < K$, $|P_n(t)| < K$, où K est une quantité fixe; $|\eta(x, t)| < \eta$, une quantité qui tend vers zéro avec x, sauf peut-être pour quelques segments dont la somme n'excède pas l, une quantité arbitrairement petite, et dans lesquels on a $|\eta(x, t)| < 2\mathrm{K}$; on a aussi $|\varepsilon_n(t)| < \varepsilon$, une quantité arbitrairement petite, sauf pour des segments dont la somme est moindre que l, où l'on a $|\varepsilon_n(t)| < 2\mathrm{K}$.

Pour que l'équation sous sa nouvelle forme soit vérifiée, *il faut et il suffit que l'on ait*

$$\varphi(x) = \rho_n(x) + \sum_s x^{\alpha_s}\left\{k_{s0} + k_{s1}\log x + \ldots + k_{sp_s}(\log x)^{p_s}\right\}$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{x^\alpha \int_0^x y^{-1-\alpha}\rho_n(y)\,dy}{H_n(\alpha)}d\alpha + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{x^\alpha \int_a^x y^{-1-\alpha}\rho_n(y)\,dy}{H_n(\alpha)}d\alpha.$$

où l'on pose :

$$H_n(\alpha) = 1 - \int_0^1 t^\alpha P_n(t)\,dt.$$

Le Σ *s'étend à toutes les racines de l'équation* $H_n(\alpha) = 0$ *qui sont à droite de la ligne* $a_1 = -\delta$ *et à l'intérieur des petits cercles* O_s; *les* k *sont des constantes arbitraires;* $p_s + 1$ *est la multiplicité de la racine* α_s, *et nous savons que l'on a* $\Sigma(p_s + 1)$ *égal au nombre des racines de l'équation* $\int_0^1 t^\alpha \mathrm{K}(t)\,dt = 1$, *chacune d'elles étant comptée avec son degré de multiplicité.* Les contours C_1 et C_2 s'obtiennent de la manière suivante : Traçons la ligne $a_1 = -\delta_1$ ayant à sa droite la ligne D et à sa gauche tous les cercles O_s dont les centres sont situés sur la ligne $a_1 = -1$; appelons D_1 cette ligne. Traçons de même la ligne $a_1 = -\delta_2$ ayant à sa gauche la ligne D et à sa droite tous les autres cercles O_s, et appelons-la D_2. Le contour C_2 est entièrement à droite de D_2 et enferme tous les petits cercles dans cette partie du plan; nous avons vu que ceux-ci sont en nombre fini et à distance finie, et par conséquent le contour C_2 peut avoir une longueur bornée. Il se peut qu'il n'en soit pas de même pour le contour C_2; celui-ci est entièrement à gauche de D_1 et doit enfermer toutes les racines de l'équation $H_n(\alpha) = 0$ qui se trouvent dans cette partie du plan. Or, si l'on a

$$P_n(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_N t^N,$$

on aura :

$$H_n(\alpha) = 1 - \frac{a_0}{1+\alpha} - \frac{a_1}{2+\alpha} - \ldots - \frac{a_N}{N+1+\alpha}.$$

L'équation $H_n(\alpha) = 0$ a donc $N + 1$ racines, et si l'on désire une approximation de plus en plus proche de la fonction $\mathrm{K}(t)$, le nombre N peut aller en croissant indéfiniment. Mais le nombre des racines à droite de D_2 est bornée; par conséquent, celles à gauche de D_1 deviennent de plus en plus nombreuses, et il peut arriver que le contour C_1 doive fuir indéfiniment vers l'infini pour les enfermer toutes.

[**4**] A cause de cela, nous allons *effectuer une transformation sur l'intégrale*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{x^\alpha\int_0^x y^{-1-\alpha}\rho_n(y)\,dy}{H_n(\alpha)}\,d\alpha.$$

En posant

$$T_n(\alpha)=\frac{a_0}{1+\alpha}+\frac{a_1}{2+\alpha}+\dots+\frac{a_N}{N+1+\alpha},$$

nous pouvons l'écrire comme il suit :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\left[x^\alpha\int_0^x y^{-1-\alpha}\rho_n(y)\,dy\right]d\alpha+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\left[T_n(\alpha)x^\alpha\int_0^x y^{-1-\alpha}\rho_n(y)\,dy\right]d\alpha$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{\{T_n(\alpha)\}^2x^\alpha\int_0^x y^{-1-\alpha}\rho_n(y)\,dy}{H_n(\alpha)}\,d\alpha.$$

Prenons pour C_1, d'une part, la partie, située à gauche de la ligne D_1, d'un cercle avec l'origine comme centre et de rayon R arbitrairement grand, et, d'autre part, la partie de la ligne D_1 découpée par ce cercle. R doit être assez grand pour que C_1 ait à son intérieur le point $\alpha=-N-1$ et toutes les racines de l'équation $H_n(\alpha)=0$ qui se trouvent à gauche de D_1.

On a alors

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\left[x^\alpha\int_0^x y^{-1-\alpha}\rho_n(y)\,dy\right]d\alpha=0,$$

puisque la fonction de α à intégrer est holomorphe à l'intérieur de C_1. Il faut remarquer que nous supposons que l'on ait

$$|\rho_n(x)|<\lambda x^{-\delta},$$

λ étant une constante. Quand nous aurons trouvé la solution, nous examinerons si cette supposition est légitime.

On trouve aussi, par le théorème de Cauchy,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\left[T_n(\alpha)x^\alpha\int_0^x y^{-1-\alpha}\rho_n(y)\,dy\right]d\alpha=\sum_{r=1}^{r=N+1}x^{-r}\int_0^x y^{-1+r}\rho_n(y)\,dy$$
$$=\frac{1}{x}\int_0^x\sum_{r=0}^{r=N}a^r\left(\frac{y}{x}\right)^r\rho_n(y)\,dy=\frac{1}{x}\int_0^x P_n\left(\frac{y}{x}\right)\rho_n(y)\,dy.$$

Enfin, la troisième intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{\left\{T_n(\alpha)\right\}^2 x^\alpha \int_0^x y^{-1-\alpha}\rho_n(y)\,dy}{H_n(\alpha)}\,d\alpha$$

est égale à l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{D_1}\frac{\left\{T_n(\alpha)\right\}^2 x^\alpha \int_0^x y^{-1-\alpha}\rho_n(y)\,dy}{H_n(\alpha)}\,d\alpha$$

prise tout le long de la droite infinie D_1 dans la direction qui mène du côté négatif au côté positif de l'axe réel.

Nous pouvons, en effet, trouver une quantité R' telle que l'on ait, pour $|\alpha| > R'$,

$$|T_n(\alpha)| < \frac{E}{|\alpha|},$$

E étant une quantité fixe. Prenons R plus grand que R' et E.

Nous avons sur C_1 :

$$\left| x^\alpha \int_0^x y^{-1-\alpha}\rho_n(y)\,dy \right| < \lambda x^{a_1}\int_0^x y^{-1-a_1-\delta}\,dy = \frac{\lambda x^{-\delta}}{-a_1-\delta} \leqq \frac{\lambda x^{-\delta}}{\delta_1-\delta}.$$

Par conséquent, l'intégrale prise sur la partie du cercle de rayon R sera moindre en valeur absolue que

$$\frac{\pi R}{2\pi}\cdot\frac{\left(\frac{E}{R}\right)^2\frac{\lambda x^{-\delta}}{\delta_1-\delta}}{1-\frac{E}{R}},$$

une quantité qui tend vers zéro comme R croît indéfiniment.

Sur la droite D_1, nous avons $|H_n(\alpha)|$ plus grand qu'une certaine quantité ζ; donc l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\left\{T_n(\alpha)\right\}^2 x^\alpha \int_0^x y^{-1-\alpha}\rho_n(y)\,dy}{H_n(\alpha)}\,d\alpha$$

prise sur une portion quelconque de cette droite a une valeur absolue inférieure à l'intégrale

$$\frac{\lambda x^{-\delta}}{2\pi\zeta(\delta_1-\delta)}\int\left\{\left|\frac{a_0}{1+\alpha}\right|+\left|\frac{a_1}{2+\alpha}\right|+\ldots+\left|\frac{a_N}{N+1+\alpha}\right|\right\}^2|d\alpha|$$

prise sur la même portion. Mais cette intégrale garde un sens lorsqu'elle est prise sur la droite infinie D_1; l'égalité que nous voulions démontrer est donc établie.

[5] Ainsi donc *notre équation fonctionnelle est devenue la suivante :*

$$\varphi(x) = \sum_s x^{\alpha_s} \left\{ k_{s0} + k_{s1} \log x + \ldots + k_{sp_s} (\log x)^{p_s} \right\} + \rho_n(x)$$
$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{x^\alpha \int_a^x y^{-1-\alpha} \rho_n(y)\, dy}{H_n(\alpha)} d\alpha + \frac{1}{x} \int_0^x P_n\left(\frac{y}{x}\right) \rho_n(y)\, dy$$
$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{D_1} \frac{\left\{T_n(\alpha)\right\}^2 x^\alpha \int_0^x y^{-1-\alpha} \rho_n(y)}{H_n(\alpha)} d\alpha.$$

Nous pouvons l'écrire *sous la forme suivante :*

$$\varphi(x) = F_n(x) + S_n\varphi(x),$$

où l'on a

$$F_n(x) = \sum_s x^{\alpha_s} \left\{ k_{s0} + k_{s1} \log x + \ldots + k_{sp_s} (\log x)^{p_s} \right\} + \psi(x)$$
$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{x^\alpha \int_a^x y^{-1-\alpha} \psi(y)\, dy}{H_n(\alpha)} d\alpha + \frac{1}{x} \int_0^x P_n\left(\frac{y}{x}\right) \psi(y)\, dy$$
$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{D_1} \frac{\left\{T_n(\alpha)\right\}^2 x^\alpha \int_0^x y^{-1-\alpha} \psi(y)\, dy}{H_n(\alpha)} d\alpha,$$

et $S_n\varphi(x)$ *est donné par la formule suivante :*

$$S_n\varphi(x) = \int_0^1 \left\{\eta(x, t) + \varepsilon_n(t)\right\} \varphi(tx)\, dt + \frac{1}{x} \int_0^x dy\, P_n\left(\frac{y}{x}\right) \int_0^1 \left\{\eta(y, t) + \varepsilon_n(t)\right\} \varphi(ty)\, dt$$
$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{x^\alpha \int_a^x dy\, y^{-1-\alpha} \int_0^1 \left\{\eta(y, t) + \varepsilon_n(t)\right\} \varphi(ty)\, dt}{H_n(\alpha)} d\alpha$$
$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{D_1} \frac{\left\{T_n(\alpha)\right\}^2 x^\alpha \int_0^x dy\, y^{-1-\alpha} \int_0^1 \left\{\eta(y, t) + \varepsilon_n(t)\right\} \varphi(ty)\, dt}{H_n(\alpha)} d\alpha.$$

Nous allons démontrer que *si la fonction* $K(t)$ *satisfait à certaines conditions et si l'on choisit convenablement le polynôme* $P_n(t)$, *cette équation peut se résoudre par les approximations suivantes :*

$$\varphi_0(x) = F_n(x),$$
$$\varphi_1(x) = F_n(x) + S_n\varphi_0(x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_{m+1}(x) = F_n(x) + S_n\varphi_m(x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La solution sera donnée par la série

$$\varphi(x) = u_0(x) + u_1(x) + \ldots u_m(x) + \ldots,$$

où l'on a

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \varphi_0(x), \\ u_1(x) &= \varphi_1(x) - \varphi_0(x), \\ &\ldots\ldots\ldots \\ u_m(x) &= \varphi_m(x) - \varphi_{m-1}(x), \\ &\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et par conséquent

$$u_0(x) = \mathrm{F}_n(x), \qquad u_1(x) = \mathrm{S}_n u_0(x), \qquad \ldots, \qquad u_{m+1}(x) = \mathrm{S}_n u_m(x), \qquad \ldots.$$

[**6**] Pour le démontrer, nous allons d'abord trouver une limite supérieure de $|\mathrm{F}_n(x)|$. Nous avons évidemment, dans un domaine près de l'origine,

$$\left| \sum_s x^{\alpha_s} \left\{ k_{s0} + k_{s1} \log x + \ldots + k_{sp_s} (\log x)^{p_s} \right\} + \psi(x) \right| < \mathrm{M}_1 x^{-\delta},$$

M_1 étant une constante.

A cause de l'inégalité

$$\left| \mathrm{P}_n\left(\frac{y}{x}\right) \right| < \mathrm{K}$$

pour $0 \leqslant y \leqslant x$, nous avons

$$\left| \frac{1}{x} \int_0^x \mathrm{P}_n\left(\frac{y}{x}\right) \psi(y)\, dy \right| < \frac{\mathrm{MK}}{x} \int_0^x y^\gamma\, dy = \frac{\mathrm{MK} x^\gamma}{\gamma + 1} < \mathrm{M}_2 x^{-\delta}.$$

M_2 étant une constante.

Nous avons démontré que l'on a, en dehors des petits cercles O_s,

$$\left| \mathrm{H}_n(\alpha) \right| = \left| 1 - \int_0^1 t^\alpha \mathrm{P}_n(t)\, dt \right| > \zeta(1 - \varepsilon),$$

ε étant aussi petit que l'on veut. Nous pouvons donc écrire

$$|\mathrm{H}_n(\alpha)| > \zeta_1,$$

ζ_1 étant une quantité fixe, inégalité qui aura lieu sur le contour C_2 et sur la droite D_1. Cela nous donne, comme nous l'avons démontré dans la section dernière,

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathrm{C}_2} \frac{x^\alpha \int_a^x y^{-1-\alpha} \psi(y)\, dy}{\mathrm{H}_n(\alpha)}\, d\alpha \right| < \frac{\mathrm{ML}_2 x^{-\delta}}{2\pi \zeta_1 (\delta - \delta_2)},$$

L_2 étant la longueur de C_2. Nous avons donc

$$\left| \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{x^\alpha \displaystyle\int_a^x y^{-1-\alpha}\psi(y)\,dy}{H_n(\alpha)}\,d\alpha \right| < M_3 x^{-\delta},$$

M_3 étant une constante.

Il nous reste à trouver une limite supérieure de la fonction

$$\left| \frac{1}{2\pi i}\int_{D_1} \frac{\left\{T_n(\alpha)\right\}^2 x^\alpha \displaystyle\int_0^x y^{-1-\alpha}\psi(y)\,dy}{H_n(\alpha)}\,d\alpha \right|.$$

Nous avons

$$T_n(\alpha) = \int_0^1 t^\alpha P_n(t)\,dt = \frac{P_n(1)}{1+\alpha} - \frac{1}{1+\alpha}\int_0^1 t^{1+\alpha} P_n'(t)\,dt.$$

Sur D_1 on a $\alpha = -\delta_1 + ib$, b étant une quantité réelle qui varie de $-\infty$ à $+\infty$; il s'agit donc de trouver une fonction majorante pour la fonction de b

$$\int_0^1 t^{\xi+ib} P_n'(t)\,dt,$$

où l'on pose $\xi = 1 - \delta_1$. Nous devons examiner les deux intégrales

$$\int_0^1 t^\xi \cos(b \log t) P_n'(t)\,dt$$

et

$$\int_0^1 t^\xi \sin(b \log t) P_n'(t)\,dt.$$

Il est clair que le signe de b n'a pas d'importance; supposons-le positif. Considérons la première de ces intégrales. La fonction de t, $t^\xi \cos(b \log t)$, a des extréma aux points donnés par l'équation

$$\xi t^{\xi-1} \cos(b \log t) - b t^{\xi-1} \sin(b \log t) = 0,$$

laquelle nous donne

$$\operatorname{tang}(b \log t) = \frac{\xi}{b},$$

et

$$t = e^{\frac{1}{b}\operatorname{arc\,tang}\frac{\xi}{b}}.$$

Soit θ la valeur de l'expression arc tang $\frac{\xi}{b}$ qui est comprise entre o et $\frac{\pi}{2}$; alors les valeurs de t entre o et 1 seront :

$$e^{\frac{\theta-\pi}{b}}, \quad e^{\frac{\theta-2\pi}{b}}, \quad \ldots\ldots, \quad e^{\frac{\theta-m\pi}{b}}, \quad \ldots\ldots$$

Appelons-les $t_1, t_2, \ldots, t_m, \ldots$; la valeur $t=1$ est aussi un extrémum dans l'intervalle $(0, 1)$. Les valeurs de la fonction $t^{\xi}\cos(b\log t)$ qui correspondent aux arguments $t=1$, $t=t_1, \ldots, t=t_m, \ldots$, sont respectivement

$$1, \quad -e^{\frac{\xi(\theta-\pi)}{b}}\cos\theta, \quad e^{\frac{\xi(\theta-2\pi)}{b}}\cos\theta, \quad \ldots\ldots, \quad (-1)^m e^{\frac{\xi(\theta-m\pi)}{b}}\cos\theta, \quad \ldots\ldots$$

Nous obtenons donc, par le second théorème de la moyenne pour les intégrales définies,

$$\int_{t_{m+1}}^{t_m} t^{\xi}\cos(b\log t)\,P_n'(t)\,dt = (-1)^{m+1} e^{\frac{\xi\{\theta-(m+1)\pi\}}{b}}\cos\theta\int_{t_{m+1}}^{\tau_m} P_n'(t)\,dt$$
$$+(-1)^m e^{\frac{\xi(\theta-m\pi)}{b}}\cos\theta\int_{\tau_m}^{t_m} P_n'(t)\,dt,$$

τ_m étant une quantité entre t_m et t_{m+1}. Cette expression est égale à

$$(-1)^{m+1} e^{\frac{\xi\{\theta-(m+1)\pi\}}{b}}\cos\theta\Big[P_n(\tau_m)-P_n(t_{m+1})\Big]+(-1)^m e^{\frac{\xi(\theta-m\pi)}{b}}\cos\theta\Big[P_n(t_m)-P_n(\tau_m)\Big],$$

et nous trouvons des expressions analogues pour l'intégrale prise dans chaque intervalle. Nous obtenons, en les ajoutant,

$$\int_0^1 t^{\xi}\cos(b\log t)\,P_n'(t)\,dt = \Big[P_n(1)-P_n(\tau_0)\Big] - e^{\frac{\xi(\theta-\pi)}{b}}\cos\theta\Big[P_n(\tau_0)-P_n(\tau_1)\Big]+\ldots$$
$$+(-1)^m e^{\frac{\xi(\theta-m\pi)}{b}}\cos\theta\Big[P_n(\tau_{m-1})-P_n(\tau_m)\Big]+\ldots,$$

τ_0 étant entre 1 et t_1, τ_1 entre t_1 et t_2, et ainsi de suite. Nous sommes sûrs de la convergence de cette série; puisque l'on doit avoir $|P_n(\tau_{m-1})-P_n(\tau_m)|<2K$, elle aura comme série majorante la suivante :

$$2K+2Ke^{\frac{\xi\theta}{b}}\cos\theta\Big[e^{-\frac{\pi\xi}{b}}+e^{-\frac{2\pi\xi}{b}}+\ldots+e^{-\frac{m\pi\xi}{b}}+\ldots\Big],$$

laquelle est une série géométrique de rapport $e^{-\frac{\pi\xi}{b}}$ moindre que l'unité.

