SUR LES TRANSFORMATIONS ET EXTENSIONS

DE

LA FORMULE DE STOKES

PAR M. A. BUHL.

En continuant mes recherches sur les formules analogues à la formule de Stokes, j'ai été amené à des considérations qui appartiennent à deux ordres d'idées assez distincts.

D'où la division de ce nouveau Mémoire en deux parties.

Dans la première partie, j'étudie des intégrales de surface invariantes pour toutes les cloisons passant par un contour donné *et tangentes entre elles au contour*. C'est la formule (D) qui joue alors le rôle fondamental et toute la première partie n'a trait qu'à des applications et à des développements ayant pour base cette formule (D) que je considère comme originale. Elle semble permettre d'importantes recherches sur les intégrales superficielles de la forme

$$\text{(F)} \qquad \int\int_{\Gamma} [\mathrm{K}(rt - s^2) + \mathrm{A}r + \mathrm{B}s + \mathrm{C}t + \mathrm{D}]\,dx\,dy,$$

où K, A, B, C, D sont des fonctions quelconques de x, y, z, p, q. J'ai donné, je crois, d'une manière aussi complète que possible, les conditions pour que cette intégrale ne dépende que des valeurs de x, y, z, p, q sur le contour de la cloison d'intégration ; ce sont les conditions (J_1).

Parmi les applications, je place en premier lieu celles qui concernent les équations de Monge-Ampère. Le crochet qui figure dans (F), si on l'égale à zéro, constitue une telle équation. Réciproquement, à toute équation de Monge-Ampère, multipliée par un facteur $\mu(x, y, z, p, q)$, correspond une intégrale (F) identiquement nulle qui, d'après la formule (D) et sous certaines conditions, peut être remplacée par une intégrale de ligne relative aux contours fermés tracés sur les surfaces intégrales; on arrive ainsi, sur ces surfaces, à connaître des différentielles exactes. C'est là le rôle du multiplicateur de Jacobi pour une équation aux dérivées partielles linéaire et du premier ordre. C'est pourquoi je dis, quand le facteur μ existe pour une équation de Monge-Ampère, que c'est le multiplicateur jacobien de l'équation. Dans ces recherches, j'ai été grandement guidé par un théorème dû à M. Émile Picard, publié aux *Atti* de Turin, théorème que je rappelle même en détail au paragraphe 2. D'autre part, pour bien des généralités relatives à l'équation de Monge-Ampère, j'ai eu recours aux excellentes *Leçons* de M. E. Goursat.

D'autres domaines offrent encore des développements de grand intérêt. Ainsi la définition de la courbure d'une surface a donné lieu à de longues et artificielles discussions (Cf. G. Darboux, *Surfaces*, t. II, p. 365). Toutefois, pour la courbure d'une cloison d'étendue finie, il a particulièrement semblé naturel de prendre une intégrale de surface restant invariante lorsque cette cloison se déforme en conservant même contour et mêmes plans tangents à ce contour. Or, le premier membre de la formule (D) doit donner une infinité d'intégrales de ce genre; j'en ai formé quelques-unes en cherchant surtout à retrouver celles qui étaient connues. Il y a sans doute là un vaste champ de recherches nouvelles que je n'ai fait qu'effleurer.

Enfin j'ai essayé, aussi souvent que possible, de parler le langage de M. Volterra qui, en parlant explicitement de *fonctions de lignes*, a apporté l'ordre et la clarté dans le maniement des intégrales de surface; mais son influence se fait surtout sentir dans la seconde partie de ce travail, partie à laquelle je passe maintenant.

De même qu'il existe des cloisons à *deux* dimensions déformables dans l'espace à *trois*, bien que ces cloisons passent toujours par un contour fixe (variété à *une* dimension), il existe, dans l'hyperespace à n dimensions, des variétés V_k, à k dimensions, déformables en passant toujours par une variété fixe V_{k-1}. Et l'on peut se proposer de chercher les intégrales k-uples qui, étendues à V_k, ne dépendent que de V_{k-1}.

Pour $n=3$ et $k=2$, on a la formule de Stokes ordinaire.

Pour $n=4$ et $k=2$, on a une formule analogue (déjà étudiée dans un précédent Mémoire publié ici-même en 1911) qui correspond à la théorie des fonctions de deux variables complexes et donne le théorème de Poincaré généralisation du théorème de Cauchy.

Pour $n=4$ et $k=3$, on a la formule (L) du présent Mémoire que j'ai déjà donnée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du 8 juillet 1912 et que je crois nouvelle, au moins quant à sa forme.

Il me semble même que les méthodes que je donne s'appliqueraient tout aussi bien à toutes les valeurs de n et de k, les réserves ne visant que les difficultés d'écriture.

Dans ces recherches, j'ai été surtout dirigé par la *Théorie des fonctions de deux variables* de MM. Picard et Simart dont le chapitre Ier est particulièrement consacré à ces transformations d'intégrales. D'autre part, les fonctions de lignes de M. Volterra sont aussi bien des fonctions de variétés à un nombre quelconque de dimensions et je n'ai eu, en somme, qu'à donner une forme spéciale à des transformations dont la possibilité est fréquemment invoquée dans les écrits du célèbre géomètre italien. Les pseudo-déterminants que j'emploie sont, en effet, de merveilleux instruments de calcul. La formule de Stokes ordinaire, écrite sous la forme développée que l'on trouve dans tous les traités d'analyse, ne suggère guère les transformations fécondes; la formule est même trop longue pour qu'on puisse en bien saisir la structure du premier coup d'œil. Sous la forme (A), au contraire, cette structure apparaît avec une élégance frappante; cette forme a été le point de départ de toutes mes recherches subséquentes.

Ce Mémoire développe partiellement mes Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* des 24 juin 1912, 8 juillet 1912 et 9 juin 1913; je dis *partiellement*, car il reste encore, dans ces Notes, bien des points sur lesquels je compte revenir ultérieurement.

Toulouse, le 30 juin 1913.

PRÉLIMINAIRES.

[**1**] Les démonstrations de la formule de Stokes ordinaire étant très nombreuses, il est nécessaire de rappeler celle que je me propose d'abord de généraliser.

Soit la formule de Riemann

$$\int\int_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_C P dx + Q dy \tag{1}$$

étendue d'abord à un contour C enfermant l'aire plane A. Imaginons que P et Q dépendent non seulement de x et y, mais de l'ordonnée z d'une surface

$$z = f(x, y),$$

sur laquelle une cloison S et son contour Σ donnent A et C par projection sur Oxy. Alors (1) peut s'écrire :

$$\int\int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + p\,\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial y} - q\,\frac{\partial P}{\partial z}\right) dx\,dy = \int_\Sigma P dx + Q dy.$$

Soit maintenant une troisième fonction $R(x, y, z)$ et l'identité

$$\int_\Sigma R dz = \int_\Sigma R(p\,dx + q\,dy).$$

D'après la formule précédente, on peut l'écrire

$$\int\int_S \left(q\,\frac{\partial R}{\partial x} - p\,\frac{\partial R}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_\Sigma R dz,$$

et, par addition des deux formules, on a finalement :

$$\int\int_S \begin{vmatrix} -p & -q & 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dx\,dy = \int_\Sigma P dx + Q dy + R dz. \tag{A}$$

Cette démonstration, qui a l'avantage de la brièveté, a, d'autre part, l'inconvénient de n'établir qu'un rapprochement assez dissymétrique entre les formules de Riemann et de Stokes. Il est autrement remarquable de lier les deux formules *par un seul changement de variables*, ce que j'ai montré dans mon Mémoire *Sur les applications géométriques de la formule de Stokes*, publié dans ces Annales en 1910.

Mais, pour ce qui suit, le procédé précédent sera le plus commode.

Rappelons que l'intégrale

$$\int\int_S (-pF - qG + H)\,dx\,dy \tag{B}$$

s'exprime, à l'aide de (A), par une intégrale de ligne, si

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0. \tag{C}$$

[**2**] *Formule de Stokes et multiplicateur de Jacobi.* — Soit l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$pX + qY = Z, \tag{2}$$

où p et q sont les dérivées de la fonction inconnue z. D'après (C), sous la seule condition d'avoir

$$\frac{\partial(\mu X)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu Y)}{\partial y} + \frac{\partial(\mu Z)}{\partial z} = 0, \tag{3}$$

on peut écrire :

$$\int\int_S \mu(-pX - qY + Z)\,dx\,dy = \int_\Sigma P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Si l'intégrale double est prise sur une cloison S faisant partie d'une surface intégrale de (2), elle est identiquement nulle. Par suite, l'intégrale simple est nulle aussi pour tous les contours fermés que l'on peut tracer sur une surface intégrale de (2).

Ces considérations ont fourni à M. Émile Picard un élégant théorème donné dans une lettre ajoutée au Mémoire de M. V. Volterra, *Un teorema sugli integrali multipli* (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, t. XXXII, 1897, p. 597).

L'intégrale

$$\int\int_S \mu(-pX - qY + Z)\,dx\,dy,$$

prise suivant une surface limitée par une courbe fermée C_0 fixe de l'espace et par une courbe fermée variable C, tracée sur une surface intégrale de l'équation $pX + qY = Z$, ne dépend pas de la courbe C, c'est-à-dire reste invariable quand on déforme d'une manière continue la courbe C sur la surface intégrale considérée.

En parlant le langage de M. Volterra, on peut dire qu'il y a là une fonction de ligne qui reste exceptionnellement constante quand la ligne variable varie d'une certaine manière.

On peut encore dire que

$$Pdx + Qdy + Rdz$$

est une différentielle exacte *sur une surface intégrale de* (2), et il est alors facile de voir que cette dernière assertion équivaut au théorème de Jacobi sur le dernier multiplicateur.

Les fonctions P, Q, R sont déterminables par les relations bien connues

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = \mu X, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = \mu Y, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \mu Z;$$

d'où

$$P = \int \mu Y dz, \qquad Q = -\int \mu X dz, \qquad R = 0.$$

Soit maintenant

$$\varphi(x, y, z) = \beta$$

la surface intégrale connue. Si l'on cherche à calculer P, Q en prenant pour variable β au lieu de z, on a $d\beta = \varphi_z dz$ et

$$Pdx + Qdy + Rdz = \int \frac{\mu}{\varphi_z}(Ydx - Xdy)d\beta = d\,.\,\Phi(x, y, \beta);$$

d'où

$$d\,.\,\Phi_\beta(x, y, \beta) = \frac{\mu}{\varphi_z}(Ydx - Xdy).$$

Cette expression, qui est différentielle exacte sur la surface intégrale $\varphi = \beta$, est bien celle de Jacobi. On ne changerait rien à ce raisonnement si l'on y multipliait μ par une fonction quelconque de β, remarque qui rappelle immédiatement que *le produit d'un multiplicateur par une intégrale est un autre multiplicateur* ou que *le quotient de deux multiplicateurs est une intégrale.*

Rattacher ainsi la théorie du multiplicateur de Jacobi à la formule de Stokes a de l'importance non seulement pour ce qui suit, mais aussi parce que la même théorie a été rattachée à la formule de Green par M. P. Appell (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 4 novembre 1912). Pour donner au résultat précédent la forme adoptée par M. Appell, posons :

$$\Theta^2 = \varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2.$$

Alors

$$\frac{\mu}{\varphi_z}(\mathrm{Y}dx - \mathrm{X}dy) = \frac{\mu}{\Theta^2}\begin{vmatrix} dx & dy & 0 \\ \mathrm{X} & \mathrm{Y} & 0 \\ \varphi_x & \varphi_y & \dfrac{\Theta^2}{\varphi_z} \end{vmatrix} = \frac{\mu}{\Theta^2}\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \mathrm{X} & \mathrm{Y} & \mathrm{Z} \\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \end{vmatrix},$$

d'après les identités

$$\varphi_x dx + \varphi_y dy + \varphi_z dz = 0, \qquad \mathrm{X}\varphi_x + \mathrm{Y}\varphi_y + \mathrm{Z}\varphi_z = 0.$$

M. Th. de Donder a généralisé cette forme du résultat pour le cas d'un nombre quelconque de variables (*Comptes rendus,* 10 février 1913).

PREMIERE PARTIE.

[**3**] La formule fondamentale que je vais d'abord établir résulte d'une idée extrêmement simple et intuitive. Soit une surface fixe sur laquelle est tracé un contour également fixe γ. On considère les cloisons variables Γ limitées à γ et toutes tangentes, le long de γ, à la surface fixe. Pour ces cloisons variables, *mais toutes tangentes entre elles à leur périphérie*, n'existe-t-il point une formule analogue à la formule de Stokes, formule qui serait plus précise quant à la tangence en question? Or, cette formule existe et est susceptible d'une démonstration analogue à celle donnée au numéro I pour la formule de Stokes ordinaire.

