ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE.

SUR LA DÉFORMATION DES QUADRIQUES

ET LES SURFACES CONJUGUÉES

PAR RAPPORT A UN COMPLEXE DU SECOND DEGRÉ

(*suite* *)

PAR M. L. ROUYER,

Professeur au Lycée d'Alger.

TROISIÈME PARTIE.

[1] En appliquant la transformation de Lie à une surface S dont les centres de courbure sont conjugués par rapport à un cône du second degré C, on obtient une surface Σ dont les tangentes asymptotiques sont conjuguées par rapport au cône d'un complexe du second ordre; nous dirons plus simplement que la surface Σ est conjuguée par rapport au complexe.

Soient

$$x = az + p,$$
$$y = bz + q$$

les équations d'une droite.

La transformation de Lie définie par les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} (X + iY)z - Z - x = 0, \\ X - iY + zZ - y = 0 \end{cases}$$

(*) Voir *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse*, année 1911, p. 377.

fait correspondre à cette droite une sphère dont le centre et le rayon sont donnés par les relations

$$X + iY = a, \qquad X - iY = q,$$
$$Z + R = b, \qquad R - Z = p.$$

(Il y aurait lieu de multiplier a et b par un facteur d'homogénéité que nous négligeons sans inconvénient).

Désignons par $\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta$ les coordonnées plückériennes de la droite, on a :

$$X + iY = \frac{\alpha}{\gamma}, \qquad X - iY = \frac{\xi}{\gamma},$$
$$Z + R = \frac{\beta}{\gamma}, \qquad Z - R = \frac{\eta}{\gamma}.$$

Considérons alors une quadrique Q et écrivons l'équation du cône directeur C sous la forme

$$\varphi(x + iy,\ x - iy,\ 2z) = 0,$$

sans écarter le cas où le cône dégénère.

Soit S une surface dont les centres de courbure sont conjugués par rapport à C. Aux sphères osculatrices à S correspondent les tangentes asymptotiques de Σ; désignons par $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \xi_1, \eta_1, \zeta_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \xi_2, \eta_2, \zeta_2$ leurs coordonnées.

Les centres de courbure de S vérifient les relations

$$\frac{X_1 + iY_1}{\alpha_1} = \frac{X_1 - iY_1}{\xi_1} = \frac{2Z_1}{\beta_1 + \eta_1},$$
$$\frac{X_2 + iY_2}{\alpha_2} = \frac{X_2 - iY_2}{\xi_2} = \frac{2Z_2}{\beta_2 + \eta_2}.$$

En exprimant qu'ils sont conjugués par rapport au cône C, on a la condition

$$\alpha_2 \varphi'_{\alpha_1} + \xi_2 \varphi'_{\xi_1} + (\beta_2 + \eta_2)\varphi'_{\beta_1 + \eta_1} = 0;$$

cette condition exprime que les tangentes asymptotiques de Σ sont conjuguées par rapport au cône du complexe Γ défini par l'équation

$$\varphi(\alpha, \xi, \beta + \eta) = 0. \tag{2}$$

Si la surface Σ est connue, la surface S sera l'une des nappes focales de la congruence définie par les équations (1) où X, Y, Z sont les coordonnées courantes et où x, y, z désignent les coordonnées d'un point de Σ; l'autre nappe se réduit au cercle de l'infini.

Quand la quadrique Q est un paraboloïde, le complexe Γ se décompose en deux complexes linéaires.

Supposons la forme φ réductible à une somme de trois carrés et cherchons dans quel cas le complexe Γ est spécial. On sait que, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'on ait

$$\Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = 0,$$

soit identiquement, soit en tenant compte de l'équation du complexe et de l'identité

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 0.$$

Posons pour simplifier $\beta + \eta = \theta$.

L'équation de condition s'écrit :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right)^2 = 0. \tag{3}$$

Cette relation ne peut pas être identique, puisque les trois dérivées partielles sont indépendantes; comme elle ne contient ni γ ni ζ, elle doit être une conséquence de l'équation (2). En d'autres termes, si on regarde α, ξ, θ comme les coordonnées homogènes d'un point d'un plan, les deux équations (2) et (3) doivent représenter la même conique. Or, l'équation (3) est précisément l'équation tangentielle de cette conique, car $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$ sont les coordonnnées d'une tangente; désignons-les par u, v, w; l'équation de la tangente s'écrit :

$$u\alpha + v\xi + w\theta = 0,$$

ou

$$w^2\alpha - v^2\xi - vw\theta = 0;$$

l'enveloppe de cette droite a pour équation

$$\theta^2 + 4\alpha\xi = 0$$

qui doit être identique à l'équation (2); par suite, φ doit avoir la forme

$$\varphi = 4\alpha\xi + (\beta + \eta)^2.$$

L'équation du cône C est alors

$$4(x + iy)(x - iy) + 4z^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

La quadrique Q est alors une sphère. Le complexe Γ est formé par les tangentes à la surface

$$xz - y = 0.$$

La surface Σ est dans ce cas une surface *minima* cayleyienne. Ce qui précède, met en évidence le lien déjà signalé entre ces surfaces et les surfaces à courbure constante [1].

Si la quadrique Q est quelconque, le complexe n'est pas spécial; en cherchant à déterminer la surface Σ, nous allons retrouver un résultat fondamental; quand la quadrique Q est un paraboloïde, une quadrique de révolution ou même une surface simplement tangente au cercle de l'infini, la principale difficulté du problème est l'intégration de l'équation des surfaces à courbure constante :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \sin z.$$

Remarquons que la surface Σ possède un réseau conjugué dont les courbes appartiennent au complexe; c'est cette propriété que nous utiliserons pour déterminer la surface.

[**2**] Considérons d'abord le cas du paraboloïde. Le complexe Γ se décompose en deux complexes linéaires; il existe un réseau conjugué formé de courbes appartenant respectivement à ces deux complexes. Pour préciser, prenons les équations réduites :

1° Le paraboloïde est de révolution. Le système des plans directeurs a pour équation

$$(x + iy)(x - iy) = 0;$$

l'équation (2) devient :

$$\alpha\xi = 0.$$

Les deux complexes linéaires sont spéciaux et leurs directrices ne sont pas dans un même plan.

2° Le paraboloïde a un plan directeur isotrope qui touche le cercle de l'infini au point de contact de la surface avec le plan de l'infini. On a

$$\varphi = z(x + iy),$$

l'équation (2) se réduit à

$$\alpha(\beta + \eta) = 0.$$

L'un des complexes est spécial et sa directrice appartient à l'autre complexe.

---

[1] DARBOUX, *Leçons*, t. III.

3° Le plan directeur est tangent au cercle de l'infini en un point différent du point de contact avec le plan de l'infini. Ici,

$$\varphi = x(x + iy).$$

L'équation (2) s'écrit alors

$$(\alpha + \xi)\alpha = 0,$$

l'un des complexes linéaires est spécial et sa directrice n'appartient pas à l'autre.

L'étude de ces trois cas qui conduisent à des équations de Laplace ayant un ou deux invariants nuls, ne présente aucune difficulté; nous nous bornerons au paraboloïde quelconque.

L'équation (2) est de la forme

$$\varphi(\alpha, \xi) = 0;$$

elle se décompose en deux équations linéaires

$$(\Gamma_1) \quad \xi - a\alpha = 0,$$
$$(\Gamma_2) \quad \xi - b\alpha = 0,$$

où on suppose a et b différents; les équations des plans directeurs sont :

$$X - iY - a(X + iY) = 0,$$
$$X - iY - b(X + iY) = 0.$$

Soient u et v les paramètres des lignes conjuguées appartenant aux deux complexes linéaires. Les coordonnées x, y, z d'un point de Σ vérifient une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} - A\frac{\partial x}{\partial u} - B\frac{\partial x}{\partial v} = 0; \tag{4}$$

en exprimant que les tangentes conjuguées appartiennent respectivement aux deux complexes, on a :

$$\left\{\begin{aligned} a\frac{\partial x}{\partial u} &= y\frac{\partial z}{\partial u} - z\frac{\partial y}{\partial u}, \\ b\frac{\partial x}{\partial v} &= y\frac{\partial z}{\partial v} - z\frac{\partial y}{\partial v}. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Différentions la première équation par rapport à v, la deuxième par rapport à u, et ajoutons :

$$\frac{a+b}{2}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = y\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - z\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}.$$

Remplaçons les dérivées secondes par leurs valeurs, en tenant compte des équations (5) :

$$\frac{a+b}{2}\left(A\frac{\partial x}{\partial u}+B\frac{\partial x}{\partial v}\right)=Aa\frac{\partial x}{\partial u}+Bb\frac{\partial x}{\partial v},$$

d'où

$$A\frac{\partial x}{\partial u}=B\frac{\partial x}{\partial v}.$$

Par suite, on a :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}=2A\frac{\partial x}{\partial u}=2B\frac{\partial x}{\partial v}. \tag{6}$$

D'autre part, les équations (5), s'écrivent :

$$\frac{a}{y^2}\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{z}{y}\right),$$
$$\frac{b}{y^2}\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{z}{y}\right).$$

Éliminons $\frac{z}{y}$, il vient

$$a\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{y^2}\frac{\partial x}{\partial u}\right)=b\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{y^2}\frac{\partial x}{\partial v}\right),$$

$$(a-b)y\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}-2a\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+2b\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}=0,$$

ou, d'après les équations (6),

$$(a-b)y-\frac{a}{A}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{b}{B}\frac{\partial y}{\partial u}=0,$$

y et z doivent vérifier cette équation, ainsi que l'équation (4). Désignons par p, q, r, s, t les dérivées partielles par rapport à u et v. On est conduit à exprimer que les deux équations

$$\left\{\begin{aligned} s&=Ap+Bq,\\ (a-b)y&=-\frac{b}{B}p+\frac{a}{A}q\end{aligned}\right. \tag{7}$$

ont deux solutions communes distinctes y et z.

Soient h et k les invariants de l'équation (4) :

$$h=AB-\frac{\partial A}{\partial u},\qquad k=AB-\frac{\partial B}{\partial v}.$$

Différentions la seconde équation (7) par rapport à u :

$$(a-b)p = -\frac{b}{B}r + \frac{a}{A}s + \frac{b}{B^2}\frac{\partial B}{\partial u}p - \frac{a}{A^2}\frac{\partial A}{\partial u}q$$

en remplaçant s par sa valeur, il vient

$$r = (B + \frac{\partial}{\partial u}\log B)p + \frac{a}{b}\frac{Bh}{A^2}q, \tag{8}$$

de même,

$$t = \frac{b}{a}\frac{Ak}{B^2}p + (A + \frac{\partial}{\partial v}\log A)q. \tag{8'}$$

Calculons $\frac{\partial r}{\partial v}$ et $\frac{\partial s}{\partial u}$:

$$\frac{\partial r}{\partial v} = \left(B + \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial u}\right)s + \frac{a}{b}\frac{Bh}{A^2}t + \left(\frac{\partial B}{\partial v} + \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\log B\right)p + \frac{a}{b}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{Bh}{A^2}\right)q.$$

ou en remplaçant s et t par leurs valeurs :

$$\frac{\partial r}{\partial v} = \left(AB + A\frac{\partial}{\partial u}\log B + \frac{hk}{AB} + \frac{\partial B}{\partial v} + \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\log B\right)p$$
$$+ \left[B^2 + \frac{\partial B}{\partial u} + \frac{a}{b}\frac{Bh}{A^3}\frac{\partial A}{\partial v} + \frac{a}{b}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{Bh}{A^2}\right)\right]q.$$

On aura de la même manière :

$$\frac{\partial s}{\partial u} = Ar + Bs + \frac{\partial A}{\partial u}p + \frac{\partial B}{\partial u}q$$
$$= \left(2AB + A\frac{\partial}{\partial u}\log B + \frac{\partial A}{\partial u}\right)p + \left(\frac{a}{b}\frac{Bh}{A} + B^2 + \frac{\partial B}{\partial u}\right)q.$$

L'équation

$$\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial s}{\partial u} = 0$$

est homogène et linéaire en p et q, comme elle doit admettre les deux solutions y et z, elle est nécessairement identique. Le coefficient de p est

$$-AB + \frac{hk}{AB} + \frac{\partial B}{\partial v} + \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\log B - \frac{\partial A}{\partial u} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{hk}{AB} - k - \frac{\partial A}{\partial u} + \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log B = 0,$$

$$k\left[\frac{h}{AB} - 1\right] - \frac{\partial}{\partial u}\left(A - \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial v}\right) = 0,$$

$$\frac{k}{AB}\frac{\partial A}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{k}{B}\right) = 0,$$

ou enfin

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{A}{B}k\right) = 0.$$

Le coefficient de q est

$$\frac{a}{b}\left[\frac{Bh}{A^3}\frac{\partial A}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{Bh}{A^2}\right)\right] = \frac{a}{b}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{Bh}{A}\right) = 0;$$

on a donc, en définitive,

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{A}{B}k\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{B}{A}h\right) = 0;$$

en raison de la symétrie, on obtiendrait les mêmes équations en écrivant l'autre condition :

$$\frac{\partial s}{\partial v} = \frac{\partial t}{\partial u}.$$

Des équations précédentes, on tire :

$$k\frac{A}{B} = f(v), \qquad h\frac{B}{A} = \varphi(u).$$

Par un choix convenable des variables, on peut supposer $f = \varphi = 1$, et on a

$$h = \frac{A}{B}, \qquad k = \frac{B}{A},$$

c'est-à-dire

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial u} &= A\left(B - \frac{1}{B}\right), \\ \frac{\partial B}{\partial v} &= B\left(A - \frac{1}{A}\right). \end{aligned} \right.$$

En posant

$$A = e^{i\varphi}, \qquad B = e^{i\psi},$$

il vient :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = 2 \sin\psi, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial v} = 2 \sin\varphi;$$

c'est le système qu'on rencontre dans la théorie des surfaces à courbure constante, et si on pose

$$\varphi = \frac{\theta + \omega}{2}, \qquad \psi = \frac{\theta - \omega}{2},$$

θ et ω vérifient l'équation

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = 4 \sin\theta.$$

L'équation (4) est identique à sa deuxième transformée par la méthode de Laplace. On constate en effet que l'on a :

$$2(h-k) = \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log h,$$

$$2(k-h) = \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log k.$$

Si on connaît un système de solution du système (9), on formera les équations (7), (8) et (8′) qui déterminent y et z; ces équations sont linéaires et admettent deux solutions linéairement indépendantes. On aura ensuite x par les équations (5) qui sont compatibles, car la condition d'intégrabilité s'écrit :

$$(a-b)\left(y\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} - z\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}\right) + (a+b)\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = 0;$$

c'est une conséquence immédiate des équations (7).

[**3**] Si on se reporte à la définition des surfaces Σ que nous venons de déterminer, on voit immédiatement qu'elles se transforment en surfaces de même nature par la méthode de Laplace.