Nous faisons de même pour l'intégrale

$$\int_0^1 t^\xi \sin(b \log t) P_n'(t)\, dt.$$

La fonction de t, $t^\xi \sin(b \log t)$, a des extréma aux points donnés par l'équation

$$\xi t^{\xi-1} \sin(b \log t) + b t^{\xi-1} \cos(b \log t) = 0,$$

laquelle nous donne

$$\operatorname{tang}(b \log t) = -\frac{b}{\xi},$$

et

$$t = e^{\frac{1}{b} \operatorname{arc\,tang}\left(-\frac{b}{\xi}\right)}.$$

Soit υ la valeur de l'expression arc tang $\left(-\frac{b}{\xi}\right)$ comprise entre o et π; alors les valeurs de t qui donnent des extréma dans l'intervalle (o, 1) sont les suivantes :

$$1, \quad e^{\frac{\upsilon-\pi}{b}}, \quad e^{\frac{\upsilon-2\pi}{b}}, \quad \ldots\ldots, \quad e^{\frac{\upsilon-m\pi}{b}}, \quad \ldots\ldots,$$

et les extréma qui leur correspondent sont respectivement ceux-ci :

$$0, \quad -e^{\frac{\xi(\upsilon-\pi)}{b}} \sin\upsilon, \quad e^{\frac{\xi(\upsilon-2\pi)}{b}} \sin\upsilon, \quad \ldots\ldots, \quad (-1)^m e^{\frac{\xi(\upsilon-m\pi)}{b}} \sin\upsilon, \quad \ldots\ldots$$

Le second théorème de la moyenne pour les intégrales définies nous donne :

$$\int_{t'_{m+1}}^{t'_m} t^\xi \sin(b\log t) P_n'(t)\,dt = (-1)^{m+1} e^{\frac{\xi[\upsilon-(m+1)\pi]}{b}} \sin\upsilon \int_{t'_{m+1}}^{\tau'_m} P_n'(t)\,dt$$
$$+ (-1)^m e^{\frac{\xi(\upsilon-m\pi)}{b}} \sin\upsilon \int_{\tau'_m}^{t'_m} P_n'(t)\,dt,$$

où l'on appelle $1, t_1', t_2', \ldots, t_m', \ldots$ les valeurs de t qui donnent des extréma, et l'on a

$$1 \geqslant \tau_0' \geqslant t_1' \geqslant \tau_1' \geqslant t_2' \geqslant \ldots \geqslant t'_m \geqslant \tau'_m \geqslant t'_{m+1} \ldots.$$

Nous avons donc

$$\int_{t'_{m+1}}^{t'_m} t^\xi \sin(b\log t) P_n'(t)\,dt = (-1)^{m+1} e^{\frac{\xi[\upsilon-(m+1)\pi]}{b}} \sin\upsilon \left[P_n(\tau'_m) - P_n(t'_{m+1})\right]$$
$$+ (-1)^m e^{\frac{\xi(\upsilon-m\pi)}{b}} \sin\upsilon \left[P_n(t'_m) - P_n(\tau'_m)\right];$$

d'où l'on obtient, en ajoutant toutes les égalités analogues à celle-là,

$$\int_0^1 t^{\xi}\sin(b\log t)\mathrm{P}_n'(t)\,dt = -e^{\frac{\xi(\upsilon-\pi)}{b}}\sin\upsilon\left[\mathrm{P}_n(\tau_0')-\mathrm{P}_n(\tau_1')\right]+\dots$$
$$+(-1)^m e^{\frac{\xi(\upsilon-m\pi)}{b}}\sin\upsilon\left[\mathrm{P}_n(\tau'_{m-1})-\mathrm{P}_n(\tau'_m)\right]+\dots.$$

Une série majorante pour cette série est la suivante :

$$2\mathrm{K}e^{\frac{\xi\upsilon}{b}}\sin\upsilon\left[e^{-\frac{\pi\xi}{b}}+e^{-\frac{2\pi\xi}{b}}+\dots+e^{-\frac{m\pi\xi}{b}}+\dots\right].$$

Nous avons donc

$$\left|\int_0^1 t^{\xi}\cos(b\log t)\mathrm{P}_n'(t)\,dt\right| < 2\mathrm{K}+\frac{2\mathrm{K}e^{\frac{\xi(\theta-\pi)}{b}}\cos\theta}{1-e^{-\frac{\pi\xi}{b}}},$$

et

$$\left|\int_0^1 t^{\xi}\sin(b\log t)\mathrm{P}_n'(t)\,dt\right| < \frac{2\mathrm{K}e^{\frac{\xi(\upsilon-\pi)}{b}}\sin\upsilon}{1-e^{-\frac{\pi\xi}{b}}}.$$

Lorsque $|b|$ est plus grand que $\pi\xi$, nous avons

$$1-e^{-\frac{\pi\xi}{b}} > \frac{\pi\xi}{b}-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi\xi}{b}\right)^2 > \frac{\pi\xi}{2b}.$$

Nous avons par conséquent, sur D_1, pour $|b|>\pi\xi$,

$$\left|\int_0^1 t^{1+\alpha}\mathrm{P}_n'(t)\,dt\right| \leqslant \left|\int_0^1 t^{\xi}\cos(b\log t)\mathrm{P}_n'(t)\,dt\right| + \left|\int_0^1 t^{\xi}\sin(b\log t)\mathrm{P}_n'(t)\,dt\right|$$
$$< 2\mathrm{K}\left[1+\frac{2be^{\frac{\xi(\theta-\pi)}{b}}\cos\theta}{\pi\xi}+\frac{2be^{\frac{\xi(\upsilon-\pi)}{b}}\sin\upsilon}{\pi\xi}\right] < \mathrm{N}_1 b,$$

N_1 étant un nombre fixe. Mais cette inégalité ne nous sert à rien pour l'intégration sur la droite infinie D_1, puisque l'intégrale $\int\frac{b^2\,db}{|1+\alpha|^2}$, prise sur cette droite, n'a pas de sens.

Pour trouver une fonction majorante qui soit intégrable, nous allons faire quelques hypothèses sur $\mathrm{K}(t)$ et $\mathrm{P}_n(t)$. *Supposons d'abord que* $\mathrm{K}(t)$ *soit à variation bornée et que la variation du polynôme* $\mathrm{P}_n(t)$, *trouvé par la méthode de la proposition* I, *soit inférieure à une constante* B.

Nous avons alors

$$\left|\int_0^1 t^\xi \cos(b\log t)\mathrm{P}_n'(t)dt\right|$$

$$= \left|\left[\mathrm{P}_n(1)-\mathrm{P}_n(\tau_0)\right] - e^{\frac{\xi(\theta-\pi)}{b}}\cos\theta\left[\mathrm{P}_n(\tau_0)-\mathrm{P}_n(\tau_1)\right]+\cdots\right.$$
$$\left. + (-1)^m e^{\frac{\xi(\theta-m\pi)}{b}}\left[\mathrm{P}_n(\tau_{m-1})-\mathrm{P}_n(\tau_m)\right]+\cdots\right|$$

$$< |\mathrm{P}_n(1)-\mathrm{P}_n(\tau_0)| + |\mathrm{P}_n(\tau_0)-\mathrm{P}_n(\tau_1)| + \cdots + |\mathrm{P}_n(\tau_{m-1})-\mathrm{P}_n(\tau_m)| + \cdots < \mathrm{B},$$

et l'on a de même

$$\left|\int_0^1 t^\xi \sin(b\log t)\mathrm{P}_n'(t)dt\right| < \mathrm{B}.$$

Nous obtenons, par conséquent,

$$\left|\int_0^1 t^{1+\alpha}\mathrm{P}_n'(t)dt\right| < 2\mathrm{B},$$

ce qui nous donne :

$$|\mathrm{T}_n(\alpha)| = \left|\int_0^1 t^\alpha \mathrm{P}_n(t)dt\right| = \left|\frac{\mathrm{P}_n(1)}{1+\alpha} - \frac{1}{1+\alpha}\int_0^1 t^{1+\alpha}\mathrm{P}_n'(t)dt\right| < \frac{\mathrm{K}+2\mathrm{B}}{|1+\alpha|}.$$

De là, on déduit :

$$\int_{\mathrm{D}_1} |\mathrm{T}_n(\alpha)|^2\,|d\alpha| < \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\mathrm{K}+2\mathrm{B})^2 db}{\xi^2+b^2} = \frac{\pi}{\xi}(\mathrm{K}+2\mathrm{B})^2.$$

Si la fonction $\mathrm{K}(t)$ *n'est pas à variation bornée, nous supposons que l'on ait, pour* $t \geqslant \tau$,

$$|\mathrm{K}(t)-\mathrm{K}(\tau)| < \mathrm{A}(t-\tau)^\beta,$$

A *étant une constante et* β *étant plus grand que* $\frac{1}{2}$.

Trouvons par la proposition III le polynôme $\mathrm{P}_n(t)$ de façon à avoir

$$|\mathrm{P}_n(t)-\mathrm{P}_n(\tau)| < \mathrm{A}'(t-\tau)^\beta,$$

A' étant une constante fixée à l'avance ($>$ A).

Nous avons :

$$|\tau_{m-1} - \tau_m| < e^{\frac{\theta-(m-1)\pi}{b}} - e^{\frac{\theta-(m+1)\pi}{b}} = e^{\frac{\theta-(m-1)\pi}{b}}\left(1 - e^{-\frac{2\pi}{b}}\right),$$

$$|\tau'_{m-1} - \tau'_m| < e^{\frac{\theta-(m-1)\pi}{b}}\left(1 - e^{-\frac{2\pi}{b}}\right).$$

Ces inégalités nous donnent

$$\left|\int_0^1 t^\xi \cos(b\log t)\,P_n'(t)\,dt\right|$$

$$< |P_n(1) - P_n(\tau_0)| + e^{\frac{\xi(\theta-\pi)}{b}}|P_n(\tau_0) - P_n(\tau_1)| + \ldots$$

$$+ e^{\frac{\xi(\theta-m\pi)}{b}}|P_n(\tau_{m-1}) - P_n(\tau_m)| + \ldots$$

$$< 2K + A'\sum_{m=1}^{m=\infty} e^{\frac{\xi(\theta-m\pi)+\beta\left\{\theta-(m-1)\pi\right\}}{b}}\left(1 - e^{-\frac{2\pi}{b}}\right)^\beta$$

$$= 2K + A'\frac{e^{\frac{\xi\theta-\xi\pi+\beta\theta}{b}}\left(1 - e^{-\frac{2\pi}{b}}\right)^\beta}{1 - e^{-\frac{\pi(\xi+\beta)}{b}}}.$$

Nous avons

$$1 - e^{-\frac{2\pi}{b}} < \frac{2\pi}{b} \text{ pour } b > 2\pi,$$

et aussi

$$1 - e^{-\frac{\pi(\xi+\beta)}{b}} > \frac{\pi(\xi+\beta)}{b} - \frac{\pi^2(\xi+\beta)^2}{2b^2}, \text{ pour } b > \pi(\xi+\beta).$$

Il est donc clair qu'à partir d'une certaine valeur finie de $|b|$, on aura

$$\left|\int_0^1 t^\xi \cos(b\log t)\,P_n'(t)\right| dt < 2K + A''b^{1-\beta} < N'b^{1-\beta},$$

A'' et N' étant des quantités fixes.

On trouvera de même

$$\left|\int_0^1 t^\xi \sin(b\log t)\,P_n'(t)\,dt\right| < N''b^{1-\beta},$$

N'' étant un nombre fixe. En nous servant de ces deux résultats, nous trouvons

$$\left| \int_0^1 t^{1+\alpha} P_n'(t)\, dt \right| < N_2 b^{1-\beta},$$

N_2 étant un nombre fixe.

Nous avons, par conséquent, à partir d'une valeur finie de $|b|$,

$$\left| T_n(\alpha) \right|^2 = \left| \int_0^1 t^\alpha P_n(t)\, dt \right|^2 < \frac{(K + N_2 b^{1-\beta})^2}{|1+\alpha|^2} = \frac{(K + N_2 b^{1-\beta})^2}{\xi^2 + b^2};$$

et il est évident qu'à partir d'une certaine valeur de b, on a

$$\frac{(K + N b^{1-\beta})^2}{\xi^2 + b^2} < \frac{N_3}{b^{2\beta}},$$

N_3 étant une quantité quelconque plus grande que N. Nous avons donc, pour $b > b_1$, un nombre fixe,

$$|T_n(\alpha)|^2 < \frac{N_3}{b^{2\beta}},$$

d'où l'on déduit

$$\int_{D_1} |T_n(\alpha)|^2\, |d\alpha| < \int_{-b_1}^{+b_1} |T_n(\alpha)|^2\, db + 2 \int_{b_1}^{\infty} \frac{N_3\, db}{b^{2\beta}}.$$

La fonction $T_n(\alpha)$ reste toujours bornée sur la droite D_1, et nous avons $2\beta > 1$, ce qui nous donne :

$$\int_{b_1}^{\infty} \frac{db}{b^{2\beta}} = \frac{b_1^{1-2\beta}}{1-2\beta}.$$

On voit donc que *l'intégrale*

$$\int_{D_1} |T_n(\alpha)|^2\, |d\alpha|$$

reste toujours bornée.

Enfin, supposons que *l'on ait*

$$K(t) = X(t) + Y(t),$$

où la fonction $X(t)$ *est à variation bornée dans l'intervalle* $0 \leqslant t \leqslant 1$, *et* $Y(t)$ *satisfait dans cet intervalle à la condition de Lipschitz généralisée*

$$|Y(t) - Y(\tau)| < A(t-\tau)^\beta, \qquad \left(t > \tau;\quad \beta > \frac{1}{2}\right).$$

Faisons, d'après la proposition II, son approximation par un polynôme $X_n(t)$; et faisons, d'après la proposition III, l'approximation de $Y(t)$ par un polynôme $Y_n(t)$. En prenant $P_n(t) = X_n(t) + Y_n(t)$ nous trouvons :

$$\int_0^1 t^{\xi-ib} P_n'(t)\,dt = \int_0^1 t^{\xi+ib} X_n'(t)\,dt + \int_0^1 t^{\xi+ib} Y_n'(t)\,dt.$$

Nous avons démontré que chacune de ces intégrales reste bornée; par conséquent, *dans ce cas aussi, l'intégrale*

$$\int_0^1 |T_n(\alpha)|^2\,|d\alpha|$$

reste toujours bornée.

Nous retenons cette dernière hypothèse sur la fonction $K(t)$; elle comprend comme cas particuliers les deux autres qui l'ont précédée. Nous aurons donc toujours

$$\int_{D_1} |T_n(\alpha)|^2\,|d\alpha| < A_1,$$

A_1 étant un nombre fixe. On déduit de là

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{D_1} \frac{\left\{T_n(\alpha)\right\}^2 x^\alpha \int_0^x y^{-1-\alpha}\psi(y)\,dy}{H_n(\alpha)}\,d\alpha \right|$$
$$< \frac{1}{2\pi\zeta_1} \times M x^{-\delta_1} \int_0^x y^{-1+\delta_1+\gamma}\,dy \times \int_{D_1} |T_n(\alpha)|^2\,|d\alpha|$$
$$< \frac{MA_1 x^\gamma}{2\pi\zeta_1(\delta_1+\gamma)} < \frac{MA_1 x^{-\delta}}{2\pi\zeta_1(\delta_1-\delta)} < M_4 x^{-\delta},$$

M_4 étant une quantité fixe.

En posant maintenant

$$M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = M',$$

nous obtenons, en nous rappelant les résultats déjà établis,

$$|u_0(x)| = |F_n(x)| < M' x^{-\delta},$$

M' *étant un nombre fixe indépendant du degré du polynôme* $P_n(t)$.

[7] *Nous trouverons maintenant une limite supérieure de* $|u_1(x)|$. Nous avons :

$$
\begin{aligned}
u_1(x) &= S_n u_0(x) \\
&= \int_0^1 \left\{ \eta(x,t) + \varepsilon_n(t) \right\} u_0(tx)dt + \frac{1}{x}\int_0^x dy P_n\left(\frac{y}{x}\right)\int_0^1 \left\{ \eta(y,t) + \varepsilon_n(t) \right\} u_0(ty)dt \\
&+ \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{x^\alpha \displaystyle\int_a^x dy\, y^{-1-\alpha} \int_0^1 \left\{ \eta(y,t) + \varepsilon_n(t) \right\} u_0(ty)dt}{H_n(\alpha)} d\alpha \\
&+ \frac{1}{2\pi i}\int_{D_1} \frac{\left\{ T_n(\alpha) \right\}^2 x^\alpha \displaystyle\int_0^x dy\, y^{-1-\alpha} \int_0^1 \left\{ \eta(y,t) + \varepsilon_n(t) \right\} u_0(ty)dt}{H_n(\alpha)} d\alpha.
\end{aligned}
$$

Nous savons que l'on a $|\eta(x,t)| < \eta$ et $|\varepsilon_n(t)| < \varepsilon$, sauf pour des segments dont la somme l est arbitrairement petite, dans lesquels on a $|\eta(x,t)| < 2K$ et $|\varepsilon_n(t)| < 2K$. *On trouve, par conséquent,*

$$
\begin{aligned}
\left| \int_0^1 \left\{ \eta(x,t) + \varepsilon_n(t) \right\} u_0(tx)dt \right| &< M'(\eta + \varepsilon)x^{-\delta} \int_0^1 t^{-\delta} dt + 2M'Kx^{-\delta}\int_0^l t^{-\delta} dt \\
&= M'x^{-\delta}\left[\frac{\eta + \varepsilon + 2Kl^{1-\delta}}{1-\delta}\right].
\end{aligned}
$$

On obtient alors, comme dans le numéro précédent,

$$
\left| \frac{1}{x}\int_0^x dy P_n\left(\frac{y}{x}\right)\int_0^1 \left\{ \eta(y,t) + \varepsilon_n(t) \right\} u_0(ty)dt \right| < \frac{KM'x^{-\delta}}{1-\delta}\left[\frac{\eta + \varepsilon + 2Kl^{1-\delta}}{1-\delta}\right],
$$

et

$$
\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{x^\alpha \displaystyle\int_a^x dy\, y^{-1-\alpha} \int_0^1 \left\{ \eta(y,t) + \varepsilon_n(t) \right\} u_0(ty)dt}{H_n(\alpha)} d\alpha \right| \\
&\qquad < \frac{L_2 M'x^{-\delta}}{2\pi\zeta_1(\delta - \delta_2)}\left[\frac{\eta + \varepsilon + 2Kl^{1-\delta}}{1-\delta}\right],
\end{aligned}
$$

et enfin

$$
\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{2\pi i}\int_{D_1} \frac{\left\{ T_n(\alpha) \right\}^2 x^\alpha \displaystyle\int_0^x dy\, y^{-1-\alpha} \int_0^1 \left\{ \eta(y,t) + \varepsilon_n(t) \right\} u_0(ty)dt}{H_n(\alpha)} d\alpha \right| \\
&\qquad < \frac{A_1 M'x^{-\delta}}{2\pi\zeta_1(\delta_1 - \delta)}\left[\frac{\eta + \varepsilon + 2Kl^{1-\delta}}{1-\delta}\right].
\end{aligned}
$$

Nous déduisons de ces inégalités :

$$\left|u_1(x)\right| = \left|S_n u_0(x)\right|$$

$$< M'x^{-\delta}\left[1 + \frac{K}{1-\delta} + \frac{L_2}{2\pi\zeta_1(\delta-\delta_2)} + \frac{A_1}{2\pi\zeta_1(\delta_1-\delta)}\right]\left[\frac{\eta+\varepsilon+2Kl^{1-\delta}}{1-\delta}\right].$$

La quantité

$$M'' = 1 + \frac{K}{1-\delta} + \frac{L_2}{2\pi\zeta_1(\delta-\delta_2)} + \frac{A_1}{2\pi\zeta_1(\delta_1-\delta)}$$

est fixe dès que l'on a fixé les petits cercles O_s et les droites D, D_1, D_2. La quantité

$$\varepsilon'' = \frac{\eta+\varepsilon+2Kl^{1-\delta}}{1-\delta}$$

peut être rendue arbitrairement petite, puisque ε et l sont des arbitrairement petits, et η devient aussi petit que l'on veut si l'on prend le domaine de x suffisamment petit. Choisissons donc ces trois quantités de façon à avoir

$$M''\varepsilon'' < q < 1.$$

[**8**] Nous avons maintenant

$$|u_0(x)| = |F_n(x)| < M'x^{-\delta},$$
$$|u_1(x)| = |S_n u_0(x)| < qM'x^{-\delta}.$$

De même, on trouve

$$|u_2(x)| = |S_n u_1(x)| < q^2 M'x^{-\delta},$$

et, en général,

$$|u_m(x)| = |S_n u_{m-1}(x)| < q^m M'x^{-\delta}.$$

Par conséquent, *la série*

$$\varphi(x) = u_0(x) + u_1(x) + \ldots + u_m(x) + \ldots$$

est absolument convergente et moindre en valeur absolue que $\dfrac{M'x^{-\delta}}{1-q}$. *On voit facilement qu'elle satisfait à l'équation*

$$\varphi(x) = F_n(x) + S_n\varphi(x).$$

Nous avons, en effet,

$$S_n\varphi(x) = S_n[u_0(x) + u_1(x) + \ldots + u_m(x)] + S_n R_m(x),$$

où l'on pose

$$R_m(x) = u_{m+1}(x) + u_{m+2}(x) + \ldots.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} S_n\varphi(x) &= u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_{m+1}(x) + S_n R_m(x) \\ &= \varphi(x) - u_0(x) - R_{m+1}(x) + S_n R_m(x). \end{aligned}$$

On trouve par conséquent

$$|\varphi(x) - F_n(x) - S_n\varphi(x)| \leqslant |R_{m+1}(x)| + |S_n R_m(x)|,$$

quel que soit le nombre m. Mais nous avons

$$|R_m(x)| < \frac{q^{m+1} M' x^{-\delta}}{1-q},$$

d'où il suit que l'on a :

$$|S_n R_m(x)| < \frac{q^{m+2} M' x^{-\delta}}{1-q}.$$

Cela nous donne

$$|\varphi(x) - F_n(x) - S_n\varphi(x)| < \frac{2q^{m+2} M' x^{-\delta}}{1-q},$$

aussi grand que soit m. Cela ne se peut que si l'on a :

$$\varphi(x) = F_n(x) + S_n\varphi(x).$$

Cela établi, il est aisé de voir que la marche entière de notre démonstration peut être parcourue en sens inverse. La seule supposition faite était que l'on a

$$\left|\rho_n(x)\right| = \left|\psi(x) + \int_0^1 \left\{ \eta(x, t) + \varepsilon_n(t) \right\} \varphi(tx)\right| < \lambda x^{-\delta},$$

λ étant une constante; et nous voyons qu'elle était justifiée. On a, en effet,

$$|\rho_n(x)| < M x^{\gamma} + \frac{M' x^{-\delta}}{1-q} \left[\frac{\eta + \varepsilon + 2K l^{1-\delta}}{1-\delta} \right].$$

Nous pouvons donc énoncer le résultat de la manière suivante :

Considérons l'équation

$$\varphi(x) = \psi(x) + \int_0^1 K(x, t)\varphi(tx)\,dt$$

où l'on a $|\psi(x)| < Mx^{\gamma}$, *la partie réelle de* γ *étant supérieure à* -1, *et* M *étant une constante; on suppose que la fonction* $\psi(x)$ *soit continue dans un intervalle* (o, b), *b étant une quantité positive, sauf peut-être pour un ensemble de points de mesure nulle. La fonction* $K(x, t)$ *est bornée dans le domaine* $0 \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, *et la fonction*

$\eta(x, t) = K(x, t) - K(t)$ *tend vers zéro avec* x, *sauf peut-être pour un ensemble de points de mesure nulle. On suppose que l'on ait*

$$K(t) = K(0, t) = X(t) + Y(t)$$

où la fonction $X(t)$ *est à variation bornée, dans l'intervalle* $0 \leqslant t \leqslant 1$, *et la fonction* $Y(t)$ *satisfait, dans la même intervalle, à la condition généralisée de Lipschitz*

$$|Y(t) - Y(\tau)| < A(t - \tau)^{\beta},$$

où l'on a $t > \tau$, $\beta > \frac{1}{2}$, *et* A *est une constante. On suppose aussi que l'on ait*

$$K(t) = K(0) + t^{\omega} Q(t),$$

où $Q(t)$ *est une fonction qui reste bornée dans l'intervalle* $0 \leqslant t \leqslant 1$, *et* ω *est une quantité positive.*

Dans ces conditions, l'équation pour $\varphi(x)$ *a une solution qui dépend linéairement d'un nombre fini de constantes arbitraires. Ce nombre est le même que celui des racines de l'équation en* α

$$\int_0^1 t^{\alpha} K(t)\, dt = 1.$$

La solution que l'on trouve est valable dans un intervalle $0 < x < b_1$, *où l'on a* $b_1 \leqslant b$.