Reprenons la formule de Riemann, relative au plan Oxy, et supposons que P et Q soient fonctions de x, y, z, p, q. La formule devient :

$$(1) \qquad \int\int_{\Gamma} (Q_x + Q_z p + Q_p r + Q_q s - P_y - P_z q - P_p s - P_q t)\, dx\, dy = \int_{\gamma} P dx + Q dy.$$

D'autre part, les identités

$$dz = p\,dx + q\,dy, \qquad dp = r\,dx + s\,dy, \qquad dq = s\,dx + t\,dy,$$

permettent d'écrire, en désignant par R, S, T, trois fonctions nouvelles de x, y, z, p, q,

$$\int_{\gamma} R dz + S dp + T dq = \int_{\gamma} (Rp + Sr + Ts) dx + (Rq + Ss + Tt) dy.$$

La dernière intégrale de ligne, d'après la formule précédente, peut se remplacer par l'intégrale double

$$\int\int_{\gamma} \begin{bmatrix} qR_x + sS_x + tT_x + p(S_z s + T_z t) + r(qR_p + tT_p) + s(qR_q + sS_q) \\ -pR_y - rS_y - sT_y - q(S_z r + T_z s) - s(pR_p + sT_p) - t(pR_q + rS_q) \end{bmatrix} dx\, dy$$

dans le crochet de laquelle on a omis d'écrire quelques termes semblables qui se détruisent immédiatement.

On a ainsi une nouvelle égalité, analogue à (1); le résultat de leur addition se met aisément sous la forme définitive :

$$(\mathrm{D})\qquad \int\!\!\int_{\Gamma} \begin{vmatrix} r & s & 0 & -1 & 0 \\ s & t & 0 & 0 & -1 \\ -p & -q & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial p} & \dfrac{\partial}{\partial q} \\ \mathrm{P} & \mathrm{Q} & \mathrm{R} & \mathrm{S} & \mathrm{T} \end{vmatrix} dx\,dy = \int_{\gamma} \mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy + \mathrm{R}dz + \mathrm{S}dp + \mathrm{T}dq.$$

Telle est la formule qu'il s'agissait d'établir; c'est d'elle seule que nous allons d'abord déduire de nombreuses conséquences. En comparant le premier membre de l'égalité (D) au second, on voit évidemment que l'intégrale double, étendue à la cloison Γ, est un invariant pour toutes les cloisons qui passent par le contour γ *et ont mêmes p et q le long de ce contour*. P, Q, R, S, T sont cinq fonctions quelconques de x, y, z, p, q. Pour abréger, je désignerai souvent le pseudo-déterminant contenu dans (D) par la notation

$$\Delta[\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}, \mathrm{S}, \mathrm{T}]$$

ou tout simplement par Δ quand il n'y aura point de confusion à craindre. On a

$$\Delta = \mathrm{K}(rt - s^2) + \mathrm{A}r + \mathrm{B}s + \mathrm{C}t + \mathrm{D},$$

si l'on pose :

$$(\mathrm{E})\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{T}_p - \mathrm{S}_q = \mathrm{K}, \\ &q(\mathrm{R}_p - \mathrm{S}_z) + \mathrm{Q}_p - \mathrm{S}_y = \mathrm{A}, \\ &-p(\mathrm{R}_p - \mathrm{S}_z) + q(\mathrm{R}_q - \mathrm{T}_z) + \mathrm{Q}_q - \mathrm{T}_y - (\mathrm{P}_p - \mathrm{S}_x) = \mathrm{B}, \\ &-p(\mathrm{R}_q - \mathrm{T}_z) - (\mathrm{P}_q - \mathrm{T}_x) = \mathrm{C}, \\ &-p(\mathrm{R}_y - \mathrm{Q}_z) - q(\mathrm{P}_z - \mathrm{R}_x) + \mathrm{Q}_x - \mathrm{P}_y = \mathrm{D}. \end{aligned}\right.$$

Remarquons que si, dans (D), on fait $\mathrm{S} = 0$, $\mathrm{T} = 0$, en supposant que P, Q, R ne dépendent que de x, y, z, on retrouve l'ordinaire formule de Stokes (A). On peut dire qu'on est parti de cette dernière en bordant convenablement le pseudo-déterminant du troisième ordre qu'elle contient.

[**4**] La formule (D) doit évidemment faire naître des problèmes analogues aux problèmes classiques relatifs à (A) et à l'intégrale double (B).

Considérons l'intégrale double

$$(\mathrm{F})\qquad \int\!\!\int_{\Gamma} [\mathrm{K}(rt - s^2) + \mathrm{A}r + \mathrm{B}s + \mathrm{C}t + \mathrm{D}]\, dx\,dy$$

où K, A, B, C, D sont d'abord des fonctions, quelconques et complètement indépendantes, de x, y, z, p, q. A quelles conditions faut-il justement astreindre ces fonctions K, A, B, C, D pour que (F) prenne la forme du second membre de la formule (D) et ne dépende ainsi que des valeurs de *x, y, z, p, q sur le contour* γ de la surface d'intégration Γ? La question est évidemment la même que celle qui conduit à former la condition (C) pour laquelle (B) ne dépend que du contour de la cloison S.

Ici, il faut partir des équations (E) où l'on considère K, A, B, C, D comme connus et chercher les conditions de compatibilité pour lesquelles ces équations pourront donner des fonctions P, Q, R, S, T. C'est exactement comme si, pour reconnaître si (B) est une fonction de ligne, on écrivait

$$R_y - Q_z = F, \qquad P_z - R_x = G, \qquad Q_x - P_y = H$$

pour chercher la condition (C) à laquelle on peut déterminer P, Q, R.

Le présent problème est beaucoup plus compliqué; il peut cependant être traité complètement de manière explicite.

Remarquons d'abord que le système (E) peut s'écrire :

$$\left\{\begin{array}{c} T_p - S_q = K, \\ (qR + Q)_p - qS_z - S_y = A, \\ -(pR + P)_p + (qR + Q)_q + pS_z - qT_z + S_x - T_y = B, \\ -(pR + P)_q + pT_z + T_x = C, \\ -(pR + P)_y + (qR + Q)_x + p(qR + Q)_z - q(pR + P)_z = D. \end{array}\right.$$

Alors P, Q, R n'y sont représentés que par les combinaisons $pR + P$ et $qR + Q$, c'est-à-dire par deux fonctions seulement. Par suite, *on ne diminue pas la généralité du système* (E) *en y faisant* $R = 0$. Ce système prend ainsi la forme plus simple :

$$\text{(G)} \qquad \left\{\begin{array}{c} T_p - S_q = K, \\ Q_p - qS_z - S_y = A, \\ -P_p + Q_q + pS_z - qT_z + S_x - T_y = B, \\ -P_q + pT_z + T_x = C, \\ -P_y + Q_x + pQ_z - qP_z = D. \end{array}\right.$$

Évidemment on aurait pu prévoir ce résultat en observant que si, dans la forme différentielle

$$Pdx + Qdy + Rdz + Sdp + Tdq,$$

on remplace dz par $pdx + qdy$, P et Q se remplacent respectivement par $pR + P$ et $qR + Q$. Bref, en modifiant convenablement P et Q, on peut toujours prendre $R = 0$.

[**5**] Ceci dit, commençons par étudier le système (G) en supposant que S, T et, par suite, K soient inexistants. Dans ce cas, on n'a que les quatre équations :

$$(2)\qquad \begin{cases} Q_p = A, \\ Q_q - P_p = B, \\ -P_q = C, \\ X(Q) - Y(P) = D. \end{cases}$$

Pour écrire la dernière, je me suis servi des notations symboliques

$$X() = \frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial z}, \qquad Y() = \frac{\partial}{\partial y} + q\frac{\partial}{\partial z},$$

qui simplifieront beaucoup ce qui suit. Remarquons, à ce propos, que

$$XY = YX, \qquad \frac{\partial}{\partial q}X = X\frac{\partial}{\partial q}, \qquad \frac{\partial}{\partial p}Y = Y\frac{\partial}{\partial p},$$

$$\frac{\partial}{\partial q}Y - Y\frac{\partial}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial z}, \qquad \frac{\partial}{\partial p}X - X\frac{\partial}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Je dis d'abord que l'on doit avoir les cinq relations

$$(3)\qquad \begin{cases} X^2(A) + XY(B) + Y^2(C) + D_z - X(D_p) - Y(D_q) = 0, \\ X(B_q - C_p) + Y(C_q) + 2C_z - D_{qq} = 0, \\ X(A_q) + Y(C_p) + B_z - D_{pq} = 0, \\ Y(B_p - A_q) + X(A_p) + 2A_z - D_{pp} = 0, \\ A_{qq} + C_{pp} - B_{pq} = 0, \end{cases}$$

très faciles à vérifier en y remplaçant A, B, C, D par leurs valeurs (2). Si l'on pose

$$(H)\qquad \begin{cases} M = B - \int A_q dp - \int C_p dq, \\ N = D - X\int A\,dp - Y\int C dq, \end{cases}$$

les cinq relations (3) peuvent s'écrire sous la forme plus réduite :

$$(I)\qquad \begin{cases} XY(M) + N_z - X(N_p) - Y(N_q) = 0, \\ X(M_q) - N_{qq} = 0, \\ M_z - N_{pq} = 0, \\ Y(M_p) - N_{pp} = 0, \\ M_{pq} = 0. \end{cases}$$

Ces relations sont-elles suffisantes pour permettre effectivement le calcul de fonctions P et Q satisfaisant au système (2). Nous allons voir qu'en général il en est bien ainsi.

De la première et de la troisième des équations (2), on peut conclure :

$$(4) \qquad \begin{cases} Q = \displaystyle\int A dp + \alpha(x, y, z, q), \\ P = -\displaystyle\int C dq + \beta(x, y, z, p). \end{cases}$$

En portant ces valeurs dans la seconde et la quatrième équation (2), il vient :

$$(5) \qquad \begin{cases} \alpha_q - \beta_p = M, \\ X(\alpha) - Y(\beta) = N. \end{cases}$$

D'après la *cinquième* condition (I), M pourra toujours se mettre sous la forme

$$(6) \qquad M = \lambda + \int M_p dp + \int M_q dq,$$

λ étant fonction de x, y, z seulement; quant aux intégrales, la première ne contient pas q et la seconde ne contient pas p. Ces intégrales doivent être dépourvues de termes additifs provenant de l'intégration indéfinie.

De la *cinquième* et de la *troisième* condition (I), on tire

$$N_{ppqq} = 0,$$

ce qui permet d'attribuer à N la forme

$$(7) \qquad N = \mu + \nu p + \rho q + \theta pq + \int\int N_{pp} dp^2 + \int\int N_{qq} dq^2,$$

μ, ν, ρ, θ étant fonctions de x, y, z seulement. D'après la *troisième* condition (I), on a $\theta = \lambda_z$. La première intégrale double qui figure dans N ne peut contenir q qu'au premier degré, la seconde ne peut contenir p qu'au premier degré; toutes deux sont dépourvues de termes additifs provenant des intégrations indéfinies.

Ceci posé, on satisfait à la première équation (5) en posant :

$$\alpha = \frac{1}{2}\lambda q + a(x, y, z) + \int\int M_q dq^2,$$
$$\beta = -\frac{1}{2}\lambda p + b(x, y, z) - \int\int M_p dp^2.$$

Reste à satisfaire à la seconde, ce qui conduit à écrire :

$$X\left(\frac{1}{2}\lambda q + a\right) + Y\left(\frac{1}{2}\lambda p - b\right) - (\mu + \nu p + \rho q + \lambda_z pq)$$
$$= \int\int [N_{pp} - Y(M_p)] dp^2 + \int\int [N_{qq} - X(M_q)] dq^2.$$

Or, d'après la *seconde* et la *quatrième* des équations (I), le second membre de cette égalité est identiquement nul. En développant le premier, on a

$$X(a) - Y(b) = \mu + \nu p + \rho q - \frac{1}{2} q\lambda_x - \frac{1}{2} p\lambda_y,$$

ou bien :

$$a_x - b_y + pa_z - qb_z = \mu + p\left(\nu - \frac{1}{2}\lambda_y\right) + q\left(\rho - \frac{1}{2}\lambda_x\right).$$

Pour que cette équation soit satisfaite, il faut que l'on ait séparément :

$$\begin{aligned} -a_z &= \frac{1}{2}\lambda_y - \nu, \\ b_z &= \frac{1}{2}\lambda_x - \rho, \\ a_x - b_y &= \mu. \end{aligned}$$

Or, ceci exige encore une condition, bien connue d'ailleurs, qui est

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\lambda_y - \nu\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}\lambda_x - \rho\right) + \frac{\partial \mu}{\partial z} = 0$$

ou

$$\lambda_{xy} + \mu_z - \nu_x - \rho_y = 0.$$

On peut vérifier que ceci n'est autre chose que la *première* des conditions (I) quand on y remplace M et N par les valeurs (6) et (7). Pour faire cette vérification, il faut d'ailleurs faire intervenir la *deuxième*, la *troisième* et la *quatrième* des relations (I).