En effet, les tangentes conjuguées de Σ appartenant aux deux complexes linéaires correspondent par la transformation de Lie à des sphères dont les centres sont situés dans les plans directeurs du paraboloïde. Ces deux séries de sphères sont tangentes à S.

Les équations des plans directeurs sont :

$$(P_1) \qquad X - iY = a(X + iY),$$

$$(P_2) \qquad X - iY = b(X + iY).$$

Considérons les sphères de la première famille et leurs symétriques par rapport à P_2; celles-ci sont tangentes à une surface S_1 symétrique de S; elles ont leurs centres dans le plan P_3 dont l'équation est :

$$(P_3) \qquad X - iY = \frac{b^2}{a}(X + iY).$$

A cette surface S_1, la transformation de Lie fait correspondre une surface Σ_1 qui se déduit de Σ par la transformation de Laplace et sur laquelle il existe un système de lignes conjuguées appartenant aux deux complexes

$$(\Gamma_2) \qquad \xi - b\alpha = 0,$$

$$(\Gamma_3) \qquad \xi - \frac{b^2}{a}\alpha = 0;$$

Γ_3 est le complexe polaire réciproque de Γ_1 par rapport à Γ_2, ce qui peut d'ailleurs s'établir directement[1]. En répétant la transformation dans le même sens, on aura une suite de complexes linéaires dont l'équation générale est de la forme

$$\xi - b\left(\frac{b}{a}\right)^n \alpha = 0.$$

Après n transformations successives, on aura une surface Σ_n conjuguée par rapport au système des deux complexes :

$$\xi - b\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} \alpha = 0,$$

$$\xi - b\left(\frac{b}{a}\right)^{n} \alpha = 0.$$

Pour que la surface Σ revienne sur elle-même, il faut et il suffit que S revienne aussi sur elle-même. Nous exclurons le cas où S est une surface symétrique, de telle sorte que chaque point de S doit revenir sur lui-même; ceci ne peut avoir lieu qu'après un nombre pair de symétries successives. Deux symétries successives par rapport à P_2 et P_3 équivalent à une rotation définie par les formules

$$X + iY = \frac{b}{a}(X_2 + iY_2),$$

$$X - iY = \frac{a}{b}(X_2 - iY_2).$$

Si $\left(\frac{b}{a}\right)^n = 1$, après $2n$ symétries successives, la surface S revient sur elle-même; il en est de même de Σ après $2n$ transformations de Laplace.

---

(1) Demoulin, *Comptes rendus*, 16 octobre 1911.

Les coordonnées d'un point de la surface Σ_2, deuxième transformée de Σ, s'expriment tres simplement. Si dans les équations caractéristiques de la transformation de Lie, on remplace $X + iY$ et $X - iY$ par les valeurs ci-dessus, elles deviennent :

$$\frac{b}{a}(X_2 + iY_2)z - Z_2 - x = 0,$$

$$X_2 - iY_2 + \frac{b}{a}zZ_2 - \frac{b}{a}y = 0,$$

on voit donc que x, y, z sont transformés par les formules

$$x_2 = x, \qquad y_2 = \frac{b}{a}y, \qquad z_2 = \frac{b}{a}z; \tag{10}$$

c'est une transformation homographique.

L'angle V des deux plans directeurs est défini par la formule

$$e^{2iV} = \frac{b}{a};$$

c'est aussi l'angle des deux complexes linéaires Γ_1 et Γ_2.

Pour que $\left(\frac{b}{a}\right)^n = 1$, il faut que

$$nV = k\pi \qquad \text{ou} \qquad V = \frac{k\pi}{n}.$$

Par exemple, si $V = \frac{\pi}{2}$, le paraboloïde est équilatère, les deux complexes sont en involution; après quatre transformations de Laplace, la surface Σ revient sur elle-même (1).

Les formules (10) montrent *a priori* que l'équation de Laplace correspondant au système conjugué est identique à sa deuxième transformée, puisque celle-ci admet les solutions

$$x, \frac{b}{a}y \quad \text{et} \quad \frac{b}{a}z.$$

[4] Si le paraboloïde touche le plan de l'infini en un point situé sur le cercle de l'infini, les deux plans directeurs se coupent suivant une droite isotrope.

On peut prendre :

$$\varphi = (x + iy + z)(x + iy - z).$$

Les équations des deux complexes linéaires sont alors :

$$2\alpha + \beta + \eta \; = 0,$$

$$2\alpha - (\beta + \eta) = 0.$$

---

(1) Demoulin, *loc. cit.*

On ramène à un problème analogue la recherche des surfaces à courbure constante. En conservant les notations du paragraphe 1, si on désigne par R_1 et R_2 les rayons de courbure d'une surface S, les coordonnées pluckériennes des tangentes asymptotiques de la surface Σ vérifient les relations

$$2R_1 = \frac{\beta_1 - \eta_1}{\gamma_1}, \qquad 2R_2 = \frac{\beta_2 - \eta_2}{\gamma_2}.$$

Exprimons que S a sa courbure constante et égale à 1, il vient :

$$(\beta_1 - \eta_1)(\beta_2 - \eta_2) - 4\gamma_1\gamma_2 = 0;$$

la surface Σ est donc conjuguée par rapport à l'ensemble des deux complexes linéaires représentés par l'équation

$$(\beta - \eta)^2 - 4\gamma^2 = 0,$$

problème identique au précédent. Ici, les deux complexes

$$\begin{gathered} \beta - \eta = 2\gamma, \\ \beta - \eta = -2\gamma \end{gathered}$$

font partie d'un faisceau contenant deux complexes spéciaux confondus; néanmoins, la solution dépend encore des considérations employées au paragraphe 2.

On a alors les deux équations

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial y}{\partial u} + 2\frac{\partial z}{\partial u} + x\frac{\partial z}{\partial u} - z\frac{\partial x}{\partial u} = 0, \\ &\frac{\partial y}{\partial v} - 2\frac{\partial z}{\partial v} + x\frac{\partial z}{\partial v} - z\frac{\partial x}{\partial v} = 0; \end{aligned} \right.$$

x, y, z vérifient encore une équation de Laplace (4).

Différentions la première équation par rapport à v; la deuxième par rapport à u et ajoutons :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + x\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - z\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = 0,$$

En remplaçant les dérivées secondes par leurs valeurs et en tenant compte des équations (11) :

$$A\frac{\partial z}{\partial u} = B\frac{\partial z}{\partial v}.$$

D'où

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 2A\frac{\partial z}{\partial u} = 2B\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Si maintenant on retranche les équations (11) après les avoir différentiées, on a

$$2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}=0,$$

c'est-à-dire, d'après les dernières équations :

$$4+\frac{1}{A}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{1}{B}\frac{\partial x}{\partial u}=0.$$

Si donc on considère le système

$$(12)\qquad\left\{\begin{aligned} &s=Ap+Bq,\\ &\frac{p}{B}-\frac{q}{A}=4,\end{aligned}\right.$$

il admet les deux solutions x et $x+mz$, m désignant une constante quelconque.

Différentions la seconde équation par rapport à u, remplaçons S par sa valeur, on a :

$$r=p\left(B+\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial u}\right)+\frac{Bh}{A^2}q;$$

c'est l'équation (8) dans laquelle on a fait $a=b$; on aurait une expression analogue pour t. Comme les conditions d'intégrabilité trouvées au paragraphe 2 sont indépendantes de a et b, il est clair que A et B vérifient encore le système (9).

Ces rapides indications suffisent pour établir à nouveau que la recherche des surfaces à courbure totale constante dépend de l'équation

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v}=\sin\theta.$$

[**5**] Considérons maintenant une quadrique de révolution. Si on écrit l'équation du cône directeur sous la forme

$$(x+iy)(x-iy)+4kz^2=0,$$

l'équation du complexe Γ est

$$\alpha\xi+k(\beta+\eta)^2=0,$$

où k est différent de zéro et de $\frac{1}{4}$.

On peut définir ce complexe par la propriété géométrique suivante : Si on considère la quadrique

$$xz-y=0,$$

le plan de l'infini et le plan des xy sont deux plans tangents en deux points d'une même génératrice. Une droite du complexe rencontre la quadrique et les deux plans tangents en quatre points dont le rapport anharmonique est constant. On pourrait d'ailleurs adopter la propriété corrélative : les plans tangents menés par une droite du complexe et les deux plans passant par cette droite et par deux points fixes d'une même génératrice ont un rapport anharmonique constant.

Pour déterminer les surfaces conjuguées par rapport au complexe, rendons-les coordonnées homogènes; α, β, ξ, η prennent les valeurs

$$(tdx - xdt), \qquad (tdy - ydt), \qquad (ydz - zdy), \qquad (zdx - xdz),$$

et l'équation du complexe s'écrit :

$$(tdx - xdt)(ydz - zdy) + k(tdy - ydt + zdx - xdz)^2 = 0.$$

Posons

$$\theta = zx - yt;$$

on a l'identité

$$d\theta^2 - 4\theta(dzdx - dydt) \equiv (zdx - xdz + tdy - ydt)^2 + 4(tdx - xdt)(ydz - zdy).$$

on peut alors mettre l'équation du complexe sous la forme

$$d\theta^2 - 4\theta(dxdz - dydt) + (4k - 1)(zdx - xdz + tdy - ydt)^2 = 0.$$

Enfin, si on suppose les coordonnées choisies de telle manière que $\theta = 1$, l'équation s'écrit

$$dxdz - dydt = a^2(zdx - xdz + tdy - ydt)^2$$

en posant :

$$a^2 = k - \frac{1}{4}.$$

Soient α et β les paramètres des courbes conjuguées appartenant au complexe. On a

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial z}{\partial\alpha} - \frac{\partial y}{\partial\alpha}\frac{\partial t}{\partial\alpha} = a^2 P^2,\\ &\frac{\partial x}{\partial\beta}\frac{\partial z}{\partial\beta} - \frac{\partial y}{\partial\beta}\frac{\partial t}{\partial\beta} = a^2 Q^2 \end{aligned}\right.$$

en posant pour simplifier :

$$P = z\frac{\partial x}{\partial\alpha} - x\frac{\partial z}{\partial\alpha} + t\frac{\partial y}{\partial\alpha} - y\frac{\partial t}{\partial\alpha},$$

$$Q = z\frac{\partial x}{\partial\beta} - x\frac{\partial z}{\partial\beta} + t\frac{\partial y}{\partial\beta} - y\frac{\partial t}{\partial\beta}.$$

De plus, x, y, z, t sont solutions d'une équation de la forme

$$(14)\qquad \frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\partial\beta} + A\frac{\partial x}{\partial\alpha} + B\frac{\partial x}{\partial\beta} + Cx = 0.$$

Nous poserons également dans la suite :

$$U = \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \alpha} - \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial t}{\partial \alpha},$$

$$V = \frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial z}{\partial \beta} - \frac{\partial y}{\partial \beta}\frac{\partial t}{\partial \beta},$$

$$W = \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta} + \frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial z}{\partial \alpha} - \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial t}{\partial \beta} - \frac{\partial y}{\partial \beta}\frac{\partial t}{\partial \alpha}.$$

Différentions par rapport à β la première équation (13) :

$$\frac{\partial U}{\partial \beta} = 2a^2 P \frac{\partial P}{\partial \beta}. \tag{15}$$

D'autre part,

$$\frac{\partial U}{\partial \beta} = \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 t}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{\partial t}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha \partial \beta}$$

en remplaçant les dérivées secondes par leurs valeurs tirées de l'équation (14),

$$\frac{\partial U}{\partial \beta} = -\left(2AU + BW + C\frac{\partial \theta}{\partial \alpha}\right).$$

ou en remplaçant U par sa valeur et en remarquant que $\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} = 0$:

$$\frac{\partial U}{\partial \beta} = -2Aa^2P^2 - BW.$$

De même,

$$\frac{\partial P}{\partial \beta} = z\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} - x\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha \partial \beta} + t\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha \partial \beta} - y\frac{\partial^2 t}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial(x, z)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{\partial(y, t)}{\partial(\alpha, \beta)},$$

$$\frac{\partial P}{\partial \beta} = -AP - BQ + \frac{\partial(x, z)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{\partial(y, t)}{\partial(\alpha, \beta)}. \tag{16}$$

L'équation (15) s'écrit alors :

$$2Aa^2P^2 + BW = 2a^2P\left[AP + BQ - \frac{\partial(x, z)}{\partial(\alpha, \beta)} - \frac{\partial(y, t)}{\partial(\alpha, \beta)}\right];$$

on aura une équation analogue en permutant U et V, P et Q, α et β. Ces équations s'écrivent :

$$B[W - 2a^2PQ] + 2a^2P\left[\frac{\partial(x, z)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{\partial(y, t)}{\partial(\alpha, \beta)}\right] = 0,$$

$$A[W - 2a^2PQ] - 2a^2Q\left[\frac{\partial(x, z)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{\partial(y, t)}{\partial(\alpha, \beta)}\right] = 0.$$

Si AP + BQ n'est pas nul, on doit avoir :

$$W = 2a^2 PQ,$$

$$\frac{\partial(x, z)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{\partial(y, t)}{\partial(\alpha, \beta)} = 0.$$

Le ds^2 non euclidien de la surface

$$ds^2 = dx\,dz - dy\,dt = U\,d\alpha^2 + W\,d\alpha\,d\beta + V\,d\beta^2$$

serait alors un carré parfait, ce qui n'a évidemment pas lieu en général. On a donc nécessairement :

$$AP + BQ = 0,$$

et, par suite, d'après l'équation (16),

$$\frac{\partial P}{\partial \beta} = -\frac{\partial Q}{\partial \alpha}.$$

On peut donc poser

$$(17) \qquad P = \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha}, \qquad Q = -\frac{\partial \lambda}{\partial \beta},$$

et les équations (13) deviennent :

$$U = a^2 \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha}\right)^2,$$

$$V = a^2 \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \beta}\right)^2.$$

Effectuons un changement de coordonnées :

$$x_1 = \mu x, \qquad y_1 = \mu y, \qquad z_1 = \mu z, \qquad t_1 = \mu t.$$

Désignons par U_1 et V_1 les fonctions analogues à U et V.