On voit tout de suite que l'équation homogène

$$\varphi(x) = \int_0^1 K(x, t)\, \varphi(tx)\, dt$$

admet le même nombre de solutions linéairement indépendantes.

[9] La solution du *problème d'inversion*

$$\int_0^1 G(x, t) f(tx)\, dt = g(x)$$

est maintenant facile. *Nous supposons que la dérivée* $\frac{\partial}{\partial t} G(x, t)$ *existe et que les fonctions*

$$\psi(x) = \frac{x\, g(x)}{G(x, 1)}, \qquad K(x, t) = \frac{\frac{\partial}{\partial t} G(x, t)}{G(x, 1)}$$

remplissent les conditions auxquelles nous avons assujetti les fonctions $\psi(x)$, $K(x, t)$ *dans le problème précédent.* En posant

$$\varphi(x) = \int_0^x f(x)\, dx$$

et en intégrant par parties, on trouve

$$G(x, 1)\varphi(x) - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} G(x, t)\varphi(tx)\,dt = xg(x),$$

d'où l'on déduit

$$\varphi(x) = \psi(x) + \int_0^1 K(x, t)\varphi(tx)\,dt.$$

Cette équation a une solution qui dépend linéairement d'autant de constantes arbitraires qu'il y a de racines de l'équation en α

$$\int_0^1 t^\alpha K(t)\,dt = 1,$$

c'est-à-dire de l'équation

$$G(0, 1) = \int_0^1 t^\alpha \frac{\partial}{\partial t} G(0, t)\,dt,$$

laquelle équivaut à la suivante :

$$\int_0^1 t^{\alpha-1} G(0, t)\,dt = 0,$$

en supposant positive la partie réelle de α. Il faut, bien entendu, pour avoir des solutions du problème d'inversion, que la dérivée $f(x) = \frac{d\varphi}{dx}$ existe, et que l'intégrale $\int_0^x f(x)\,dx$ ait un sens.

Nous serons certains d'avoir une solution de ce problème *si les dérivées*

$$\frac{\partial}{\partial x} G(x, t), \quad g'(x)$$

existent et si les fonctions

$$\psi_1(x) = \frac{g(x) + xg'(x)}{G(x, 1)}, \qquad K_1(x, t) = \frac{x\dfrac{\partial G}{\partial t} - t\dfrac{\partial G}{\partial t}}{G(x, 1)}$$

satisfont respectivement aux mêmes conditions que $\psi(x)$ et $K(x, t)$ dans le problème précédent.

En effet, si l'on multiplie par x l'équation

$$\int_0^1 G(x, t) f(tx)\,dt = g(x),$$

et que l'on différentie ensuite par rapport à x, on obtient

$$G(x, 1)f(x) + \int_0^1 \left(x\frac{\partial G}{\partial x} - t\frac{\partial G}{\partial t}\right)f(tx)\,dt = g(x) + xg'(x),$$

ou bien

$$f(x) + \int_0^1 K_1(x, t)f(tx)\,dt = \psi_1(x).$$

Cette équation a *une solution dépendant linéairement d'autant de constantes arbitraires qu'il y a de racines de l'équation*

$$G(0, 1) - \int_0^1 t^{\alpha+1}\frac{\partial G(0, t)}{\partial t} = 0,$$

c'est-à-dire de l'équation

$$\int_0^1 t^\alpha G(0, t)\,dt = 0.$$

On voit qu'il faut en général que l'on n'ait pas $G(0, 1) = 0$.

Il est clair que l'équation

$$\int_0^1 G(x, t)f(tx)\,dt = 0$$

admet le même nombre de solutions linéairement indépendantes qu'il y a de constantes arbitraires dans la solution de l'équation avec second membre $g(x)$.

VI.

[**1**] Dans cette section nous allons traiter *le problème genéral de l'équation*

$$\varphi(x) - h(x)\varphi(\mu x) = \psi(x) + \int_\mu^1 K(x, t)\varphi(tx)\,dt,$$

où l'on a $0 < \mu < 1$.

En mettant μx au lieu de x, et en multipliant la nouvelle équation par $h(x)$, on trouve

$$h(x)\varphi(\mu x) - h(x)h(\mu x)\varphi(\mu^2 x) = h(x)\psi(\mu x) + \int_\mu^1 h(x)K(\mu x, t)\varphi(t\mu x)\,dt,$$

ou bien

$$h(x)\varphi(\mu x) - h(x)h(\mu x)\varphi(\mu^2 x) = h(x)\psi(\mu x) + \int_{\mu^2}^{\mu} \frac{h(x)K\left(\mu x, \dfrac{t}{\mu}\right)}{\mu}\varphi(tx)\,dt.$$

De même, en mettant $\mu^m x$ au lieu de x, et en multipliant la nouvelle équation par $h(x)h(\mu x)\ldots h(\mu^{m-1}x)$, on obtient

$$h(x)h(\mu x)\ldots h(\mu^{m-1}x)\varphi(\mu^m x) - h(x)h(\mu x)\ldots h(\mu^m x)\varphi(\mu^{m+1}x)$$

$$= h(x)h(\mu x)\ldots h(\mu^{m-1}x)\psi(\mu^m x) + \int_\mu^1 h(x)h(\mu x)\ldots h(\mu^{m-1}x)\,\mathrm{K}(\mu^m x, t)\,\varphi(t\mu^m x)\,dt$$

$$= h(x)h(\mu x)\ldots h(\mu^{m-1}x)\psi(\mu^m x) + \int_{\mu^{m+1}}^{\mu^m} \frac{h(x)h(\mu x)\ldots h(\mu^{m-1}x)}{\mu^m}\,\mathrm{K}\left(\mu^m x, \frac{t}{\mu^m}\right)\varphi(tx)\,dt.$$

L'addition des $m+1$ équations successives que nous obtenons de cette manière nous donne

$$\varphi(x) - h(x)h(\mu x)\ldots h(\mu^m x)\varphi(\mu^{m+1}x) = \Psi_{m+1}(x) + \int_{\mu^{m+1}}^1 \mathrm{H}(x, t)\,\varphi(tx)\,dt,$$

où l'on pose

$$\mathrm{H}(x, t) = \frac{h(x)h(\mu x)\ldots h(\mu^{r-1}x)}{\mu^r}\,\mathrm{K}\left(\mu^r x, \frac{t}{\mu^r}\right)$$

pour $\mu^r > t > \mu^{r+1}$ $(r = 1, 2, \ldots, m)$, et

$$\Psi_{m+1}(x) = \psi(x) + h(x)\psi(\mu x) + \ldots + h(x)h(\mu x)\ldots h(\mu^{m-1}x)\psi(\mu^m x).$$

Pour $1 > t > \mu$ $(r = 0)$, on a simplement $\mathrm{H}(x, t) = \mathrm{K}(x, t)$.

Si l'on veut aller à la limite $m = \infty$, il faut que la fonction $\Psi_{m+1}(x)$ tende vers une certaine limite, quand m va en croissant. Cela aura lieu *si l'on a*

$$|\psi(x)| < \mathrm{M}x^\gamma, \qquad h(0) = c, \qquad |c|\mu^\gamma < 1,$$

$h(x)$ étant une fonction continue au voisinage de $x = 0$.

En effet, soit c' une quantité plus grande que $|c|$, telle que nous ayons encore

$$c'\mu^\gamma < 1.$$

Alors, il y a un nombre s tel que l'on ait, pour $n \geqslant s$,

$$|h(\mu^n x)| < c'.$$

Donc, pour $m - 1 > s$, on a

$$|h(x)h(\mu x)\ldots h(\mu^{m-1}x)\psi(\mu^m x)| < h^s c'^{m-s}\mu^{m\gamma}x^\gamma,$$

h étant une quantité fixe supérieure à $|h(x)|$.

Par conséquent, pour $m - 1 > s$, on trouve

$$|\Psi_{m+1}(x)| < x^\gamma \left[B + \left(\frac{h}{c'}\right)^s \left\{ 1 + c'\mu^\gamma + c'^2\mu^{2\gamma} + \ldots + c'^m\mu^{m\gamma} \right\} \right],$$

B étant une quantité fixe. On en déduit

$$|\Psi_{m+1}(x)| < x^\gamma \left[B + \frac{\left(\frac{h}{c'}\right)^s}{1 - c'\mu^\gamma} \right].$$

La fonction $\Psi_{m+1}(x)$ tend donc vers une limite $\Psi(x)$ lorsque m tend vers l'infini, et l'on a $|\Psi(x)| < B'x^\gamma$, B' étant une constante.

En supposant que l'expression

$$h(x)h(\mu x) \ldots h(\mu^m x)\varphi(\mu^{m+1}x)$$

tende vers zéro lorsque m croît indéfiniment, et que l'intégrale qui intervient dans l'équation que nous allons écrire garde un sens, il faut que la fonction $\varphi(x)$ *satisfasse à l'équation*

$$\varphi(x) = \Psi(x) + \int_0^1 H(x, t)\varphi(tx)\,dt,$$

où $H(x, t)$ *et définie de la même manière qu'auparavant, r pouvant prendre toutes les valeurs entières positives.*

[2] Nous allons maintenant transformer un peu cette équation. *Choisissons* ν *positif et assez petit pour avoir* $c'\mu^{\gamma-\nu} < 1$, *et posons*

$$\varphi(x) = x^{1+\gamma-\nu}\Theta(x).$$

Nous obtenons

$$\Theta(x) = x^{-1-\gamma+\nu}\Psi(x) + \int_0^1 H(x, t)t^{1+\gamma-\nu}\Theta(tx)\,dt,$$

équation qui peut s'écrire

$$\Theta(x) = \rho(x) + \int_0^1 P(x, t)\Theta(tx)\,dt,$$

en posant

$$\rho(x) = x^{-1-\gamma+\nu}\Psi(x),$$
$$P(x, t) = t^{1+\gamma-\nu}H(x, t).$$

On a évidemment $|\rho(x)| < B' x^{\nu-1}$, et $P(x, t)$ est définie par les équations suivantes :

$$P(x, t) = t^{1+\gamma-\nu} K(x, t), \quad \text{pour} \quad 1 > t > \mu,$$

$$P(x, t) = t^{1+\gamma-\nu} \frac{h(x) h(\mu x) \ldots h(\mu^{r-1} x)}{\mu^r} K\left(\mu^r x, \frac{t}{\mu^r}\right),$$

pour $\mu^r > t > \mu^{r+1}$ $(r = 1, 2, \ldots)$.

Nous avons donc, pour $r - 1 > s$ et $\mu^r > t > \mu^{r+1}$,

$$|P(x, t)| < \sigma (\mu^r)^{1+\gamma-\nu} \left(\frac{h}{c'}\right)^s \left(\frac{c'}{\mu}\right)^r K,$$

K étant une limite supérieure de $K(x, t)$, et σ la plus grande des quantités 1 et $\mu^{1+\gamma-\nu}$. Nous en déduisons

$$|P(x, t)| < \sigma \left(\frac{h}{c'}\right)^s (c' \mu^{\gamma-\nu})^r K.$$

Donc, la fonction $P(x, t)$ reste bornée dans l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$, et tend vers zéro avec t. Il est clair aussi que si la fonction $\{K(x, t) - K(t)\}$ tend uniformément vers zéro pour $\mu \leqslant t \leqslant 1$, sauf peut-être pour un ensemble de valeurs de t de mesure nulle, il en sera de même de la fonction $\{P(x, t) - P(t)\}$ dans l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$. On pose, bien entendu, $P(t) = P(0, t)$, ce qui nous donne :

$$P(t) = t^{1+\gamma-\nu} K(t), \quad \text{pour} \quad 1 > t > \mu;$$

$$P(t) = t^{1+\gamma-\nu} \left(\frac{c}{\mu}\right)^r K\left(\frac{t}{\mu^r}\right), \quad \text{pour} \quad \mu^r > t > \mu^{r+1} \qquad (r = 1, 2, \ldots).$$

Nous supposons que la fonction $K(t)$ est continue, sauf peut-être pour un ensemble de points de mesure nulle, dans l'intervalle $\mu < t < 1$. Il en sera de même de la fonction $P(t)$ dans l'intervalle $0 < t < 1$. En effet, on peut enfermer les points de discontinuité de $t^{1+\gamma-\nu} K(t)$ dans l'intervalle $\mu < t < 1$ par des segments dont la somme ne dépasse pas une quantité l arbitrairement petite; la même chose a lieu pour $t^{1+\gamma-\nu} \left(\frac{c}{\mu}\right)^r K\left(\frac{t}{\mu^r}\right)$ dans l'intervalle $\mu^r > t > \mu^{r+1}$. On peut donc enfermer toutes les discontinuités de $P(t)$ dans l'intervalle $0 < t < 1$ par le segment $(0, \mu^N)$ et un certain nombre de segments dont la somme est moindre que Nl. Or, on peut avoir

$$\mu^N + Nl < l',$$

l' étant aussi petit que l'on veut. On n'a qu'à prendre N tel que l'on ait $\mu^N < \frac{l'}{2}$, et choisir ensuite l plus petit que $\frac{l'}{2N}$.

[**3**] Il nous faut donc résoudre l'équation

$$\Theta(x) = \rho(x) + \int_0^1 \mathrm{P}(x, t)\Theta(tx)\,dt,$$

où l'on a $|\rho(x)| < \mathrm{B}' x^{\nu-1}$, B' étant une constante et ν une quantité positive; la fonction $\{\mathrm{P}(x, t) - \mathrm{P}(t)\}$ tend uniformément vers zéro avec x, sauf peut-être pour un ensemble de valeurs de t de mesure nulle, et la fonction $\mathrm{P}(t)$ est bornée dans l'intervalle $0 < t < 1$, et continue sauf peut-être pour un ensemble de points de mesure nulle. La fonction $\mathrm{K}(t)$ doit satisfaire dans l'intervalle $\mu < t < 1$ à certaines conditions que nous allons préciser dans la suite.

Faisons, en suivant la méthode de la section dernière, l'approximation de la fonction $\mathrm{P}(t)$ dans l'intervalle $0 < t < 1$ par un polynôme $\mathrm{P}_n(t)$. Nous verrons plus loin comment on doit choisir les sous-intervalles. Soit P une limite supérieure de $|\mathrm{P}(x, t)|$ et de $|\mathrm{P}_n(t)|$. On aura $|\eta(x, t)| = |\mathrm{P}(x, t) - \mathrm{P}(t)| < \eta$, une quantité qui tend vers zéro avec x, sauf peut-être dans quelques petits segments dont la somme est arbitrairement petite, dans lesquels on aura $|\eta(x, t)| < 2\mathrm{P}$; on aura aussi $|\varepsilon_n(t)| = |\mathrm{P}(t) - \mathrm{P}_n(t)| < \varepsilon$, une quantité arbitrairement petite, sauf peut-être dans quelques segments dont la somme est arbitrairement petite, où l'on aura $|\varepsilon_n(t)| < 2\mathrm{P}$.

Notre équation peut s'écrire

$$\Theta(x) = \rho(x) + \int_0^1 \{\eta(x, t) + \varepsilon_n(t)\}\Theta(tx)\,dt + \int_0^1 \mathrm{P}_n(t)\Theta(tx)\,dt,$$

d'où nous déduisons

$$\Theta(x) = \mathrm{F}_n(x) + \mathrm{S}_n\Theta(x),$$

en posant

$$\begin{aligned}\mathrm{F}_n(x) = {} & \sum_s x^{\alpha_s}\{k_{s0} + k_{s1}\log x + \ldots + k_{sp_s}(\log x)^{p_s}\} + \rho(x) \\ & + \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}_1} \frac{x^\alpha \displaystyle\int_0^x y^{-1-\alpha}\psi(y)\,dy}{\mathrm{H}_n(\alpha)}\,d\alpha \\ & + \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}_2} \frac{x^\alpha \displaystyle\int_a^x y^{-1-\alpha}\psi(y)\,dy}{\mathrm{H}_n(\alpha)}\,d\alpha,\end{aligned}$$

et

$$S_n\Theta(x) = \int_0^1 \left\{ \eta(x, t) + \varepsilon_n(t) \right\} \Theta(tx)\,dt$$
$$+ \int_{C_1} \frac{x^\alpha \int_0^x dy\, y^{-1-\alpha} \int_0^1 \left\{ \eta(y, t) + \varepsilon_n(t) \right\} \Theta(ty)\,dt}{H_n(\alpha)}\, d\alpha$$
$$+ \int_{C_2} \frac{x^\alpha \int_a^x dy\, y^{-1-\alpha} \int_0^1 \left\{ \eta(y, t) + \varepsilon_n(t) \right\} \Theta(ty)\,dt}{H_n(\alpha)}\, d\alpha .$$

Nous renvoyons à la section précédente pour le sens de ces notations.

[**4**] Avant d'aller plus loin, il nous faut établir quelques théorèmes sur les racines des équations $\int_0^1 t^\alpha P(t)\,dt = 1$ et $H_n(\alpha) = 0$, ou bien $\int_0^1 t^\alpha P_n(t)\,dt = 1$, et sur les relations qui existent entre elles.

Prenons la fonction $Q(t)$ définie par les équations

$$Q(t) = \left(\frac{c}{\mu}\right)^r K\left(\frac{t}{\mu^r}\right),$$

pour $\mu^r > t > \mu^{r+1}$ $(r = 0, 1, 2, \ldots)$, et examinons la nature des racines de l'équation en β

$$\int_0^1 t^\beta Q(t)\,dt = 1.$$

Nous avons :

$$\int_0^1 t^\beta Q(t)\,dt = \sum_{r=0}^{r=\infty} \int_{\mu^{r+1}}^{\mu^r} \left(\frac{c}{\mu}\right)^r t^\beta K\left(\frac{t}{\mu^r}\right) dt .$$

En posant $t = \tau\mu^r$ dans le terme général de cette série, nous obtenons :

$$\sum_{r=0}^{r=\infty} (c\mu^\beta)^r \int_\mu^1 \tau^\beta K(\tau)\,d\tau .$$

Nous cherchons les racines à partie réelle supérieure à -1 de l'équation

$$\int_0^1 t^\alpha P(t)\,dt = 1,$$

ou bien :

$$\int_0^1 t^{\alpha+1+\gamma-\nu} Q(t)\,dt = 1 .$$

Les parties réelles des racines β que nous devons trouver sont donc plus grandes que $\gamma - \nu$; nous aurons $|c\mu^\beta| < |c\mu^{\gamma-\nu}| < 1$, et l'équation peut s'écrire

$$\int_\mu^1 \tau^\beta K(\tau)\,d\tau = 1 - c\mu^\beta.$$

Les racines de cette équation à partie réelle plus grande que $\gamma - \nu$ sont en nombre limité. En effet, nous avons $|1 - c\mu^\beta| \geqslant 1 - |c\mu^\beta| > 1 - |c\mu^{\gamma-\nu}|$, une quantité fixe. D'autre part, l'intégrale $\int_\mu^1 \tau^\beta K(\tau)\,d\tau$ tend uniformément vers zéro quand $|\beta|$ croît indéfiniment. Car on peut trouver un polynôme $K_n(t) = b_0 + b_1(t) + \ldots + b_n t^n$ de façon à avoir dans l'intervalle $(\mu, 1)$

$$|K(t) - K_n(t)| < \varepsilon,$$

ε étant arbitrairement petite, sauf dans quelques petits segments dont la somme l est arbitrairement petite, et dans lesquels on a

$$|K(t) - K_n(t)| < 2K.$$

Cela nous donne

$$\left|\int_\mu^1 \left\{ K(\tau) - K_n(\tau) \right\} \tau^\beta d\tau \right| < \varepsilon \int_\mu^1 \tau^{\gamma-\nu} d\tau + 2kKl,$$

k étant la plus grande des quantités 1 et $\mu^{\gamma-\nu}$.

Mais nous avons

$$\left|\int_\mu^1 \tau^\beta K_n(\tau)\,d\tau\right| = \left| \frac{b_0(1 - \mu^{1+\beta})}{1+\beta} + \frac{b_1(1-\mu^{2+\beta})}{2+\beta} + \ldots + \frac{b_n(1-\mu^{n+1+\beta})}{n+1+\beta} \right|,$$

une fonction qui tend vers zéro avec $\dfrac{1}{|\beta|}$ quand la partie réelle de β reste supérieure à une quantité fixe. Nous pouvons donc trouver une quantité R telle que l'on ait pour $|\beta| \geqslant R$

$$\left|\int_\mu^1 \tau^\beta K(\tau)\,d\tau\right| < \varepsilon' + \frac{\varepsilon(1 - \mu^{1+\gamma-\nu})}{1+\gamma-\nu} + 2kKl,$$

ε', ε et l étant des arbitrairement petits. Il s'ensuit que les racines cherchées de l'équation, $\int_\mu^1 \tau^\beta K(\tau)\,d\tau = 1 - c\mu^\beta$, se trouvent dans un domaine limité; on voit de là qu'elles sont en nombre limité, étant les zéros d'une fonction holomorphe. *Donc, les racines à partie réelle supérieure à* -1 *de l'équation*

$$\int_0^1 t^\alpha P(t)\,dt = 1$$

sont en nombre limité et correspondent aux racines à partie réelle plus grande que $\gamma - \nu$ *de l'équation*

$$\int_0^1 \tau^\beta K(\tau)\,d\tau = 1 - c\mu^\beta.$$

Nous avons $|c\mu^{\gamma}| < 1$; on peut donc trouver une quantité positive γ_1 telle que l'on ait $|c\mu^{\gamma-\gamma_1}| = 1$.