Finalement, le système (2) est ainsi résolu par rapport à P et Q avec intervention manifestement nécessaire des cinq conditions (I). On voit aussi qu'il n'y a pas lieu d'en chercher d'autres. Quant à la méthode précédente, elle ne consiste évidemment pas à deviner ou à établir d'abord par tâtonnements les relations (3) ou (I). J'ai trouvé ces relations en abordant directement le problème de la résolution par les formules (4) et (5), ce qui, à mesure que l'on avance, force bien à mettre en lumière les conditions de possibilité. Mais, une fois ces conditions connues, on peut s'en servir pour rendre le raisonnement beaucoup plus clair.

Il est certain que de nouvelles dérivations et combinaisons des équations (2) donneraient d'autres relations analogues à (3); mais ces nouvelles relations seraient naturellement superflues quant à la résolution du système (2) par rapport à P et Q.

[6] Reprenons maintenant le système (G) au complet, c'est-à-dire sans négliger ni S, ni T, ni K. On peut l'écrire :

$$
(\mathrm{G}_1) \quad \begin{cases} T_p - S_q = K, \\ Q_p = A + Y(S), \\ Q_q - P_p = B + Y(T) - X(S), \\ - P_q = C - X(T), \\ X(Q) - Y(P) = D. \end{cases}
$$

Pour que ce système soit possible, il faut évidemment que les conditions (I) soient satisfaites quand on y remplace A, B, C respectivement par

$$
A + Y(S), \qquad B + Y(T) - X(S), \qquad C - X(T),
$$

ce qui revient à y remplacer M et N respectivement par

$$
M + Y(T) - X(S) - \int \frac{\partial}{\partial q} Y(S)\,dp + \int \frac{\partial}{\partial p} X(T)\,dq,
$$

$$
N - X \int Y(S)\,dp + Y \int X(T)\,dq.
$$

On obtient ainsi, M et N étant toujours définis en (H),

$$
(\mathrm{J}) \quad \begin{cases} XY(M) + N_z - X(N_p) - Y(N_q) = 0, \\ X^2(K) + X(M_q) - N_{qq} = 0, \\ -XY(K) + M_z - N_{pq} = 0, \\ Y^2(K) + Y(M_p) - N_{pp} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial p} X(K) + \dfrac{\partial}{\partial q} Y(K) + K_z + M_{pq} = 0. \end{cases}
$$

La première de ces égalités est la première condition (I) sans modifications.

Si l'on remplace M et N par leurs valeurs (H), le système (J) peut s'écrire :

$$
(\mathrm{J}_1) \quad \begin{cases} X^2(A) + XY(B) + Y^2(C) + D_z - X(D_p) - Y(D_q) = 0, \\ X^2(K) + X(B_q - C_p) + Y(C_q) + 2C_z - D_{qq} = 0, \\ -XY(K) + X(A_q) + Y(C_p) + B_z - D_{pq} = 0, \\ Y^2(K) + Y(B_p - A_q) + X(A_p) + 2A_z - D_{pp} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial p} X(K) + \dfrac{\partial}{\partial q} Y(K) + K_z + B_{pq} - A_{qq} - C_{pp} = 0. \end{cases}
$$

On voit dès lors comment on peut trouver des fonctions P, Q, S, T satisfaisant au système (G_1). On déterminera d'abord des fonctions T et S satisfaisant à la première équation de ce système; puis, en portant ces valeurs de T et S dans les suivantes, on aura un système propre à déterminer P et Q, puisque les conditions de résolution d'un tel système sont maintenant (J) ou (J_1).

En résumé, *les conditions* (J) *ou* (J_1) *sont celles auxquelles l'intégrale* (F) *pourra prendre la forme du second membre de* (D) *et ne dépendre ainsi que des valeurs de* x, y, z, p, q *sur le contour* γ *de la surface d'intégration* Γ.

[**7**] Les conditions (J) semblent toutes nécessaires, en général, pour qu'on puisse effectivement calculer P, Q, S, T connaissant K, A, B, C, D. Il reste cependant à examiner si, *convenablement dérivées*, ces relations ne tendent pas à rentrer les unes dans les autres.

Considérons d'abord le système (I) dont, pour plus de commodité, les premiers membres seront désignés respectivement par a, b, c, d, e. On peut établir immédiatement que :

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} a_{pq} &= XY(e) + X(c_p) + Y(c_q) + c_z,\\ b_p &= X(e) + c_q,\\ d_q &= Y(e) + c_p. \end{aligned}\right.$$

On vérifie ensuite, et encore d'une manière à peu près immédiate, que ces relations subsistent si a, b, c, d, e désignent les premiers membres du système (J).

Donc, en général, si l'on a identiquement

$$(9)\qquad c = 0, \qquad e = 0,$$

on a aussi identiquement :

$$a_{pq} = 0, \qquad b_p = 0, \qquad d_q = 0.$$

Reste à savoir si les deux équations (9) ne pourraient pas encore rentrer l'une dans l'autre. Cette fois, il semble qu'il n'en soit rien ; l'une, en effet, contient N, expression que ne contient pas l'autre. Dans ces conditions, des dérivations ne permettront pas, *en général*, de confondre les deux équations.

[**8**] Les systèmes (J) ou (J_1), malgré leur complication apparente, n'en sont pas moins remarquablement symétriques. Ces symétries sont aisées à apercevoir entre la première et la cinquième équation, ainsi qu'entre la deuxième et la quatrième.

Il faut observer aussi que ces systèmes se simplifient considérablement si les coefficients K, A, B, C, D ne contiennent pas z, ce qui, dans les applications, est précisément très fréquent.

Au sujet de la structure du système (J_1), remarquons qu'il est naturel d'exiger que ce système se réduise à la condition (C) lorsque (F) se réduit à (B), c'est-à-dire lorsque l'on a

$$K = 0, \quad A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = -pF - qG + H,$$

F, G, H n'étant naturellement fonctions que de x, y, z. Dans ces conditions, en effet, toutes les équations du système (J_1) disparaissent, sauf la première qui se réduit à (C).

[**9**] J'ai donné, pour la première fois, *quatre* des *cinq* conditions (J) dans ma note *Sur les formules analogues à la formule de Stokes* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 9 juin 1913). Ce n'est qu'ensuite que j'ai trouvé la cinquième condition qui, d'après sa forme et en vertu de la symétrie, est devenue la première du système (J). Les quatre autres conditions, seules mentionnées en premier lieu, correspondent au cas où l'on part des équations (2) prises trois à trois en excluant d'abord la première, puis la seconde, etc. Il est clair qu'ainsi on ne peut trouver que quatre conditions : elles peuvent s'écrire :

$$(10) \qquad \left\{\begin{aligned} X(M_q) - N_{qq} &= 0, \\ N_{ppqq} &= 0, \\ Y(M_p) - N_{pp} &= 0, \\ M_{pq} &= 0. \end{aligned}\right.$$

La première ne contient pas A, la seconde ne contient pas B, etc.

Complétées, comme au paragraphe 6, pour K non nul, ces relations (10) donnent celles de ma Note. C'est une analyse encore plus serrée et dans laquelle je me suis proposé (n° 5) de calculer effectivement P et Q connaissant A, B, C, D, qui m'a fait découvrir une cinquième condition qui contient à la fois A, B, C, D.

De plus, des comparaisons convenables des cinq conditions définitives m'ont permis de ne point maintenir l'équation du quatrième ordre qui figure dans (10) et de la ramener, elle aussi, à une équation du second ordre.

[**10**] *Formes diverses de la formule* (D). — Les notations symboliques introduites au paragraphe 5 permettent de développer la formule (D) sans trop d'encombrement. Comme nous l'avons déjà remarqué, on ne nuit pas à la généralité en supposant $R = 0$. D'ailleurs, effectuer le développement du pseudo-déterminant de (D) revient évidemment à récrire le crochet de l'intégrale (F) en donnant à K, A, B, C, D les valeurs tirées du système (G_1). On a ainsi la formule :

$$\int_\gamma P dx + Q dy + S dp + T dq$$

$$= \iint_\Gamma \left\{ \begin{array}{c} \left(\dfrac{\partial T}{\partial p} - \dfrac{\partial S}{\partial q}\right)(rt - s^2) + [X(Q) - Y(P)] \\ \left[\dfrac{\partial Q}{\partial p} - Y(S)\right] r + \left[\dfrac{\partial Q}{\partial q} - \dfrac{\partial P}{\partial p} + X(S) - Y(T)\right] s + \left[X(T) - \dfrac{\partial P}{\partial q}\right] t \end{array} \right\} dx\,dy.$$

Il est facile de voir qu'elle contient des formules connues dont chacune pourrait s'établir directement. Ainsi, pour S, T nuls et P, Q ne contenant que x, y, z, on a

$$\int_\gamma \mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy = \int\int_\Gamma [\mathrm{X(Q)} - \mathrm{Y(P)}]\, dx dy,$$

ce qui est l'ordinaire formule de Stokes pour $\mathrm{R} = 0$.

Pour P, Q nuls et S, T ne contenant que p et q, on a :

$$\int_\gamma \mathrm{S}dp + \mathrm{T}dq = \int\int_\Gamma \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p} - \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial q}\right)(rt - s^2)\, dx dy. \tag{11}$$

Ceci n'est autre chose que la formule de Riemann

$$\int_\gamma \mathrm{S}dp + \mathrm{T}dq = \int\int_\Gamma \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p} - \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial q}\right) dp dq$$

qui prend bien, en effet, la forme (11) si l'on veut introduire dans l'intégrale double les variables x et y.

Quant à la formule générale ci-dessus, elle est bien d'une structure analogue à celle de la formule de Stokes ordinaire; mais il faut observer que l'analogie reste autrement frappante si l'on ne développe pas le pseudo-déterminant de la formule (D).

[**11**] *Cloisons en contact d'ordre quelconque par leur contour.* — Les pseudo-déterminants introduits dans ce qui précède, s'ils permettent d'écrire la formule de Stokes sous la forme (A) et d'imaginer ensuite la formule (D), permettent d'imaginer des formules analogues pour des cloisons qui passeraient par un contour donné en ayant, le long de ce contour, mêmes valeurs non seulement pour x, y, z, p, q, mais aussi pour r, s, t. Et ainsi de suite pour des contacts d'ordre quelconque. Si l'on s'en tient au cas de x, y, z, p, q, r, s, t, la formule analogue à (D) contient, dans son intégrale simple, une forme différentielle linéaire en $dx, dy, dz, dp, dq, dr, ds, dt$ et, dans son intégrale double, un pseudo-déterminant du huitième ordre.

Je ne m'attache point, pour le moment, à écrire de telles formules dont je ne vois point d'applications. Mais leur existence n'est pas douteuse; elles constituent une nouvelle classe d'égalités dont la remarquable symétrie ne pouvait sans doute être mise en lumière que par l'usage des pseudo-déterminants.

[**12**] *Fonctions de lignes de M. Volterra; fonctions de contours formés d'éléments x, y, z, p, q.* — On connaît l'importante notion de *fonction d'une ligne fermée*, notion due à M. Vito Volterra et développée par lui en de nombreux Mémoires publiés depuis 1887. J'emprunte ici ce dont j'ai besoin aux *Leçons sur l'intégration des équations différentielles aux dérivées partielles* professées à Stockholm et publiées à Upsal en 1906, à Paris en 1912 (A. Hermann).