On a, en tenant compte de l'équation $\theta = 1$:

$$U_1 = \left(\frac{\partial \mu}{\partial \alpha}\right)^2 + \mu^2 U = \left(\frac{\partial \mu}{\partial \alpha}\right)^2 + a^2 \mu^2 \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha}\right)^2,$$

$$V_1 = \left(\frac{\partial \mu}{\partial \beta}\right)^2 + \mu^2 V = \left(\frac{\partial \mu}{\partial \alpha}\right)^2 + a^2 \mu^2 \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \beta}\right)^2.$$

On peut disposer de μ de façon que l'on ait

$$U_1 = 0, \qquad V_1 = 0;$$

il suffit de prendre

$$\frac{d\mu}{\mu} = ai\,d\lambda, \qquad \mu = e^{a\lambda i}.$$

Dans ces conditions, si on supprime les indices, on peut supposer que les quatre coordonneés vérifient les relations

$$(18)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \alpha}\dfrac{\partial z}{\partial \alpha} - \dfrac{\partial y}{\partial \alpha}\dfrac{\partial t}{\partial \alpha} = 0, \\ \dfrac{\partial x}{\partial \beta}\dfrac{\partial z}{\partial \beta} - \dfrac{\partial y}{\partial \beta}\dfrac{\partial t}{\partial \beta} = 0, \end{cases}$$

mais on n'a plus ici $\theta = 1$, on a :

$$\theta = \mu = e^{a\lambda i}.$$

Si on effectue le changement de coordonnées dans les équations (17), il vient :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} = 2ai\left(z\frac{\partial x}{\partial \alpha} - x\frac{\partial z}{\partial \alpha} + t\frac{\partial y}{\partial \alpha} - y\frac{\partial t}{\partial \alpha}\right),$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \beta} = -2ai\left(z\frac{\partial x}{\partial \beta} - x\frac{\partial z}{\partial \beta} + t\frac{\partial y}{\partial \beta} - y\frac{\partial t}{\partial \beta}\right).$$

Posons

$$2ai = \frac{m-1}{m+1}:$$

m est fini, différent de zéro ainsi que de ± 1.

Si on remplace θ par $xz - yt$, les équations précédentes deviennent :

$$(19)\qquad \begin{cases} m\left(x\dfrac{\partial z}{\partial \alpha} - t\dfrac{\partial y}{\partial \alpha}\right) + z\dfrac{\partial x}{\partial \alpha} - y\dfrac{\partial t}{\partial \alpha} = 0, \\ m\left(z\dfrac{\partial x}{\partial \beta} - y\dfrac{\partial t}{\partial \beta}\right) + x\dfrac{\partial z}{\partial \beta} - t\dfrac{\partial y}{\partial \beta} = 0. \end{cases}$$

Il s'agit d'exprimer que l'équation (14) possède quatre solutions liées par les relations (18) et (19).

On a facilement, en vertu des équations (18),

$$(20)\qquad \begin{cases} \mathrm{BW} + \mathrm{C}\dfrac{\partial \theta}{\partial \alpha} = 0, \\ \mathrm{AW} + \mathrm{C}\dfrac{\partial \theta}{\partial \beta} = 0, \end{cases}$$

et, d'autre part, d'après ces mêmes équations, on peut poser :

$$(21)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial \alpha} = h\dfrac{\partial t}{\partial \alpha}, \qquad \dfrac{\partial y}{\partial \alpha} = h\dfrac{\partial x}{\partial \alpha}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial \beta} = k\dfrac{\partial t}{\partial \beta}, \qquad \dfrac{\partial y}{\partial \beta} = k\dfrac{\partial x}{\partial \beta}. \end{cases}$$

En remplaçant les dérivées de y et z par leurs valeurs dans les équations (20), il vient

$$(22)\qquad (h-k)\frac{\partial(x,t)}{\partial(\alpha,\beta)}=\frac{C}{B}\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}=\frac{C}{A}\frac{\partial\theta}{\partial\beta},$$

et en les portant dans les équations (19) :

$$mh\left(x\frac{\partial t}{\partial\alpha}-t\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right)+z\frac{\partial x}{\partial\alpha}-y\frac{\partial t}{\partial\alpha}=0,$$

$$m\left(z\frac{\partial x}{\partial\beta}-y\frac{\partial t}{\partial\beta}\right)+k\left(x\frac{\partial t}{\partial\beta}-t\frac{\partial x}{\partial\beta}\right)=0,$$

c'est-à-dire

$$(23)\qquad \begin{cases}(m-1)h\left(x\dfrac{\partial t}{\partial\alpha}-t\dfrac{\partial x}{\partial\alpha}\right)+\dfrac{\partial\theta}{\partial\alpha}=0,\\[2ex] \dfrac{m-1}{m}k\left(x\dfrac{\partial t}{\partial\beta}-t\dfrac{\partial x}{\partial\beta}\right)-\dfrac{\partial\theta}{\partial\beta}=0.\end{cases}$$

En éliminant y et z entre les équations (21), on voit que x et t vérifient l'équation

$$(24)\qquad (h-k)\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial h}{\partial\beta}\frac{\partial x}{\partial\alpha}-\frac{\partial k}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta}=0.$$

En tenant compte de l'équation (14), on forme une équation linéaire du premier ordre que vérifient x et t :

$$(25)\qquad \left(A-\frac{\dfrac{\partial h}{\partial\beta}}{h-k}\right)\frac{\partial x}{\partial\alpha}+\left(B+\frac{\dfrac{\partial k}{\partial\alpha}}{h-k}\right)\frac{\partial x}{\partial\beta}+Cx=0.$$

D'où on tire facilement

$$\left(A-\frac{\dfrac{\partial h}{\partial\beta}}{h-k}\right)\frac{\partial(x,t)}{\partial(\alpha,\beta)}+C\left(x\frac{\partial t}{\partial\beta}-t\frac{\partial x}{\partial\beta}\right)=0,$$

ou en remplaçant $\dfrac{\partial(x,t)}{\partial(\alpha,\beta)}$ et $x\dfrac{\partial t}{\partial\beta}-t\dfrac{\partial x}{\partial\beta}$ par leurs valeurs tirées des équations (22) et (23) :

$$\frac{1}{h-k}\frac{C}{A}\left(A-\frac{\dfrac{\partial h}{\partial\beta}}{h-k}\right)\frac{\partial\theta}{\partial\beta}+\frac{Cm}{(m-1)k}\frac{\partial\theta}{\partial\beta}=0;$$

cette équation détermine A :

$$A=\frac{(m-1)k}{(h-k)(mh-k)}\frac{\partial h}{\partial\beta}.$$

On aura de même :

$$B = -\frac{(m-1)h}{(h-k)(mh-k)}\frac{\partial k}{\partial \alpha}.$$

Pour calculer C, éliminons θ entre les équations (23) :

$$m\frac{\partial}{\partial \beta}\left[h\left(x\frac{\partial t}{\partial \alpha} - t\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[k\left(x\frac{\partial t}{\partial \beta} - t\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)\right] = 0,$$

c'est-à-dire

$$(mh+k)\left(x\frac{\partial^2 t}{\partial \alpha \partial \beta} - t\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta}\right) - (mh-k)\frac{\partial(x,t)}{\partial(\alpha,\beta)}$$
$$+ m\frac{\partial h}{\partial \beta}\left(x\frac{\partial t}{\partial \alpha} - t\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right) + \frac{\partial k}{\partial \alpha}\left(x\frac{\partial t}{\partial \beta} - t\frac{\partial x}{\partial \beta}\right) = 0.$$

De l'équation (24), on tire :

$$x\frac{\partial^2 t}{\partial \alpha \partial \beta} - t\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} = -\frac{\frac{\partial h}{\partial \beta}}{h-k}\left(x\frac{\partial t}{\partial \alpha} - t\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right) + \frac{\frac{\partial k}{\partial \alpha}}{h-k}\left(x\frac{\partial t}{\partial \beta} - t\frac{\partial x}{\partial \beta}\right).$$

En portant cette valeur dans l'équation précédente, on obtient une équation linéaire et homogène par rapport à

$$x\frac{\partial t}{\partial \alpha} - t\frac{\partial x}{\partial \alpha}, \qquad x\frac{\partial t}{\partial \beta} - t\frac{\partial x}{\partial \beta}, \qquad \frac{\partial(x,t)}{\partial(\alpha,\beta)}.$$

Remplaçons ces expressions par leurs valeurs

$$\frac{-1}{(m-1)h}\frac{\partial \theta}{\partial \alpha}, \qquad \frac{m}{(m-1)k}\frac{\partial \theta}{\partial \beta}, \qquad \frac{C}{B}\frac{\frac{\partial \theta}{\partial \alpha}}{h-k}$$

ou par les quantités

$$\frac{-B}{(m-1)h}, \qquad \frac{mA}{(m-1)k}, \qquad \frac{C}{h-k}$$

qui leur sont proportionnelles d'après (22), il vient

$$\frac{B}{(m-1)h}(m+1)k\frac{\partial h}{\partial \beta} + \frac{mA}{(m-1)k}(m+1)h\frac{\partial k}{\partial \alpha} - (mh-k)C = 0,$$

ou enfin en remplaçant A et B par leurs valeurs :

$$C = \frac{(m+1)}{(h-k)(mh-k)}\frac{\partial h}{\partial \beta}\frac{\partial k}{\partial \alpha}.$$

Calculons les coefficients de l'équation (25) :

$$A - \frac{1}{h-k}\frac{\partial h}{\partial \beta} = -\frac{m}{mh-k}\frac{\partial h}{\partial \beta},$$

$$B + \frac{1}{h-k}\frac{\partial k}{\partial \alpha} = \frac{1}{mh-k}\frac{\partial k}{\partial \alpha}.$$

L'équation (25) s'écrit alors :

$$-m\frac{\partial h}{\partial \beta}\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial k}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{m+1}{h-k}\frac{\partial h}{\partial \beta}\frac{\partial k}{\partial \alpha}x = 0.$$

En joignant à cette équation l'équation (24), on voit que x et t vérifient le système

$$\begin{cases} (m+1)x = \dfrac{m(h-k)}{\dfrac{\partial k}{\partial \alpha}}\dfrac{\partial x}{\partial \alpha} - \dfrac{h-k}{\dfrac{\partial h}{\partial \beta}}\dfrac{\partial x}{\partial \beta}, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} = -\dfrac{\dfrac{\partial h}{\partial \beta}}{h-k}\dfrac{\partial x}{\partial \alpha} + \dfrac{\dfrac{\partial k}{\partial \alpha}}{h-k}\dfrac{\partial x}{\partial \beta}. \end{cases}$$

C'est un système analogue au système (7) que nous avons obtenu dans le cas du paraboloïde; il suffit de faire $a = 1$, $b = -m$, en y remplaçant A et B par

$$A_1 = -\frac{1}{h-k}\frac{\partial h}{\partial \beta}, \qquad B_1 = \frac{1}{h-k}\frac{\partial k}{\partial \alpha};$$

A_1 et B_1 vérifient alors le système (9).

En raisonnant sur y et z, on obtiendrait des résultats analogues en changeant m, h et k en $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{h}$ et $\frac{1}{k}$. Posons

$$A_1' = -\frac{1}{h-k}\frac{k}{h}\frac{\partial h}{\partial \beta}, \qquad B_1' = \frac{1}{h-k}\frac{h}{k}\frac{\partial k}{\partial \alpha};$$

A_1' et B_1' vérifient aussi le système (9). On a d'ailleurs :

$$(26) \qquad A_1 B_1 = A_1' B_1'.$$

Chacun des couples x, t et y, z vérifie une équation de Laplace identique à sa deuxième transformée, mais les équations sont différentes. A_1 et B_1 étant connus, les valeurs de x et t s'obtiendront comme pour le système (7); h et k s'obtiennent par quadratures. Posons

$$A_1 = e^{i\varphi}, \qquad B_1 = e^{i\psi},$$

$$A_1' = e^{i\varphi'}, \qquad B_1' = e^{i\psi'}$$

et

$$\varphi + \psi = \theta, \qquad \varphi - \psi = \omega,$$

$$\varphi' + \psi' = \theta', \qquad \varphi' - \psi' = \omega'.$$

On a, d'après l'équation (26),

$$\varphi + \psi = \varphi' + \psi',$$

c'est-à-dire $\theta = \theta'$.

Quand θ est connu, ω et ω' sont solutions du système

$$\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} + \frac{\partial\omega}{\partial\alpha} = 4 \sin\frac{\theta - \omega}{2},$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\beta} - \frac{\partial\omega}{\partial\beta} = 4 \sin\frac{\theta + \omega}{2}.$$

Ces équations sont compatibles et déterminent ω avec une constante arbitraire (¹). Connaissant θ, ω, ω', on aura φ, ψ, φ', ψ'. Des valeurs de A_1, B_1, A'_1, B'_1, on tire :

$$\frac{\partial h}{\partial\beta} = (h - k)\, e^{i\varphi},$$

$$\frac{\partial k}{\partial\alpha} = (h - k)\, e^{i\psi},$$

$$\frac{k}{h} = e^{i(\varphi' - \varphi)} = e^{i(\psi - \psi')}.$$

De la troisième, on tire k; en substituant dans les deux autres, on a :

$$\frac{\partial h}{\partial\beta} = h\,(e^{i\varphi'} - e^{i\varphi}),$$

$$\frac{\partial h}{\partial\alpha} = h\,(e^{-i\psi'} - e^{-i\psi}).$$

Ces équations déterminent h par une quadrature; on a ensuite k sans quadrature nouvelle.

Il est aisé de former un système d'équations auquel satisfont h et k; la dernière équation s'écrit :

$$\frac{\partial h}{\partial\alpha} = -(h - k)\, e^{-i\psi}.$$

D'où

$$\frac{\partial h}{\partial\alpha}\frac{\partial k}{\partial\alpha} = -(h - k)^2.$$

on aura de même :

$$\frac{\partial h}{\partial\beta}\frac{\partial k}{\partial\beta} = -(h - k)^2.$$

On peut donc dire que l'intégration du système de ces deux équations revient à celle de l'équation

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = 4 \sin\theta.$$

(¹) Darboux, *Leçons*, t. III.

[**6**] Supposons que la quadrique soit une quadrique à centre quelconque, sans nous arrêter au cas où elle est osculatrice au cercle de l'infini.

L'équation du cône directeur peut s'écrire

$$[a_1(x+iy)+a'_1(x-iy)]\,[b_1(x+iy)+b'_1(x-iy)]-z^2=0$$

et celle du complexe Γ est :

$$4(a_1\alpha+a'_1\xi)(b_1\alpha+b'_1\xi)-(\beta+\eta)^2=0.$$

Soient x, y, z, t les coordonnées homogènes d'un point d'une surface conjuguée par rapport au complexe et supposons

$$zx-yt=1.$$

Dans ces conditions, on a :

$$z\,dx-x\,dz+t\,dy-y\,dt=2(z\,dx-y\,dt).$$

Soit dx, dy, dz, dt un déplacement sur une courbe du complexe; il vient alors :

$$4[a_1(t\,dx-x\,dt)+a'_1(y\,dz-z\,dy)]\,[b_1(t\,dx-x\,dt)+b'_1(y\,dz-z\,dy)]=4(z\,dx-y\,dt)^2.$$

On peut donc poser :

$$b_1(t\,dx-x\,dt)+b'_1(y\,dz-z\,dy)=h(z\,dx-y\,dt),$$

$$a_1(t\,dx-x\,dt)+a'_1(y\,dz-z\,dy)=\frac{1}{h}(z\,dx-y\,dt).$$

Nous supposons nécessairement $\Delta=a_1b'_1-a'_1b_1\neq 0$.