Nous avons aussi $P(t) = t^{1+\gamma-\nu}\left(\frac{c}{\mu}\right)^r K\left(\frac{t}{\mu^r}\right)$ dans l'intervalle $\mu^r > t > \mu^{r+1}$, ce qui nous donne

$$|P(t)| < K t^{1+\gamma-\nu}(\mu^r)^{-1-\gamma+\gamma_1} < K' t^{\gamma_1-\nu},$$

K′ étant une constante. La quantité $\gamma_1 - \nu$ est positive, puisque l'on a $|c\mu^{\gamma-\nu}| < 1$. Donc, si l'on obtient le polynôme $P_n(t)$ par la méthode de la section dernière, on aura $|P_n(t)| < K'' t^{\gamma_1-\nu}$, K″ étant une constante, et nous y avons démontré qu'alors les racines de l'équation, $\int_0^1 t^\alpha P_n(t)\,dt = 1$, dont la partie réelle est plus grande que -1, se trouvent dans des petits cercles entourant les racines de l'équation, $\int_0^1 t^\alpha P(t)\,dt = 1$, et que la somme des multiplicités des racines de la première équation à l'intérieur de l'un quelconque des cercles est égale à la multiplicité de la racine de la seconde qui se trouve au centre.

[**5**] Cela établi, nous avons démontré que l'on peut écrire (nous renvoyons encore à la section précédente pour les notations) :

$$\begin{aligned} F_n(x) = {} & \sum_s x^{\alpha_s}\left\{k_{s0} + k_{s1}(\log x) + \ldots + k_{sp_s}(\log x)^{p_s}\right\} + \rho(x) \\ & + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{x^\alpha \int_a^x y^{-1-\alpha}\rho(y)\,dy}{H_n(\alpha)}\,d\alpha + \frac{1}{x}\int_0^x P_n\left(\frac{y}{x}\right)\rho(y)\,dy \\ & + \frac{1}{2\pi i}\int_{D_1}\frac{\left\{T_n(\alpha)\right\}^2 x^\alpha \int_0^x y^{-1-\alpha}\rho(y)\,dy}{H_n(\alpha)}\,d\alpha, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} S_n\Theta(x) = {} & \int_0^1\left\{\eta(x, t) + \varepsilon_n(t)\right\}\Theta(tx)\,dt + \frac{1}{x}\int_0^x dy P_n\left(\frac{y}{x}\right)\int_0^1\left\{\eta(y, t) + \varepsilon_n(t)\right\}\Theta(ty)\,dt \\ & + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{x^\alpha\int_a^x dy\, y^{-1-\alpha}\int_0^1\left\{\eta(y, t) + \varepsilon_n(t)\right\}\Theta(ty)\,dt}{H_n(\alpha)}\,d\alpha \\ & + \frac{1}{2\pi i}\int_{D_1}\frac{\left\{T_n(\alpha)\right\}^2 x^\alpha\int_0^x dy\, y^{-1-\alpha}\int_0^1\left\{\eta(y, t) + \varepsilon_n(t)\right\}\Theta(ty)\,dt}{H_n(\alpha)}\,d\alpha \\ & + \frac{1}{x}\int_0^x dy P_n\left(\frac{y}{x}\right)\int_0^1\left\{\eta(y, t) + \varepsilon_n(t)\right\}\Theta(ty)\,dt. \end{aligned}$$

Il résulte du travail de la section précédente que *l'on peut résoudre par approximations successives l'équation*

$$\Theta(x) = F_n(x) + S_n \Theta(x),$$

si l'intégrale prise sur la droite infinie D_1

$$\int_{D_1} |T_n(\alpha)|^2 |d\alpha|$$

reste bornée pour tout polynôme $P_n(t)$ *trouvé par la méthode que nous employons.*

Supposons qu'il en soit ainsi; en posant

$$\begin{aligned} u_0(x) &= F_n(x), \\ u_1(x) &= S_n u_0(x), \\ &\ldots\ldots\ldots \\ u_m(x) &= S_n u_{m-1}(x), \\ &\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

nous aurons

$$\begin{aligned} |u_0(x)| &< V x^{-\delta}, \\ |u_1(x)| &< q V x^{-\delta}, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ |u_m(x)| &< q^m V x^{-\delta}, \\ &\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

où V est une constante, et l'on a $0 < q < 1$, $0 < \delta < 1$. *La série*

$$\Theta(x) = u_0(x) + u_1(x) + \ldots + u_m(x) + \ldots$$

est absolument convergente et satisfait à l'équation

$$\Theta(x) = \rho(x) + \int_0^1 P(x, t)\Theta(tx)\,dt.$$

On peut démontrer de là que *la fonction*

$$\varphi(x) = x^{1+\gamma-\nu}\Theta(x)$$

satisfait à l'équation

$$\varphi(x) - h(x)\varphi(\mu x) = \psi(x) + \int_\mu^1 K(x, t)\varphi(tx)\,dt.$$

En effet, on voit tout de suite que l'on a

$$\varphi(x) = \Psi(x) + \int_0^1 H(x, t)\varphi(tx)\,dt,$$

et en posant

$$w(x) = \psi(x) + \int_\mu^1 \mathrm{K}(x, t)\varphi(tx)\,dt.$$

il est évident, d'après le calcul fait au commencement de cette section, que l'on a

$$\Psi(x) + \int_0^1 \mathrm{H}(x, t)\varphi(tx)\,dt = w(x) + h(x)w(\mu x) + \dots$$
$$+ h(x)h(\mu x)\dots h(\mu^{m-1}x)w(\mu^m x) + \dots.$$

Nous avons donc

$$\varphi(x) = w(x) + h(x)w(\mu x) + \dots + h(x)h(\mu x)\dots h(\mu^{m-1}x)w(\mu^m x) + \dots,$$

d'où nous déduisons

$$\varphi(x) - h(x)\varphi(\mu x) = w(x) = \psi(x) + \int_\mu^1 \mathrm{K}(x, t)\varphi(tx)\,dt.$$

[**6**] Il nous reste seulement à examiner *quelles sont les conditions que doit vérifier la fonction* $\mathrm{K}(t)$ *dans l'intervalle* $\mu \leqslant t \leqslant 1$, *afin que l'intégrale prise sur la droite infinie* D_1

$$\int_{\mathrm{D}_1} |\mathrm{T}_n(x)|^2\,|dx|$$

reste bornée pour tout polynôme d'approximation $\mathrm{P}_n(t)$ *obtenu par la méthode poursuivie dans la section précédente.*

1° D'abord, *il suffit que la fonction* $\mathrm{K}(t)$ *soit à variation bornée dans l'intervalle* $\mu \leqslant t \leqslant 1$.

Dans ce cas, on peut démontrer que la fonction $\mathrm{P}(t)$ est à variation bornée dans l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$. En effet, la variation de $\mathrm{P}(t)$ dans cet intervalle a un maximum qui peut s'exprimer de la manière suivante :

$$\mathrm{V}_\mathrm{P}(1, \mu) + \mathrm{V}_\mathrm{P}(\mu, \mu^2) + \dots + \mathrm{V}_\mathrm{P}(\mu^r, \mu^{r+1}) + \dots$$
$$+ |\mathrm{P}(\mu+0) - \mathrm{P}(\mu-0)| + |\mathrm{P}(\mu^2+0) - \mathrm{P}(\mu^2-0)| + \dots + |\mathrm{P}(\mu^r+0) - \mathrm{P}(\mu^r-0| + \dots,$$

où $\mathrm{V}_\mathrm{P}(\mu^r, \mu^{r+1})$ représente le maximum de la variation de $\mathrm{P}(t)$ dans l'intervalle (μ^r, μ^{r+1}), et les expressions $\mathrm{P}(\mu^r+0)$, $\mathrm{P}(\mu^r-0)$ ont leur signification habituelle.

Nous avons besoin maintenant du lemme suivant : Soient $\theta(t)$, $\psi(t)$ deux fonctions à variation bornée dans un intervalle $a \leqslant t \leqslant b$, et soient $|\theta(t)| < \mathrm{M}_1$, $|\psi(t)| < \mathrm{M}_2$, alors on aura

$$\mathrm{V}_{\theta\psi}(a, b) < \mathrm{M}_1\mathrm{V}_\psi(a, b) + \mathrm{M}_2\mathrm{V}_\theta(a, b).$$

On le déduit tout de suite de l'inégalité suivante :

$$\left|\theta(t_1)\psi(t_1)-\theta(t_2)\psi(t_2)\right| = \left|\theta(t_1)\left\{\psi(t_1)-\psi(t_2)\right\}+\psi(t_2)\left\{\theta(t_1)-\theta(t_2)\right\}\right|$$
$$< M_1\left|\psi(t_1)-\psi(t_2)\right| + M_2\left|\theta(t_1)-\theta(t_2)\right|.$$

Dans l'intervalle $\mu < t < 1$, nous avons $P(t) = t^{1+\gamma-\nu}K(t)$. Nous avons déjà appelé σ la plus grande des quantités 1 et $\mu^{1+\gamma-\nu}$. Nous obtenons donc, par le lemme précédent,

$$V_P(1, \mu) < \sigma[V_K(1, \mu) + K].$$

Dans l'intervalle $\mu^r > t > \mu^{r+1}$, on a $P(t) = t^{1+\gamma-\nu}\left(\frac{c}{\mu}\right)^r = K\left(\frac{t}{\mu^r}\right)$; et il est clair que la variation de $K\left(\frac{t}{\mu^r}\right)$ dans cet intervalle a le même maximum que celle de $K(t)$ dans l'intervalle $1 > t > \mu$. On trouve, par conséquent,

$$V_P(\mu^r, \mu^{r+1}) < \sigma(\mu^r)^{1+\gamma-\nu}\left|\frac{c}{\mu}\right|^r [V_K(1, \mu) + K] = \sigma(|c|\mu^{\gamma-\nu})^r [V_K(1, \mu) + K].$$

On a aussi :

$$|P(\mu^r + 0) - P(\mu^r - 0)| < K(\mu^r)^{1+\gamma-\nu}\left\{\left(\frac{|c|}{\mu}\right)^r + \left(\frac{|c|}{\mu}\right)^{r-1}\right\} = K\left(1+\frac{\mu}{|c|}\right)\left(|c|\mu^{\gamma-\nu}\right)^r.$$

Par conséquent, la série

$$V_P(1, \mu) + V_P(\mu, \mu^2) + \ldots + V_P(\mu^r, \mu^{r+1}) + \ldots$$
$$+ |P(\mu+0) - P(\mu-0)| + |P(\mu^2+0) - P(\mu^2-0)| + \ldots + |P(\mu^r+0) - P(\mu^r-0)| + \ldots$$

est moindre que l'expression

$$\frac{\sigma\left[V_K(1, \mu) + K\right]}{1 - |c|\mu^{\gamma-\nu}} + \frac{K|c|\mu^{\gamma-\nu}\left(1+\frac{\mu}{|c|}\right)}{1 - |c|\mu^{\gamma-\nu}},$$

puisque l'on a $|c|\mu^{\gamma-\nu} < 1$. Donc la fonction $P(t)$ est à variation bornée dans l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$, et il s'ensuit que le polynôme $P_n(t)$ obtenu par notre méthode aura une variation dont le maximum restera toujours borné. Nous avons vu que cela suffit pour que l'intégrale $\int_{D_1} |T_n(\alpha)|^2 |d\alpha|$ reste toujours bornée.

2° Supposons maintenant que la fonction $K(t)$ ne soit pas à variation bornée, mais *qu'elle satisfasse, dans l'intervalle* $\mu \leqslant t \leqslant 1$, *à la condition généralisée de Lipschitz*

$$|K(t) - K(\tau)| < A(t-\tau)^\beta \qquad (t \geqslant \tau;\ 1 \geqslant \beta > 0).$$

Nous définissons de la manière suivante la fonction continue $R(t)$. Dans l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant \mu^{N+1}$ (N étant aussi grand que l'on veut), on a

$$R(t) = t\left(\mu^{N+1}\right)^{\gamma-\nu}\left(\frac{c}{\mu}\right)^{N} K(\mu).$$

Dans l'intervalle $\mu^{N+1} \leqslant t \leqslant 1$, on a $R(t) = P(t)$, sauf dans les petits intervalles $\mu^r - l \leqslant t \leqslant \mu^r$ $(r = 1, 2, \ldots, N)$, l étant moindre que $\mu^N - \mu^{N+1}$ et d'ailleurs aussi petit que l'on veut. Dans ces intervalles $R(t)$ est représentée par la droite qui joint les extrémités des ordonnées $P(\mu^r - l)$ et $P(\mu^r + 0)$.

Dans l'intervalle $\mu \leqslant t \leqslant 1$, on a

$$R(t) - R(\tau) = t^{1+\gamma-\nu}K(t) - \tau^{1+\gamma-\nu}K(\tau) = (t^{1+\gamma-\nu} - \tau^{1+\gamma-\nu})K(t) + \tau^{1+\gamma-\nu}\left\{K(t) - K(\tau)\right\}.$$

Nous avons

$$t^{1+\gamma-\nu} - \tau^{1+\gamma-\nu} = (1+\gamma-\nu)(t-\tau)t'^{\gamma-\nu},$$

t' étant une quantité entre t et τ. Cela nous donne

$$|t^{1+\gamma-\nu} - \tau^{1+\gamma-\nu}| < |1+\gamma-\nu|(t-\tau)^{1-\beta}\frac{\sigma}{\mu}(t-\tau)^{\beta} \leqslant \frac{\sigma}{\mu}|1+\gamma-\nu|(1-\mu)^{1-\beta}(t-\tau)^{\beta}.$$

Donc, en posant

$$A' = \sigma\left\{A + \frac{K}{\mu}|1+\gamma-\nu|(1-\mu)^{1-\beta}\right\},$$

on obtient, pour $\mu \leqslant t \leqslant 1$,

$$|R(t) - R(\tau)| < A'(t-\tau)^{\beta}.$$

En général, pour l'intervalle $\mu^{r+1} \leqslant t \leqslant \mu^r - l$, on trouve

$$R(t) - R(\tau) = \left(\frac{c}{\mu}\right)^r \left[K\left(\frac{t}{\mu^r}\right)(t^{1+\gamma-\nu} - \tau^{1+\gamma-\nu}) + \tau^{1+\gamma-\nu}\left\{K\left(\frac{t}{\mu^r}\right) - K\left(\frac{\tau}{\mu^r}\right)\right\}\right].$$

Ici on a

$$|t^{1+\gamma-\nu} - \tau^{1+\gamma-\nu}| < \frac{\sigma\mu^{r(1+\gamma-\nu)}}{\mu^{r+1}}|1+\gamma-\nu|(t-\tau)^{1-\beta}(t-\tau)^{\beta} < \frac{\sigma\mu^{r(1+\gamma-\nu-\beta)}}{\mu}|1+\gamma-\nu|(1-\mu)^{1-\beta}(t-\tau)^{\beta}.$$

On a aussi

$$\left|K\left(\frac{t}{\mu^r}\right) - K\left(\frac{\tau}{\mu^r}\right)\right| < A\mu^{-\beta r}(t-\tau)^\beta,$$

d'où l'on déduit

$$\tau^{1+\gamma-\nu}\left|K\left(\frac{t}{\mu^r}\right) - K\left(\frac{\tau}{\mu^r}\right)\right| < A\sigma\mu^{r(1+\gamma-\nu-\beta)}(t-\tau)^\beta.$$

Nous trouvons donc enfin

$$|R(t) - R(\tau)| < \left(\frac{|c|}{\mu}\right)^r \mu^{r(1+\gamma-\nu-\beta)} A'(t-\tau)^\beta = (|c|\,\mu^{\gamma-\nu-\beta})^r A'(t-\tau)^\beta,$$

relation qui a lieu pour $\mu^{r+1} \leqslant t \leqslant \mu^r - l\,(r = 1, 2, \ldots, N)$.

En suivant la méthode de la section précédente (Prop. IV), nous pouvons faire l'approximation de $R(t)$ par un polynôme qui reste toujours moindre que $K' t^{\gamma_1 - \nu}$, K' étant une constante (on sait que $\gamma_1 - \nu$ est positif), qui croît ou décroît constamment dans les intervalles $(0 \leqslant t \leqslant \mu^{N+1})$, $(\mu^N - l \leqslant t \leqslant \mu^N)$, ..., $(\mu^r - l \leqslant t \leqslant \mu^r)$, ..., $(\mu - l \leqslant t \leqslant \mu)$, qui satisfait dans l'intervalle $\mu \leqslant t \leqslant 1$ à la condition

$$|P_n(t) - P_n(\tau)| < A''(t-\tau)^\beta,$$

et dans les intervalles $\mu^{r+1} \leqslant t \leqslant \mu^r - l$, à la condition

$$|P_n(t) - P_n(\tau)| < (|c|\,\mu^{\gamma-\nu-\beta})^r A''(t-\tau)^\beta,$$

A'' étant une constante $(r = 1, 2, \ldots, N)$.

Considérons maintenant la série que nous avons trouvée dans la section précédente pour l'intégrale

$$\int_0^1 t^\xi \cos(b \log t)\, P_n'(t)\, dt$$

en posant $\xi = 1 - \delta_1$. Cette série était la suivante :

$$\Big[P_n(1) - P_n(\tau_0)\Big] - e^{\frac{\xi(\theta-\pi)}{b}} \cos\theta \Big[P(\tau_0) - P(\tau_1)\Big] + \ldots$$
$$+ (-1)^m e^{\frac{\xi(\theta - m\pi)}{b}} \cos\theta \Big[P_n(\tau_{m-1}) - P_n(\tau_m)\Big] + \ldots,$$

où la suite des quantités

$$1,\ \tau_0,\ e^{\frac{\theta-\pi}{b}},\ \tau_1,\ e^{\frac{\theta-2\pi}{b}},\ \ldots,\ \tau_{m-1},\ e^{\frac{\theta-(m-1)\pi}{b}},\ \tau_m,\ e^{\frac{\theta-m\pi}{b}},\ \tau_{m+1},\ e^{\frac{\theta-(m+1)\pi}{b}}\ \ldots$$

ne va jamais en croissant. Supposons que l'on ait

$$\begin{aligned}
&\tau_{r_1} \geqslant \mu \geqslant \tau_{r_1+1},\\
&\tau_{r_1'} \geqslant \mu - l \geqslant \tau_{r_1'+1},\\
&\tau_{r_2} \geqslant \mu^2 \geqslant \tau_{r_2+1},\\
&\tau_{r_2'} \geqslant \mu^2 - l \geqslant \tau_{r_2'+1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\tau_{r_N} \geqslant \mu^N \geqslant \tau_{r_N+1},\\
&\tau_{r'_N} \geqslant \mu^N - l \geqslant \tau_{r'_N+1},\\
&\tau_{r_{N+1}} \geqslant \mu^{N+1} \geqslant \tau_{r_{N+1}+1}.
\end{aligned}$$

Il nous suffira de trouver une limite supérieure pour la série

$$|P_n(\tau_1) - P_n(\tau_2)| + e^{-\frac{\xi\pi}{b}}|P_n(\tau_2) - P_n(\tau_3)| + \ldots + e^{-\frac{\xi(m-1)\pi}{b}}|P_n(\tau_m) - P_n(\tau_{m+1})| + \ldots,$$

puisque les termes

$$P_n(1) - P_n(\tau_0), \qquad e^{-\frac{\xi(\theta-\pi)}{b}}\cos\theta\left\{P_n(\tau_0) - P_n(\tau_1)\right\},$$

et le facteur $e^{\frac{\xi(\theta-2\pi)}{b}}$ restent finis.

Cette série est la somme des suivantes :

$$(1)\qquad |P_n(\tau_1) - P_n(\tau_2)| + e^{-\frac{\xi\pi}{b}}|P_n(\tau_2) - P_n(\tau_3)| + \ldots + e^{-\frac{\xi(r_1-2)\pi}{b}}|P_n(\tau_{r_1-1}) - P_n(\tau_{r_1})|,$$

$$(1')\qquad e^{-\frac{\xi(r_1-1)\pi}{b}}|P_n(\tau_{r_1}) - P_n(\tau_{r_1+1})| + \ldots + e^{-\frac{\xi(r_1'-1)\pi}{b}}|P_n(\tau_{r_1'}) - P_n(\tau_{r_1'+1})|,$$

avec la suite

$$(s)\qquad e^{-\frac{\xi r'_{s-1}\pi}{b}}|P_n(\tau_{r'_{s-1}+1}) - P_n(\tau_{r'_{s-1}+2})| + \ldots + e^{-\frac{\xi(r_s-2)\pi}{b}}|P_n(\tau_{r_s-1}) - P_n(\tau_{r_s})|,$$

$$(s')\qquad e^{-\frac{\xi(r_s-1)\pi}{b}}|P_n(\tau_{r_s}) - P_n(\tau_{r_s+1})| + \ldots + e^{-\frac{\xi(r_s'-1)\pi}{b}}|P_n(\tau_{r_s'}) - P_n(\tau_{r_s'+1})|,$$

où l'on pose en succession $s = 2, 3, \ldots, N$; il faut y ajouter encore les deux séries

$$(N+1)\qquad e^{-\frac{\xi r'_N\pi}{b}}|P_n(\tau_{r'_N+1}) - P_n(\tau_{r'_N+2})| + \ldots + e^{-\frac{\xi(r_{N+1}-2)\pi}{b}}|P_n(\tau_{r_{N+1}-1}) - P_n(\tau_{r_{N+1}})|,$$

$$(N+1)'\qquad \left\{\begin{aligned}
&e^{-\frac{\xi(r_{N+1}-1)\pi}{b}}|P_n(\tau_{r_{N+1}}) - P_n(\tau_{r_{N+1}+1})|\\
&+ e^{-\frac{\xi r_{N+1}\pi}{b}}|P_n(\tau_{r_{N+1}+1}) - P_n(\tau_{r_{N+1}+2})| + \ldots,
\end{aligned}\right.$$

dont la seconde est une série infinie.