Soit le second membre de la formule de Stokes (A); c'est une fonction de la ligne fermée Σ. Prenons sur ce contour un petit arc AB ou l et remplaçons-le (*fig.* 1) par

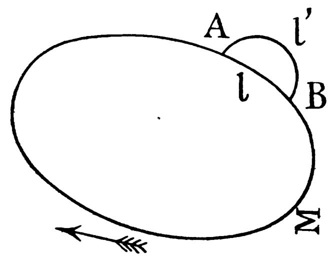

FIG. 1.

l'arc l' ayant mêmes extrémités. La fonction de ligne a varié de l'intégrale

$$\int \mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy + \mathrm{R}dz$$

étendue au petit contour $\mathrm{A}l'\mathrm{B}l\mathrm{A}$. Si ce contour devient infiniment petit, cette dernière intégrale s'exprime par

$$\begin{vmatrix} -p & -q & 1 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \mathrm{P} & \mathrm{Q} & \mathrm{R} \end{vmatrix} dx\,dy = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \mathrm{P} & \mathrm{Q} & \mathrm{R} \end{vmatrix} d\sigma = \Theta d\sigma,$$

ceci d'après la formule (A) dont l'intégrale double ne contient plus que le seul élément $d\sigma$ de contour $\mathrm{A}l'\mathrm{B}l\mathrm{A}$; quant à α, β, γ, ce sont les cosinus directeurs de la normale à cet élément. C'est le rapport entre la variation infiniment petite $\Theta d\sigma$ et $d\sigma$, soit Θ, que M. Volterra appelle dérivée de la fonction de ligne en AB normalement à la surface $\mathrm{A}l'\mathrm{B}l\mathrm{A}$. En résumé, elle s'exprime par le pseudo-déterminant Θ; indépendamment de α, β, γ, elle contient encore un certain paramètre qui sert à situer l'élément d'arc AB sur Σ.

Par le contour Σ faisons passer maintenant une cloison qui nous permettra de définir x, y, z, p, q en tout point de Σ. Sur cette cloison, déformons l en l'. L'intégrale

$$\mathrm{J} = \int_{\Sigma} \mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy + \mathrm{R}dz + \mathrm{S}dp + \mathrm{T}dq$$

varie de

$$\int_{\mathrm{A}l'\mathrm{B}l\mathrm{A}} \mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy + \mathrm{R}dz + \mathrm{S}dp + \mathrm{T}dq$$

ou, d'après (D), de

$$\begin{vmatrix} r & s & 0 & -1 & 0 \\ s & t & 0 & 0 & -1 \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial p} & \dfrac{\partial}{\partial q} \\ \mathrm{P} & \mathrm{Q} & \mathrm{R} & \mathrm{S} & \mathrm{T} \end{vmatrix} d\sigma = \Omega d\sigma$$

si le contour $\mathrm{A}l'\mathrm{B}l\mathrm{A}$ devient infiniment petit et n'entoure ainsi qu'un élément d'aire $d\sigma$. L'intégrale J est donc une fonction d'un ensemble fermé d'éléments x, y, z, p, q rangés sur le contour Σ. Sur l'élément AB du contour, et normalement à l'élément de surface $\mathrm{A}l'\mathrm{B}l\mathrm{A}$ ou $d\sigma$, cette fonction a pour dérivée $\Omega d\sigma : d\sigma$, c'est-à-dire le pseudo-déterminant Ω.

On voit que la définition que donne M. Volterra pour la dérivée d'une fonction de ligne s'étend sans difficulté au cas ici envisagé. Et ceci est tout à l'avantage de l'excellence des définitions dues au grand géomètre italien.

ÉQUATIONS DE MONGE-AMPÈRE.

[**13**] D'après ce que nous avons vu dans les préliminaires, l'équation du premier ordre

$$(12) \qquad \begin{vmatrix} -p & -q & 1 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \mathrm{P} & \mathrm{Q} & \mathrm{R} \end{vmatrix} = 0$$

équivaut à l'équation intégrale

$$\int_\Sigma \mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy + \mathrm{R}dz = 0,$$

qui a lieu pour les contours Σ tracés sur une surface intégrale de (12).

En d'autres termes,

$$\mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy + \mathrm{R}dz$$

est une différentielle exacte sur toute surface intégrale de (12).

De même l'équation de Monge-Ampère :

$$\Delta = \begin{vmatrix} r & s & 0 & -1 & 0 \\ s & t & 0 & 0 & -1 \\ -p & -q & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial p} & \frac{\partial}{\partial q} \\ P & Q & R & S & T \end{vmatrix} = 0,$$

d'après la formule (D), doit équivaloir à l'équation

$$(13) \qquad \int_\gamma P dx + Q dy + R dz + S dp + T dq = 0,$$

qui doit être vraie pour tout contour γ tracé sur une surface intégrale de $\Delta = 0$.

En d'autres termes, *sur une telle surface intégrale*, l'expression

$$P dx + Q dy + R dz + S dp + T dq$$

doit être une différentielle exacte.

Ces considérations si simples peuvent servir de point de départ à une nouvelle étude des équations de Monge-Ampère. Je prends d'abord comme exemples quelques problèmes de géométrie traités par M. E. Goursat dans ses belles *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre* (tome I, chap. 1er).

On va d'abord reconnaître, sans aucun calcul, que certaines équations du second ordre doivent avoir forcément la forme $\Delta = 0$.

[**14**] *Soit le complexe de courbes*

$$\varphi(x, y, z;\, a, b, c) = 0, \qquad \psi(x, y, z;\, a, b, c) = 0,$$

lesquelles engendrent une surface Γ *si* a, b, c *deviennent trois fonctions d'une même variable. Quelle est l'équation aux dérivées partielles des surfaces* Γ?

Le plan tangent à Γ contient la tangente à la courbe précédente, ce qui s'écrit :

$$(14) \qquad \begin{vmatrix} -p & -q & 1 \\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \\ \psi_x & \psi_y & \psi_z \end{vmatrix} = 0.$$

De cette équation et de $\varphi = 0$, $\psi = 0$, on pourra tirer, en général, a, b, c en fonction de x, y, z, p, q. Il reste à écrire que b et c, par exemple, sont fonctions de a ou, plus généralement, que deux fonctions

$$u(a, b, c), \qquad v(a, b, c)$$

sont fonctions l'une de l'autre. Donc udv est une différentielle exacte; pour tout contour fermé γ sur une surface Γ, on a

$$\int_\gamma u\,dv = 0$$

et, d'après la formule (D), on doit avoir $\Delta = 0$ sur Γ. (C. Q. F. D).

On pourrait tout de suite démontrer sans peine que ce résultat est indépendant du choix des fonctions u et v et indiquer la forme particulière de Δ qui correspond à un problème aussi simple; mais tout ceci s'éclaircira bientôt d'une manière plus générale.

Soit la *surface réglée à plan directeur* engendrée par la droite

$$z - a = 0, \qquad y - bx - c = 0.$$

L'équation (14) est alors

$$p + bq = 0,$$

d'où

$$a = z, \qquad b = -\frac{p}{q}, \qquad c = \frac{px + qy}{q}.$$

Pour tout contour fermé γ tracé sur la surface, on a, par exemple,

$$\int_\gamma \frac{p}{q}\,dz = 0. \tag{15}$$

L'équation aux dérivées partielles de la surface est donc :

$$\Delta\left[0, 0, \frac{p}{q}, 0, 0\right] = 0.$$

Les relations (E) donnent immédiatement

$$K = 0, \qquad A = 1, \qquad B = -2\frac{p}{q}, \qquad C = \frac{p^2}{q^2}, \qquad D = 0$$

et $\Delta = 0$ devient :

$$q^2 r - 2pqs + p^2 t = 0.$$

Soit encore la *surface cerclée* engendrée par un cercle de rayon constant R dont le plan se meut parallèlement au plan Oxy. On a

$$z - a = 0, \qquad (x - b)^2 + (y - c)^2 - R^2 = 0, \qquad p(y - c) = q(x - b),$$

d'où

$$a = z, \qquad b = x - \frac{Rp}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \qquad c = y - \frac{Rq}{\sqrt{p^2 + q^2}}.$$

Pour tout contour fermé γ tracé sur la surface, on a, par exemple :

$$\int_\gamma \left(x - \frac{Rp}{\sqrt{p^2+q^2}}\right) dz = 0. \tag{16}$$

L'équation aux dérivées partielles de la surface est donc :

$$\Delta \left[0, 0, x - \frac{Rp}{\sqrt{p^2+q^2}}, 0, 0\right] = 0.$$

Les relations (E) donnent immédiatement

$$K = 0, \qquad A = -\frac{Rq^3}{(p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad B = \frac{2Rpq^2}{(p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad C = -\frac{Rp^2q}{(p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad D = q$$

et $\Delta = 0$ devient :

$$q^2r - 2pqs + p^2t = \frac{1}{R}(p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Il faut, en outre, observer que des équations telles que (15) et (16) peuvent avoir une signification géométrique intéressante. Ainsi la normale en un point d'une surface précédente se projette sur Oxy suivant une droite faisant avec Ox un angle τ, tel que :

$$\operatorname{tang} \tau = \frac{q}{p}, \qquad \cos\tau = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}, \qquad \sin\tau = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}.$$

Donc, pour tous les contours γ tracés sur la surface réglée, on a

$$\int_\gamma \operatorname{tang}\tau\, dz = 0,$$

égalité où l'on pourrait d'ailleurs remplacer tang τ par une fonction quelconque de τ.

Sur la surface cerclée, il est encore plus intéressant de remarquer que

$$R\int_\gamma \cos\tau\, dz = \int_\gamma x\,dz,$$

car la seconde intégrale est l'aire contenue dans la projection du contour γ sur le plan Oxz; pour toute déformation de γ qui n'altère pas cette aire projetée, la première intégrale reste invariable. On pourrait faire bien des remarques géométriques analogues, et d'ailleurs beaucoup plus générales, en construisant de telles intégrales curvilignes où seraient assemblées de manières diverses les fonctions a, b, c relatives à une même surface.

[**15**] Passons au second problème de M. Goursat (*loc. cit.*, p. 13).

Soit le complexe de surfaces

$$F(x, y, z;\ a, b, c) = 0,$$

lesquelles surfaces admettent une enveloppe Γ *si* a, b, c *deviennent trois fonctions d'une même variable. Quelle est l'équation aux dérivées partielles de* Γ?

Les valeurs de p et q étant les mêmes pour Γ et pour la surface du complexe on a :

$$F_x + pF_z = 0, \qquad F_y + qF_z = 0. \tag{17}$$

On a ainsi trois équations d'où l'on peut, en général, tirer a, b, c en fonction de x, y, z, p, q. Le raisonnement s'achève alors exactement comme au numéro 14 et l'on trouve de même que l'équation aux dérivées partielles de Γ a la forme $\Delta = 0$. (C. Q. F. D.).

Ainsi pour la surface enveloppe d'un plan

$$z = ax + by + c,$$

on a :

$$a = p, \qquad b = q, \qquad c = z - px - qy.$$

Pour tout contour fermé γ, tracé sur une telle surface, on a, par exemple,

$$\int_\gamma pdq = 0,$$

ce qui, d'après (D) ou d'après les formules (E), conduit immédiatement à l'équation bien connue des surfaces développables $rt - s^2 = 0$.

Étudions, ce qui est plus intéressant, l'enveloppe des sphères de rayon constant ρ :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - \rho^2 = 0.$$

Les équations (17) sont alors

$$(x-a) + p(z-c) = 0, \qquad (y-b) + q(z-c) = 0,$$

d'où

$$a = x + \frac{\rho p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad b = y + \frac{\rho q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad c = z - \frac{\rho}{\sqrt{1+p^2+q^2}}. \tag{18}$$

Pour tout contour γ, tracé sur la surface canal Γ, on a, par exemple :

$$\int_\gamma bdc = 0. \tag{19}$$

L'intégrale curviligne est analogue au second membre de (D); si l'on développe dc, on trouve que

$$P = 0, \qquad Q = 0, \qquad R = y + \frac{\rho q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

$$S = \frac{\rho p y}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\rho^2 p q}{(1 + p^2 + q^2)^2}, \qquad T = \frac{\rho q y}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\rho^2 q^2}{(1 + p^2 + q^2)^2},$$

et les formules (E) donnent :

$$K = -\frac{\rho^2 p}{(1 + p^2 + q^2)^2}, \qquad A = -\rho p \frac{1 + q^2}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$B = \frac{2\rho p^2 q}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad C = -\rho p \frac{1 + p^2}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad D = -p.$$

L'équation des surfaces canaux est finalement :

$$\rho^2 \frac{(rt - s^2)}{(1 + p^2 + q^2)^2} + \rho \frac{(1 + q^2) r - 2pqs + (1 + p^2) t}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}} + 1 = 0.$$

Ce n'est, comme on sait, que l'équation aux rayons de courbure principaux dans laquelle on a précisément écrit qu'un rayon était constant.