Des équations précédentes, on tire

$$\Delta(y\,dz-z\,dy)=\left(a_1h-\frac{b_1}{h}\right)(z\,dx-y\,dt),$$

$$\Delta(t\,dx-x\,dt)=-\left(a'_1h-\frac{b'_1}{h}\right)(z\,dx-y\,dt);$$

la première de ces équations s'écrit également :

$$\Delta(y\,dz-z\,dy)=-\left(a_1h-\frac{b_1}{h}\right)(x\,dz-t\,dy).$$

Posons, pour simplifier,

$$a=-\frac{a_1}{\Delta},\qquad b=-\frac{b_1}{\Delta},\qquad a'=\frac{-a'_1}{\Delta},\qquad b'=\frac{-b'_1}{\Delta}.$$

On a :

$$y\,dz-z\,dy=\frac{ah^2-b}{h}(x\,dz-t\,dy),$$

$$t\,dx-x\,dt=\frac{a'h^2-b'}{h}(z\,dx-y\,dt).$$

D'où

$$\frac{dx}{x - \dfrac{a'h^2 - b'}{h}y} = \frac{dt}{t - \dfrac{a'h^2 - b'}{h}z} = \lambda,$$

$$\frac{dy}{y - \dfrac{ah^2 - b}{h}x} = \frac{dz}{z - \dfrac{ah^2 - b}{h}t} = \lambda_1.$$

En substituant les valeurs de dx, dy, dz, dt dans l'équation

$$x\,dz + z\,dx - y\,dt - t\,dy = 0,$$

il vient :

$$\lambda + \lambda_1 = 0.$$

Chacune des familles de courbes conjuguées fournira un système analogue au précédent, de sorte que l'on peut écrire les deux systèmes :

$$\mathrm{I}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \alpha} = \lambda\left(x - \dfrac{a'h^2 - b'}{h}y\right), \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial \beta} = \mu\left(x - \dfrac{a'k^2 - b'}{k}y\right); \end{cases}$$

$$\mathrm{II}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial \alpha} = -\lambda\left(y - \dfrac{ah^2 - b}{h}x\right), \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial \beta} = -\mu\left(y - \dfrac{ak^2 - b}{k}x\right); \end{cases}$$

λ, μ, h, k sont des fonctions de α et β.

Ces systèmes sont également vérifiés quand on y remplace x et y par t et z. Ils doivent donc être compatibles et admettre deux couples de solutions (x, y) et (t, z), tels que ces quatre fonctions sont solutions d'une même équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta} + A\frac{\partial x}{\partial \alpha} + B\frac{\partial x}{\partial \beta} + Cx = 0. \tag{27}$$

Exprimons d'abord que les systèmes I et II sont compatibles. En égalant les deux valeurs de $\dfrac{\partial^2 y}{\partial\alpha\,\partial\beta}$ et en remplaçant les dérivées partielles du premier ordre par leurs valeurs, on obtient une équation linéaire et homogène en x et y qui est aussi vérifiée quand on change x et y en t et z. Comme $zx - ty$ n'est pas nul, cette équation doit être identique. En annulant les coefficients de x et y, on trouve immédiatement :

$$\frac{(ba' - ab')\lambda\mu(h^2 - k^2)}{hk} + \frac{\partial \lambda}{\partial \beta} - \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} = 0; \tag{28}$$

$$2\lambda\mu\frac{(ahk + b)(h - k)}{hk} + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\lambda\frac{ah^2 - b}{h}\right) - \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\mu\frac{ak^2 - b}{k}\right) = 0. \tag{29}$$

On obtiendra des équations analogues en égalant les deux valeurs de $\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\partial\beta}$; il suffit de permuter a et a', b et b' en changeant les signes de λ et μ; on ne trouve qu'une condition nouvelle :

$$(30)\qquad 2\lambda\mu\frac{(a'hk+b')(h-k)}{hk}-\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\lambda\frac{a'h^2-b'}{h}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\mu\frac{a'k^2-b'}{k}\right)=0.$$

Il faut maintenant exprimer que x, y, z, t vérifient une même équation de Laplace. Éliminons y entre les deux équations I; il vient :

$$(31)\qquad X=\mu\frac{a'k^2-b'}{k}\frac{\partial x}{\partial\alpha}-\lambda\frac{a'h^2-b'}{h}\frac{\partial x}{\partial\beta}+\lambda\mu\frac{(a'hk+b')(h-k)}{hk}x=0.$$

Différentions la première équation I par rapport à β en remplaçant $\frac{\partial y}{\partial\beta}$ par sa valeur $-\mu\left(y-\frac{ak^2-b}{k}x\right)$, puis y par $\frac{h}{a'h^2-b'}\left(x-\frac{1}{\lambda}\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right)$, on a :

$$(32)\qquad \begin{aligned}X_1=\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\partial\beta}+\left[\mu-\frac{\partial}{\partial\beta}\log\left(\lambda\frac{a'h^2-b'}{h}\right)\right]\frac{\partial x}{\partial\alpha}-\lambda\frac{\partial x}{\partial\beta}\\ -\left[\lambda\mu-\lambda\mu\frac{(a'h^2-b')(ak^2-b)}{hk}-\lambda\frac{\partial}{\partial\beta}\log\frac{a'h^2-b'}{h}\right]x=0.\end{aligned}$$

Formons la combinaison

$$(33)\qquad X_1+\rho X=0.$$

Cette équation, comme les équations (31) et (32), admet les solutions x et t. On peut disposer de ρ de telle manière qu'elle soit aussi vérifiée par y; elle admettra alors nécessairement la solution z, car trois solutions suffisent pour déterminer l'équation (27).

On formera une équation analogue admettant comme solution y et z en permutant a et a', b et b' et en changeant les signes de λ et μ.

Posons

$$Y=\lambda\frac{ah^2-b}{h}\frac{\partial y}{\partial\beta}-\mu\frac{ak^2-b}{k}\frac{\partial y}{\partial\alpha}+\lambda\mu\frac{ahk+b}{hk}(h-k)y=0,$$

$$\begin{aligned}Y_1=\frac{\partial^2 y}{\partial\alpha\partial\beta}-\left[\mu+\frac{\partial}{\partial\beta}\log\left(\lambda\frac{ah^2-b}{h}\right)\right]\frac{\partial y}{\partial\alpha}+\lambda\frac{\partial y}{\partial\beta}\\ -\left[\lambda\mu-\lambda\mu\frac{(ah^2-b)(a'k^2-b')}{hk}+\lambda\frac{\partial}{\partial\beta}\log\frac{ah^2-b}{h}\right]x=0,\end{aligned}$$

et formons l'équation

$$Y_1+\rho'Y=0.$$

On doit pouvoir déterminer ρ et ρ' de façon que cette équation soit identique à l'équation (33).

En identifiant, il vient :

$$
\begin{aligned}
&(a'h^2 - b')\rho + (ah^2 - b)\rho' + 2h = 0,\\
&(a'k^2 - b')\rho + (ak^2 - b)\rho' + 2k + \frac{k}{\mu}\frac{\partial}{\partial\beta}\log\frac{ah^2 - b}{a'h^2 - b'} = 0,\\
&(a'hk + b')\rho - (ahk + b)\rho' + (ab' - ba')(h + k)\\
&\qquad\qquad + \frac{hk}{\mu(h-k)}\frac{\partial}{\partial\beta}\log\frac{(ah^2 - b)(a'h^2 - b')}{h^2} = 0.
\end{aligned}
$$

Éliminons ρ et ρ'; on obtient une équation qui détermine μ :

$$
\begin{vmatrix}
a'h^2 - b' & ah^2 - b & 2h\\
a'k^2 - b' & ak^2 - b & 2k\\
a'hk + b' & -(ahk + b) & (ab' - ba')(h + k)
\end{vmatrix}
+ \frac{k}{\mu}
\begin{vmatrix}
\vdots & \vdots & 0\\
\vdots & \vdots & \dfrac{\partial}{\partial\beta}\log\dfrac{ah^2 - b}{a'h^2 - b'}\\
\vdots & \vdots & \dfrac{h}{h-k}\dfrac{\partial}{\partial\beta}\log\dfrac{(ah^2 - b)(a'h^2 - b')}{h^2}
\end{vmatrix}
= 0;
$$

les deux premières colonnes du second déterminant sont identiques à celles du premier.

Tous calculs faits, en désignant par θ la forme doublement quadratique

$$\theta = (ab' - ba')^2(h + k)^2 + 4(ahk + b)(a'hk + b'),$$

on trouve :

$$\mu = \frac{2(ba' - ab')}{\theta}k\frac{\partial h}{\partial\beta}. \tag{34}$$

On obtiendra de même :

$$\lambda = \frac{2(ba' - ab')}{\theta}h\frac{\partial k}{\partial\alpha}. \tag{35}$$

Les équations (28), (29), (30), (34), (35) qui constituent un système en λ, μ, h, k ne sont pas distinctes; si on considère les trois premières, elles sont linéaires par rapport à $\frac{\partial\lambda}{\partial\beta}$ et $\frac{\partial\mu}{\partial\alpha}$ et si on tient compte des valeurs de λ et μ, ces trois équations se réduisent à deux; on en tire

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial\lambda}{\partial\beta} &= -\frac{\lambda\mu}{2hk}\left[(ba' - ab')(h^2 - k^2) + 4\frac{aa'h^2k^2 - bb'}{ba' - ab'}\right],\\
\frac{\partial\mu}{\partial\alpha} &= \frac{\lambda\mu}{2hk}\left[(ba' - ab')(h^2 - k^2) - 4\frac{aa'h^2k^2 - bb'}{ba' - ab'}\right],
\end{aligned}
\right. \tag{36}
$$

ou en tenant compte des valeurs de λ et μ :

$$(37)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\beta}\log\lambda &= -\frac{1}{\theta h}\frac{\partial h}{\partial\beta}\Big[(ba'-ab')^2(h^2-k^2)+4(aa'h^2k^2-bb')\Big].\\ \frac{\partial}{\partial\alpha}\log\mu &= \frac{1}{\theta k}\frac{\partial k}{\partial\alpha}\Big[(ba'-ab')^2(h^2-k^2)-4(aa'h^2k^2-bb')\Big].\end{aligned}$$

Entre les équations (35) et (37), éliminons λ.

L'équation (35) donne :

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\log\lambda = \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial\beta}+\frac{\dfrac{\partial^2 k}{\partial\alpha\,\partial\beta}}{\dfrac{\partial k}{\partial\alpha}}-\frac{\dfrac{\partial\theta}{\partial h}}{\theta}\frac{\partial h}{\partial\beta}-\frac{\dfrac{\partial\theta}{\partial k}}{\theta}\frac{\partial k}{\partial\beta};$$

en portant cette valeur dans l'équation (37), il vient :

$$\frac{\dfrac{\partial^2 k}{\partial\alpha\,\partial\beta}}{\dfrac{\partial k}{\partial\alpha}}=\frac{\dfrac{\partial\theta}{\partial k}}{\theta}\frac{\partial k}{\partial\beta}+\mathrm{M}\frac{\partial h}{\partial\beta}.$$

Le coefficient M a pour valeur :

$$\mathrm{M}=\frac{\dfrac{\partial\theta}{\partial h}}{\theta}-\frac{1}{h}-\frac{(ba'-ab')^2(h^2-k^2)+4(aa'h^2k^2-bb')}{\theta h}.$$

En effectuant les calculs, on trouve facilement

$$\mathrm{M}=0.$$

L'équation prend alors la forme simple

$$(38)\qquad \frac{\partial^2 k}{\partial\alpha\,\partial\beta}=\frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial\alpha}\frac{\partial k}{\partial\beta};$$

on aura de même :

$$(39)\qquad \frac{\partial^2 h}{\partial\alpha\,\partial\beta}=\frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial\alpha}\frac{\partial h}{\partial\beta}.$$

On a ainsi un système de deux équations en h et k.

Mais ce système peut être simplifié. De ces deux équations, on tire

$$\frac{\dfrac{\partial^2 h}{\partial\alpha\,\partial\beta}}{\dfrac{\partial h}{\partial\beta}}+\frac{\dfrac{\partial^2 k}{\partial\alpha\,\partial\beta}}{\dfrac{\partial k}{\partial\beta}}=\frac{\dfrac{\partial\theta}{\partial h}}{\theta}\frac{\partial h}{\partial\alpha}+\frac{\dfrac{\partial\theta}{\partial k}}{\theta}\frac{\partial k}{\partial\alpha}.$$

ou en intégrant par rapport à α,

$$\frac{\dfrac{\partial h}{\partial \beta}\dfrac{\partial k}{\partial \beta}}{\theta} = f(\beta),$$

et, par symétrie,

$$\frac{\dfrac{\partial h}{\partial \alpha}\dfrac{\partial k}{\partial \alpha}}{\theta} = \varphi(\alpha);$$

par un choix convenable des variables, on peut réduire à l'unité les fonctions f et φ et on a finalement le système

$$\text{III} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial \alpha}\frac{\partial k}{\partial \alpha} &= \theta, \\ \frac{\partial h}{\partial \beta}\frac{\partial k}{\partial \beta} &= \theta, \end{aligned} \right.$$

analogue à celui que nous avons obtenu pour les surfaces de révolution. On peut donc dire que la déformation de la quadrique la plus générale dépend de l'intégration de ce système.

La nature de la forme doublement quadratique θ dépend de l'intersection de la quadrique avec le cercle de l'infini. Il faudrait étudier spécialement le cas où la quadrique est osculatrice au cercle de l'infini, dont l'étude ne peut pas se déduire des calculs précédents; nous ne nous arrêterons pas à ce cas qui ne présente pas de difficultés; on constate que la déformation se ramène à celle des surfaces à courbure constante.

[**7**] Nous allons considérer le cas particulier le plus intéressant en supposant la quadrique simplement tangente au cercle de l'infini, et nous allons retrouver un résultat déjà établi par M. Darboux [1].

Dans l'équation du cône asymptote, faisons $a'_1 = 0$. Par une rotation autour de oz, on peut faire en sorte que $b_1 = b'_1$, et comme on peut supposer $a_1 = -1$, on voit que l'on aura

$$b = b' = 1, \qquad a = -\frac{1}{b_1}, \qquad a' = 0;$$

θ prend la forme

$$\theta = a^2(h+k)^2 + 4(ahk+1).$$

---

(1) Darboux, *Annales de l'École Normale*, 1899.