Dans la série (1) nous avons :

$$\begin{aligned}|P_n(\tau_r) - P_n(\tau_{r+1})| &< A''(\tau_r - \tau_{r+1})^\beta \\ &\leqslant A''\left[e^{\frac{\theta-(r-1)\pi}{b}} - e^{\frac{\theta-(r+1)\pi}{b}}\right]^\beta \\ &= A'' e^{\frac{\beta\{\theta-(r-1)\pi\}}{b}}\left(1 - e^{-\frac{2\pi}{b}}\right)^\beta.\end{aligned}$$

Donc, la série (1) est moindre que celle-ci :

$$A'' e^{\frac{\beta\theta}{b}}\left(1 - e^{-\frac{2\pi}{b}}\right)^\beta\left[1 + e^{-\frac{(\xi+\beta)\pi}{b}} + \ldots + e^{-\frac{(r_1-2)(\xi+\beta)\pi}{b}}\right],$$

qui est elle-même moindre que

$$\frac{A'' e^{\frac{\beta\theta}{b}}\left(1 - e^{-\frac{2\pi}{b}}\right)^\beta}{1 - e^{-\frac{(\xi+\beta)\pi}{b}}}.$$

Nous voyons de la même façon que la série (s) est moindre que la suivante :

$$e^{\frac{\beta\theta}{b}} A''(|c|\mu^{\gamma-\nu-\beta})^{s-1}\left(1 - e^{-\frac{2\pi}{b}}\right)^\beta\left[e^{-\frac{r'_{s-1}(\xi+\beta)\pi}{b}} + e^{-\frac{(r'_{s-1}+1)(\xi+\beta)\pi}{b}} + \ldots + e^{-\frac{(r_s-2)(\xi+\beta)\pi}{b}}\right];$$

et en nous rappelant que l'on a $|c|\mu^{\gamma-\gamma_1} = 1$, nous voyons que celle-là est moindre que

$$\frac{A'' e^{\frac{\beta\theta}{b}}\mu^{(s-1)(\gamma_1-\nu-\beta)}\left(1 - e^{-\frac{2\pi}{b}}\right)^\beta e^{-\frac{r'_{s-1}(\xi+\beta)\pi}{b}}}{1 - e^{-\frac{(\xi+\beta)\pi}{b}}}.$$

Cette inégalité a lieu pour $s = 2, 3, \ldots, N+1$. Nous savons que l'on a

$$\mu^{s-1} \geqslant \tau_{r'_{s-1}} \geqslant e^{\frac{\theta - r'_{s-1}\pi}{b}},$$

d'où l'on voit que la série (s) est moindre que

$$\frac{A'' e^{-\frac{\xi\theta}{b}}\mu^{(s-1)(\gamma_1-\nu-\beta)}\left(1 - e^{-\frac{2\pi}{b}}\right)^\beta \mu^{(s-1)(\xi+\beta)}}{1 - e^{-\frac{(\xi+\beta)\pi}{b}}},$$

c'est-à-dire moindre que

$$\frac{A'' e^{-\frac{\xi\theta}{b}} \mu^{(s-1)(\gamma_1-\nu+\xi)} \left(1-e^{-\frac{2\pi}{b}}\right)^\beta}{1-e^{-\frac{(\xi+\beta)\pi}{b}}}.$$

La quantité $\gamma_1 - \nu + \xi$ est positive; par conséquent, la somme des séries (1), (2), ..., (N + 1) est moindre que

$$\frac{A''\left[e^{-\frac{\beta\theta}{b}} + \frac{\mu^{\gamma_1-\nu+\xi} e^{-\frac{\xi\theta}{b}}}{1-\mu^{\gamma_1-\nu+\xi}}\right]\left(1-e^{-\frac{2\pi}{b}}\right)^\beta}{1-e^{-\frac{(\xi+\beta)\pi}{b}}} < \frac{B\left(1-e^{-\frac{2\pi}{b}}\right)^\beta}{1-e^{-\frac{(\xi+\beta)\pi}{b}}},$$

B étant un nombre fixe indépendant de N, de b, et du degré du polynôme $P_n(t)$, lorsque ces quantités croissent indéfiniment.

Considérons maintenant les séries (s'). Le premier terme de (s')

$$e^{-\frac{\xi(r_s-1)\pi}{b}} |P_n(\tau_{r_s}) - P_n(\tau_{r_s+1})|$$

est moindre que $2K''\tau_{r_s}^{\gamma_1-\nu}$, K'' étant une constante; donc, il est moindre que $2K''\mu^{(s-1)(\gamma_1-\nu)}$. Le dernier terme

$$e^{-\frac{\xi(r_s'-1)\pi}{b}} |P_n(\tau_{r_s'}) - P_n(\tau_{r_s'+1})|$$

est de même moindre que $2K''\mu^{s(\gamma_1-\nu)}$. Les termes intermédiaires, s'il y en a, proviennent des valeurs de $P_n(t)$ dans l'intervalle $\mu^s \geqslant t \geqslant \mu^s - l$. Il est clair que leur somme est moindre que la variation de $P_n(t)$ dans cet intervalle; donc, elle est moindre que $2K''\mu^{s(\gamma_1-\nu)}$. Il résulte de tout cela que la série (s') est moindre que $6K''\mu^{(s-1)(\gamma_1-\nu)}$; par conséquent, la somme des séries (1'), (2'), ..., (N + 1)' est moindre que

$$\frac{6K''}{1-\mu^{\gamma_1-\nu}} < B',$$

B' étant un nombre fixe. On a donc, pour b plus grand qu'un certain nombre b_1, et pour tout polynôme $P_n(t)$ convenablement choisi,

$$\left|\int_0^1 t^\xi \cos(b\log t) P_n'(t)\,dt\right| < \frac{B_1\left(1-e^{-\frac{2\pi}{b}}\right)^\beta}{1-e^{-\frac{(\xi+\beta)\pi}{b}}} + B_1',$$

B_1 et B_1' étant deux quantités fixes. On voit de même, sans qu'il y ait besoin d'en faire la démonstration, que l'intégrale

$$\int_0^1 t^{\xi} \sin (b \log t)\, P_n'(t)\, dt$$

est moindre en valeur absolue qu'une expression du même type. Cela établi, nous renvoyons à la section précédente pour la démonstration du fait que *les approximations successives convergent si l'on a* $\beta > \frac{1}{2}$.

3° Il est maintenant aisé de démontrer *qu'elles convergent aussi si l'on a* $K(t) = X(t) + Y(t)$, *où* $X(t)$ *satisfait à la condition* 1°, *et* $Y(t)$ *à la condition* 2°, *dans l'intervalle* $\mu \leqslant t \leqslant 1$. En effet, on aura $P(t) = U(t) + W(t)$, où l'on pose

$$U(t) = t^{1+\gamma-\nu} X(t), \qquad \text{pour} \quad \mu < t < 1;$$

$$U(t) = \left(\frac{c}{\mu}\right)^r t^{1+\gamma-\nu} X\left(\frac{t}{\mu^r}\right), \qquad \text{pour} \quad \mu^{r+1} < t < \mu^r,$$

$$(r = 1, 2, 3, \ldots);$$

et

$$W(t) = t^{1+\gamma-\nu} Y(t), \qquad \text{pour} \quad \mu < t < 1;$$

$$W(t) = \left(\frac{c}{\mu}\right)^r t^{1+\gamma-\nu} Y\left(\frac{t}{\mu^r}\right), \qquad \text{pour} \quad \mu^{r+1} < t < \mu^r,$$

$$(r = 1, 2, 3, \ldots).$$

Faisons, comme dans le paragraphe 1°, l'approximation de $U(t)$ par un polynôme $U_n(t)$, et, comme dans le paragraphe 2°, l'approximation de $W(t)$ par un polynôme $W_n(t)$. En posant $P_n(t) = U_n(t) + W_n(t)$, nous voyons que l'on a

$$\int_0^1 t^{\xi+ib} P_n'(t)\, dt = \int_0^1 t^{\xi+ib} U_n'(t)\, dt + \int_0^1 t^{\xi+ib} W_n'(t)\, dt.$$

Les résultats des paragraphes 1° et 2° rendent évidente la convergence des approximations successives.

[**7**] Nous retenons la condition 3°, qui comprend 1° et 2° comme des cas particuliers. Les conclusions auxquelles nous arrivons peuvent s'énoncer de la manière suivante :

Considérons l'équation fonctionnelle

$$\varphi(x) - h(x)\varphi(\mu x) = \psi(x) + \int_\mu^1 K(x, t)\varphi(tx)\, dt,$$

où l'on a $0 < \mu < 1$; $|\psi(x)| < Mx^\gamma$, M *étant une constante;* $|c|\mu^\gamma < 1$, *en posant* $h(0) = c$. *On suppose que la fonction* $K(x, t) - K(t)$ *tende uniformément vers zéro avec* x pour $\mu \leqslant t \leqslant 1$, *sauf peut-être pour un ensemble de valeurs de* t *de mesure nulle, et que l'on ait* $K(t) = X(t) + Y(t)$, $X(t)$ *étant une fonction à variation bornée, dans l'intervalle* $\mu \leqslant t \leqslant 1$, *et* $Y(t)$ *satisfaisant dans ce même intervalle à la condition de Lipschitz généralisée*

$$|Y(t) - Y(\tau)| < A(t - \tau)^\beta,$$

où l'on a $\beta > \frac{1}{2}$, $t \geqslant \tau$, A *étant une constante.*

Nous cherchons une solution $\varphi(x)$ *qui satisfait à la condition* $\lim\limits_{n \to \infty} c'^n \varphi(\mu^n x) = 0$, c' *étant une quantité quelconque plus grande que* c. *Il y a toujours au moins une telle solution; et la solution générale dépend linéairement d'autant de constantes arbitraires qu'il y a de racines de l'équation en* α

$$\int_\mu^1 t^\alpha K(t)\,dt = 1 - c\mu^\alpha$$

satisfaisant à la condition $|c\mu^\alpha| < 1$, *chaque racine étant comptée avec son degré de multiplicité.*

Il est clair que l'équation homogène

$$\varphi(x) - h(x)\varphi(\mu x) = \int_\mu^1 K(x, t)\varphi(tx)\,dt$$

admet sous les mêmes conditions le même nombre de solutions linéairement indépendantes.

[8] *Les choses se passent tout autrement si l'on s'affranchit de l'une ou de l'autre des hypothèses*

$$|c|\mu^\gamma < 1; \qquad \lim_{n \to \infty} c^n \varphi(\mu^n x) = 0.$$

Nous allons démontrer que *la solution dépend alors d'une fonction arbitraire.*

Mettons, en effet, $\varphi(x) = u(x)$, une fonction arbitraire, dans l'intervalle, $b \geqslant x \geqslant \mu b$, b étant une constante positive quelconque comprise dans le domaine de la variable x. Nous avons dit que $u(x)$ est une fonction arbitraire; il faut cependant qu'elle satisfasse à l'équation

$$u(b) - h(b)u(\mu b) = \psi(b) + \int_\mu^1 K(b, t)u(tb)\,dt.$$

Nous avons

$$\varphi(x) - h(x)\varphi(\mu x) = \psi(x) + \int_{\mu}^{1} K(x, t)\varphi(tx)dt,$$

ou bien

$$\varphi(x) - h(x)\varphi(\mu x) = \psi(x) + \int_{\mu x}^{x} \frac{1}{x} K\left(x, \frac{y}{x}\right)\varphi(y)dy.$$

Donc, pour déterminer $\varphi(x)$ dans l'intervalle $b \leqslant x \leqslant \frac{b}{\mu}$, nous avons l'équation suivante, qui est *une équation de Volterra de seconde espèce,*

$$\varphi(x) = \left[\psi(x) + h(x)u(\mu x) + \int_{\mu x}^{b} \frac{1}{x} K\left(x, \frac{y}{x}\right) u(y)dy\right] + \int_{b}^{x} \frac{1}{x} K\left(x, \frac{y}{x}\right)\varphi(y)dy;$$

et pour la déterminer dans l'intervalle $\mu^2 b \leqslant x \leqslant \mu b$, nous obtenons une autre équation du même type

$$\varphi\left(\frac{x}{\mu}\right) - h\left(\frac{x}{\mu}\right)\varphi(x) = \psi\left(\frac{x}{\mu}\right) + \int_{x}^{\frac{x}{\mu}} \frac{\mu}{x} K\left(\frac{x}{\mu}, \frac{\mu y}{x}\right)\varphi(y)dy,$$

laquelle peut s'écrire comme il suit :

$$\varphi(x) = \frac{1}{h\left(\frac{x}{\mu}\right)}\left[-\psi\left(\frac{x}{\mu}\right) + u\left(\frac{x}{\mu}\right) - \int_{\mu b}^{\frac{x}{\mu}} \frac{\mu}{x} K\left(\frac{x}{\mu}, \frac{\mu y}{x}\right) u(y)dy\right] + \int_{\mu b}^{x} \frac{\mu}{xh\left(\frac{x}{\mu}\right)} K\left(\frac{x}{\mu}, \frac{\mu y}{x}\right)\varphi(y)dy.$$

Ces deux équations se résolvent tout de suite par des approximations successives bien connues qui convergent comme une série exponentielle.

Nous avons ainsi étendu la fonction $\varphi(x)$ aux intervalles $\left(b, \frac{b}{\mu}\right)$ et $(\mu^2 b, \mu b)$. De la même manière, on peut l'étendre successivement aux intervalles $(\mu^3 b, \mu^2 b), \ldots, (\mu^{n+1} b, \mu^n b), \ldots$ et $\left(\frac{b}{\mu}, \frac{b}{\mu^2}\right), \left(\frac{b}{\mu^2}, \frac{b}{\mu^3}\right) \ldots$, jusqu'à ce que nous nous trouvions hors du domaine des fonctions $\psi(x)$, $h(x)$, $K(x, t)$.

Il est clair que l'on peut trouver par la même méthode une solution, dépendant d'une fonction arbitraire, de l'équation homogène

$$\varphi(x) - h(x)\varphi(\mu x) = \int_{\mu}^{1} K(x, t)\varphi(tx)dt.$$

[**9**] Il n'y a aucune difficulté dans l'application des résultats précédents à *l'équation généralisée d'Abel :*

$$\int_{\mu}^{1} G(x, t) f(tx)\, dt = g(x).$$

On trouve comme auparavant, en intégrant par parties

$$\varphi(x) - h(x)\varphi(\mu x) = \psi(x) + \int_{\mu}^{1} K(x, t)\varphi(tx)\, dt,$$

où l'on pose

$$h(x) = \frac{G(x, \mu)}{G(x, 1)},$$

$$\psi(x) = \frac{x\, g(x)}{G(x, 1)},$$

$$K(x, t) = \frac{\dfrac{\partial}{\partial t} G(x, t)}{G(x, 1)},$$

$$\varphi(x) = \int^{x} f(x)\, dx.$$

Supposons que la fonction $K(x, t)$ *satisfasse aux conditions du paragraphe* 7 *et que l'on n'ait pas* $G(0, 1) = 0$. *La quantité c est égale à* $\frac{G(\mu)}{G(1)}$, *en posant* $G(0, t) = G(t)$; *et nous supposons que l'on ait*

$$|g(x)| < M x^{\gamma - 1}; \qquad |c|\mu^{\gamma} < 1.$$

Alors il y a toujours au moins une solution $\varphi(x)$ *satisfaisant à la condition* $\lim\limits_{n \to \infty} c'^{n}\varphi(\mu^{n} x) = 0$, *où l'on a* $c' > |c|$; *et la solution générale de cette espèce dépend linéairement d'autant de constantes arbitraires qu'il y a de racines de l'équation en* α

$$\int_{\mu}^{1} t^{\alpha} K(t)\, dt = 1 - c\mu^{\alpha}$$

remplissant la condition $|c\mu^{\alpha}| < 1$.

Cette équation est identique à la suivante :

$$\int_{\mu}^{1} t^{\alpha} G'(t)\, dt = G(1) - \mu^{\alpha} G(\mu),$$

ou bien, comme on le voit en intégrant par parties,

$$\int_{\mu}^{1} t^{\alpha - 1} G(t)\, dt = 0.$$

Il est clair que l'équation homogène admet le même nombre de solutions linéairement indépendantes, satisfaisant à la condition $\lim c'^m \varphi(\mu^n x) = 0$.

Si l'on s'affranchit des hypothèses précédentes, on peut trouver comme auparavant des solutions qui dépendent d'une fonction arbitraire.

Il faut toujours, bien entendu, pour avoir une solution de l'équation d'Abel, que la fonction $\varphi(x)$ que l'on obtient ait une dérivée première.

VII.

[**1**] Il va être question dans cette section du *cas singulier de l'équation*

$$\int_0^1 G(x, t) f(tx)\, dt = g(x),$$

où l'on a $G(1) = 0$ $\big($en posant toujours $G(t) = G(0, t)\big)$. Nous supposons que *l'on n'ait pas en même temps* $G'(1) = 0$.

Soient

$$\theta(x) = \int_0^x f(x)\, dx; \qquad \varphi(x) = \int_0^x \theta(x)\, dx.$$

En multipliant l'équation par x et en intégrant par parties, nous obtenons

$$G(x, 1)\, \theta(x) - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} G(x, t)\, \theta(tx)\, dt = x g(x),$$

d'où l'on trouve, en répétant ces opérations,

$$x G(x, 1)\, \theta(x) - \frac{\partial}{\partial t} G(x, t)_{(t=1)}\, \varphi(x) + \int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} G(x, t)\, \varphi(tx)\, dt = x^2 g(x).$$

Nous voyons qu'*il faut supposer que la dérivée seconde* $\frac{\partial^2}{\partial t^2} G(x, t)$ *existe*. On peut écrire la nouvelle équation *sous la forme*

$$\varphi(x) = \psi(x) + x\lambda(x) \frac{d\varphi}{dx} + \int_0^1 K(x, t)\, \varphi(tx)\, dt,$$

en posant

$$\psi(x) = -\frac{x^2 g(x)}{\frac{\partial}{\partial t} G(x, t)_{(t=1)}},$$

$$\lambda(x) = \frac{G(x, 1)}{\frac{\partial}{\partial t} G(x, t)_{(t=1)}},$$

$$K(x, t) = \frac{\frac{\partial^2}{\partial t^2} G(x, t)}{\frac{\partial}{\partial t} G(x, t)_{(t=1)}}.$$

Nous supposons que la fonction $K(x, t)$ *satisfasse aux conditions du paragraphe* 7 *de la section V, et que la dérivée première* $\lambda'(x)$ *existe et reste bornée au voisinage de l'origine. La fonction* $\psi(x)$ *doit rester moindre en valeur absolue que* Mx^{γ}, M *étant une constante et* γ *étant supérieur à* -1.

[**2**] Faisons maintenant l'approximation de $K(t)$ par un polynôme convenable $P_n(t)$, tel que nous l'avons défini dans la section V. Notre équation peut s'écrire comme il suit :

$$\varphi(x) = \left[x\lambda(x)\frac{d\varphi}{dx} + \psi(x) + \int_0^1 \left\{ \eta(x, t) + \varepsilon_n(t) \right\} \varphi(tx)\, dt \right] + \int_0^1 P_n(t)\varphi(tx)\, dt,$$

où nous nous servons des notations déjà employées, comme nous allons aussi le faire dans ce qui va suivre. Nous supposons pour le moment que les valeurs absolues de $\varphi(x)$ et de $x\lambda(x)\frac{d\varphi}{dx}$ soient moindres que $M'x^{-\delta}$, M' étant une constante ; il nous faudra examiner après si cette supposition est légitime. Alors, pour que l'équation soit vérifiée, il faut et il suffit que l'on ait

$$\varphi(x) = W_n(x) + F_n(x) + S_n\varphi(x),$$

en posant

$$W_n(x) = x\lambda(x)\frac{d\varphi}{dx} + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{x^\alpha \int_0^x y^{-1-\alpha} y\lambda(y)\frac{d\varphi}{dy}\, dy}{H_n(\alpha)}\, d\alpha$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{x^\alpha \int_a^x y^{-1-\alpha} y\lambda(y)\frac{d\varphi}{dy}\, dy}{H_n(\alpha)}\, d\alpha.$$

Ce nouveau terme $W_n(x)$ provient du terme $x\lambda(x)\frac{d\varphi}{dx}$; les expressions $F_n(x)$ et $S_n\varphi(x)$ ont la même signification qu'auparavant.

On trouve, en intégrant par parties,

$$x^\alpha \int_0^x y^{-1-\alpha} y\lambda(y) \frac{d\varphi}{dy} dy = \lambda(x)\varphi(x) - x^\alpha \int_0^x \frac{d}{dy}\left\{ y^{-\alpha}\lambda(y) \right\} \varphi(y)\, dy$$

$$= \lambda(x)\varphi(x) - x^\alpha \int_0^x y^{-\alpha}\lambda'(y)\varphi(y)\, dy + \alpha x^\alpha \int_0^x y^{-1-\alpha}\lambda(y)\varphi)y)\, dy;$$

et l'on trouve de même

$$x^\alpha \int_a^x y^{-1-\alpha} y\lambda(y) \frac{d\varphi}{dy} dy$$

$$= \lambda(x)\varphi(x) - \lambda(a)\varphi(a)\left(\frac{x}{a}\right)^\alpha - x^\alpha \int_a^x y^{-\alpha}\lambda'(y)\varphi(y)\, dy + \alpha x^\alpha \int_a^x y^{-1-\alpha}\lambda(y)\varphi(y)\, dy.$$

On peut, sans rien changer dans le raisonnement, omettre le terme

$$-\lambda(a)\varphi(a)\left(\frac{x}{a}\right)^\alpha,$$

puisque l'on a

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{-\lambda(a)\varphi(a)\left(\frac{x}{a}\right)^\alpha}{H_n(\alpha)} d\alpha$$

$$= \sum_s x^{\alpha_s}\left\{ \omega_{s0} + \omega_{s1}\log x + \ldots + \omega_{sp_s}(\log x)^{p_s} \right\},$$

les ω étant des constantes que l'on peut évidemment incorporer dans les constantes arbitraires k de $F_n(x)$.