Les calculs précédents sont légèrement plus compliqués que ceux des méthodes classiques; mais (comme on l'a déjà remarqué au n° 14) la présente méthode correspond à de remarquables propriétés géométriques de contours tracés sur les surfaces considérées.

Ainsi, toujours pour les surfaces canaux, si α, β, γ désignent les cosinus directeurs de la normale, les équations (18) s'écrivent

$$a = x - \rho\alpha, \qquad b = y - \rho\beta, \qquad c = z - \rho\gamma$$

et (19) devient

$$\rho \int_\varepsilon (y\,d\gamma + \beta\,dz) - \rho^2 \int_\varepsilon \beta\,d\gamma = \int_\varepsilon y\,dz,$$

ε désignant le contour fermé tracé sur la surface canal. Le second membre de cette égalité est l'aire contenue dans la projection de ε sur le plan Oyz; le premier membre est donc encore une intégrale de ligne invariante pour les déformations de ε qui n'altèrent pas ladite aire projetée. D'ailleurs si, dans les intégrales précédentes, on introduit les différentielles exactes de γy, $\gamma\beta$, yz, l'égalité prend la forme plus symétrique :

$$2\rho \int_\varepsilon (\beta\,dz - \gamma\,dy) - \rho^2 \int_\varepsilon (\beta\,d\gamma - \gamma\,d\beta) = \int_\varepsilon (y\,dz - z\,dy).$$

On pourrait trouver une infinité de théorèmes analogues, rappelant tous le théorème de M. Picard énoncé au numéro 2 et relatif aux surfaces intégrales d'une équation du premier ordre. Mais ce paragraphe et le précédent ont surtout été développés pour faire, sous forme de calculs, des applications de la formule (D); on pourrait en faire autant pour toutes les équations à intégrales intermédiaires.

[**16**] *Intégrales intermédiaires.* — D'après le langage habituel, j'appelle intégrale intermédiaire d'une équation de Monge-Ampère une équation du premier ordre

$$u = \varphi(v)$$

dont toute intégrale est intégrale de l'équation de Monge-Ampère. La fonction φ est arbitraire, mais u et v sont fonctions bien déterminées de x, y, z, p, q. Dans ces conditions, udv est une différentielle exacte par rapport à x, y, z, p, q considérés comme variables indépendantes.

Donc on pourra toujours trouver un contour γ et une surface Γ passant par ce contour, de telle sorte que

$$\int_\gamma u\,dv = \int_\gamma u(v_x dx + v_y dy + v_z dz + v_p dp + v_q dq) = 0;$$

mais alors, d'après (D), on devra avoir sur Γ :

$$\begin{vmatrix} r & s & 0 & -1 & 0 \\ s & t & 0 & 0 & -1 \\ -p & -q & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial p} & \dfrac{\partial}{\partial q} \\ uv_x & uv_y & uv_z & uv_p & uv_q \end{vmatrix} = 0.$$

C'est donc là l'équation aux dérivées partielles relative à Γ; c'est la *forme type de l'équation de Monge-Ampère à intégrale intermédiaire.* Il est facile de donner la physionomie habituelle à cette forme type, car on peut aussi bien l'écrire

$$\begin{vmatrix} r & s & 0 & -1 & 0 \\ s & t & 0 & 0 & -1 \\ -p & -q & 1 & 0 & 0 \\ u_x & u_y & u_z & u_p & u_q \\ v_x & v_y & v_z & v_p & v_q \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\begin{vmatrix} u_x + u_z p + u_p r + u_q s & u_y + u_z q + u_p s + u_q t \\ v_x + v_z p + v_p r + v_q s & v_y + v_z q + v_p s + v_q t \end{vmatrix} = 0$$

ou enfin

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = 0$$

si, dans ce dernier déterminant, on calcule les dérivées en considérant z, p, q comme des fonctions de x et y.

Réciproquement, si une équation de Monge-Ampère a été mise sous la forme $\Delta = 0$, ce qui entraîne

$$\int_\gamma \mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy + \mathrm{R}dz + \mathrm{S}dp + \mathrm{T}dq = 0,$$

on peut reconnaître si elle possède une intégrale intermédiaire en cherchant si

$$\mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy + \mathrm{R}dz + \mathrm{S}dp + \mathrm{T}dq = dw + u\,dv,$$

u, v, w étant fonctions de x, y, z, p, q.

Dans ces conditions, l'expression

$$(\mathrm{P} - w_x)dx + (\mathrm{Q} - w_y)dy + (\mathrm{R} - w_z)dz + (\mathrm{S} - w_p)dp + (\mathrm{T} - w_q)dq$$

doit, multipliée par un facteur convenable $\frac{1}{u}$, devenir une différentielle exacte dv. Les conditions classiques pour qu'il en soit ainsi peuvent s'exprimer par la nullité de tous les déterminants du troisième ordre qui peuvent s'extraire du tableau :

$$\begin{matrix} \mathrm{P} - w_x & \mathrm{Q} - w_y & \mathrm{R} - w_z & \mathrm{S} - w_p & \mathrm{T} - w_q \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial p} & \dfrac{\partial}{\partial q} \\ \mathrm{P} & \mathrm{Q} & \mathrm{R} & \mathrm{S} & \mathrm{T} \end{matrix}$$

[**17**] *Caractéristiques et transformations de contact.* — Il est facile d'indiquer les liens unissant les présentes recherches avec la théorie des caractéristiques. Prenons celles-ci avec la définition de Sophus Lie, telle qu'elle est résumée par M. E. Goursat (*loc. cit.*, p. 51).

Il s'agit de savoir s'il peut exister des surfaces, ou plutôt des ensembles d'éléments x, y, z, p, q, telles que l'on ait identiquement, pour chaque élément, les deux relations

$$(20) \qquad \begin{cases} \mathrm{A}\,dx + \mathrm{B}\,dy + \mathrm{C}\,dp + \mathrm{D}\,dq = 0, \\ \mathrm{A}'dx + \mathrm{B}'dy + \mathrm{C}'dp + \mathrm{D}'dq = 0, \end{cases}$$

A, B, C, D, A', B', C' D' étant des fonctions quelconques de x, y, z, p, q.

A l'aide des identités

$$dp = r\,dx + s\,dy, \qquad dq = s\,dx + t\,dy,$$

on peut n'écrire que dx et dy dans (20) et l'élimination de $dy : dx$ donne immédiatement une équation de Monge-Ampère pour les surfaces ou ensembles d'éléments demandés. Les relations (20) définissent l'un des systèmes de caractéristiques de l'équation de Monge-Ampère.

On voit donc que *la notion de caractéristique conduit à considérer, sur une surface intégrale d'une équation de Monge-Ampère, des formes* [telles que (20)]

$$Pdx + Qdy + Rdz + Sdp + Tdq$$

qui y sont identiquement nulles, tandis que nous nous proposons d'étudier ici des formes analogues qui y sont des différentielles exactes.

La seconde question peut être envisagée comme une extension de la première; elles doivent conduire souvent à des raisonnements de même nature.

Ainsi quand on veut soumettre une équation de Monge-Ampère à une transformation de contact, le plus simple est d'effectuer d'abord la transformation sur les équations différentielles (20) des caractéristiques (E. Goursat, *loc. cit.*, p. 52); de même, supposons que nous ayons défini une équation de Monge-Ampère par la relation intégrale

$$\int_\gamma Pdx + Qdy + Rdz + Sdp + Tdq = 0.$$

Il est clair qu'une transformation de contact la changera en une relation analogue

$$\int_\varepsilon P_1dx_1 + Q_1dy_1 + R_1dz_1 + S_1dp_1 + T_1dq_1 = 0$$

relative au contour ε transformé de γ sur la surface transformée. Et, de cette dernière relation, on déduira, par la formule (D), l'équation de Monge-Ampère transformée.

Il n'y a là qu'une synthèse, par la formule (D), de résultats dont le plus célèbre appartient peut-être à Lagrange et à Legendre et se rapporte à la théorie des surfaces minima (G. Darboux, *Surfaces*, t. I, p. 272). Sur ces surfaces, on a

$$\int_\gamma \alpha\, dy - \beta\, dx = \int_\gamma \frac{q\,dx - p\,dy}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = 0,$$

ce que la transformation de Legendre (remplacement de x, y, p, q par p, q, x, y) change en

$$\int_\varepsilon \frac{y\,dp - x\,dq}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} = 0.$$

C'est là, pour la formule (D), un second membre qui permet de former immédiatement le premier; en se servant, si l'on veut, des formules (E) pour avoir les coefficients A, B, C de r, s, t, on trouve l'équation bien connue :

$$(1+x^2)r + 2xys + (1+y^2)t = 0. \tag{20 bis}$$

D'une manière générale, *une équation* $\Delta = 0$, *après une transformation de contact, reste une équation* $\Delta = 0$. Cette assertion comprend, comme cas très particulier, celle d'après laquelle les équations à intégrales intermédiaires peuvent toujours, par une transformation de contact, se ramener à l'une d'entre elles, $rt - s^2 = 0$ par exemple (E. Goursat, *loc. cit.*, pp. 23, 70).

De même la simplification des équations $\Delta = 0$ et leur obtention sous des formes types aussi réduites que possible reviennent au problème bien connu qui consiste à ramener à des formes canoniques la forme différentielle

$$\mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy + \mathrm{R}dz + \mathrm{S}dp + \mathrm{T}dq.$$

[**18**] *Multiplicateur d'une équation de Monge-Ampère.* — Il convient maintenant de se demander si toutes les équations de Monge-Ampère sont des équations $\Delta = 0$ ou, pour mieux dire, si elles peuvent toutes être identifiées avec de telles équations. Soit donc l'équation

$$\mathrm{K}(rt - s^2) + \mathrm{A}r + \mathrm{B}s + \mathrm{C}t + \mathrm{D} = 0, \tag{21}$$

où K, A, B, C, D sont d'abord des fonctions quelconques de x, y, z, p, q. Multiplions-là par un facteur $\mu(x, y, z, p, q)$. Si l'équation peut alors prendre la forme $\Delta = 0$, c'est parce que le système (J_1) a lieu quand on y remplace K, A, B, C, D respectivement par $\mathrm{K}\mu$, $\mathrm{A}\mu$, $\mathrm{B}\mu$, $\mathrm{C}\mu$, $\mathrm{D}\mu$. Le facteur μ doit donc satisfaire au système

$$(\mathrm{K}) \quad \left\{ \begin{aligned} & \mathrm{X}^2(\mathrm{A}\mu) + \mathrm{XY}(\mathrm{B}\mu) + \mathrm{Y}^2(\mathrm{C}\mu) + \frac{\partial(\mathrm{D}\mu)}{\partial z} - \mathrm{X}\frac{\partial(\mathrm{D}\mu)}{\partial p} - \mathrm{Y}\frac{\partial(\mathrm{D}\mu)}{\partial q} = 0, \\ & \mathrm{X}^2(\mathrm{K}\mu) + \mathrm{X}\left[\frac{\partial(\mathrm{B}\mu)}{\partial q} - \frac{\partial(\mathrm{C}\mu)}{\partial p}\right] + \mathrm{Y}\frac{\partial(\mathrm{C}\mu)}{\partial q} + 2\frac{\partial(\mathrm{C}\mu)}{\partial z} - \frac{\partial^2(\mathrm{D}\mu)}{\partial q^2} = 0, \\ & -\mathrm{XY}(\mathrm{K}\mu) + \mathrm{X}\frac{\partial(\mathrm{A}\mu)}{\partial q} + \mathrm{Y}\frac{\partial(\mathrm{C}\mu)}{\partial p} + \frac{\partial(\mathrm{B}\mu)}{\partial z} - \frac{\partial^2(\mathrm{D}\mu)}{\partial p\,\partial q} = 0, \\ & \mathrm{Y}^2(\mathrm{K}\mu) + \mathrm{Y}\left[\frac{\partial(\mathrm{B}\mu)}{\partial p} - \frac{\partial(\mathrm{A}\mu)}{\partial q}\right] + \mathrm{X}\frac{\partial(\mathrm{A}\mu)}{\partial p} + 2\frac{\partial(\mathrm{A}\mu)}{\partial z} - \frac{\partial^2(\mathrm{D}\mu)}{\partial p^2} = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial p}\mathrm{X}(\mathrm{K}\mu) + \frac{\partial}{\partial q}\mathrm{Y}(\mathrm{K}\mu) + \frac{\partial(\mathrm{K}\mu)}{\partial z} + \frac{\partial^2(\mathrm{B}\mu)}{\partial p\,\partial q} - \frac{\partial^2(\mathrm{A}\mu)}{\partial q^2} - \frac{\partial^2(\mathrm{C}\mu)}{\partial p^2} = 0. \end{aligned} \right.$$

Si l'on peut trouver un facteur μ *satisfaisant à ces cinq équations, l'équation de Monge-Ampère se ramène à la forme* $\Delta = 0$ *et, par suite, sur les surfaces intégrales de l'équation, on connaît au moins une différentielle exacte non identiquement nulle.*

Or, d'après ce qui a été rappelé dans les préliminaires, *c'est là exactement le rôle que joue le multiplicateur de Jacobi pour une équation linéaire du premier ordre.*

Pour rappeler cette analogie, je dirai que la fonction μ ici considérée est le *multiplicateur jacobien* de l'équation de Monge-Ampère. Le système (K) est certainement plus difficile à étudier que cette équation elle-même, mais ceci semble bien dans la nature des choses; l'équation (3) qui définit le multiplicateur jacobien d'une équation du premier ordre (2) est aussi plus compliquée que cette dernière.