Les équations (31) et (32) que vérifient x et t s'écrivent :

$$(40)\qquad \frac{\mu}{k}\frac{\partial x}{\partial \alpha}-\frac{\lambda}{h}\frac{\partial x}{\partial \beta}-\frac{\lambda\mu}{hk}(h-k)\,x=0,$$

$$(41)\qquad \frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\left[\mu-\frac{\partial}{\partial\beta}\log\frac{\lambda}{h}\right]\frac{\partial x}{\partial\alpha}-\lambda\frac{\partial x}{\partial\beta}-\left[\lambda\mu+\lambda\mu\frac{ak^2-1}{hk}+\frac{\lambda}{h}\frac{\partial h}{\partial\beta}\right]x=0;$$

λ et μ ont ici les valeurs

$$\lambda=-\frac{2ah}{\theta}\frac{\partial k}{\partial\alpha},\qquad \mu=-\frac{2ak}{\theta}\frac{\partial h}{\partial\beta}.$$

D'où l'on tire

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\log\frac{\lambda}{h}=\frac{\dfrac{\partial^2 k}{\partial\alpha\,\partial\beta}}{\dfrac{\partial k}{\partial\alpha}}-\frac{\dfrac{\partial\theta}{\partial h}}{\theta}\frac{\partial h}{\partial\beta}-\frac{\dfrac{\partial\theta}{\partial k}}{\theta}\frac{\partial k}{\partial\beta},$$

c'est-à-dire, d'après l'équation (38),

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\log\frac{\lambda}{h}=-\frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial\beta}.$$

Les équations (40) et (41) deviennent alors :

$$\frac{\partial h}{\partial\beta}\frac{\partial x}{\partial\alpha}-\frac{\partial k}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta}+\frac{2a(h-k)}{\theta}\frac{\partial h}{\partial\beta}\frac{\partial k}{\partial\alpha}x=0,$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\frac{1}{\theta}\left(\frac{\partial\theta}{\partial h}-2ak\right)\frac{\partial h}{\partial\beta}\frac{\partial x}{\partial\alpha}+\frac{2ah}{\theta}\frac{\partial k}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta}$$
$$-\frac{2a}{\theta^2}\left[2ahk+2a(ak^2-1)-\theta\right]\frac{\partial h}{\partial\beta}\frac{\partial k}{\partial\alpha}x=0.$$

Remarquons que

$$\frac{\partial\theta}{\partial h}=2a^2(h+k)+4ak.$$

Multiplions la première équation par $\dfrac{-a^2(h+k)}{\theta}$ et ajoutons à la seconde, on obtient une équation linéaire

$$(42)\qquad \frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\mathrm{A}\frac{\partial x}{\partial\alpha}+\mathrm{B}\frac{\partial x}{\partial\beta}+\mathrm{C}x=0$$

où les coefficients ont les valeurs :

$$\mathrm{A}=\frac{1}{2\theta}\frac{\partial\theta}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial\beta},$$

$$\mathrm{B}=\frac{1}{2\theta}\frac{\partial\theta}{\partial k}\cdot\frac{\partial k}{\partial\alpha},$$

$$\mathrm{C}=\frac{4a^2(a+1)hk+4a(a+2)}{\theta^2}\frac{\partial h}{\partial\beta}\frac{\partial k}{\partial\alpha}.$$

Nous allons montrer que cette équation est identique à sa deuxième transformée par la méthode de Laplace.

Calculons l'invariant

$$H = \frac{\partial A}{\partial \alpha} + AB - C.$$

On a

$$2\frac{\partial A}{\partial \alpha} = \frac{1}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial h}\frac{\partial^2 h}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial h}{\partial \beta}\left[\frac{\partial^2}{\partial h^2}\log \theta \cdot \frac{\partial h}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2}{\partial h \partial k}\log \theta \cdot \frac{\partial k}{\partial \alpha}\right];$$

en remplaçant $\frac{\partial^2 h}{\partial \alpha \partial \beta}$ par sa valeur (39), il vient après réductions :

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = \frac{1}{2\theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial h^2}\frac{\partial h}{\partial \alpha}\frac{\partial h}{\partial \beta} + \frac{1}{2\theta^2}\left(\theta\frac{\partial^2 \theta}{\partial h \partial k} - \frac{\partial \theta}{\partial h}\frac{\partial \theta}{\partial k}\right)\frac{\partial h}{\partial \beta}\frac{\partial k}{\partial \alpha}.$$

En formant H, le coefficient de $\frac{\partial h}{\partial \beta}\frac{\partial k}{\partial \alpha}$ est

$$\frac{1}{2\theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial h \partial k} - \frac{1}{4\theta^2}\frac{\partial \theta}{\partial h}\frac{\partial \theta}{\partial k} - \frac{4a^2(a+1)hk + 4a(a+2)}{\theta^2} = 0,$$

et, par suite,

$$H = \frac{a^2}{\theta}\frac{\partial h}{\partial \alpha}\frac{\partial h}{\partial \beta}.$$

On aura par symétrie le second invariant

$$K = \frac{a^2}{\theta}\frac{\partial k}{\partial \alpha}\frac{\partial k}{\partial \beta}.$$

D'où

$$HK = a^4.$$

Calculons maintenant $\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta}\log H$ en remarquant qu'on peut écrire :

$$H = a^2\frac{\frac{\partial h}{\partial \alpha}}{\frac{\partial k}{\partial \beta}}.$$

D'autre part, d'après les équations (38) et (39),

$$A = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \beta}\log\frac{\partial h}{\partial \alpha},$$

$$B = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \alpha}\log\frac{\partial k}{\partial \beta}.$$

Par conséquent,

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\log H = \frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\log\frac{\partial h}{\partial\alpha} - \frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\log\frac{\partial k}{\partial\beta} = 2\left(\frac{\partial A}{\partial\alpha} - \frac{\partial B}{\partial\beta}\right)$$

ou enfin

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\log H = 2(H - K).$$

Par analogie,

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\log K = 2(K - H);$$

l'équation (42) possède donc la propriété énoncée. Si on pose

$$H = a^2 e^{\omega i}, \qquad K = a^2 e^{-\omega i},$$

ω est déterminé par l'équation

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\partial\beta} = 4a^2 \sin\omega.$$

Supposons H et K connus; pour résoudre complètement le problème, il faut déterminer h et k, puis x, y, z, t.

On a les quatre équations

$$\frac{\partial h}{\partial\alpha}\frac{\partial k}{\partial\alpha} = \theta, \qquad \frac{\partial h}{\partial\beta}\frac{\partial k}{\partial\beta} = \theta,$$

et, d'après les relations (38) et (39),

$$H = \frac{a^2}{\frac{\partial\theta}{\partial h}}\frac{\partial^2 h}{\partial\alpha\partial\beta}, \tag{43}$$

$$K = \frac{a^2}{\frac{\partial\theta}{\partial k}}\cdot\frac{\partial^2 k}{\partial\alpha\partial\beta}.$$

Cette dernière s'écrit également :

$$\frac{\partial^2 k}{\partial\alpha\partial\beta} = \frac{a^2}{H}\frac{\partial\theta}{\partial k}. \tag{44}$$

L'équation (43) est linéaire en k :

$$2a^2(h + k) + 4ak = \frac{a^2}{H}\frac{\partial^2 h}{\partial\alpha\partial\beta},$$

d'où en supposant $a + 2 \neq 0$,

$$k = \frac{a}{2(a + 2)}\left[\frac{1}{H}\frac{\partial^2 h}{\partial\alpha\partial\beta} - 2h\right], \tag{45}$$

en ajoutant h,

$$k+h=\frac{1}{2(a+2)}\left[\frac{a}{H}\frac{\partial^2 h}{\partial\alpha\partial\beta}+4h\right];$$

en portant ces valeurs de k et $h+k$ dans θ, il vient :

$$\theta=\frac{1}{4(a+2)^2}\left[\frac{a^2}{H}\frac{\partial^2 h}{\partial\alpha\partial\beta}+8(a+1)h\right]^2-4(a+1)h^2+4. \tag{46}$$

D'autre part, on a :

$$\frac{\partial k}{\partial\alpha}=\frac{a^2}{H}\frac{\partial h}{\partial\beta},\qquad \frac{\partial k}{\partial\beta}=\frac{a^2}{H}\frac{\partial h}{\partial\alpha}.$$

Portons ces valeurs dans l'équation (44) :

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{H}\frac{\partial h}{\partial\beta}\right)=\frac{1}{H}\frac{\partial\theta}{\partial k},\\&\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{H}\frac{\partial h}{\partial\alpha}\right)=\frac{1}{H}\frac{\partial\theta}{\partial k},\end{aligned}\right. \tag{47}$$

où on remplacera dans les seconds membres k par sa valeur (45).

On a ainsi deux équations en h. On en obtient une troisième en remplaçant θ par sa valeur (46) dans l'équation

$$a^2\frac{\partial h}{\partial\alpha}\frac{\partial h}{\partial\beta}=H.\theta.$$

Ces trois équations sont nécessairement compatibles. Désignons par p, q, r, s, t les dérivées partielles de h; l'équation précédente s'écrit :

$$\frac{1}{4(a+2)^2}\left[\frac{a^2}{H}s+8(a+1)h\right]^2-4(a+1)h^2+4=\frac{a^2}{H}pq$$

ou

$$\frac{a^2}{H}s+8(a+1)h=2(a+2)\sqrt{\frac{a^2}{H}pq+4(a+1)h^2-4}.$$

Les équations (47) donnent

$$\frac{t}{H}-\frac{q}{H^2}\frac{\partial H}{\partial\beta}=\frac{1}{H}[2a^2(h+k)+4ah],$$

d'où

$$t-q\frac{\partial}{\partial\beta}\log H=\frac{a}{a+2}\left[\frac{a^2}{H}s+8(a+1)h\right],$$

et de même

$$r-p\frac{\partial}{\partial\alpha}\log H=\frac{a}{a+2}\left[\frac{a^2}{H}s+8(a+1)h\right].$$

Posons

$$P = \sqrt{\frac{a^2}{H} pq + 4(a+1)h^2 - 4}.$$

h vérifie les trois équations :

$$(48) \qquad \begin{cases} r = p \dfrac{\partial}{\partial \alpha} \log H + 2aP, \\ s = -\dfrac{8(a+1)}{a^2} Hh + 2\dfrac{a+2}{a^2} P, \\ t = q \dfrac{\partial}{\partial \beta} \log H + 2aP. \end{cases}$$

Si on écrit les conditions d'intégrabilité

$$\frac{\partial r}{\partial \beta} = \frac{\partial s}{\partial \alpha}, \qquad \frac{\partial s}{\partial \beta} = \frac{\partial t}{\partial \alpha},$$

on constate qu'elles sont vérifiées identiquement en vertu de l'équation

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \log H = 2\left(H - \frac{a^4}{H}\right).$$

Le système (48) est donc compatible et admet une solution dépendant de trois constantes arbitraires : les valeurs initiales de h, p et q. Il est facile de s'assurer que les résultats ne sont pas modifiés quand $a + 2 = 0$.

Si $a + 1 = 0$, la quadrique est surosculatrice au cercle de l'infini. On pourrait suivre ici une méthode analogue à celle que nous avons employée pour les quadriques de révolution ; mais les calculs précédents s'appliquent intégralement.

Quand on connaît h, on a k sans quadratures, ainsi que λ et μ; le calcul de x et t se ramène à l'intégration d'équations différentielles ordinaires, après y et z se déterminent sans quadratures au moyen du système I.

On voit qu'en dernière analyse, la principale difficulté du problème est encore l'intégration de l'équation

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta} = 4a^2 \sin \omega.$$

[**8**] Nous allons montrer que h et k étant connus, l'intégration des systèmes I et II se ramène à celles d'un système de deux équations de Riccatti. Considérons dans le cas le plus général les deux équations :

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \lambda\left(x - \frac{a'h^2 - b'}{h} y\right),$$

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = -\lambda\left(y - \frac{ah^2 - b}{h} x\right).$$

Posons

$$x = \sigma y.$$

En éliminant x et y, on obtient l'équation

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\alpha} = 2\lambda\sigma - \lambda\frac{a'h^2 - b'}{h} - \lambda\frac{ah^2 - b}{h}\sigma^2; \tag{49}$$

on aura une équation analogue en changeant α, λ, h en β, μ, k :

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\beta} = 2\mu\sigma - \mu\frac{a'k^2 - b'}{k} - \mu\frac{ak^2 - b}{k}\sigma^2. \tag{50}$$

Ces deux équations forment un système complètement intégrable; les conditions d'intégrabilité sont précisément les relations (28), (29) et (30).

Si on connaît une solution de ce système, on déterminera y par une quadrature, puis x sans quadrature nouvelle.

Ce système est analogue à celui qu'on rencontre dans l'étude des déplacements à deux variables indépendantes.

Il est facile de se rendre compte que les équations établies précédemment permettent de définir le roulement d'une quadrique sur une surface applicable.

Soient p, q, r, et p_1, q_1, r_1 les composantes par rapport aux axes mobiles des deux rotations quand l'une des variables α ou β varie seule. En identifiant les équations (49) et (50) avec les équations connues[1], on a :

$$r = 2\lambda i, \qquad p + qi = -2\lambda i\frac{a'h^2 - b'}{h}, \qquad p - qi = 2\lambda i\frac{ah^2 - b}{h}, \tag{51}$$

$$r_1 = 2\mu i, \qquad p_1 + q_1 i = -2\mu i\frac{a'k^2 - b'}{k}, \qquad p_1 - q_1 i = 2\mu i\frac{ak^2 - b}{k}. \tag{52}$$

Éliminons h et λ entre les équations (51) :

$$\frac{p + qi}{r} = -a'h + \frac{b'}{h},$$

$$\frac{p - qi}{r} = ah - \frac{b}{h}.$$

D'où

$$h(ab' - ba') = \frac{b(p + qi) + b'(p - qi)}{r},$$

$$\frac{1}{h}(ab' - ba') = \frac{a(p + qi) + a'(p - qi)}{r}.$$

Multiplions membre à membre :

$$[a(p + qi) + a'(p - qi)][b(p + qi) + b'(p - qi)] - (ab' - ba')^2 r^2 = 0.$$

---

(1) DARBOUX, *Leçons*, t. I.

Cette équation exprime que l'axe de rotation est parallèle à une génératrice rectiligne de la quadrique envisagée au paragraphe 5. Il en sera évidemment de même pour le second axe.

Nous allons maintenant démontrer qu'il est possible de déterminer un roulement de la quadrique dans lequel les deux rotations sont définies par les équations précédentes. Dans ce cas, les deux axes instantanés sont les deux génératrices rectilignes qui se coupent au centre instantané.

Écrivons l'équation de la quadrique sous la forme

$$[a(x+iy)+a'(x-iy)]\,[b(x+iy)+b'(x-iy)]-(ab'-ba')^2(z^2-m^2)=0.$$

Les équations d'une génératrice rectiligne sont :

$$b(x+iy)+b'(x-iy)=\rho(ab'-ba')(z-m),$$
$$a(x+iy)+a'(x-iy)=\frac{1}{\rho}(ab'-ba')(z+m).$$

En exprimant qu'elle est parallèle à l'axe de la première rotation, on trouve $\rho=h$.