Nous avons aussi

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{\lambda(x)\varphi(x)}{H_n(\alpha)} d\alpha + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{\lambda(x)\varphi(x)}{H_n(\alpha)} d\alpha = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Omega} \frac{\lambda(x)\varphi(x)}{H_n(\alpha)} d\alpha,$$

Ω étant le cercle de rayon infini. Cette intégrale est égale à

$$\frac{\lambda(x)\varphi(x)}{2\pi i}\int_\Omega \left[1 + T_n(\alpha) + \left\{ T_n(\alpha) \right\}^2 + \ldots \right] d\alpha = \frac{\lambda(x)\varphi(x)}{2\pi i}\int_\Omega T_n(\alpha)\, d\alpha,$$

puisque tous les autres termes disparaissent. De là, nous trouvons enfin

$$(a_0 + a_1 + \ldots + a_N)\lambda(x)\varphi(x),$$

c'est-à-dire $P_n(1)\lambda(x)\varphi(x)$, en posant

$$P_n(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_N t^N.$$

Nous obtenons donc, en posant $\lambda_1(x) = x^{-1}\lambda(x)$ (une fonction qui reste bornée au voisinage de $x=0$, puisque l'on a $\lambda(0)=0$, et la dérivée $\lambda'(x)$ est bornée) :

$$W_n(x) = x\lambda(x)\frac{d\varphi}{dx} + P_n(1)\lambda(x)\varphi(x) + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{x^\alpha\int_0^x y^{-\alpha}\left\{\alpha\lambda_1(y) - \lambda'(y)\right\}\varphi(y)\,dy}{H_n(\alpha)}\,d\alpha$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{x^\alpha\int_a^x y^{-\alpha}\left\{\alpha\lambda_1(y) - \lambda'(y)\right\}\varphi(y)\,dy}{H_n(\alpha)}\,d\alpha.$$

L'équation devient ensuite

$$-x\lambda(x)\frac{d\varphi}{dx} + \left\{1 - P_n(1)\lambda(x)\right\}\varphi(x) = F_n(x) + S_n\varphi(x) + S_n'\varphi(x),$$

en mettant

$$S_n'\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{x^\alpha\int_0^x y^{-\alpha}\left\{\alpha\lambda_1(y) - \lambda'(y)\right\}\varphi(y)\,dy}{H_n(\alpha)}\,d\alpha$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{x^\alpha\int_a^x y^{-\alpha}\left\{\alpha\lambda_1(y) - \lambda'(y)\right\}\varphi(y)\,dy}{H_n(\alpha)}\,d\alpha.$$

[**3**] Nous distinguerons maintenant deux cas, en supposant *que $\lambda(x)$ garde toujours le même signe au voisinage de $x=0$*. Commençons par *le cas où ce signe est négatif*.

Nous avons

$$\frac{d\varphi}{dx} - \frac{1 - P_n(1)\lambda(x)}{x\lambda(x)}\varphi(x) = -\frac{1}{x\lambda(x)}\left\{F_n(x) + S_n\varphi(x) + S_n'\varphi(x)\right\}.$$

Multiplions les deux membres de cette équation par

$$e^{-\int_b^x \frac{1-P_n(1)\lambda(x)}{x\lambda(x)}dx},$$

où b est dans le domaine de x pour lequel $\lambda(x)$ est négatif, et l'on a $0 < x < b$. Intégrons ensuite de 0 à x; on verra dans la suite que cette intégration est possible. Nous obtenons

$$e^{-\int_b^x \frac{1-P_n(1)\lambda(x)}{x\lambda(x)}dx}\varphi(x) = -\int_0^x \frac{e^{-\int_b^x \frac{1-P_n(1)\lambda(x)}{x\lambda(x)}dx}}{x\lambda(x)}\left\{F_n(x) + S_n\varphi(x) + S_n'\varphi(x)\right\}dx,$$

en supposant que la fonction

$$e^{-\int_b^x \frac{1-P_n(1)\lambda(x)}{x\lambda(x)}dx}\varphi(x)$$

tende vers zéro avec x. Cela nous donne

$$\varphi(x) = E_n(x) + J_n\varphi(x) + J_n'\varphi(x),$$

où l'on pose

$$E_n(x) = -e^{\int_b^x \frac{1-P_n(1)\lambda(x)}{x\lambda(x)}dx}\int_0^x \frac{e^{-\int_b^x \frac{1-P_n(1)\lambda(x)}{x\lambda(x)}dx}}{x\lambda(x)}F_n(x)\,dx,$$

$$J_n\varphi(x) = -e^{\int_b^x \frac{1-P_n(1)\lambda(x)}{x\lambda(x)}dx}\int_0^x \frac{e^{-\int_b^x \frac{1-P_n(1)\lambda(x)}{x\lambda(x)}dx}}{x\lambda(x)}S_n\varphi(x)\,dx,$$

$$J_n'\varphi(x) = -e^{\int_b^x \frac{1-P_n(1)\lambda(x)}{x\lambda(x)}dx}\int_0^x \frac{e^{-\int_b^x \frac{1-P_n(1)\lambda(x)}{x\lambda(x)}dx}}{x\lambda(x)}S_n'\varphi(x)\,dx.$$

Nous résoudrons cette équation par la suite d'approximations successives

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= E_n(x),\\
\varphi_1(x) &= E_n(x) + J_n\varphi_0(x) + J_n'\varphi_0(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\varphi_m(x) &= E_n(x) + J_n\varphi_{m-1}(x) + J_n'\varphi_{m-1}(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Nous disons que la solution sera donnée au voisinage de $x=0$, si le polynôme $P_n(t)$ est convenablement choisi et le domaine de x assez petit, par la série

$$\varphi(x) = u_0(x) + u_1(x) + \ldots + u_m(x) + \ldots,$$

où l'on a

$$u_0(x) = \varphi_0(x);\quad u_1(x) = \varphi_1(x) - \varphi_0(x);\quad \ldots\ldots\quad u_m(x) = \varphi_m(x) - \varphi_{m-1}(x);\quad \ldots\ldots,$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned}
u_0(x) &= E_n(x),\\
u_1(x) &= J_n u_0(x) + J_n' u_0(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
u_m(x) &= J_n u_{m-1}(x) + J_n' u_{m-1}(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

[**4**] Nous avons déjà démontré que l'on a toujours

$$|F_n(x)| < V x^{-\delta},$$

V étant une constante et δ une quantité positive moindre que l'unité. Prenons b assez petit pour que la fonction $1 - P_n(1)\lambda(x) + \delta\lambda(x)$, (et par conséquent $1 - P_n(1)\lambda(x)$), soit toujours plus grande qu'une quantité positive σ moindre que l'unité pour $0 \leqslant x \leqslant b$.

On obtient facilement

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-\int_b^x \frac{1-P_n(1)\lambda(x)}{x\lambda(x)}dx} x^{-\delta}\right]$$

$$= e^{-\int_b^x \frac{1-P_n(1)\lambda(x)}{x\lambda(x)}dx} x^{-\delta}\left[-\frac{1}{x\lambda(x)} + \frac{P_n(1)-\delta}{x}\right]$$

$$= -\frac{e^{-\int_b^x \frac{1-P_n(1)\lambda(x)}{x\lambda(x)}dx}}{x\lambda(x)} x^{-\delta}\left[1 - P_n(1)\lambda(x) + \delta\lambda(x)\right].$$

Nous avons par conséquent, en tenant compte du fait que $\lambda(x)$ est négatif,

$$-\frac{e^{-\int_b^x \frac{1-P_n(1)\lambda(x)}{x\lambda(x)}dx}}{x\lambda(x)} x^{-\delta} < \frac{1}{\sigma}\frac{d}{dx}\left[e^{-\int_b^x \frac{1-P_n(1)\lambda(x)}{x\lambda(x)}dx} x^{-\delta}\right];$$

d'où l'on déduit

$$\left|\int_0^x \frac{e^{-\int_b^x \frac{1-P_n(1)\lambda(x)}{x\lambda(x)}dx}}{x\lambda(x)} F_n(x)\,dx\right| < \frac{V}{\sigma}\left[e^{-\int_b^x \frac{1-P_n(1)\lambda(x)}{x\lambda(x)}dx} x^{-\delta}\right]_0^x.$$

Soit λ_1, une constante, une limite supérieure de $|\lambda_1(x)|$ et de $|\lambda'(x)|$. On a évidemment

$$e^{-\int_b^x \frac{1-P_n(1)\lambda(x)}{x\lambda(x)}dx} < e^{\int_b^x \frac{\sigma dx}{\lambda_1 x^2}} = e^{\frac{\sigma}{\lambda_1}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{x}\right)},$$

et la fonction $e^{\frac{\sigma}{\lambda_1}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{x}\right)} x^{-\delta}$ tend vers zéro avec x.

Nous pouvons donc écrire

$$\left| \int_0^x \frac{e^{-\int_b^x \frac{1-P_n(1)\lambda x}{x\lambda(x)}dx}}{x\lambda(x)} F_n(x)\,dx \right| < \frac{V}{\sigma} e^{-\int_b^x \frac{1-P_n(1)\lambda(x)}{x\lambda(x)}dx} x^{-\delta},$$

d'où l'on déduit

$$|E_n(x)| < \frac{V}{\sigma} x^{-\delta},$$

ou bien

$$|u_0(x)| < \frac{V}{\sigma} x^{-\delta}.$$

[5] Il nous faut maintenant trouver une fonction majorante de $|u_1(x)|$. Nous avons

$$J_n u_0(x) = -e^{\int_b^x \frac{1-P_n(1)\lambda(x)}{x\lambda(x)}dx} \int_0^x \frac{e^{-\int_b^x \frac{1-P_n(1)\lambda(x)}{x\lambda(x)}dx}}{x\lambda(x)} S_n u_0(x)\,dx.$$

Dans la cinquième section, nous avions $|u_0(x)| < Vx^{-\delta}$, et nous y avons démontré que l'on a en même temps

$$|S_n u_0(x)| < qVx^{-\delta},$$

q étant une quantité que l'on peut rendre aussi petite que l'on veut en prenant le domaine de x assez petit et en choisissant convenablement le polynôme $P_n(t)$. De même, ici, on a

$$|S_n u_0(x)| < \frac{qV}{\sigma} x^{-\delta},$$

d'où l'on déduit, comme dans le cas de $E_n(x)$,

$$|J_n u_0(x)| < \frac{qV}{\sigma^2} x^{-\delta}.$$

Nous avons aussi

$$J_n' u_0(x) = -e^{\int_b^x \frac{1-P_n(1)\lambda(x)}{x\lambda(x)}dx} \int_0^x \frac{e^{-\int_b^x \frac{1-P_n(1)\lambda(x)}{x\lambda(x)}}}{x\lambda(x)} S_n' u_0(x)\,dx,$$

en posant

$$S_n' u_0(x) = \int_{C_1} \frac{x^\alpha \int_0^x y^{-\alpha} \left\{ \alpha\lambda_1(y) - \lambda'(y) \right\} u_0(y)dy}{H_n(\alpha)} d\alpha$$
$$+ \int_{C_2} \frac{x^\alpha \int_a^x y^{-\alpha} \left\{ \alpha\lambda_1(y) - \lambda'(y) \right\} u_0(y)dy}{H_n(\alpha)} d\alpha.$$

Ici, nous ne tirerions aucun bénéfice de la transformation de l'intégrale $\int_{C_1}$ que nous avons effectuée dans la cinquième section. En effet, à cause de la présence du facteur α dans le numérateur de la fonction à intégrer, il nous faudrait que l'intégrale prise sur la droite infinie D_1

$$\int_{D_1} \left| \alpha \left\{ T_n(\alpha) \right\}^2 \right| |d\alpha|$$

restât toujours inférieure à un nombre fixé à l'avance. Mais, en général, cette intégrale n'est pas du tout convergente. Nous allons donc prendre un chemin différent.

Soient L_1 la longueur de C_1 et L_2 celle de C_2; H_1 le minimum de $|H_n(\alpha)|$ sur C_1 et H_2 son minimum sur C_2; α_1 le maximum de $|\alpha|$ sur C_1 et α_2 son maximum sur C_2. Soit aussi, comme auparavant, $\alpha = a_1 + ia_2$, a_1 et a_2 étant des quantités réelles.

Nous avons sur C_1

$$|\alpha\lambda_1(y) - \lambda'(y)| < \lambda_1(\alpha_1 + 1),$$

d'où l'on déduit

$$\left| x^\alpha \int_0^x y^{-\alpha} \left\{ \alpha\lambda_1(y) - \lambda'(y) \right\} u_0(y)dy \right| < \frac{V\lambda_1(\alpha_1 + 1)}{\sigma} x^{a_1} \int_0^x y^{-a_1-\delta} dy$$
$$= \frac{V\lambda_1(\alpha_1 + 1)}{\sigma} \cdot \frac{x^{1-\delta}}{1 - a_1 - \delta} < \frac{\lambda_1(\alpha_1 + 1)x}{1 + \delta_1 - \delta} \cdot \frac{Vx^{-\delta}}{\sigma} < \frac{\lambda_1(\alpha_1 + 1)a}{1 + \delta_1 - \delta} \cdot \frac{Vx^{-\delta}}{\sigma}.$$

On trouve donc

$$\left| \int_{C_1} \frac{x^\alpha \int_0^x y^{-\alpha} \left\{ \alpha\lambda_1(y) - \lambda'(y) \right\} u_0(y)dy}{H_n(\alpha)} d\alpha \right| < \frac{\lambda_1 L_1(\alpha_1 + 1)x}{(1 + \delta_1 - \delta)H_1} \cdot \frac{Vx^{-\delta}}{\sigma}.$$

D'autre part, sur C_2 on a

$$|\alpha\lambda_1(y) - \lambda'(y)| < \lambda_1(\alpha_2 + 1),$$

ce qui nous donne

$$\left| x^\alpha \int_a^x y^{-\alpha} \left\{ \alpha\lambda_1(y) - \lambda'(y) \right\} u_0(y)dy \right| < \frac{V\lambda_1(\alpha_2 + 1)}{\sigma} x^{a_1} \int_x^a y^{-a_1-\delta} dy.$$

Mais nous avons

$$x^{a_1}\int_x^a y^{-a_1-\delta}dy = x^{-\delta}\int_x^a \left(\frac{x}{y}\right)^{a_1+\delta} dy < a x^{-\delta},$$

puisque la quantité $a_1 + \delta$ est toujours positive sur C_2, et l'on a $\frac{x}{y} \leqslant 1$. Nous trouvons donc

$$\left| x^{\alpha}\int_a^x y^{-\alpha}\left\{\alpha\lambda_1(y) - \lambda'(y)\right\} u_0(y)dy \right| < \frac{\lambda_1(\alpha_2+1)a\mathrm{V}x^{-\delta}}{\sigma},$$

d'où l'on déduit

$$\left|\int_{C_2}\frac{x^{\alpha}\int_a^x y^{-\alpha}\left\{\alpha\lambda_1(y) - \lambda'(y)\right\} u_0(y)dy}{H_n(\alpha)} d\alpha \right| < \frac{\lambda_1 L_2(\alpha_2+1)a}{H_2}\cdot\frac{\mathrm{V}x^{-\delta}}{\sigma}.$$

Nous avons donc enfin

$$|S_n' u_0(x)| < \left[\frac{\lambda_1 L_1(\alpha_1+1)a}{(1+\delta_1-\delta)H_1} + \frac{\lambda_1 L_2(\alpha_2+1)a}{H_2}\right]\frac{\mathrm{V}x^{-\delta}}{\sigma}.$$

Or, a peut être pris aussi petit que l'on veut, et bien que α_1, L_1 et $\frac{1}{H_1}$ puissent devenir très grands, on peut néanmoins prendre toujours a assez petit pour avoir

$$|S_n' u_0(x)| < \frac{q'\mathrm{V}x^{-\delta}}{\sigma},$$

q' étant aussi petit que l'on veut.

De là nous obtenons

$$|J_n' u_0(x)| < \frac{q'\mathrm{V}x^{-\delta}}{\sigma^2}.$$

Nous avons donc établi les résultats suivants :

$$|u_0(x)| < \frac{\mathrm{V}x^{-\delta}}{\sigma},$$

$$|u_1(x)| \leqslant |J_n u_0(x)| + |J_n' u_0(x)| < \frac{q+q'}{\sigma}\,\frac{\mathrm{V}x^{-\delta}}{\sigma};$$

et il est clair que l'on a, en général,

$$|u_m(x)| < \left(\frac{q+q'}{\sigma}\right)^m \frac{\mathrm{V}x^{-\delta}}{\sigma}.$$

Par un choix convenable de a ($\leqslant b$) et du polynôme $P_n(t)$, on peut avoir, pour $0 \leqslant x \leqslant a$,

$$\frac{q+q'}{\sigma} < 1.$$

Alors, la série

$$\varphi(x) = u_0(x) + u_1(x) + \ldots + u_m(x) + \ldots$$

sera absolument convergente. Cette série satisfait à l'équation

$$\varphi(x) = E_n(x) + J_n \varphi(x) + J_n' \varphi(x).$$

On a, en effet, quel que soit m,

$$J_n \varphi(x) + J_n' \varphi(x) = J_n \varphi_m(x) + J_n' \varphi_m(x) + J_n R_m(x) + J_n' R_m(x),$$

en posant

$$R_m(x) = u_{m+1}(x) + u_{m+2}(x) + \ldots.$$

On voit tout de suite que l'on a

$$|R_m(x)| < \frac{\left(\frac{q+q'}{\sigma}\right)^{m+1} \frac{V x^{-\delta}}{\sigma}}{1 - \frac{q+q'}{\sigma}}.$$

On trouve aussi

$$J_n \varphi_m(x) + J_n' \varphi_m(x) = \varphi_{m+1}(x) - \varphi_0(x) = \varphi(x) - R_{m+1}(x) - E_n(x),$$

avec les inégalités

$$|R_{m+1}(x)| < \frac{\left(\frac{q+q'}{\sigma}\right)^{m+2} \frac{V x^{-\delta}}{\sigma}}{1 - \frac{q+q'}{\sigma}},$$

$$|J_n R_m(x)| + |J_n' R_m(x)| < \frac{\left(\frac{q+q'}{\sigma}\right)^{m+2} \frac{V x^{-\delta}}{\sigma}}{1 - \frac{q+q'}{\sigma}}.$$

Tout cela nous donne

$$|\varphi(x) - E_n(x) - J_n \varphi(x) - J_n' \varphi(x)| < \frac{2\left(\frac{q+q'}{\sigma}\right)^{m+2} \frac{V x^{-\delta}}{\sigma}}{1 - \frac{q+q'}{\sigma}},$$

pour tout m; mais la quantité à droite tend vers zéro quand m croît vers l'infini; on doit donc avoir

$$\varphi(x) = E_n(x) + J_n \varphi(x) + J_n' \varphi(x).$$

Il est évident que nous avons

$$|\varphi(x)| < \frac{\dfrac{Vx^{-\delta}}{\sigma}}{1 - \dfrac{q+q'}{\sigma}},$$

ce qui montre qu'il nous était loisible d'intégrer de o à x comme nous l'avons fait. En effet, nous avons démontré, chemin faisant, que l'intégrale

$$\int_0^x \frac{e^{-\int_b^x \frac{1-P_n(1)\lambda(x)}{x\lambda(x)}dx}}{x\lambda(x)} x^{-\delta}dx$$

a un sens. La série $\varphi(x)$ satisfait par conséquent à l'équation

$$-x\lambda(x)\frac{d\varphi}{dx} + \left\{1 - P_n(1)\lambda(x)\right\}\varphi(x) = F_n(x) + S_n\varphi(x) + S_n'\varphi(x),$$

d'où l'on voit que la fonction $x\lambda(x)\dfrac{d\varphi}{dx}$ est moindre en valeur absolue que $M'x^{-\delta}$, M' étant une constante, et que la supposition que nous avons faite au début était légitime. Ces points établis, on peut faire à l'inverse tout le chemin que nous avons suivi et prouver ainsi que la série $\varphi(x)$ satisfait à l'équation

$$\varphi(x) = \psi(x) + x\lambda(x)\frac{d\varphi}{dx} + \int_0^1 K(x,t)\varphi(tx)dt.$$

[6] Considérons maintenant *le second cas, où le signe de $\lambda(x)$ est positif au voisinage de $x=0$*. Il n'est plus possible d'intégrer de o à x, puisque la fonction

$$e^{-\int_b^x \frac{1-P_n(1)\lambda(x)}{x\lambda(x)}dx}$$

devient infinie comme $e^{\frac{A}{x}}$, A étant une quantité positive, au voisinage de $x=+0$. Mais en intégrant de b à x, nous obtenons

$$e^{-\int_b^x \frac{1-P_n(1)\lambda(x)}{x\lambda(x)}dx}\varphi(x) = C - \int_b^x \frac{e^{-\int_b^x \frac{1-P_n(1)\lambda(x)}{x\lambda(x)}dx}}{x\lambda(x)}\left\{F_n(x) + S_n\varphi(x) + S_n'\varphi(x)\right\}dx,$$

C étant une constante arbitraire. Pour que l'on puisse retourner du résultat final à l'équation primitive, il faut seulement que la fonction $\varphi(x)$ que nous allons découvrir soit moindre en valeur absolue que $M'x^{-\delta}$, M' étant une constante.

Gardons les notations du cas précédent, puisqu'il n'y a pas peur de confusion.

En posant donc dans ce cas

$$E_n(x) = Ce^{\int_b^x \frac{1-P_n(1)\lambda(x)}{x\lambda(x)}dx} - e^{\int_b^x \frac{1-P_n(1)\lambda(x)}{x\lambda(x)}dx} \int_b^x \frac{e^{-\int_b^x \frac{1-P_n(1)\lambda(x)}{x\lambda(x)}dx}}{x\lambda(x)} F_n(x)dx,$$

$$J_n\varphi(x) = -e^{\int_b^x \frac{1-P_n(1)\lambda(x)}{x\lambda(x)}dx} \int_b^x \frac{e^{-\int_b^x \frac{1-P_n(1)\lambda(x)}{x\lambda(x)}dx}}{x\lambda(x)} S_n\varphi(x)dx,$$

$$J_n'\varphi(x) = -e^{\int_b^x \frac{1-P_n(1)\lambda(x)}{x\lambda(x)}dx} \int_b^x \frac{e^{-\int_b^x \frac{1-P_n(1)\lambda(x)}{x\lambda(x)}dx}}{x\lambda(x)} S_n'\varphi(x)dx,$$

nous pouvons écrire l'équation comme il suit :

$$\varphi(x) = E_n(x) + J_n\varphi(x) + J_n'\varphi(x).$$

Puisque $\lambda(x)$ est positif, on voit que la fonction

$$Ce^{\int_b^x \frac{1-P_n(1)\lambda(x)}{x\lambda(x)}dx}$$

tend vers zéro avec x et reste moindre en valeur absolue que $|C|$ pour $0 \leqslant x \leqslant b$.