Je ne m'arrête point, pour le moment, à une étude détaillée du système (K).

D'après le paragraphe 7, les équations (K), convenablement dérivées, se réduisent à deux; mais rien ne permet d'affirmer jusqu'ici que ces deux équations peuvent avoir, *en général*, une solution commune quelque particulière qu'elle soit.

D'autre part, les équations $\Delta = 0$ ont incontestablement par elles-mêmes une très grande généralité; il y aurait donc, tout au moins, de nombreux et importants cas particuliers à préciser, cas dans lesquels le système (K) aurait certainement des solutions. Voici quelques exemples très simples.

[**19**] Soit une équation

$$Ar + Bs + Ct = 0 \tag{22}$$

où A, B, C sont fonctions de x et y seulement. A quelle condition existe-t-il un multiplicateur μ *ne contenant aussi que* x *et* y. Ici le système (K) se réduit à la première équation réduite elle-même à

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(A\mu) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(B\mu) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(C\mu) = 0. \tag{23}$$

Cette équation est satisfaite, par exemple, pour

$$A = 1 + x^2, \qquad B = 2xy, \qquad C = 1 + y^2, \qquad \mu = (1 + x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Cette valeur de μ est donc un multiplicateur pour l'équation (20 *bis*), ce qui est bien d'accord avec les considérations du paragraphe 17.

Si, dans (22), *les coefficients* A, B, C *étaient de simples constantes*, les équations (22) et (23) seraient identiques; en d'autres termes, *toute solution de* (22) *serait un multiplicateur de la même équation*. Si cette assertion est exacte, elle doit s'appliquer notamment à l'équation de Laplace $r + t = 0$ et, en effet, elle correspond à la formule

$$\int\int_{\Gamma} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}(r + t)\,dx\,dy = \int_{\gamma} \frac{\partial \theta}{\partial y}\,dq - \frac{\partial \theta}{\partial x}\,dp, \tag{24}$$

où θ est une fonction harmonique; alors θ_{xy} en est une aussi et joue ici le rôle de multiplicateur μ.

Bien entendu, la formule (24) est aisée à établir directement et n'est d'ailleurs qu'un cas particulier de la formule

$$\int_\gamma \mathrm{S}dp + \mathrm{T}dq = \int\int_\Gamma \Big[-\mathrm{S}_y r + (\mathrm{S}_x - \mathrm{T}_y)s + \mathrm{T}_x t \Big] dx\,dy. \tag{25}$$

Cette dernière n'est aussi qu'une forme particulière de (D), développée comme il a été indiqué au paragraphe 10, dans le cas où P et Q sont nuls et où S et T sont fonctions de x et y seulement.

[**20**] Soit encore l'équation

$$\mathrm{A}r + \mathrm{B}s + \mathrm{C}t = 0 \tag{26}$$

où A, B, C sont fonctions de p et q seulement. A quelle condition existe-t-il un multiplicateur μ *ne contenant aussi que p et q*? Ici le système (K) se réduit à la dernière équation réduite elle-même à

$$\frac{\partial^2}{\partial q^2}(\mathrm{A}\mu) - \frac{\partial^2}{\partial p\,\partial q}(\mathrm{B}\mu) + \frac{\partial^2}{\partial p^2}(\mathrm{C}\mu) = 0. \tag{27}$$

Cette équation est satisfaite, par exemple, pour

$$\mathrm{A} = 1 + q^2, \qquad \mathrm{B} = -2pq, \qquad \mathrm{C} = 1 + p^2, \qquad \mu = (1 + p^2 + q^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Ceci est encore bien d'accord avec les considérations du paragraphe 17 et correspond à la formule

$$\int\int_\Gamma \frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy = \int_\gamma \frac{p\,dy - q\,dx}{(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}}. \tag{28}$$

On pourrait encore faire quelques comparaisons intéressantes entre les équations (26) et (27) pour le cas où A, B, C seraient des constantes. Ainsi l'équation de Laplace $r + t = 0$ possède des multiplicateurs μ fonctions harmoniques de p et q; cela correspond à la formule

$$\int\int_\Gamma \mu(r+t)\,dx\,dy = \int_\gamma \mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy,$$

dans laquelle

$$\mathrm{P} + i\mathrm{Q} = f(p + iq), \qquad \mu = \mathrm{Q}_p = -\mathrm{P}_q, \qquad \mathrm{Q}_q = \mathrm{P}_p.$$

Il n'y a pas lieu d'insister davantage sur de tels résultats, tous faciles à obtenir directement; ils montrent mieux cependant l'intérêt des résultats de même nature, mais incomparablement plus généraux, que l'on pourrait vraisemblablement tirer d'une étude générale du système (K).

[**21**] *Équation adjointe d'une équation linéaire.* — Mentionnons encore cependant, toujours dans le même ordre d'idées, les équations linéaires pour lesquelles le multiplicateur μ se définit par une seule équation qui n'est autre que l'équation adjointe de la méthode de Riemann. Pour simplifier soit seulement l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0$$

ou

$$s + ap + bq + cz = 0,$$

a, b, c étant fonctions de x et y seulement. On a donc

$$\mathrm{K} = 0, \qquad \mathrm{A} = 0, \qquad \mathrm{B} = 1, \qquad \mathrm{C} = 0, \qquad \mathrm{D} = ap + bq + cz,$$

et, dans ces conditions, le système (K), si l'on cherche un multiplicateur μ fonction de x et y seulement, se réduit à la première équation réduite elle-même à

$$\mu_{xy} + c\mu - (a\mu)_x - (b\mu)_y = 0.$$

Cette équation peut s'écrire :

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} - a\frac{\partial \mu}{\partial x} - b\frac{\partial \mu}{\partial y} + (c - a_x - b_y)\mu = 0.$$

C'est bien l'équation adjointe de Riemann élégamment réétudiée par M. G. Darboux (*Théorie des surfaces*, t. II, p. 75). Là encore le système (K) semble offrir d'importantes généralisations.

Courbure des surfaces.

[**22**] On sait que, *en un point* d'une surface $z = f(x, y)$, on distingue la *courbure totale* et la *courbure moyenne* qui ont respectivement pour expression

$$\frac{1}{\rho_1\rho_2} = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}, \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) = \frac{(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t}{2(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ρ_1 et ρ_2 étant les rayons de courbure principaux au point considéré.

Pour définir la courbure *d'une cloison d'étendue finie*, les géomètres ont eu recours, de diverses manières, à des intégrales de surface étendues à cette cloison.

Ainsi, pour un arc *fini* AB d'une certaine courbe plane, la courbure peut être définie par l'angle α dont tourne la tangente en A pour devenir la tangente en B; dans ces conditions, deux arcs ayant mêmes extrémités et mêmes tangentes en ces points[1] ont aussi même courbure (*fig.* 2). De même sur les surfaces et pour une

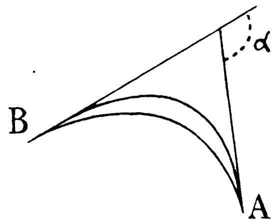

FIG. 2.

cloison d'étendue finie, on peut exiger que la courbure soit représentée par une intégrale de surface qui reste invariante *pour toutes les cloisons* Γ *ayant même contour* γ *et mêmes plans tangents le long de ce contour.* Le plus célèbre des résultats obtenus en ce sens est constitué par le théorème de Gauss (G. Darboux, *Théorie des surfaces*, t. III, chap. VI, VII, VIII):

Ici, je me propose de déduire de tels invariants de la formule (D), qui paraît d'ailleurs propre à donner non seulement ceux qui sont connus, mais encore beaucoup d'autres invariants de même nature.

[**23**] L'invariant de Gauss est :

$$\int\int_\Gamma \frac{d\sigma}{\rho_1\rho_2} \quad \text{ou} \quad \int\int_\Gamma \frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}dx\,dy. \tag{29}$$

Il rentre dans la formule (11) qui, comme nous l'avons vu au paragraphe 10, n'est qu'un cas très particulier de (D). Pour identifier l'intégrale double précédente avec le second membre de (11), il faut trouver des fonctions S et T, de p et q, telles que

$$\frac{\partial T}{\partial p} - \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{1}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ce qui est possible d'une infinité de manières. Ainsi l'on peut prendre

$$S = 0, \qquad T = \frac{p}{(1+q^2)\sqrt{1+p^2+q^2}} = -\frac{\alpha}{1+q^2},$$

---

[1] On sait que, sur les surfaces, il existe une définition analogue pour la courbure géodésique.

si α, β, γ désignent les cosinus directeurs de la normale à la surface[1]. Dans ces conditions, le premier membre de la formule (11) devient :

$$-\int_\gamma \frac{\alpha dq}{1+q^2} = -\int_\gamma \alpha d(\operatorname{arc\,tang} q) = \int_\gamma \alpha d\left(\operatorname{arc\,tang} \frac{\beta}{\gamma}\right).$$

On aurait pu prendre :

$$T = 0, \qquad S = -\frac{q}{(1+p^2)\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{\beta}{1+p^2}.$$

Alors le premier membre de la formule (11) est :

$$\int_\gamma \frac{\beta dp}{1+p^2} = \int_\gamma \beta d(\operatorname{arc\,tang} p) = \int_\gamma \beta d\left(\operatorname{arc\,tang} \frac{\gamma}{\alpha}\right).$$

On a finalement :

$$(30) \qquad \iint_\Gamma \frac{d\sigma}{\rho_1 \rho_2} = \int_\gamma \alpha d.\operatorname{arc\,tang} \frac{\beta}{\gamma} = \int_\gamma \beta d.\operatorname{arc\,tang} \frac{\gamma}{\alpha} = \int_\gamma \gamma d.\operatorname{arc\,tang} \frac{\alpha}{\beta},$$

le dernier membre de ces égalités étant adjoint aux précédents par raison de symétrie.

On pourrait se proposer maintenant de donner à la formule (30) la forme découverte par Ossian Bonnet et dans laquelle intervient la courbure géodésique. Je réserve cette question pour un mémoire ultérieur, justement parce qu'elle prête à des développements géométriques intéressants mais très spéciaux par rapport aux grandes lignes du présent travail.

[**24**] Proposons-nous maintenant de généraliser le résultat qui vient d'être obtenu en cherchant toutes les intégrales

$$(31) \qquad \iint_\Gamma \mu(x, y, z, p, q)(rt - s^2)\,dx\,dy$$

qui restent invariantes pour toutes les cloisons Γ ayant même contour et mêmes plans tangents le long de celui-ci. C'est comme si l'on cherchait le multiplicateur μ le plus général que puisse admettre l'équation des surfaces développables $rt - s^2 = 0$. Le système (K) pour

$$K = 1, \quad A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = 0$$

se réduit à

$$X^2(\mu) = 0, \qquad XY(\mu) = 0, \qquad Y^2(\mu) = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial p} X(\mu) + \frac{\partial}{\partial q} Y(\mu) + \frac{\partial \mu}{\partial z} = 0.$$

[1] Il est à peine besoin de faire remarquer qu'il ne faut pas confondre le cosinus directeur γ avec la lettre γ qui désigne le contour de la cloison d'intégration.