Exprimons maintenant que cette droite coïncide avec l'axe instantané défini par les équations

$$\xi+qz-ry=0,$$
$$\eta+rx-pz=0,$$
$$\zeta+py-qx=0,$$

ξ, η, ζ désignant les composantes de la vitesse de l'origine (centre de la quadrique) quand α varie. Par une identification facile, on trouve :

$$\xi+\eta i=2\lambda m\,\frac{a'h^2+b'}{h},$$
$$\xi-\eta i=2\lambda m\,\frac{ah^2+b}{h},$$
$$\zeta=2\lambda m(ab'-ba').$$

On obtiendra des équations analogues pour le second axe, qui est une génératrice de l'autre système, en changeant m en $-m$, λ et h en μ et k :

$$\xi_1+\eta_1 i=-2\mu m\,\frac{a'k^2+b'}{k},$$
$$\xi_1-\eta_1 i=-2\mu m\,\frac{ak^2+b}{k},$$
$$\zeta_1=2\mu m(ab'-ba').$$

Il faut toutefois s'assurer que $\xi, \eta, \zeta, \xi_1, \eta_1, \zeta_1$ vérifient les trois relations fondamentales :

$$(53)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial \beta} - \frac{\partial \xi_1}{\partial \alpha} &= q\zeta_1 - q_1\zeta - r\eta_1 + r_1\eta, \\ \frac{\partial \eta}{\partial \beta} - \frac{\partial \eta_1}{\partial \alpha} &= r\xi_1 - r_1\xi - p\zeta_1 + p_1\zeta, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial \beta} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial \alpha} &= p\eta_1 - p_1\eta - q\xi_1 + q_1\xi. \end{aligned}\right.$$

Cette vérification n'offre aucune difficulté.

Ces trois relations sont des conséquences des équations (34), (35) et (36).

Les douze quantités $\xi, \eta, \zeta, \xi_1, \eta_1, \zeta_1, p, q, r, p_1, q_1, r_1$ définissent donc bien le roulement d'une quadrique sur une surface applicable. Les coordonnées du centre instantané sont données par les équations

$$x_0 + iy_0 = -2m\frac{a'hk - b'}{h-k},$$

$$x_0 - iy_0 = 2m\frac{ahk - b}{h-k},$$

$$z_0 = m\frac{h+k}{h-k}.$$

Supposons pour simplifier que la quadrique soit la plus générale rapportée à ses plans principaux. Il suffit de faire

$$a' = b, \qquad b' = a;$$

l'équation de la quadrique s'écrit :

$$(a+b)^2x^2 + (a-b)^2y^2 - (a^2-b^2)^2(z^2 - m^2) = 0.$$

On a pour les rotations :

$$p = \lambda i(a-b)\frac{1+h^2}{h}, \qquad q = \lambda(a+b)\frac{1-h^2}{h}, \qquad r = 2\lambda i,$$

$$p_1 = \mu i(a-b)\frac{1+k^2}{k}, \qquad q_1 = \mu(a+b)\frac{1+k^2}{k}, \qquad r_1 = 2\mu i$$

et

$$\xi = -im\frac{a+b}{a-b}p, \qquad \xi_1 = im\frac{a+b}{a-b}p_1.$$

$$\eta = -im\frac{a-b}{a+b}q, \qquad \eta_1 = im\frac{a-b}{a+b}q_1,$$

$$\zeta = im(a^2-b^2)r, \qquad \zeta_1 = -im(a^2-b^2)r_1.$$

Si on écrit l'équation de la quadrique sous la forme

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1 = 0,$$

on a

$$A = \frac{-1}{m^2(a-b)^2}, \qquad B = \frac{-1}{m^2(a+b)^2}, \qquad C = \frac{1}{m^2},$$

et les dernières relations s'écrivent :

$$\xi = \frac{Ai}{\sqrt{ABC}} p, \qquad \xi_1 = \frac{-Ai}{\sqrt{ABC}} p_1,$$

$$\eta = \frac{Bi}{\sqrt{ABC}} q, \qquad \eta_1 = \frac{-Bi}{\sqrt{ABC}} q_1,$$

$$\zeta = \frac{-Ci}{\sqrt{ABC}} r, \qquad \zeta_1 = \frac{Ci}{\sqrt{ABC}} r_1.$$

En portant ces valeurs dans les équations (53), on obtient un système vérifié par les six rotations

$$A\left(\frac{\partial p}{\partial \beta} + \frac{\partial p_1}{\partial \alpha}\right) = (B - C)(qr_1 + rq_1),$$

$$B\left(\frac{\partial q}{\partial \beta} + \frac{\partial q_1}{\partial \alpha}\right) = (C - A)(rp_1 + pr_1),$$

$$C\left(\frac{\partial r}{\partial \beta} + \frac{\partial r_1}{\partial \alpha}\right) = (A - B)(pq_1 + qp_1),$$

qui, joint au système fondamental

$$\frac{\partial p}{\partial \beta} - \frac{\partial p_1}{\partial \alpha} = qr_1 - rq_1,$$

$$\frac{\partial q}{\partial \beta} - \frac{\partial q_1}{\partial \alpha} = rp_1 - pr_1,$$

$$\frac{\partial r}{\partial \beta} - \frac{\partial r_1}{\partial \alpha} = pq_1 - qp_1,$$

donne toutes les relations entre les six rotations.

La détermination de la surface Σ conjuguée par rapport au complexe Γ, exige l'intégration du système des équations I et II. La solution la plus générale dépend de deux constantes arbitraires, et, pour l'obtenir, il suffit de connaître deux solutions particulières.

Nous avons vu que toute solution du système (49) et (50) fait connaître par une quadrature une solution du système I et II. Nous allons montrer que si on connaît la solution générale des équations de Riccatti, l'intégrale générale de I et II se détermine sans quadrature.

Du système I, on tire :

$$x\frac{\partial x}{\partial \alpha}-y\frac{\partial y}{\partial \alpha}=-ir\frac{x^2+y^2}{2}+qxy,$$

$$x\frac{\partial x}{\partial \alpha}+y\frac{\partial y}{\partial \alpha}=-ir\frac{x^2-y^2}{2}-pixy,$$

$$x\frac{\partial y}{\partial \alpha}+y\frac{\partial x}{\partial \alpha}=-pi\frac{x^2+y^2}{2}+q\frac{x^2-y^2}{2}.$$

Posons

$$u=\frac{y^2-x^2}{2},\qquad v=i\frac{x^2+y^2}{2},\qquad xy=w.$$

u, v, w vérifient les équations

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha}=rv-qn,$$

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha}=pw-ru,$$

$$\frac{\partial w}{\partial \alpha}=qu-pv.$$

On aura un système analogue en changeant α en β et p, q, r en p_1, q_1, r_1.

On voit que u, v, w vérifient les équations qui déterminent les cosinus directeurs des axes mobiles; mais on a :

$$u^2+v^2+w^2=0.$$

Cela posé, si on connaît la solution générale des équations de Riccatti, on peut considérer deux systèmes de solutions des équations précédentes u_0, v_0, w_0 et u_1, v_1, w_1 qui satisfont aux relations :

$$u_0^2+\quad v_0^2+\quad w_0^2=\text{ct}^e,$$

$$u_1^2+\quad v_1^2+\quad w_1^2=\text{ct}^e,$$

$$u_0u_1+v_0v_1+w_0w_1=\text{ct}^e.$$

En désignant par ρ une constante arbitraire, posons

$$u=u_0+\rho u_1,$$

$$v=v_0+\rho v_1,$$

$$w=w_0+\rho w_1,$$

u, v, w constituent un système de solutions et on peut choisir la constante ρ de telle manière que

$$u^2+v^2+w^2=0;$$

on a pour ρ deux valeurs, et, par suite, deux systèmes de valeurs de u, v, w qui permettent de déterminer deux solutions des équations I et II.

On détermine facilement les lignes asymptotiques de la surface Σ.

Posons pour simplifier :

$$H = \lambda \frac{ah^2 - b}{h}, \qquad H' = \lambda \frac{a'h^2 - b'}{h},$$

$$K = \mu \frac{ak^2 - b}{k}, \qquad K' = \mu \frac{a'k^2 - b'}{k},$$

et soit

$$x = \sigma y.$$

En remarquant que σ vérifie les équations (49) et (50), on a :

$$\frac{1}{y}\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \lambda\sigma - H',$$

$$\frac{1}{y}\frac{\partial x}{\partial \beta} = \mu\sigma - K',$$

$$\frac{1}{y}\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} = (\lambda^2 - HH')\sigma + \sigma\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha} - \frac{\partial H'}{\partial \alpha};$$

$$\frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} = -\lambda + H\sigma,$$

$$\frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial \beta} = -\mu + K\sigma,$$

$$\frac{1}{y}\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2} = \lambda^2 - HH' - \frac{\partial\lambda}{\partial\alpha} + \sigma\frac{\partial H}{\partial \alpha}.$$

On aurait $\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial^2 x}{\partial \beta^2}$ et $\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial^2 y}{\partial \beta^2}$ en changeant λ en μ, H et H′ en K et K′. Enfin, on pourra changer x et y en t et z en remplaçant σ par une nouvelle solution σ_1. Si on forme l'équation des lignes asymptotiques, elle se réduit par une simple combinaison de lignes et de colonnes à la forme

$$d\alpha^2 - d\beta^2 = 0.$$

Dans le roulement de la quadrique, les lignes correspondantes constituent le réseau C commun à la quadrique et à la surface applicable sur laquelle elle roule.

[9] Les calculs du paragraphe 6 conduisent immédiatement à un résultat déjà établi par M. Servant (1). A chaque quadrique, on peut en associer trois autres, telles que, à toute solution du système III pour la première, on peut faire correspondre une solution du système analogue pour chacune des trois autres.

(1) Servant, *Comptes rendus*, 25 mai 1903.

Remarquons qu'on peut choisir les variables de manière que le système III s'écrive

$$\frac{\partial h}{\partial \alpha}\frac{\partial k}{\partial \alpha}=\frac{\partial h}{\partial \beta}\frac{\partial k}{\partial \beta}=\frac{m\theta}{(ab'-ba')^2}$$

ce qui d'ailleurs ne change pas la forme des équations précédentes du paragraphe 6 établies indépendamment de cette hypothèse. En particulier, les expressions de λ et μ, données par les équations (34) et (35), ne sont pas modifiées.

Désignons par θ' la forme doublement quadratique

$$\theta'=\frac{\theta}{(ab'-ba')^2},$$

ou en tenant compte des valeurs de ab, $a'b'$:

$$\theta'=(h+k)^2+4a_1a_1'h^2k^2+4(a_1b_1'+b_1a_1')hk+4b_1b_1'.$$

Supposons que la quadrique soit la plus générale et rapportons-la à ses plans principaux ; il suffit que

$$a_1'=b_1, \qquad a_1=b_1'.$$

L'équation de la quadrique s'écrit

$$(a_1+b_1)^2x^2+(a_1-b_1)^2y^2-z^2=\mathrm{ct}^e,$$

et, si on pose

$$\mathrm{A}=(a_1+b_1)^2, \qquad \mathrm{B}=(a_1-b_1)^2,$$

on a :

$$\theta'=h^2+k^2+(\mathrm{A}-\mathrm{B})h^2k^2+2(\mathrm{A}+\mathrm{B}+1)hk+\mathrm{A}-\mathrm{B}.$$

Supposons $m=1$, le système III s'écrit :

$$\frac{\partial h}{\partial \alpha}\frac{\partial k}{\partial \alpha}=\frac{\partial h}{\partial \beta}\frac{\partial k}{\partial \beta}=\theta'.$$

Changeons k en $-k_1$. On a un système de même forme :

$$\frac{\partial h}{\partial \alpha}\frac{\partial k_1}{\partial \alpha}=\frac{\partial h}{\partial \beta}\frac{\partial k_1}{\partial \beta}=-\theta_1'$$

en posant

$$\theta_1'=h^2+k_1^2+(\mathrm{A}-\mathrm{B})h^2k^2-2(\mathrm{A}+\mathrm{B}+1)hk_1+\mathrm{A}-\mathrm{B}.$$

Ce système est analogue au précédent où l'on aurait fait $m = -1$. A la forme θ'_1 correspond une quadrique Q_1 :

$$A_1 x^2 + B_1 y^2 - z^2 = \mathrm{ct}^e$$

et on a :

$$A_1 - B_1 = A - B,$$
$$A_1 + B_1 + 1 = -(A + B + 1).$$

D'où

$$A + B_1 + 1 = 0,$$
$$A_1 + B + 1 = 0.$$

L'équation de Q_1 s'écrit donc :

$$(B + 1)x^2 + (A + 1)y^2 + z^2 = \mathrm{ct}^e.$$

Changeons k en $-\dfrac{1}{k_1}$; on obtient le système

$$\frac{\partial h}{\partial \alpha}\frac{\partial k_1}{\partial \alpha} = \frac{\partial h}{\partial \beta}\frac{\partial k_1}{\partial \beta} = (A - B)\theta'_2$$

en posant :

$$\theta'_2 = h^2 + k_1^2 + \frac{h^2 k_1^2}{A - B} - 2\frac{A + B + 1}{A - B} h k_1 + \frac{1}{A - B}.$$

A cette forme correspond une quadrique Q_2 :

$$A_2 x^2 + B_2 y^2 - z^2 = \mathrm{ct}^e$$

et on a

$$A_2 - B_2 = \frac{1}{A - B},$$

$$A_2 + B_2 + 1 = -\frac{A + B + 1}{A - B},$$

d'où on tire :

$$A_2 = \frac{-A}{A - B}, \qquad B_2 = -\frac{A + 1}{A - B}.$$

L'équation de Q_2 s'écrit donc :

$$Ax^2 + (A + 1)y^2 + (A - B)z^2 = \mathrm{ct}^e.$$

Enfin, si on change k en $\dfrac{1}{k_1}$, on obtiendra une troisième quadrique Q_3 qui se déduit de Q_2 comme Q_1 se déduit de Q, et on a :

$$A_3 = \frac{B}{A - B}, \qquad B_3 = \frac{B + 1}{A - B}.$$

L'équation de Q_3 est

$$Bx^2 + (B + 1)y^2 - (A - B)z^2 = ct^e.$$

En général, les trois quadriques Q_1, Q_2, Q_3 sont différentes de Q.

Si on écrit l'équation de Q sous la forme

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = ct^e,$$

on verrait facilement que pour que l'une des trois quadriques Q_1, Q_2, Q_3 soit égale à Q, il faut que l'un des coefficients A, B, C soit égal à la somme des deux autres.

Dans ce cas, la transformation conduit néanmoins à une nouvelle déformée de la quadrique. Remarquons que la solution complète du problème exigera encore l'intégration d'un système de deux équations de Riccatti.

La transformation que nous venons d'indiquer peut aussi se déduire aisément des méthodes de M. Guichard.

QUATRIEME PARTIE.

[**1**] Nous avons vu que la recherche des surfaces applicables sur les quadriques revient à celle des surfaces dont les centres de courbure sont conjugués par rapport à un cône du second degré (ou à deux plans), c'est-à-dire par une transformation homographique, à celle des congruences rectilignes dont les plans principaux sont conjugués par rapport à une conique et les foyers conjugués par rapport à un cône.