On a aussi

$$|F_n(x)| < Vx^{-\delta};$$

et la formule dont nous nous sommes servis dans le cas précédent, à savoir :

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-\int_b^x \frac{1-P_n(1)\lambda(x)}{x\lambda(x)}dx} x^{-\delta}\right]$$
$$= -\frac{e^{-\int_b^x \frac{1-P_n(1)\lambda(x)}{x\lambda(x)}dx} x^{-\delta}}{x\lambda(x)} \left[1 - P_n(1)\lambda(x) + \delta\lambda(x)\right],$$

nous donne

$$\frac{e^{-\int_b^x \frac{1-P_n(1)\lambda(x)}{x\lambda(x)}dx} x^{-\delta}}{x\lambda(x)} < -\frac{1}{\sigma}\frac{d}{dx}\left[e^{-\int_b^x \frac{1-P_n(1)\lambda(x)}{x\lambda(x)}dx} x^{-\delta}\right].$$

Il faut remarquer que b est choisi comme auparavant assez petit pour rendre la fonction $1 - P_n(1)\lambda(x)$, (et par conséquent $1 - P_n(1)\lambda(x) + \delta\lambda(x)$), plus grande qu'une quantité positive σ, moindre que l'unité, pour $0 \leqslant x \leqslant b$.

On déduit de cette formule

$$\left| e^{\int_b^x \frac{1-P_n(1)\lambda(x)}{x\lambda(x)}dx} \int_b^x \frac{e^{-\int_b^x \frac{1-P_n(1)\lambda(x)}{x\lambda(x)}dx}}{x\lambda(x)} F_n(x)\,dx \right|$$

$$< \frac{V}{\sigma} e^{\int_b^x \frac{1-P_n(1)\lambda(x)}{x\lambda(x)}dx} \left[e^{-\int_b^x \frac{1-P_n(1)\lambda(x)}{x\lambda(x)}dx} x^{-\delta} - b^{-\delta} \right]$$

$$= \frac{Vx^{-\delta}}{\sigma}\left[1 - \left(\frac{x}{b}\right)^{\delta} e^{\int_b^x \frac{1-P_n(1)\lambda(x)}{x\lambda(x)}dx}\right] < \frac{Vx^{-\delta}}{\sigma},$$

puisque l'on a $\quad 0 \leqslant \frac{x}{b} \leqslant 1 \quad$ et $\quad 0 \leqslant e^{\int_b^x \frac{1-P_n(1)\lambda(x)}{x\lambda(x)}dx} \leqslant 1.$

Nous obtenons donc

$$|E_n(x)| < \frac{Vx^{-\delta}}{\sigma} + |C| < \frac{2Vx^{-\delta}}{\sigma},$$

si l'on a $x < \left(\frac{\sigma|C|}{V}\right)^{\delta}$; on peut donc écrire

$$|u_0(x)| < \frac{2Vx^{-\delta}}{\sigma}.$$

Nous avons

$$u_1(x) = J_n u_0(x) + J_n' u_0(x),$$

ce qui nous donne

$$|u_1(x)| < \left| e^{\int_b^x \frac{1-P_n(1)\lambda(x)}{x\lambda(x)}dx} \int_b^x \frac{e^{-\int_b^x \frac{1-P_n(1)\lambda(x)}{x\lambda(x)}dx}}{x\lambda(x)} S_n u_0(x)\,dx \right|$$

$$+ \left| e^{\int_b^x \frac{1-P_n(1)\lambda(x)}{x\lambda(x)}dx} \int_b^x \frac{e^{-\int_b^x \frac{1-P_n(1)\lambda(x)}{x\lambda(x)}dx}}{x\lambda(x)} S_n' u_0(x)\,dx \right|;$$

et nous trouvons comme auparavant

$$|S_n u_0(x)| < \frac{2qVx^{-\delta}}{\sigma},$$

$$|S_n' u_0(x)| < \frac{2q'Vx^{-\delta}}{\sigma};$$

d'où l'on déduit enfin

$$|u_1(x)| < \frac{q+q'}{\sigma} \cdot \frac{2Vx^{-\delta}}{\sigma},$$

et en général

$$|u_m(x)| < \left(\frac{q+q'}{\sigma}\right)^m \frac{2Vx^{-\delta}}{\sigma}.$$

Par conséquent, la fonction

$$\varphi(x) = u_0(x) + u_1(x) + \ldots + u_m(x) + \ldots$$

est absolument convergente et moindre en valeur absolue que $M'x^{-\delta}$, M' étant une constante. On démontre comme dans le paragraphe précédent qu'elle satisfait à l'équation

$$\varphi(x) = E_n(x) + J_n\varphi(x) + J_n'\varphi(x),$$

d'où l'on remonte, en reversant tous les procédés, à l'équation primitive

$$\varphi(x) = \psi(x) + x\lambda(x)\frac{d\varphi}{dx} + \int_0^1 K(x, t)\varphi(tx)\,dt.$$

Nous avons donc établi le théorème suivant :

Considérons l'équation fonctionnelle

$$\varphi(x) = \psi(x) + x\lambda(x)\frac{d\varphi}{dx} + \int_0^1 K(x, t)\varphi(tx)\,dt;$$

où l'on a $|\psi(x)| < Mx^\gamma$, M *étant une constante et* γ *supérieur à* -1; *la dérivée* $\lambda'(x)$ *existe, et l'on a* $|x^{-1}\lambda(x)| < \lambda_1$ *et* $|\lambda'(x)| < \lambda_1$, *au voisinage de* $x = 0$, λ_1 *étant une constante; la fonction* $K(x, t)$ *satisfait aux conditions données dans la cinquième section. On cherche des solutions valables dans un intervalle* $0 \leqslant x \leqslant a$, a *étant une quantité positive aussi petite que l'exigent les circonstances.*

L'équation admet toujours au moins une solution; la solution générale, si $\lambda(x)$ *est constamment négatif dans l'intervalle, dépend linéairement d'autant de constantes arbitraires qu'il y a de racines de l'équation en* α

$$\int_0^1 t^\alpha K(t)\,dt = 1,$$

chacune d'elles étant comptée avec son degré de multiplicité; elle dépend d'une constante de plus si $\lambda(x)$ *est constamment positif dans l'intervalle.*

L'équation homogène

$$\varphi(x) = x\lambda(x)\frac{d\varphi}{dx} + \int_0^1 K(x, t)\varphi(tx)\,dt$$

admet évidemment le même nombre de solutions linéairement indépendantes qu'il y a de constantes arbitraires dans la solution de l'équation avec $\psi(x)$.

[7] Nous avons montré comment l'équation

$$\int_0^1 G(x,\, t) f(tx)\, dt = g(x)$$

se réduit au type d'équation que nous venons de résoudre. *Il faut avoir* $|g(x)| < Mx^{-\delta}$, M *étant une constante.* On obtient $K(t) = \dfrac{G''(t)}{G'(1)}$, et l'équation qui détermine le nombre de constantes qui interviennent dans la solution est la suivante :

$$\int_0^1 t^{\alpha} G''(t)\, dt = G'(1).$$

La partie réelle de α doit être supérieure à l'unité, puisqu'il faut différentier deux fois la solution $\varphi(x)$ pour trouver $f(x)$. Nous obtenons, après une première intégration par parties,

$$\int_0^1 t^{\alpha-1} G'(t)\, dt = 0,$$

et après une seconde, en tenant compte de la relation $G(1) = 0$,

$$\int_0^1 t^{\alpha-2} G(t)\, dt = 0.$$

La solution dépend donc linéairement d'autant de constantes arbitraires qu'il y a de racines de l'équation en β

$$\int_0^1 t^{\beta} G(t)\, dt = 0,$$

chacune d'elles étant comptée avec son degré de multiplicité. Il y aura une constante de plus si $\lambda(x)$ *est positif au voisinage de* $x = +0$, *c'est-à-dire si* $G(x,\, 1)$ *a le même signe que* $G'(1)$ *dans ce voisinage.*

Il faut toujours, bien entendu, que les solutions $\varphi(x)$ aient des dérivées secondes telles que l'intégrale $\int_0^1 G(x,\, t)\varphi''(tx)\, dt$ ait un sens. Nous sommes sûrs qu'il en sera ainsi si la fonction $G(x,\, t)$ admet toutes les dérivées secondes et si la fonction

$$\frac{d}{dx}\, x\, \frac{d}{dx}\, x g(x)$$

existe et reste moindre que $M_1 x^{-\delta}$, M_1 étant une constante.

En effet, nous obtenons en multipliant l'équation par x et en différentiant ensuite par rapport à x

$$G(x,\, 1) f(x) + \int_0^1 \left\{ x \frac{\partial G}{\partial x} - t \frac{\partial G}{\partial t} \right\} f(tx)\, dt = \frac{d}{dx}\, x g(x);$$

d'où l'on déduit, en répétant ces opérations,

$$x\mathrm{G}(x, 1)\frac{df}{dx} + \left[\left\{x\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x} - t\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial t}\right\}_{t=1} + \frac{d}{dx}\left\{x\mathrm{G}(x, 1)\right\}\right]f(x)$$

$$+\int_0^1 \left\{x^2\frac{\partial^2 \mathrm{G}}{\partial x^2} - 2xt\frac{\partial^2 \mathrm{G}}{\partial x \partial t} + t^2\frac{\partial^2 \mathrm{G}}{\partial t^2} + x\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x} + t\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial t}\right\}f(tx)\,dt = \frac{d}{dx}\,x\,\frac{d}{dx}\,x\,g(x),$$

laquelle est une équation du type que nous avons résolu. Nous avons

$$\mathrm{K}(t) = \frac{t^2\mathrm{G}''(t) + t\mathrm{G}'(t)}{\mathrm{G}'(1)},$$

$$\lambda(x) = -\frac{x\mathrm{G}(x, 1)}{\left(x\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x} - t\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial t}\right)_{t=1} + \frac{d}{dx}\left\{x\mathrm{G}(x, 1)\right\}},$$

et nous trouvons sans difficulté les mêmes résultats.

Il est clair que l'équation homogène

$$\int_0^1 \mathrm{G}(x, t)f(tx)\,dt = 0$$

admet le même nombre de solutions linéairement indépendantes qu'il y a de constantes arbitraires dans la solution de l'équation avec second membre.

[8] Nous n'avons pas réussi à résoudre complètement *l'équation*

$$\int_0^1 \mathrm{G}(x, t)f(tx)\,dt = g(x)$$

dans le cas plus général de singularité où l'on a

$$\mathrm{G}(1) = \mathrm{G}'(1) = \mathrm{G}''(1) = \ldots = \mathrm{G}^{(r-1)}(1) = 0; \qquad \mathrm{G}^{(r)}(1) \neq 0.$$

Mais nous montrerons comment *son étude peut se réduire à celle des équations différentielles linéaires au voisinage d'un point singulier.*

Prenons d'abord un cas que l'on peut résoudre tout de suite, *celui où la fonction* G *est indépendante de x.* Nous avons

$$\int_0^1 \mathrm{G}(t)f(tx)\,dt = g(x).$$

En posant

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{(x-s)^r}{r!}f(s)\,ds,$$

et en répétant $(r+1)$ fois l'opération de multiplier par x et d'intégrer ensuite par parties, on obtient

$$G^{(r)}(1)\varphi(x) - \int_0^1 G^{(r+1)}(t)\varphi(tx)\,dt = (-1)^r x^{r+1} g(x).$$

La solution dépend d'autant de constantes arbitraires qu'il y a de racines à partie réelle supérieure à r de l'équation en α

$$G^{(r)}(1) - \int_0^1 t^\alpha G^{(r+1)}(t)\,dt = 0,$$

laquelle se réduit, par une suite d'intégrations par parties, à

$$\int_0^1 t^{\alpha-r-1} G(t)\,dt = 0.$$

Le nombre de constantes arbitraires dans la solution est donc égal au nombre des racines de l'équation en β

$$\int_0^1 t^\beta G(t)\,dt = 0,$$

chacune d'elles étant comptée avec son degré de multiplicité.

Mais *si la fonction* G *dépend de la variable* x, la même suite de $(r+1)$ opérations nous donne

$$x^r \nu_0(x)\frac{d^r\varphi}{dx^r} - x^{r-1}\nu_1(x)\frac{d^{r-1}\varphi}{dx^{r-1}} + \ldots + (-1)^{r-1} x\nu_{r-1}(x)\frac{d\varphi}{dx} + (-1)^r\nu_r(x)\varphi(x)$$
$$+ (-1)^{r+1}\int_0^1 \frac{\partial^{r+1}}{\partial t^{r+1}} G(x,t)\varphi(tx)\,dt = x^{r+1}g(x),$$

où l'on pose

$$\nu_0(x) = G(x,1); \qquad \nu_1(x) = \frac{\partial}{\partial t}G(x,t)_{t=1}; \qquad \ldots; \qquad \nu_r(x) = \frac{\partial^r}{\partial t^r}G(x,t)_{t=1}.$$

Nous avons, par hypothèse,

$$\nu_0(0) = \nu_1(0) = \ldots = \nu_{r-1}(0) = 0; \qquad \nu_r(0) \neq 0,$$

et nous supposons à l'avance l'existence de toutes les dérivées de la fonction $G(x,t)$ dont nous aurons besoin dans la suite. En posant maintenant

$$v_1(x) = \frac{\nu_{r-1}(x)}{\nu_r(x)}, \qquad v_2(x) = -\frac{\nu_{r-2}(x)}{\nu_r(x)}, \qquad \ldots, \qquad v_r(x) = (-1)^{r+1}\frac{\nu_0(x)}{\nu_r(x)},$$

$$\psi(x) = \frac{x^{r+1}g(x)}{(-1)^r\nu_r(x)},$$

$$K(x,t) = \frac{\dfrac{\partial^{r+1}}{\partial t^{r+1}}G(x,t)}{\nu_r(x)},$$

on obtient l'équation

$$\varphi(x) = \psi(x) + xv_1(x)\frac{d\varphi}{dx} + \ldots + x^r v_r(x)\frac{d^r\varphi}{dx^r} + \int_0^1 K(x, t)\varphi(tx)\,dt.$$

Supposons que la fonction $K(x, t)$ satisfasse aux conditions données dans la cinquième section; en faisant son approximation par un polynôme convenable $P_n(t)$ et en supposant que l'expression

$$Y(x) = xv_1(x)\frac{d\varphi}{dx} + \ldots + x^r v_r(x)\frac{d^r\varphi}{dx^r}$$

soit moindre en valeur absolue que $M'x^{-\delta}$, M' étant une constante, on obtient par les méthodes et avec les notations déjà employées

$$\varphi(x) = F_n(x) + Z_n(x) + S_n\varphi(x),$$

le nouveau terme $Z_n(x)$ étant dû à l'expression $Y(x)$; nous avons

$$\begin{aligned} Z_n(x) &= Y(x) + \int_{C_1} \frac{x^\alpha \displaystyle\int_0^x y^{-1-\alpha} Y(y)\,dy}{H_n(\alpha)}\,d\alpha + \int_{C_2} \frac{x^\alpha \displaystyle\int_a^x y^{-1-\alpha} Y(y)\,dy}{H_n(\alpha)}\,d\alpha \\ &= Y(x) + \sum_{s=1}^{s=r}\left[\int_{C_1} \frac{x^\alpha \displaystyle\int_0^x y^{s-1-\alpha} v_s(y)\frac{d^s\varphi}{dy^s}\,dy}{H_n(\alpha)}\,d\alpha + \int_{C_2} \frac{x^\alpha \displaystyle\int_a^x y^{s-1-\alpha} v_s(y)\frac{d^s\varphi}{dy^s}\,dy}{H_n(\alpha)}\,d\alpha\right]. \end{aligned}$$

Mais on trouve sur C_1, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} &\int_0^x y^{s-1-\alpha} v_s(y)\frac{d^s\varphi}{dy^s}\,dy \\ &= x^{s-1-\alpha}v_s(x)\frac{d^{s-1}\varphi}{dx^{s-1}} - \frac{d}{dx}\left\{x^{s-1-\alpha}v_s(x)\right\}\frac{d^{s-2}\varphi}{dx^{s-2}} + \ldots \\ &+ (-1)^{s-1}\frac{d^{s-1}}{dx^{s-1}}\left\{x^{s-1-\alpha}v_s(x)\right\}\varphi(x) + (-1)^s\int_0^x \frac{d^s}{dy^s}\left\{y^{s-1-\alpha}v_s(y)\right\}\varphi(y)\,dy; \end{aligned}$$

et de même, sur C_2, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_a^x y^{s-1-\alpha} v_s(y)\frac{d^s\varphi}{dy^s}\,dy \\ &= U_s(\alpha) + x^{s-1-\alpha}v_s(x)\frac{d^{s-1}\varphi}{dx^{s-1}} - \frac{d}{dx}\left\{x^{s-1-\alpha}v_s(x)\right\}\frac{d^{s-2}\varphi}{dx^{s-2}} + \ldots \\ &+ (-1)^{s-1}\frac{d^{s-1}}{dx^{s-1}}\left\{x^{s-1-\alpha}v_s(x)\right\}\varphi(x) + (-1)^s\int_a^x \frac{d^s}{dy^s}\left\{y^{s-1-\alpha}v_s(y)\right\}\varphi(y)\,dy, \end{aligned}$$

$U_s(\alpha)$ étant une fonction holomorphe de α indépendante de x, que l'on peut évidemment omettre, puisque l'intégrale

$$\int_{C_2} \frac{U_s(\alpha) x^\alpha}{H_n(\alpha)} d\alpha$$

est égale à une somme de termes qui peuvent être regardés comme incorporés dans l'expression $F_n(x)$.

La fonction $v_s(x)$ devient nulle pour $x = 0$; nous supposons aussi qu'elle ait s dérivées successives qui restent bornées dans le domaine de $x = +0$. Alors on peut écrire, pour $p \leqslant s$,

$$(-1)^p \frac{d^p}{dx^p} \left\{ x^{s-1-\alpha} v_s(x) \right\} = x^{s-p-\alpha} w_{sp}(x, \alpha),$$

où $w_{sp}(x, \alpha)$ est un polynôme en α et reste fini pour $x = 0$.

Nous avons, par conséquent,

$$\begin{aligned} &\int^x y^{s-1-\alpha} v_s(y) \frac{d^s \varphi}{dy^s} dy \\ &= x^{-\alpha} \left[x^s w_{s0}(x, \alpha) \frac{d^{s-1}\varphi}{dx^{s-1}} + x^{s-1} w_{s1}(x, \alpha) \frac{d^{s-2}\varphi}{dx^{s-2}} + \ldots + x w_{s,s-1}(x, \alpha) \varphi(x) \right] \\ &+ \int^x y^{-\alpha} w_{ss}(y, \alpha) \varphi(y) dy, \end{aligned}$$

la limite inférieure des intégrales étant o ou a, suivant les cas.

On obtient donc, en ajoutant

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{s=r} x^\alpha \int^x y^{s-1-\alpha} v_s(y) \frac{d^s\varphi}{dy^s} dy &= x^r W_0(x, \alpha) \frac{d^{r-1}\varphi}{dx^{r-1}} + x^{r-1} W_1(x, \alpha) \frac{d^{r-2}\varphi}{dx^{r-2}} + \ldots \\ &+ x W_{r-1}(x, \alpha) \varphi(x) + x^\alpha \int^x y^{-\alpha} W_r(y, \alpha) \varphi(y) dy, \end{aligned}$$

les $W(x, \alpha)$ étant des polynômes en α qui restent finis pour $x = 0$. De là nous trouvons

$$\begin{aligned} Z_n(x) = Y(x) &+ \int_{C_1} \frac{x^r W_0(x, \alpha) \dfrac{d^{r-1}\varphi}{dx^{r-1}} + \ldots + x W_{r-1}(x, \alpha) \varphi(x)}{H_n(\alpha)} d\alpha \\ &+ \int_{C_2} \frac{x^r W_0(x, \alpha) \dfrac{d^{r-1}\varphi}{dx^{r-1}} + \ldots + x W_{r-1}(x, \alpha) \varphi(x)}{H_n(\alpha)} d\alpha \\ &+ \int_{C_1} \frac{x^\alpha \displaystyle\int_0^x y^{-\alpha} W_r(y, \alpha) \varphi(y) dy}{H_n(\alpha)} d\alpha + \int_{C_2} \frac{x^\alpha \displaystyle\int_a^x y^{-\alpha} W_r(y, \alpha) \varphi(y) dy}{H_n(\alpha)} d\alpha \\ &= -x^{r+1} \lambda_0(x) \frac{d^r\varphi}{dx^r} - x^r \lambda_1(x) \frac{d^{r-1}\varphi}{dx^{r-1}} - \ldots - x \lambda_r(x) \varphi(x) + S_n' \varphi(x), \end{aligned}$$

où les fonctions $\lambda_0(x)$, $\lambda_1(x)$, ..., $\lambda_r(x)$ restent finies pour $x = 0$, et l'on pose

$$S_n'\varphi(x) = \int_{C_1} \frac{x^\alpha \int_0^x y^{-\alpha} W_r(y, \alpha)\varphi(y)dy}{H_n(\alpha)} d\alpha + \int_{C_2} \frac{x^\alpha \int_a^x y^{-\alpha} W_r(y, \alpha)\varphi(y)dy}{H_n(\alpha)} d\alpha.$$

[**9**] L'équation

$$\varphi(x) = F_n(x) + Z_n(x) + S_n\varphi(x)$$

devient par conséquent la suivante :

$$x^{r+1}\lambda_0(x)\frac{d^r\varphi}{dx^r} + x^r\lambda_1(x)\frac{d^{r-1}\varphi}{dx^{r-1}} + \ldots + x^2\lambda_{r-1}(x)\frac{d\varphi}{dx} + \left\{ 1 + x\lambda_r(x) \right\} \varphi(x)$$
$$= F_n(x) + S_n\varphi(x) + S_n'\varphi(x).$$

Nous sommes donc ramenés à l'étude de l'équation différentielle linéaire

$$x^{r+1}\lambda_0(x)\frac{d^r\varphi}{dx^r} + x^r\lambda_1(x)\frac{d^{r-1}\varphi}{dx^{r-1}} + \ldots + x^2\lambda_{r-1}(x)\frac{d\varphi}{dx} + \left\{ 1 + x\lambda_r(x) \right\} \varphi(x) = u(x)$$

au voisinage du point singulier $x = 0$. *Les fonctions* $\lambda_0(x)$, $\lambda_1(x)$, ..., $\lambda_r(x)$ *sont régulières à ce point, et l'on a* $|u(x)| < Bx^{-\delta}$, B *étant une constante.*

Supposons que l'on sache que l'équation différentielle sans second membre admet des solutions linéairement indépendantes $\rho_1(x)$, $\rho_2(x)$, ..., $\rho_p(x)$ $(p \leqslant r)$, qui tendent vers zéro avec x, et que l'équation avec $u(x)$ a une solution que nous représentons par une opération χ sur $u(x)$

$$\varphi(x) = \chi u(x),$$

et qui est telle que l'on a dans un certain intervalle $0 \leqslant x \leqslant a$, aussi petit d'ailleurs que l'on veut,

$$|\chi u(x)| < \sigma B x^{-\delta},$$

σ étant une quantité indépendante du choix du polynôme $P_n(t)$.