D'après la première et la troisième équation, μ doit avoir à la fois les deux formes

$$x\varphi_1(z - px, y, p, q) + \psi_1(z - px, y, p, q),$$
$$y\varphi_2(z - qy, x, p, q) + \psi_2(z - qy, x, p, q),$$

ce qui conduit à prendre

$$\mu = x\varphi(z - px - qy, p, q) + y\psi(z - px - qy, p, q) + \theta(z - px - qy, p, q).$$

On voit alors immédiatement que cette forme de μ satisfait aussi à la seconde équation. Reste à satisfaire à la quatrième. Pour abréger, posons :

$$\lambda = z - px - qy,$$
$$\mu = x\varphi(\lambda, p, q) + y\psi(\lambda, p, q) + \theta(\lambda, p, q).$$

La quatrième équation se réduit à

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \frac{\partial\psi}{\partial q} + \frac{\partial\theta}{\partial\lambda} = 0,$$

p, q, λ étant traitées, cette fois, comme trois variables indépendantes constituant les fonctions φ, ψ, θ. Donc φ, ψ, θ doivent pouvoir prendre respectivement les formes

$$\frac{\partial\Theta}{\partial q} - \frac{\partial\Psi}{\partial\lambda}, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} - \frac{\partial\Theta}{\partial p}, \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial p} - \frac{\partial\Phi}{\partial q}.$$

L'intégrale invariante cherchée est donc

$$\int\int_{\Gamma} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \frac{\partial}{\partial p} & \frac{\partial}{\partial q} & \frac{\partial}{\partial\lambda} \\ \Phi & \Psi & \Theta \end{vmatrix} (rt - s^2)\, dx\, dy,$$

Φ, Ψ, Θ étant trois fonctions quelconques de p, q, λ. Elle résulte de la transformation de Legendre

$$x' = p, \qquad y' = q, \qquad z' = \lambda, \qquad p' = -x, \qquad q' = -y,$$

appliquée à la formule de Stokes ordinaire (A)

$$\int\int_{S} \begin{vmatrix} -p' & -q' & 1 \\ \frac{\partial}{\partial x'} & \frac{\partial}{\partial y'} & \frac{\partial}{\partial z'} \\ \Phi & \Psi & \Theta \end{vmatrix} dx'\, dy' = \int_{\Sigma} \Phi dx' + \Psi dy' + \Theta dz'$$

où Φ, Ψ, Θ sont fonctions de x', y', z'. On a ainsi

$$(32)\qquad \int\int_{\Gamma} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \frac{\partial}{\partial p} & \frac{\partial}{\partial q} & \frac{\partial}{\partial \lambda} \\ \Phi & \Psi & \Theta \end{vmatrix} (rt - s^2)\,dx\,dy = \int_{\gamma} \Phi dp + \Psi dq + \Theta d\lambda,$$

Φ, Ψ, Θ étant fonctions de p, q, λ. Pour Θ nul et Φ, Ψ indépendants de λ, on retrouve la formule (11). En résumé, *l'invariant de Gauss est un cas très particulier de l'invariant de Stokes ayant subi la transformation de Legendre.*

Remarquons que la transformation de Legendre est d'ordinaire définie par les formules

$$x' = p, \qquad y' = q, \qquad z' = -\lambda, \qquad p' = x, \qquad q' = y,$$

si bien que celle précédemment employée résulte de cette dernière suivie d'une symétrie par rapport au plan $z' = 0$. Mais ceci importe peu.

Enfin ajoutons que l'extension ici donnée à l'invariant de Gauss est plus nouvelle dans la forme que dans le fond. M. G. Darboux (*Surfaces*, t. III, p. 138) a déjà remarqué qu'on pouvait construire bien des invariants analogues en employant de diverses manières la formule de Riemann. Le seul avantage que puisse nettement revendiquer le présent paragraphe et d'épuiser d'un coup l'étude des invariants de la forme

$$(33)\qquad \int\int_{\Gamma} F(x, y, z, p, q)\frac{d\sigma}{\rho_1\rho_2}.$$

[**25**] Par analogie, cherchons maintenant à déterminer les invariants de la forme

$$\int\int_{\Gamma} F(x, y, z, p, q)\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) d\sigma$$

ou bien

$$\int\int_{\Gamma} \mu(x, y, z, p, q)\,[(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t]\,dx\,dy,$$

l'invariance ayant toujours lieu *pour toutes les cloisons* Γ *ayant même contour* γ *et mêmes plans tangents le long de ce contour.* Cela revient à demander de déterminer, aussi généralement que possible, le multiplicateur μ de l'équation des surfaces minima. Le problème est incomparablement plus compliqué que le précédent où il ne s'agissait que du multiplicateur de l'équation des surfaces développables. Le multiplicateur μ est déterminé maintenant par le système (K) où l'on doit faire

$$K = 0, \qquad A = 1 + q^2, \qquad B = -2pq, \qquad C = 1 + p^2, \qquad D = 0.$$

Je ne m'arrête point, pour le moment, à traiter le problème avec tous les développements qu'il paraît comporter. Voyons simplement quelques solutions très particulières. Soit à chercher les multiplicateurs μ ne contenant que p et q. C'est la question déjà traitée au paragraphe 20, laquelle conduit à l'unique équation (27), à la solution μ très particulière déjà indiquée et enfin à la formule (28) qui peut s'écrire :

$$\int\int_{\Gamma}\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right)dx\,dy=\int_{\gamma}\beta\,dx-\alpha\,dy.$$

Comme simplicité, celle-ci paraît comparable à la formule (30) et pourrait sans doute donner d'intéressants résultats géométriques. Ainsi considérons les surfaces à courbure moyenne constante

$$\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=k;$$

alors le second membre de la formule précédente est une intégrale invariante pour les contours fermés γ tracés sur les surfaces considérées quand ces contours ont, sur Oxy, une projection enfermant une aire plane constante.

Si l'on reprend l'équation du multiplicateur $\mu(p, q)$

$$\frac{\partial^2}{\partial q^2}[(1+q^2)\mu]-\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial q}(2pq\mu)+\frac{\partial^2}{\partial p^2}[(1+p^2)\mu]=0,$$

il est aisé de voir qu'elle a des solutions fonctions de p seul ou de q seul. Soit μ fonction de p seul; on aboutit facilement à l'équation du type hypergéométrique :

$$\frac{d}{dp}\left[(1+p^2)\frac{d\mu}{dp}\right]+2\mu=0.$$

Les multiplicateurs qu'elle détermine pourraient encore être la base d'une nouvelle étude.

DEUXIÈME PARTIE.

---

[26] Nous allons examiner maintenant de nouvelles et véritables *extensions* de la formule de Stokes; le mot *extension* serait peut-être, en effet, assez mal choisi pour la formule (D), puisque cette formule s'applique à des cloisons qui non seulement passent par un contour, mais sont encore tangentes entre elles le long de celui-ci, donc à des cloisons plus particulières que les cloisons ordinaires.

Le point de départ sera le même que celui déjà adopté dans mon Mémoire *Sur la formule de Stokes dans l'hyperespace* publié dans ces mêmes *Annales* en 1911.

Je rappelle que la simple identité, du plan OXY,

$$\int_C X dY = \int\int_A dX\, dY, \tag{1}$$

donne, par un changement de variables, la formule de Riemann :

$$\int_\Sigma P dx + Q dy = \int\int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy.$$

Chose assez curieuse, pour rendre plus intuitives les extensions qui vont suivre, je dois modifier l'aspect classique de cette formule dont la simplicité et l'élégance semblaient défier toute transformation. Supposons que le contour plan Σ soit défini par une équation implicite $F(x, y) = 0$. Alors, le long de ce contour,

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$$

et, par suite, la formule de Riemann peut s'écrire :

$$\int_\Sigma \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \frac{dy}{(Q)} = \int\int_S \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} dx\, dy \tag{2}$$

si (Q) désigne $\frac{\partial F}{\partial x}$, c'est-à-dire le coefficient de Q dans le déterminant qui précède.

De même l'ordinaire formule de Stokes peut s'écrire

$$(3)\qquad \int_\Sigma \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \frac{dz}{(R)} = \int\int_S \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \frac{dxdy}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$$

si le contour Σ est défini par des équations $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$ et si (R) désigne le coefficient de R dans le déterminant qui précède. Observons que

$$\frac{dx}{(P)} = \frac{dy}{(Q)} = \frac{dz}{(R)}.$$

Soit de même, dans l'espace à quatre dimensions, l'intégrale, étendue au contour fermé Σ,

$$\int_\Sigma P_1 dx_1 + P_2 dx_2 + P_3 dx_3 + P_4 dx_4.$$

On peut imaginer que le contour Σ soit défini par trois équations

$$(4)\qquad F_i(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

d'où identiquement :

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F_i}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial F_i}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial F_i}{\partial x_4} dx_4 = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

En faisant usage de ces trois dernières, la forme différentielle qui figure dans l'intégrale s'exprime facilement par le quotient de deux déterminants, et la formule (10) de mon Mémoire précité peut s'écrire

$$(5)\qquad \int_\Sigma \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_3} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_4} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_3} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_4} \\ \dfrac{\partial F_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial F_3}{\partial x_3} & \dfrac{\partial F_3}{\partial x_4} \\ P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{vmatrix} \frac{dx_4}{(P_4)} = \int\int_S \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_3} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_4} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_3} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_4} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \dfrac{\partial}{\partial x_4} \\ P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{vmatrix} \frac{dx_1 dx_2}{\dfrac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x_3, x_4)}},$$

(P_4) désignant toujours le coefficient de P_4 dans le déterminant qui précède, c'est-à-dire le jacobien de F_1, F_2, F_3 par rapport à x_1, x_2, x_3. Telle est la forme que l'on peut donner à la formule de Stokes, dans l'hyperespace à quatre dimensions, pour une cloison à deux dimensions définie par les deux premières équations (4) et limitée par un contour défini par les trois équations (4).

On voit l'analogie parfaite des formules (2), (3), (5); en continuant ainsi, on pourrait établir une formule analogue et tout à fait générale pour toute cloison à deux dimensions située dans l'hyperespace à n dimensions. N'oublions pas que toutes ces formules (comme je l'ai encore montré dans le Mémoire précité) se peuvent démontrer en s'appuyant uniquement sur l'identité (1).

[**27**] Nous allons maintenant partir de l'identité

$$\int\int_s \mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z} = \int\int\int_v d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z} \tag{6}$$

relative à un volume v enfermé dans une surface fermée s; dans l'espace à trois dimensions, cette égalité est l'analogue de (1). Nous allons voir qu'on peut en tirer une formule, analogue à la formule de Stokes, relative à une variété à trois dimensions V déformable, dans l'espace à quatre dimensions, en étant toujours contenue dans une variété à deux dimensions Σ.

Cette variété V est évidemment analogue à une cloison à deux dimensions qui, dans l'espace à trois, peut être déformée sans cesser de passer par un contour fermé invariable.

Soient donc les formules

$$\mathrm{X} = \mathrm{X}(x, y, z, u), \qquad \mathrm{Y} = \mathrm{Y}(x, y, z, u), \qquad \mathrm{Z} = \mathrm{Z}(x, y, z, u) \tag{7}$$

qui permettent de passer de l'espace ordinaire à la variété

$$u = f(x, y, z) \tag{8}$$

qui, dans l'espace à quatre, n'a bien que trois dimensions.

Transformons d'abord l'intégrale triple de (6); il faut y remplacer $d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}$ par $dx\,dy\,dz$ multiplié par le déterminant

$$\begin{vmatrix}
\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial z} + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} \\
\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial z} + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} \\
\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial z} + \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}
\end{vmatrix}$$

qui peut aussi bien s'écrire

$$\begin{vmatrix}
\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} & -1 \\
\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x} & \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y} & \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial z} & \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial u} \\
\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x} & \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y} & \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial z} & \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial u} \\
\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial x} & \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial y} & \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial z} & \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial u}
\end{vmatrix}$$

ou enfin

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} & -1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial u} \\ X\frac{\partial Y}{\partial x} & X\frac{\partial Y}{\partial y} & X\frac{\partial Y}{\partial z} & X\frac{\partial Y}{\partial u} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial z} & \frac{\partial Z}{\partial u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} & -1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial u} \\ X\frac{\partial}{\partial x} & X\frac{\partial}{\partial y} & X\frac{\partial}{\partial z} & X\frac{\partial}{\partial u} \\ P & Q & R & S \end{vmatrix}$$

si l'on pose :

$$(9) \qquad P = Y\frac{\partial Z}{\partial x}, \quad Q = Y\frac{\partial Z}{\partial y}, \quad R = Y\frac{\partial Z}{\partial z}, \quad S = Y\frac{\partial Z}{\partial u}.$$

Dans tous ces développements de déterminants symboliques, je suppose toujours les calculs faits en partant de la première ligne du déterminant et de ses mineurs. Même remarque pour les mineurs eux-mêmes.