La transformation de Lie nous a permis de ramener ce dernier problème à la détermination des surfaces conjuguées par rapport à un complexe du second degré.

Plus généralement, on peut rattacher à la déformation des quadriques la recherche des congruences dont les foyers sont conjugués par rapport à une quadrique Q et les plans principaux conjugués par rapport à une autre quadrique Q'. Pour discuter complètement ce problème, il faudrait étudier l'intersection des quadriques Q et Q' et envisager les cas où ces surfaces dégénèrent l'une en un cône ou deux plans, l'autre en une conique ou deux points.

[**2**] Nous avons déjà étudié le cas où Q' dégénère en une conique et Q en un cône dont le sommet n'est pas dans le plan de la conique; si le sommet du cône est dans ce plan, on peut, par une transformation homographique, prendre la conique pour cercle de l'infini et remplacer le cône par un cylindre.

Sans entrer dans une discussion détaillée des positions relatives du cône et de la conique, nous envisagerons seulement les cas suivants :

1° Le cylindre est de révolution. Soit

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

son équation. La congruence cherchée est celle des normales à une surface S. Si on applique à cette dernière la transformation de Lie, on obtient une surface Σ conjuguée par rapport au complexe défini par l'équation

$$\alpha\xi - \gamma^2 = 0.$$

Soient x, y, z les coordonnées d'un point de Σ; u et v les paramètres des lignes conjuguées appartenant au complexe. On a :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial u}\left(y\frac{\partial z}{\partial u} - z\frac{\partial y}{\partial u}\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,\\ &\frac{\partial x}{\partial v}\left(y\frac{\partial z}{\partial v} - z\frac{\partial y}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2; \end{aligned}\right.$$

x, y et z sont solutions d'une équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} - A\frac{\partial x}{\partial u} - B\frac{\partial x}{\partial v} = 0.$$

Différentions par rapport à v la première des équations (1), il vient, en remplaçant les dérivées secondes par leurs valeurs :

$$B\left[\frac{\partial x}{\partial u}\left(y\frac{\partial z}{\partial v} - z\frac{\partial y}{\partial v}\right) + \frac{\partial x}{\partial v}\left(y\frac{\partial z}{\partial u} - z\frac{\partial y}{\partial u}\right) - 2\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right] + \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial(z, y)}{\partial(u, v)} = 0.$$

On a une équation analogue en changeant B en A et en permutant u et v; d'où on tire immédiatement

$$A\frac{\partial x}{\partial u} + B\frac{\partial x}{\partial v} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = 0.$$

Comme $\frac{\partial x}{\partial u}$ et $\frac{\partial x}{\partial v}$ ne sont pas nuls, on peut poser :

$$x = u + v.$$

Les équations (1) s'écrivent alors

$$\frac{\partial y_1}{\partial u} = \left(\frac{\partial z_1}{\partial u}\right)^2,$$
$$\frac{\partial y_1}{\partial v} = \left(\frac{\partial z_1}{\partial v}\right)^2$$

en posant

$$y_1 = -\frac{y}{z}, \qquad z_1 = \log z.$$

D'où en égalant les valeurs de $\frac{\partial^2 y_1}{\partial u \partial v}$,

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial u \partial v}\left(\frac{\partial z_1}{\partial u} - \frac{\partial z_1}{\partial v}\right) = 0;$$

le second facteur n'est pas nul, sinon z serait fonction de x et la surface serait un cylindre; donc

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial u \partial v} = 0,$$

et

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial u \partial v} = 0.$$

Posons

$$\frac{\partial z_1}{\partial u} = \mathrm{U}(u), \qquad \frac{\partial z_1}{\partial v} = \mathrm{V}(v);$$

on a

$$\frac{\partial y_1}{\partial u} = \mathrm{U}^2, \qquad \frac{\partial y_1}{\partial v} = \mathrm{V}^2,$$

et finalement :

$$\begin{aligned} dx &= du + dv, \\ dy_1 &= \mathrm{U}^2 du + \mathrm{V}^2 dv, \\ dz_1 &= \mathrm{U} du + \mathrm{V} dv. \end{aligned}$$

Les coordonnées x, y_1, z_1 définissent une surface de translation engendrée par des courbes appartenant au complexe dont l'équation est :

$$dx\, dy_1 - dz_1^2 = 0.$$

Cette surface se déduit immédiatement d'une surface *minima*, et on peut aisément faire disparaître les signes de quadrature. Il est d'ailleurs facile de s'assurer que x, y et z vérifient une même équation de Laplace de la forme

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} - \mathrm{A}\left(\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial v}\right) = 0.$$

2° Le cylindre est quelconque. Dans ce cas, la surface Σ à laquelle conduit la transformation de Lie, est conjuguée par rapport à un complexe dont l'équation est de la forme

$$(\xi - a\alpha)(\xi - b\alpha) - \gamma^2 = 0.$$

En étudiant directement la question, on est ramené à l'équation des surfaces à courbure constante; nous montrerons plus loin que ce problème revient à la déformation du paraboloïde quelconque.

3° Le cylindre est parabolique; soit

$$y^2 + 2x = 0$$

son équation.

L'équation du complexe correspondant est

$$(\alpha - \xi)^2 - 4\gamma(\alpha + \xi) = 0$$

que nous rencontrerons également plus loin.

Nous laisserons de côté le cas où le cylindre a un seul plan directeur isotrope, ou a ses génératrices isotropes.

[**3**] Envisageons maintenant le cas où l'une des quadriques Q ou Q' dégénère. Ces deux cas se ramènent l'un à l'autre par une transformation homographique.

Supposons que Q' dégénère en une conique qu'on peut prendre pour cercle de l'infini; on est ramené à la détermination des surfaces dont les centres de courbure sont conjugués par rapport à une quadrique Q. La congruence des normales est alors harmonique à un réseau de la quadrique; ce réseau est nécessairement C. Le problème est donc équivalent à la déformation des quadriques.

Considérons, pour fixer les idées, une quadrique à centre Q ayant pour équation

$$A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 - 1 = 0$$

et supposons qu'on connaisse une surface S dont les centres de courbure sont conjugués par rapport au cône asymptote C.

Appliquons la transformation du paragraphe 8 (1re Partie). Les deux points F_1 et F_2 ayant pour coordonnées

$$x_1 = \frac{X_1}{R_1}, \qquad y_1 = \frac{Y_1}{R_1}, \qquad z_1 = \frac{Z_1}{R_1},$$
$$x_2 = \frac{X_2}{R_2}, \qquad y_2 = \frac{Y_2}{R_2}, \qquad z_2 = \frac{Z_2}{R_2}$$

sont aussi conjugués par rapport au cône C. Ce sont les foyers d'une congruence G dont les plans principaux sont conjugués par rapport à la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Effectuons une transformation par polaires réciproques relativement à la quadrique

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1 = 0.$$

La sphère a pour polaire réciproque Q, et au cône C correspond le cercle de l'infini. La congruence G se transforme en une congruence de normales dont les foyers sont conjugués par rapport à Q. La conjuguée de la droite F_1F_2 a pour équations :

$$AX_1X + BY_1Y + CZ_1Z - R_1 = 0,$$
$$AX_2X + BY_2Y + CZ_2Z - R_2 = 0.$$

Ces équations définissent la congruence cherchée.

En remplaçant la surface S par une surface parallèle, c'est-à-dire en ajoutant une constante à R_1 et R_2, on obtient une infinité de congruences parallèles harmoniques au même réseau C.

M. Guichard a tiré de la considération de ces congruences une méthode de transformation des surfaces applicables sur la quadrique Q.

[**4**] Supposons maintenant que Q′ soit une véritable quadrique; en la prenant pour absolu, la congruence cherchée est alors une congruence de normales non euclidiennes à une surface S. Soient

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$$

l'équation de Q′,

$$f(x, y, z, t) = 0$$

celle de Q. Désignons par X_1, Y_1, Z_1, T_1 et X_2, Y_2, Z_2, T_2 les coordonnées des centres de courbure de S, et par u et v les paramètres des lignes de courbure.

Nous avons vu que les formules

$$(2) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\dfrac{\partial x}{\partial u}}{X_2} = \frac{\dfrac{\partial y}{\partial u}}{Y_2} = \frac{\dfrac{\partial z}{\partial u}}{Z_2} = \frac{\dfrac{\partial t}{\partial u}}{T_2},\\ &\frac{\dfrac{\partial x}{\partial v}}{X_1} = \frac{\dfrac{\partial y}{\partial v}}{Y_1} = \frac{\dfrac{\partial z}{\partial v}}{Z_1} = \frac{\dfrac{\partial t}{\partial v}}{T_1}\end{aligned}\right.$$

définissent les tangentes à un réseau L de l'espace à quatre dimensions. En exprimant que les centres de courbure sont conjugués par rapport à Q, et en remplaçant les coordonnées des centres par les valeurs proportionnelles ci-dessus, la condition trouvée signifie qu'il existe un réseau parallèle, c'est-à-dire un réseau L, sur la quadrique

$$f(x, y, z, t) = \text{ct}^{\text{e}}$$

de l'espace à quatre dimensions.

Admettons que Q et Q′ aient un tétraèdre conjugué commun; l'équation de Q est de la forme

$$(1 + p^2)\,x^2 + (1 + q^2)\,y^2 + (1 + r^2)\,z^2 + t^2 = 0.$$

La condition pour que les centres de courbure de S soient conjugués par rapport à Q, s'écrit :

$$(1 + p^2)\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + (1 + q^2)\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + (1 + r^2)\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial t}{\partial v} = 0;$$

cette équation exprime qu'il existe sur la quadrique

$$(1 + p^2)\,x^2 + (1 + q^2)\,y^2 + (1 + r^2)\,z^2 + t^2 = 1$$

un réseau L dont les tangentes sont définies par les équations (2).

M. Guichard a montré [1] que la recherche de ces réseaux se rattache par la formation de déterminants orthogonaux à la déformation de la quadrique

$$p^2x^2 + q^2y^2 + r^2z^2 = \text{ct}^{\text{e}}.$$

---

[1] *Comptes rendus*, 1906.

Remarquons que si une transformation par polaires réciproques échange les deux quadriques Q et Q', elle fait correspondre à l'une des congruences cherchées une congruence de même nature.

On peut tirer de là une transformation des réseaux L sur la quadrique de l'espace à quatre dimensions; mais cette transformation ne diffère pas de celle que M. Guichard a déduite de la loi d'orthogonalité des éléments.

[**5**] Le problème qui nous occupe se ramène aussi à la recherche des surfaces conjuguées par rapport à un complexe du second ordre.

Prenons pour absolu la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0,$$

et soit

$$f(x, y, z, R) = 0$$

l'équation de Q. (R désigne la variable d'homogénéité.)

Soit S une surface quelconque. Appliquons la transformation du paragraphe 8 (1re Partie). Les coordonnées homogènes des deux points F_1 et F_2 sont :

$$X_1, Y_1, Z_1, R_1 \quad \text{et} \quad X_2, Y_2, Z_2, R_2.$$

Pour qu'ils soient conjugués par rapport à Q, on doit avoir :

$$X_2 f'_{X_1} + Y_2 f'_{Y_1} + Z_2 f'_{Z_1} + R_2 f'_{R_1} = 0.$$

La surface S est définie par cette relation symétrique entre les coordonnées des centres de courbure et les rayons de courbure principaux.

Appliquons à cette surface la transformation de Lie (3^e Partie, § 1). La surface transformée Σ est conjuguée par rapport à un complexe du second ordre. Si on écrit l'équation de Q sous la forme

$$f(x + iy, x - iy, z + R, z - R) = 0,$$

celle du complexe sera :

$$f(\alpha, \xi, \beta, \eta) = 0.$$

[**6**] On peut appliquer une transformation plus directe qui est l'extension de celle de Lie à l'espace non euclidien.

Prenons pour absolu la quadrique A dont l'équation est :

$$XY + Z = 0.$$

Écrivons les équations d'une droite sous la forme

$$z^2X + Y + x - yz = 0,$$
$$zxX - yY - zZ - xy = 0.$$

Cette droite est tangente à A. De ces équations, on tire :

$$x + Y = z(y - zX),$$
$$(x + Y)(y - zX) = -z(XY + Z).$$

Posons

$$H = -(XY + Z),$$

il vient :

$$(3) \qquad \begin{cases} x + Y = z\sqrt{H}, \\ y - zX = \sqrt{H}. \end{cases}$$

Dans l'espace (x, y, z), ces équations représentent deux droites symétriques par rapport à ox et appartenant à un complexe linéaire dont l'équation est

$$y\,dz - z\,dy = dx.$$

Soient

$$x = az + p,$$
$$y = bz + q,$$

les équations d'une droite quelconque. Entre ces équations et les équations (3), éliminons x, y et z. On a :

$$(a - \sqrt{H})(q - \sqrt{H}) + (Y + p)(X - b) = 0,$$

ou en développant

$$(bY - pX + Z + bp - aq)^2 + (a + q)^2(XY + Z) = 0,$$

c'est l'équation d'une sphère cayleyienne; les coordonnées du centre sont :

$$X_0 = b, \qquad Y_0 = -p, \qquad Z_0 = bp - aq.$$

En adoptant pour la droite les coordonnées de Plücker et en rendant homogènes celles du centre, on peut écrire :

$$X_0 = \beta, \qquad Y_0 = \eta, \qquad Z_0 = \zeta, \qquad T_0 = \gamma.$$

Le rayon est défini par l'équation

$$\cos^2 \rho = \frac{-(a + q)^2}{4(X_0 Y_0 + Z_0)} = \frac{(a + q)^2}{4aq}.$$

D'où

$$\operatorname{tg}^2 \rho = -\frac{(a - q)^2}{(a + q)^2} = -\left(\frac{\alpha + \xi}{\alpha - \xi}\right)^2.$$

Cette transformation de contact fait évidemment correspondre aux lignes asymptotiques les lignes de courbure.

[7] Les formules précédentes permettent de montrer que la détermination des surfaces non euclidiennes à courbure totale constante équivaut à la déformation du paraboloïde quelconque (1). La courbure totale du ds^2 non euclidien est :

$$1 + \cot\rho \cot\rho';$$

désignons cette courbure constante par $\sin^2\varphi$.

Si on transforme la surface S par la transformation que nous venons d'établir, on obtient une surface Σ dont les tangentes asymptotiques vérifient l'équation

$$1 - \frac{(\alpha + \xi)(\alpha' + \xi')}{(\alpha - \xi)(\alpha' - \xi')} = \sin^2\varphi.$$

Elles sont donc conjuguées par rapport aux deux complexes linéaires représentés par l'équation

$$(\alpha + \xi)^2 - (\alpha - \xi)^2 \cos^2\varphi = 0;$$

c'est l'équation à laquelle conduit la déformation du paraboloïde

$$x^2 + y^2\cos^2\varphi = z.$$

En particulier, si la courbure totale est nulle, les deux complexes sont spéciaux et ont pour équations :

$$\alpha = 0, \qquad \xi = 0;$$

le problème revient à la déformation du paraboloïde de révolution.