On aura alors

$$\varphi(x) = E_n(x) + J_n\varphi(x) + J_n'\varphi(x),$$

en posant

$$E_n(x) = \chi F_n(x) + c_1\rho_1(x) + c_2\rho_2(x) + \ldots + c_p\rho_p(x).$$
$$J_n\varphi(x) = \chi S_n\varphi(x),$$
$$J_n'\varphi(x) = \chi S_n'\varphi(x),$$

les c_1, c_2, ..., c_p étant des constantes arbitraires.

La solution sera donnée par la série

$$\varphi(x) = u_0(x) + u_1(x) + \dots + u_m(x) + \dots,$$

où l'on pose

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \mathrm{E}_n(x), \\ u_1(x) &= \mathrm{J}_n u_0(x) + \mathrm{J}_n' u_0(x), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_m(x) &= \mathrm{J}_n u_{m-1}(x) + \mathrm{J}_n' u_{m-1}(x), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Nous avons toujours

$$|\mathrm{F}_n(x)| < \mathrm{V}x^{-\delta},$$

d'où l'on déduit par hypothèse, si a est suffisamment petit,

$$|\chi \mathrm{F}_n(x)| < \sigma \mathrm{V} x^{-\delta},$$

et l'on sait que les fonctions $\rho_1(x)$, $\rho_2(x)$, ..., $\rho_p(x)$ tendent vers zéro avec x; on peut donc choisir a assez petit pour avoir

$$|u_0(x)| = |\mathrm{E}_n(x)| < 2\sigma \mathrm{V} x^{-\delta}.$$

Nous avons toujours aussi

$$|\mathrm{S}_n u_0(x)| < 2q\sigma \mathrm{V} x^{-\delta},$$

q étant une quantité qui peut être rendue arbitrairement petite par un choix convenable de $\mathrm{P}_n(t)$; et l'on voit par la méthode adoptée dans le cas singulier plus simple où nous avions $\mathrm{G}(1) = 0$, $\mathrm{G}'(1) \neq 0$, que l'on a

$$|\mathrm{S}_n' u_0(x)| < 2q'\sigma \mathrm{V} x^{-\delta},$$

q' étant une quantité qui tend vers zéro avec a. Nous obtenons, par conséquent,

$$|u_1(x)| \leqslant |\chi \mathrm{S}_n u_0(x)| + |\chi \mathrm{S}_n' u_0(x)| < 2(q+q')\sigma^2 \mathrm{V} x^{-\delta}.$$

De même on trouve en général

$$|u_m(x)| < 2(q+q')^m \sigma^{m+1} \mathrm{V} x^{-\delta},$$

d'où l'on voit que la série

$$\varphi(x) = u_0(x) + u_1(x) + \dots + u_m(x) + \dots$$

converge absolument si l'on choisit le polynôme $\mathrm{P}_n(t)$ et l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant a$, de façon à avoir

$$\sigma(q+q') < 1.$$

On démontre de la même manière qu'auparavant qu'elle satisfait à l'équation

$$\varphi(x) = E_n(x) + J_n\varphi(x) + J_n'\varphi(x),$$

et par conséquent à l'équation

$$x^{r+1}\lambda_0(x)\frac{d^r\varphi}{dx^r} + x^r\lambda_1(x)\frac{d^{r-1}\varphi}{dx^{r-1}} + \dots + \left\{ 1 + x\lambda_r(x) \right\} \varphi(x) = F_n(x) + S_n\varphi(x) + S_n'\varphi(x).$$

On peut remonter de là à l'équation

$$\varphi(x) = \psi(x) + xv_1(x)\frac{d\varphi}{dx} + \dots + x^r v_r(x)\frac{d^r\varphi}{dx^r} + \int_0^1 K(x, t)\varphi(tx)\,dt,$$

si l'on établit que la fonction

$$Y(x) = xv_1(x)\frac{d\varphi}{dx} + \dots + x^r v_r(x)\frac{d^r\varphi}{dx^r}$$

reste moindre en valeur absolue que $M'x^{-\delta}$, M' étant une constante.

Enfin on peut revenir par des intégrations par parties à l'équation

$$\int_0^1 G(x, t) f(tx)\,dt = g(x).$$

VIII.

Sur le prolongement des solutions.

Les solutions que nous avons obtenues n'étaient souvent valables que dans un domaine très restreint; mais on peut les étendre jusqu'au point où l'une quelconque des fonctions qui interviennent dans l'équation fonctionnelle cesse de remplir les conditions auxquelles elle était assujettie.

Les équations que nous avons résolues sont les suivantes :

1° $$\varphi(x) - h(x)\varphi(\mu x) = \psi(x) + \int_\mu^1 K(x, t)\varphi(tx)\,dt,$$

2° $$\varphi(x) = \psi(x) + \int_0^1 K(x, t)\varphi(tx)\,dt,$$

3° $$\varphi(x) = \psi(x) + x\lambda(x)\frac{d\varphi}{dx} + \int_0^1 K(x, t)\varphi(tx)\,dt,$$

où l'on a $$\lambda(0) = 0;$$

4° $$\varphi(x) = \psi(x) + xv_1(x)\frac{d\varphi}{dx} + \dots + x^r v_r(x)\frac{d^r\varphi}{dx^r} + \int_0^1 K(x, t)\varphi(tx)\,dt,$$

où l'on a $$v_1(0) = v_2(0) = \dots = v_r(0) = 0.$$

Nous avons déjà montré comment on peut étendre la solution de 1°, lorsqu'on la connaît dans un intervalle quelconque $\mu b \leqslant x \leqslant b$.

Pour 2°, supposons que l'on ait trouvé une solution quelconque valable pour $0 \leqslant x \leqslant a$. Nous pouvons écrire l'équation comme il suit :

$$\varphi(x) = \psi(x) + \int_0^x \frac{1}{x} \mathrm{K}\left(x, \frac{y}{x}\right) \varphi(y) dy,$$

c'est-à-dire, si $x \geqslant a$,

$$\varphi(x) = \psi(x) + \int_0^a \frac{1}{x} \mathrm{K}\left(x, \frac{y}{x}\right) \varphi(y) dy + \int_a^x \frac{1}{x} \mathrm{K}\left(x, \frac{y}{x}\right) \varphi(y) dy.$$

Mais on connaît $\varphi(y)$ entre 0 et a. On peut donc écrire :

$$\varphi(x) = \Psi(x) + \int_a^x \frac{1}{x} \mathrm{K}\left(x, \frac{y}{x}\right) \varphi(y) dy,$$

où la fonction $\Psi(x)$ est connue. Nous avons là, pour $x > a$, une équation de Volterra de seconde espèce qui nous donne tout de suite un prolongement de la solution.

Nous obtenons de 3°, de la même façon, l'équation suivante :

$$-x\lambda(x)\frac{d\varphi}{dx} + \varphi(x) = \Psi(x) + \int_a^x \frac{1}{x} \mathrm{K}\left(x, \frac{y}{x}\right) \varphi(y) dy,$$

d'où l'on déduit, pour $x > a$,

$$e^{-\int_a^x \frac{dx}{x\lambda(x)}} \varphi(x) = \varphi(a) - \int_a^x \frac{e^{-\int_a^x \frac{dx}{x\lambda(x)}} \Psi(x)}{x\lambda(x)} dx$$
$$- \int_a^x \frac{e^{-\int_a^x \frac{dx}{x\lambda(x)}}}{x\lambda(x)} dx \int_a^x \frac{1}{x} . \mathrm{K}\left(x, \frac{y}{x}\right) \varphi(y) dy.$$

Cette équation se réduit facilement à l'équation de Volterra de seconde espèce

$$\varphi(x) = \Psi_1(x) + \int_a^x \mathrm{H}(x, y) \varphi(y) dy,$$

où l'on pose

$$\Psi_1(x) = e^{\int_a^x \frac{dx}{x\lambda(x)}} \left[\varphi(a) - \int_a^x \frac{e^{-\int_a^x \frac{dx}{x\lambda(x)}}}{x\lambda(x)} \Psi(x) dx\right],$$

$$\mathrm{H}(x, y) = -e^{\int_a^x \frac{dx}{x\lambda(x)}} \int_x^y \frac{e^{-\int_a^x \frac{dx}{x\lambda(x)}}}{x^2\lambda(x)} \mathrm{K}\left(x, \frac{y}{x}\right) dx.$$

Enfin, pour 4°, on a pour $x > a$:

$$\varphi(x) = \Psi(x) + xv_1(x)\frac{d\varphi}{dx} + \ldots + x^r v_r(x)\frac{d^r\varphi}{dx^r} + \int_a^x \frac{1}{x} \mathrm{K}\left(x, \frac{y}{x}\right)\varphi(y)\,dy,$$

ou bien

$$\frac{d^r\varphi}{dx^r} = -\frac{\Psi(x)}{x^r v_r(x)} - \frac{v_1(x)}{x^{r-1}v_r(x)}\frac{d\varphi}{dx} - \frac{v_2(x)}{x^{r-2}v_r(x)}\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \ldots$$

$$- \frac{v_{r-1}(x)}{xv_r(x)}\frac{d^{r-1}\varphi}{dx^{r-1}} + \frac{\varphi(x)}{x^r v_r(x)} - \int_a^x \frac{\mathrm{K}\left(x, \frac{y}{x}\right)}{x^{r+1}v_r(x)}\varphi(y)\,dy.$$

En intégrant cette équation r fois entre a et x et en nous rappelant que l'on connaît $\varphi(a)$, $\varphi'(a)$, ..., $\varphi^{(r-1)}(a)$, nous trouvons encore une équation de Volterra de seconde espèce.

IX.

Application à une équation aux dérivées partielles.

[1] On peut se servir de la solution du problème d'inversion d'Abel dans l'étude de l'*équation aux dérivées partielles*

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} - t\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \mathrm{A}(x, t)\frac{\partial z}{\partial t}.$$

On suppose que la fonction $\mathrm{A}(x, t)$ soit susceptible d'être mise sous la forme

$$\mathrm{A}(x, t) = \frac{x\dfrac{\partial \mathrm{G}(x, t)}{\partial x} - t\dfrac{\partial \mathrm{G}(x, t)}{\partial t}}{\mathrm{G}(x, t)},$$

$\mathrm{G}(x, t)$ étant une fonction qui reste bornée, ainsi que ses dérivées premières, dans le rectangle limité par les droites $x = 0$, $x = l$, $t = a$, $t = b$.

On cherche une solution $z(x, t)$ qui reste bornée dans ce rectangle et qui est donnée en fonction de x sur les droites $t = a$ et $t = b$. Cela entraîne qu'elle est donnée en fonction de t sur la droite $x = 0$. En effet, si nous prenons

$$z(x, a) = h_1(x); \qquad z(x, b) = h_2(x),$$

en posant $z(t) = z(o, t)$, nous aurons

$$z(a) = h_1(o); \qquad z(b) = h_2(o),$$

et la fonction $z(t)$ satisfait à l'équation

$$- tz''(t) = A(t)z'(t),$$

ou bien

$$z''(t) = \frac{G'(t)}{G(t)} z'(t),$$

où l'on pose $A(t) = A(o, t)$, $G(t) = G(o, t)$.

De là, nous déduisons :

$$z'(t) = c_2 G(t),$$

$$z(t) = c_1 + c_2 \int_a G(t) dt,$$

c_1 et c_2 étant des constantes que les deux équations $z(a) = h_1(o)$, $z(b) = h_2(o)$ nous permettent, en général, de déterminer.

[**2**] Ainsi donc, la fonction $z(x, t)$ est définie sur trois côtés du rectangle. Pour la trouver, mettons $\frac{\partial z}{\partial t} = u$, ce qui nous donne

$$x \frac{\partial u}{\partial x} - t \frac{\partial u}{\partial t} = A(x, t) u.$$

Une solution de cette équation est donnée par $u = G(x, t)$, et cela nous montre que la solution la plus générale est

$$u = G(x, t) f(tx),$$

f étant une fonction arbitraire, mais ayant une dérivée première.

En intégrant par rapport à t, nous trouvons

$$z = h_1(x) + \int^t G(x, \tau) f(\tau x) d\tau,$$

d'où nous obtenons, en mettant $t = b$,

$$\int_a^b G(x, t) f(tx) dt = h_2(x) - h_1(x).$$

Nous tombons sur le problème d'inversion que nous avons résolu. On peut évidemment, sans diminuer la généralité, prendre $b = 1$, $a = \mu$, où l'on a $0 \leqslant \mu < 1$ ou $-1 \leqslant \mu < 0$. Il y aura donc trois cas à considérer, suivant que l'on a :

$$1^\circ \quad \mu = 0; \qquad 2^\circ \quad \mu > 0; \qquad 3^\circ \quad \mu < 0.$$

1° $\mu = 0$. L'équation sera :

$$\int_0^1 G(x, t) f(tx)\,dt = h_2(x) - h_1(x).$$

Il faut admettre que la fonction $h_2(x) - h_1(x)$ a une dérivée première par rapport à x. Nous obtenons, en multipliant par x et en différentiant ensuite par rapport à x,

$$G(x, 1) f(x) + \int_0^1 \left\{ x \frac{\partial G}{\partial x} - t \frac{\partial G}{\partial t} \right\} f(tx)\,dt = \frac{d}{dx} x \left\{ h_2(x) - h_1(x) \right\}.$$

La fonction $f(x)$ doit avoir une dérivée première; pour cela, il suffit d'admettre que les dérivées secondes

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial t}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}, \quad h''_2(x) - h''_1(x)$$

existent et restent bornées. Nous le voyons en multipliant encore une fois par x et en différentiant ensuite par rapport à x.

La solution dépend linéairement d'un certain nombre de constantes arbitraires; il en est évidemment de même pour la fonction $z(x, t)$. Aux solutions de l'équation fonctionnelle avec second membre zéro correspondent des solutions de l'équation différentielle qui deviennent nulles sur trois côtés du rectangle.

2° $\mu > 0$. Dans ce cas, nous aurons l'équation

$$\int_\mu^1 G(x, t) f(tx)\,dt = h_2(x) - h_1(x).$$

Il y aura certainement un système de solutions dépendant linéairement d'un certain nombre de constantes arbitraires si l'on a

$$|h_2(x) - h_1(x)| < M x^\beta \qquad (\beta \geqq 0),$$

M étant une constante, et en même temps

$$c \mu^{1+\beta} < 1,$$

où l'on pose $c = \dfrac{G(\mu)}{G(1)}$. La fonction $f(x)$ satisfait à la condition

$$\lim_{n \to \infty} c^n \mu^n f(\mu^n x) = 0.$$

Si l'on s'affranchit de cette condition, ou bien si les autres hypothèses ne sont pas vérifiées, il y aura toujours des solutions $f(x)$ qui dépendent d'une fonction donnée arbitrairement dans l'intervalle $\mu l_1 \leqq x \leqq l_1$ $(l_1 \leqq l)$. On les détermine de la manière que nous avons indiquée, par une suite d'équations de Volterra; mais nos recherches ne nous permettent de rien affirmer sur la façon dont elles se comportent dans le voisinage de $x = 0$. Ce serait là un point qui reste à éclaircir.

3° $\mu < 0$. On peut mettre $\mu = -\nu$, ν étant une quantité positive. L'équation

$$\int_{-\nu}^{1} G(x, t) f(tx)\, dt = h_2(x) - h_1(x)$$

est d'un type que nous n'avons pas jusqu'ici étudié en général. Si elle doit être satisfaite pour les valeurs positives et négatives de x, nous avons obtenu une solution en supposant que les fonctions $G(x, t)$, $h_2(x) - h_1(x)$ soient développables, au moins asymptotiquement, suivant les puissances positives croissantes de x; mais nous n'avons pu résoudre le cas général. Mais si l'on se borne aux valeurs positives de x, comme c'est le cas pour l'équation aux dérivées partielles que nous traitons, il est facile de trouver une solution dépendant d'une fonction arbitraire. En effet, en mettant $f(x) = u(x)$, une fonction arbitraire, pour les valeurs négatives de x, nous obtenons l'équation

$$\int_{0}^{1} G(x, t) f(tx)\, dt = h_2(x) - h_1(x) + \int_{0}^{-\nu} G(x, t) f(tx)\, dt,$$

qui détermine $f(x)$ pour les valeurs positives de x.

[**3**] Nous avons dit que l'on a, en général,

$$z(t) = c_1 + c_2 \int_{a}^{t} G(t)\, dt$$

avec les conditions

$$z(a) = h_1(0); \qquad z(b) = h_2(0).$$

De là, nous obtenons

$$c_1 = h_1(0); \qquad c_2 = \frac{h_2(0) - h_1(0)}{\int_{a}^{b} G(t)\, dt}.$$

Cela sera impossible si l'on a

$$\int_{a}^{b} G(t)\, dt = 0,$$

à moins que l'on n'ait en même temps

$$h_2(0) - h_1(0) = 0,$$

et alors la constante c_2 sera arbitraire. Ceci s'explique par le fait que l'équation

$$\int_{a}^{b} G(x, t) f(tx)\, dt = 0$$

admet dans ce cas une solution finie qui ne s'annule pas pour $x=0$. Soit $v(x)$ cette solution, avec la relation $v(0)=1$; nous aurons dans l'expression de $z(x, t)$ un terme

$$c_2 \int_a^t G(x, \tau) v(\tau x) d\tau,$$

c_2 étant arbitraire. On aura, par conséquent, dans l'expression de $z(t)$ le terme

$$c_2 \int_a^t G(t) dt.$$

Dans le cas où l'on a $b=1$, $a=-\nu$, il faut que la fonction arbitraire $u(x)$ satisfasse à la condition $u(0)=c_2$. Car nous devons avoir pour $t \leqslant 0$:

$$z(x, t) = h_1(x) + \int_{-\nu}^t G(x, \tau) u(\tau x) d\tau,$$

ce qui nous donne

$$z(t) = h_1(0) + u(0) \int_{-\nu}^t G(t) dt.$$

C'est donc seulement lorsqu'on a $h_1(0)=h_2(0)$ et $\int_{-\nu}^1 G(t) dt = 0$ que $u(0)$ peut être une constante quelconque.

[**4**] Une remarque sur la nature de la fonction $A(x, t)$. On peut former à son gré de telles fonctions, en prenant des fonctions $G(x, t)$ qui satisfont aux conditions demandées; mais si nous nous sommes donnés une fonction $A(x, t)$, il faut examiner si l'équation

$$x \frac{\partial w}{\partial x} - t \frac{\partial w}{\partial t} = A(x, t) w$$

admet une solution remplissant ces conditions.

Du système d'équations

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dt}{t} = \frac{dw}{A(x, t) w},$$

nous déduisons

$$tx = B; \qquad \frac{dx}{x} = \frac{dw}{wA\left(x, \frac{B}{x}\right)},$$

B étant une constante; de la dernière équation, nous obtenons

$$w = e^{\int^x A\left(x,\, \frac{B}{x}\right)\frac{dx}{x}}.$$

La solution générale est donc :

$$w(x, t) = \theta(tx)\, e^{\int^x A\left(y,\, \frac{tx}{y}\right)\frac{dy}{y}},$$

θ étant une fonction arbitraire. On devra toujours examiner s'il existe dans cette classe de fonctions une fonction satisfaisant aux conditions que doit remplir $G(x, t)$.

ERRATA

Dans la première formule, au commencement du Mémoire (p. 63) :

au lieu de

$$\psi(a) = \int_{x=0}^{x=a} \frac{ds}{(a-s)^n}$$

lire

$$\psi(a) = \int_{x=0}^{x=a} \frac{ds}{(a-x)^n}$$

Page 133, dernière formule en bas de la page :

au lieu de

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\left[T_n(\alpha)x^\alpha \int_0^x y^{-1-\alpha}\rho_n(y)\,dy\right]d\alpha = \sum_{r=1}^{r=N+1} x^{-r}\int_0^x y^{-1+r}\rho_n(y)\,dy$$

$$= \frac{1}{x}\int_0^x \sum_{r=0}^{r=N} a^r\left(\frac{y}{x}\right)^r \rho_n(y)\,dy = \frac{1}{x}\int_0^x P_n\left(\frac{y}{x}\right)\rho_n(y)\,dy$$

lire

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\left[T_n(\alpha)x^\alpha \int_0^x y^{-1-\alpha}\rho_n(y)\,dy\right]d\alpha = \sum_{r=1}^{r=N+1} a_{r-1}x^{-r}\int_0^x y^{-1+r}\rho_n(y)\,dy$$

$$= \frac{1}{x}\int_0^x \sum_{r=0}^{r=N} a_r\left(\frac{y}{x}\right)^r \rho_n(y)\,dy = \frac{1}{x}\int_0^x P_n\left(\frac{y}{x}\right)\rho_n(y)\,dy$$