Remarquons encore que, si la variété (8) est définie par une équation implicite $F(x, y, z, u) = 0$, la première ligne des derniers déterminants est à remplacer par les expressions

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z}, \quad \frac{\partial F}{\partial u},$$

affectées du diviseur $-\frac{\partial F}{\partial u}$.

Passons maintenant à la transformation de l'intégrale double de (6).

La variété Σ à deux dimensions qui limite V peut être représentée par deux équations telles que

$$z = \varphi(x, y), \qquad u = \psi(x, y).$$

Les formules, pour le changement de variables à effectuer dans le premier membre de (6), sont encore les formules (7) dans lesquelles $z = \varphi$, $u = \psi$. Dans ces conditions, l'intégrale double à transformer devient :

$$\iint X \begin{vmatrix} \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} \end{vmatrix} dx\,dy.$$

Le déterminant qui y figure peut s'écrire :

$$\begin{vmatrix} -\frac{\partial z}{\partial x} & -\frac{\partial z}{\partial y} & 1 & 0 \\ -\frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial u}{\partial y} & 0 & 1 \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial z} & \frac{\partial Y}{\partial u} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial z} & \frac{\partial Z}{\partial u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{\partial z}{\partial x} & -\frac{\partial z}{\partial y} & 1 & 0 \\ -\frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial u}{\partial y} & 0 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial u} \\ P & Q & R & S \end{vmatrix}.$$

On peut lui donner une forme plus symétrique en imaginant que la variété Σ soit définie par les deux équations implicites

$$F(x, y, z, u) = 0, \qquad G(x, y, z, u) = 0,$$

dont la première est celle qui définit V. Alors

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

On peut se servir de ces relations pour combiner les deux premières lignes du déterminant écrit en dernier lieu ; le raisonnement est d'ailleurs le même que celui fait dans mon précédent Mémoire (p. 68). Alors les deux premières lignes en question se remplacent par

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z}, \quad \frac{\partial F}{\partial u},$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}, \quad \frac{\partial G}{\partial y}, \quad \frac{\partial G}{\partial z}, \quad \frac{\partial G}{\partial u},$$

à condition d'affecter le déterminant du facteur

$$(P) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial u} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial u} \end{vmatrix}.$$

La question de la transformation de l'intégrale double de (6) est définitivement tranchée; si on reprend le résultat relatif à la transformation de l'intégrale triple, on a la formule :

$$(L)\qquad \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial u} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial u} \\ X\frac{\partial}{\partial x} & X\frac{\partial}{\partial y} & X\frac{\partial}{\partial z} & X\frac{\partial}{\partial u} \\ P & Q & R & S \end{vmatrix} \frac{dx\,dy}{(P)} = \iiint_V \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial u} \\ X\frac{\partial}{\partial x} & X\frac{\partial}{\partial y} & X\frac{\partial}{\partial z} & X\frac{\partial}{\partial u} \\ P & Q & R & S \end{vmatrix} \frac{dx\,dy\,dz}{\frac{\partial F}{\partial u}}.$$

Il conviendrait peut-être de mettre le signe — à l'un des membres, ce qui est sans importance, car on change à volonté ce signe en intégrant sur une face ou sur l'autre de la variété Σ. Il est beaucoup plus important de montrer que les fonctions P, Q, R, S, qui jusqu'ici ne sont définies que par les relations (9), peuvent être des fonctions quelconques.

Pour cela, on pourrait récrire plusieurs fois la formule précédente avec des fonctions P, Q, R, S tirées de (9), mais différentes d'une formule à l'autre. La somme de toutes ces formules finirait par donner une formule où P, Q, R, S pourraient être tout à fait quelconques. On peut imaginer aussi (et cette seconde méthode est même plus claire que la première) que l'on fasse, dans (9), $Z = x$; alors P serait quelconque et Q, R, S seraient nulles. Ensuite, pour $Z = y$, on obtiendrait une seconde formule où Q serait quelconque et P, R, S nulles et ainsi de suite. Finalement, on aurait quatre formules dont l'addition donnerait (L) avec des fonctions X, P, Q, R, S tout à fait quelconques.

La formule (L) est ainsi complètement démontrée. On voit son analogie de structure avec toutes les formules plus élémentaires. On voit aussi que la généralisation de (L) dans des hyperespaces d'ordre supérieur ne serait guère plus autre chose qu'une question d'écritures de plus en plus compliquées, mais présentant toujours des structures analogues.

Voyons maintenant si nous ne pourrions pas mettre la formule (L) d'accord avec des résultats connus qui pourraient ainsi servir à la vérifier partiellement.

[**28**] *Les conditions de Poincaré.* — Sur la courbe $y = f(x)$ on peut prendre $-y'$ et 1 pour coefficients directeurs de la normale. Alors l'intégrale

$$\int (-y'A + B)\,dx,$$

prise le long d'un arc de cette courbe, ne dépend que des extrémités de l'arc si

$$(10)\qquad \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} = 0,$$

De même, sur la surface ordinaire $z = f(x, y)$, on peut prendre $-p, -q, 1$ pour coefficients directeurs de la normale. Alors l'intégrale

$$\int\int (-pA - qB + C)\,dx\,dy,$$

étendue à une cloison découpée sur la surface, ne dépend que du contour de cette cloison si

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0. \tag{11}$$

De même, dans l'espace à quatre dimensions, la variété à trois dimensions $u = f(x, y, z)$ possède une normale ayant pour coefficients directeurs

$$-\frac{\partial u}{\partial x}, \quad -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad -\frac{\partial u}{\partial z}, \quad 1.$$

Dès lors, on peut considérer l'intégrale

$$\int\int\int \left(-\frac{\partial u}{\partial x}A - \frac{\partial u}{\partial y}B - \frac{\partial u}{\partial z}C + D\right)dx\,dy\,dz, \tag{12}$$

étendue à une portion simplement connexe de la variété à trois dimensions considérée, et demander à quelle condition cette intégrale ne dépendra que de la variété à deux dimensions qui limite le domaine d'intégration. Cette condition est :

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} + \frac{\partial D}{\partial u} = 0. \tag{13}$$

Elle a été donnée par Henri Poincaré dans son Mémoire *Sur les résidus des intégrales doubles* (Acta mathematica, t. IX) et par M. E. Picard dans la *Théorie des fonctions algébriques de deux variables* (t. I, chap. 1). Toutefois, dans ces ouvrages, les problèmes sont posés d'une manière légèrement différente, d'où il suit des formules (10) et (13), dans les premiers membres desquelles les termes ont alternativement les signes + et —. La même observation s'appliquerait d'ailleurs non seulement à la première et à la troisième égalité, mais à toutes celles d'ordre impair. Au contraire, aucun changement n'est à signaler pour les ordres pairs.

Reprenons maintenant le second membre de (L). C'est une intégrale de la forme (12) et, comme elle ne dépend précisément que de la variété Σ qui limite invariablement V dans toutes ses déformations possibles, une certaine condition (13) doit être réalisée. Cette condition s'écrit

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial u} \\ X\frac{\partial}{\partial x} & X\frac{\partial}{\partial y} & X\frac{\partial}{\partial z} & X\frac{\partial}{\partial u} \\ P & Q & R & S \end{vmatrix} = 0$$

et, si l'on développe le premier membre, on voit aisément qu'elle est identiquement réalisée.

[29] *La formule de Green.* — Cette formule peut être retrouvée comme cas particulier de (L), ce qui donne une nouvelle vérification partielle de cette dernière. Expliquons-nous d'abord, à l'aide d'une comparaison simple, en reprenant l'ordinaire formule de Stokes (3). Si l'on fait rentrer la cloison S tout entière dans le plan ou espace à deux dimensions $z = 0$, cette cloison ne peut plus être déformée dans cet espace du moment que son contour Σ (devenu plan aussi) est invariable. Alors les équations $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$, qui accompagnent (3), étant remplacées par $z = 0$, $G(x, y) = 0$; de plus, $\frac{dz}{(R)}$ étant remplacé par $\frac{dy}{(Q)}$; la formule (3) devient

$$\int_\Sigma \begin{vmatrix} \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \frac{dy}{(Q)} = \int\int_S \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} dx\,dy,$$

ce qui est la formule de Riemann (2).

Nous allons maintenant faire un raisonnement tout à fait analogue pour (L).

Si l'on fait rentrer la variété V tout entière dans l'espace ordinaire à trois dimensions $u = 0$, cette variété V ne peut plus être déformée dans cet espace, du moment que la surface fermée Σ qui la contient est invariable. Alors, les équations $F(x, y, z, u) = 0$, $G(x, y, z, u) = 0$ étant respectivement remplacées par $u = 0$, $g(x, y, z) = 0$, la formule (L) devient :

$$(14) \qquad -\int\int_\Sigma \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ X\frac{\partial}{\partial x} & X\frac{\partial}{\partial y} & X\frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \frac{dx\,dy}{\frac{\partial g}{\partial z}} = \int\int\int_V \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X\frac{\partial}{\partial x} & X\frac{\partial}{\partial y} & X\frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dx\,dy\,dz.$$

Or, F, G, H désignant trois nouvelles fonctions quelconques de x, y, z, on peut poser

$$F = X\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right), \qquad G = X\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right), \qquad H = X\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right),$$

car on peut déterminer la fonction X par l'équation

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{F}{X}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{G}{X}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{H}{X}\right) = 0$$

et achever ensuite la détermination de P, Q, R par le procédé classique. D'autre part, les trois dérivées partielles de g, divisées par la dernière, équivalent aux coefficients directeurs $-p$, $-q$, 1 de la normale à la surface fermée Σ dont l'équation est $g = 0$.

Si α, β, γ sont des cosinus directeurs pour cette normale, on a

$$-p\,dx\,dy = \alpha\,d\sigma, \qquad -q\,dx\,dy = \beta\,d\sigma, \qquad dx\,dy = \gamma\,d\sigma$$

et finalement la formule (14) peut s'écrire :

$$\int\int_{\Sigma} (\alpha F + \beta G + \gamma H)\,d\sigma = \int\int\int_{V} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}\right) d\tau.$$

C'est l'ordinaire formule de Green, le signe — du premier membre étant supprimé sans scrupule, puisque, encore une fois, cela revient à changer de face sur la surface d'intégration Σ; d'ailleurs ce signe ne réapparaîtrait pas ici si on l'avait mis dans le premier membre de (L).

[30] *Sur la genèse des formules de ce Mémoire.* — Je tiens encore à rappeler, en terminant, que toutes les formules de ce Mémoire et des deux précédents (*Sur les applications géométriques de la formule de Stokes; Sur la formule de Stokes dans l'hyperespace;* Annales, 1910 et 1911) ne m'apparaissent que comme des transformations de l'identité

$$\int_C X\,dY = \int\int_A dX\,dY \tag{1}$$

relative à une aire plane A du plan OXY. Si l'on veut étudier, d'une manière générale, les intégrales qui, dans l'espace à n dimensions, sont étendues à des variétés, à $n-1$ dimensions, déformables sans cesser de passer par une variété fixe et fermée ayant $n-2$ dimensions, il faut, bien entendu, partir d'identités telles que (6), mais celles-ci sont faciles à concevoir dès que l'on a conçu (1) qui garde, par suite, son rôle fondamental.

Il est bien connu, en effet, que l'on peut établir la petite formule de Riemann en partant de (1); j'ai mis le même fait en évidence pour la formule de Stokes ordinaire et toutes ses extensions relatives aux variétés à deux dimensions déformables dans l'hyperespace. La conclusion est la même pour les formules (D) et (L).

Tout ceci permet de réexpliquer des analogies déjà entrevues de manières diverses. Ainsi, dans ses *Leçons* de Stockholm déjà citées au paragraphe 12 et particulièrement dans la sixième Leçon, M. V. Volterra définit des fonctions complexes des lignes associables entre elles (fonctions isogènes) et s'en sert pour revenir aux fonctions de deux variables complexes et notamment au théorème de Poincaré généralisant celui de Cauchy. De mon côté, j'aperçois aisément ces importantes analogies, non seulement dans leur forme, mais aussi dans leur cause. Les fonctions de lignes les plus simples se définissent d'abord à l'aide de la formule de Stokes ordinaire; quant au théorème de Poincaré, on peut le déduire de la formule de Stokes étendue aux cloisons à deux dimensions déformables dans l'espace à quatre dimensions (ce que j'ai montré dans mon Mémoire de 1911). Or, ces deux formules ayant une origine commune, dans l'identité (1), il est fort naturel qu'on puisse réunir, par différents chemins, les conséquences qu'elles comportent dans les diverses branches de l'Analyse.