Si la surface S est une surface *minima* non euclidienne, la surface Σ est conjuguée par rapport au système des deux complexes linéaires représentés par l'équation

$$\alpha^2 - \xi^2 = 0,$$

à laquelle conduit la déformation du paraboloïde équilatère :

$$xy - z = 0.$$

[8] Revenons aux surfaces dont les centres de courbure sont conjugués par rapport à une quadrique Q.

Soit :

$$xy + zt = 0$$

l'équation de la quadrique absolu Q', et

$$f(x, y, z, t) = 0$$

---

(1) Cf. SERVANT, *Sur les surfaces non euclidiennes à courbure moyenne constante* (Comptes rendus, 1900).

celle de Q. A une surface S dont les centres de courbure sont conjugués par rapport à Q, la transformation du paragraphe 6 fait correspondre une surface Σ dont les tangentes asymptotiques sont conjuguées par rapport au complexe Γ défini par l'équation

$$f(\beta, \eta, \zeta, \gamma) = 0;$$

ceci n'exclut pas d'ailleurs le cas où Q dégénère en un cône ou deux plans. Si Q dégénère en deux plans, le complexe Γ dégénère en deux complexes linéaires; à un plan tangent à Q, correspond un complexe spécial : l'étude des différents cas est facile, on est ramené à la déformation des paraboloïdes.

Si Q est un cône, on retrouve également des résultats déjà établis; nous nous bornerons à examiner les cas suivants :

1° Le cône a son sommet sur la quadrique Q'; on peut écrire son équation

$$\varphi(x, y) + t^2 = 0$$

et celle du complexe Γ :

$$\varphi(\beta, \eta) + \gamma^2 = 0. \tag{4}$$

Par une transformation dualistique, on remplace le cône par le cercle de l'infini; la quadrique Q' devient un paraboloïde; le problème revient donc à la recherche des congruences de normales euclidiennes dont les foyers sont conjugués par rapport à ce paraboloïde. D'autre part, l'équation (4) est celle du complexe obtenu en cherchant les surfaces dont les centres de courbure principaux sont conjugués par rapport à un cylindre quelconque (§ 2). Ce dernier problème est donc équivalent à la déformation du paraboloïde général.

2° Le cône a son sommet sur Q', et le plan tangent en ce point est aussi tangent au cône; l'équation du cône peut s'écrire :

$$(x - y)^2 + t(x + y) = 0,$$

et celle du complexe Γ :

$$(\beta - \eta)^2 + \gamma(\beta + \eta) = 0. \tag{5}$$

Par une transformation dualistique, on remplace le cône par le cercle de l'infini et la quadrique Q' par un paraboloïde tangent au plan de l'infini en un point du cercle; la déformation de ce paraboloïde équivaut, comme nous l'avons vu (3^e Partie), à celle de la sphère. De plus, d'après la forme de l'équation (5), ce problème est aussi équivalent à la recherche des surfaces dont les centres de courbure sont conjugués par rapport à un cylindre parabolique.

[**9**] Supposons que Q soit une véritable quadrique. Il résulte de la remarque de M. Guichard que, dans le cas le plus général, le problème se rattache à la déformation des quadriques. Nous n'entreprendrons pas une discussion complète et nous nous bornerons à considérer les cas où l'intersection des deux quadriques se décompose en droites ou coniques :

1° Q et Q′ sont confondus. L'équation du complexe Γ est alors

$$\beta\eta + \gamma\zeta = 0,$$

ou

$$\alpha\xi = 0,$$

le complexe se décompose en deux complexes linéaires spéciaux; on voit que l'équation ci-dessus est celle à laquelle conduit la recherche des surfaces non euclidiennes à courbure totale nulle.

Ces dernières sont donc caractérisées par la propriété suivante : leurs centres de courbure non euclidiens sont conjugués par rapport à l'absolu. Ces surfaces peuvent être déterminées sans quadratures.

M. Guichard les a obtenues sous une forme un peu différente (1) en considérant les multiplicités développables sur la quadrique

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$$

dans l'espace à quatre dimensions.

Parmi ces surfaces, nous signalerons les surfaces réglées; elles sont engendrées par une droite qui s'appuie sur deux génératrices rectilignes de la quadrique Q; la vérification de cette propriété est immédiate.

2° Les quadriques Q et Q′ se coupent suivant quatre droites distinctes. On peut écrire l'équation de Q

$$xy + kzt = 0,$$

et celle du complexe Γ

$$\beta\eta + k\gamma\zeta = 0.$$

C'est un complexe tétraédral. On sait déterminer les surfaces conjuguées par rapport à ce complexe (2).

3° Les deux quadriques se coupent suivant deux droites doubles. L'équation de Q s'écrit

$$xy + zt + t^2 = 0,$$

---

(1) *Journal de Liouville*, 1896.

(2) Lie-Schaeffers, *Berührungstransformationen*, chap. IX.

et celle de Γ

$$\beta\eta + \gamma\zeta + \gamma^2 = 0,$$

ou

$$\alpha\xi - \gamma^2 = 0;$$

c'est l'équation déjà obtenue pour les surfaces dont les centres de courbure sont conjugués par rapport à un cylindre de révolution.

4° Les deux quadriques se coupent suivant une droite double et deux droites de l'autre système.

En écrivant l'équation de Q sous la forme

$$xy + zt + tx = 0,$$

celle de Γ sera :

$$\alpha\xi - \beta\gamma = 0.$$

Soient x, y, z les coordonnées d'un point d'une surface Σ, u et v les paramètres des lignes conjuguées appartenant au complexe. On a

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial u}\left(y\frac{\partial z}{\partial u} - z\frac{\partial y}{\partial u}\right) - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial u} = 0, \\ &\frac{\partial x}{\partial v}\left(y\frac{\partial z}{\partial v} - z\frac{\partial y}{\partial v}\right) - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial v} = 0; \end{aligned} \right.$$

x, y et z vérifient une même équation de Laplace :

$$(7) \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} - A\frac{\partial x}{\partial u} - B\frac{\partial x}{\partial v} = 0.$$

Différentions la première des équations (6) par rapport à v en remplaçant les dérivées secondes par leurs valeurs et en tenant compte des équations (6) elles-mêmes. Il vient après réductions :

$$B\left[\frac{\partial x}{\partial v}\left(y\frac{\partial z}{\partial u} - z\frac{\partial y}{\partial u}\right) + \frac{\partial x}{\partial u}\left(y\frac{\partial z}{\partial v} - z\frac{\partial y}{\partial v}\right) - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}\right] + \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial(z, y)}{\partial(u, v)} = 0.$$

De même en différentiant la seconde par rapport à u :

$$A\left[\frac{\partial x}{\partial v}\left(y\frac{\partial z}{\partial u} - z\frac{\partial y}{\partial u}\right) + \frac{\partial x}{\partial u}\left(y\frac{\partial z}{\partial v} - z\frac{\partial y}{\partial v}\right) - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right] - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial(z, y)}{\partial(u, v)} = 0.$$

D'où

$$A\frac{\partial x}{\partial u}+B\frac{\partial x}{\partial v}=0,$$

et, par suite,

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}=0.$$

Comme $\frac{\partial x}{\partial u}$ et $\frac{\partial x}{\partial v}$ ne sont certainement pas nuls, on peut poser :

$$x=u+v.$$

Posons, d'autre part :

$$\log y=y_1,\qquad \log z=z_1.$$

La première équation (6) s'écrit :

$$\frac{\partial(y_1-z_1)}{\partial u}+\frac{\partial y_1}{\partial u}\frac{\partial z_1}{\partial u}=0;$$

on peut donc écrire

$$\frac{\partial y_1}{\partial u}=1-\lambda,\qquad \frac{\partial z_1}{\partial u}=\frac{1-\lambda}{\lambda},$$

de même

$$\frac{\partial y_1}{\partial v}=1-\mu,\qquad \frac{\partial z_1}{\partial v}=\frac{1-\mu}{\mu};$$

écrivons les conditions d'intégrabilité :

$$\frac{\partial\lambda}{\partial v}=\frac{\partial\mu}{\partial u},\qquad \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial\lambda}{\partial v}=\frac{1}{\mu^2}\frac{\partial\mu}{\partial u}.$$

Une discussion simple montre qu'il n'y a pas lieu de s'arrêter au cas où $\lambda^2=\mu^2$, et, par suite,

$$\frac{\partial\lambda}{\partial v}=\frac{\partial\mu}{\partial u}=0,$$

λ est une fonction de u et μ une fonction de v; y_1 et z_1 sont alors définis par les équations

$$dy_1=(1-\lambda)du\ +(1-\mu)dv,$$
$$dz_1=\left(\frac{1}{\lambda}-1\right)du+\left(\frac{1}{\mu}-1\right)dv;$$

x, y_1, z_1 sont les coordonnées d'un point d'une surface de translation Σ_1 qui est une transformée homographique d'une surface *minima*. Il est d'ailleurs facile de faire disparaître les signes de quadrature.

5° Les quadriques Q et Q′ se coupent suivant une conique et deux droites dont le point de rencontre est sur la conique. L'équation de Q peut se mettre sous la forme

$$xy + zt + t(x + y) = 0;$$

celle du complexe Γ est

$$\alpha\xi - \gamma(\beta + \eta) = 0;$$

c'est l'équation à laquelle conduit la transformation de Lie (3ᵉ Partie) appliquée aux surfaces dont les centres de courbure sont conjugués par rapport à un paraboloïde de révolution.

6° L'intersection se compose de deux droites et d'une conique quelconque.

On peut écrire l'équation de Q

$$xy + zt + at(z + t) = 0,$$

et celle du complexe sera :

$$\alpha\xi - a\gamma(\gamma + \zeta) = 0.$$

Les coordonnées d'un point de Σ vérifient les deux relations

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial u}\left(y\frac{\partial z}{\partial u} - z\frac{\partial y}{\partial u}\right) - a\frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u} + x\frac{\partial y}{\partial u} - y\frac{\partial x}{\partial u}\right) = 0,\\ &\frac{\partial x}{\partial v}\left(y\frac{\partial z}{\partial v} - z\frac{\partial y}{\partial v}\right) - a\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial v} + x\frac{\partial y}{\partial v} - y\frac{\partial x}{\partial v}\right) = 0,\end{aligned}\right.$$

ainsi que l'équation de Laplace (7).

Différentions la première équation (8) par rapport à v en remplaçant les dérivées secondes par leurs valeurs tirées de l'équation (7). On trouve après réductions :

$$\begin{aligned} &\mathrm{B}\left[\frac{\partial x}{\partial v}\left(y\frac{\partial z}{\partial u} - z\frac{\partial y}{\partial u}\right) + \frac{\partial x}{\partial u}\left(y\frac{\partial z}{\partial v} - z\frac{\partial y}{\partial v}\right)\right] + \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial(z, y)}{\partial(u, v)}\\ &- a\mathrm{B}\left[\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u} + x\frac{\partial y}{\partial u} - y\frac{\partial x}{\partial u}\right) + \frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial v} + x\frac{\partial y}{\partial v} - y\frac{\partial x}{\partial v}\right)\right] - a\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial(y, x)}{\partial(u, v)} = 0.\end{aligned}$$

De cette équation, retranchons les équations (8) après avoir multiplié la première par $\mathrm{B}\dfrac{\frac{\partial z}{\partial v}}{\frac{\partial z}{\partial u}}$, la seconde par $\mathrm{B}\dfrac{\frac{\partial z}{\partial u}}{\frac{\partial z}{\partial v}}$, il vient

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{B}}{\frac{\partial z}{\partial v}}\left(y\frac{\partial z}{\partial v} - z\frac{\partial y}{\partial v}\right)\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} - \frac{\mathrm{B}}{\frac{\partial z}{\partial u}}\left(y\frac{\partial z}{\partial u} - z\frac{\partial y}{\partial u}\right)\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}\\ &\qquad + \frac{\partial(z, y)}{\partial(u, v)}\frac{\partial x}{\partial u} - a\frac{\partial(y, x)}{\partial(u, v)}\frac{\partial z}{\partial u} = 0\end{aligned}$$

ou

$$\frac{Bz}{\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}}\frac{\partial(z,x)}{\partial(v,v)}\frac{\partial(z,y)}{\partial(u,v)}+\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial(z,y)}{\partial(u,v)}-a\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial(y,x)}{\partial(u,v)}=0$$

et de même :

$$\frac{Az}{\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}}\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(z,y)}{\partial(u,v)}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial(z,y)}{\partial(u,v)}+a\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial(y,x)}{\partial(u,v)}=0;$$

ajoutons ces équations en multipliant la première par $\frac{\partial z}{\partial v}$ et la seconde par $\frac{\partial z}{\partial u}$:

$$\left[z\left(\frac{A}{\frac{\partial z}{\partial v}}+\frac{B}{\frac{\partial z}{\partial u}}\right)-1\right]\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(z,y)}{\partial(u,v)}=0$$

ou

$$z\left(A\frac{\partial z}{\partial u}+B\frac{\partial z}{\partial v}\right)-\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}=0$$

ou enfin, en tenant compte de l'équation de Laplace,

$$z\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}=0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}\log z=0.$$

Une courbe du complexe est définie par l'équation

$$dx(ydz-zdy)=adz(dz+xdy-ydx);$$

cette équation s'écrit :

$$\left[(1+a)\frac{dz}{z}-\frac{dy}{y}\right]\left[a\frac{dz}{z}+\frac{dx}{x}\right]=\frac{az}{xy}\left(\frac{dz}{z}\right)^2+a(a+1)\left(\frac{dz}{z}\right).$$

Posons

$$\lambda=xz^a,\qquad \mu=yz^{-(a+1)},\qquad z_1=\log z,\qquad b=-a(a+1);$$

l'équation devient :

$$d\lambda d\mu=(b\lambda\mu-a)dz_1^2.$$

Les deux lignes conjuguées vérifient cette relation, et en remarquant qu'on peut prendre $z_1=u+v$, on a :

(9)
$$\begin{cases}\dfrac{\partial\lambda}{\partial u}\dfrac{\partial\mu}{\partial u}=b\lambda\mu-a,\\[2mm] \dfrac{\partial\lambda}{\partial v}\dfrac{\partial\mu}{\partial v}=b\lambda\mu-a.\end{cases}$$

C'est un système analogue à celui que nous avons rencontré au paragraphe 6 (3^e Partie). En posant

$$\theta = b\lambda\mu - a,$$

on a, comme nous l'avons vu, les relations :

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\lambda}{\partial u\partial v} = \dfrac{1}{\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial\lambda}\dfrac{\partial\lambda}{\partial u}\dfrac{\partial\lambda}{\partial v}, \\[2ex] \dfrac{\partial^2\mu}{\partial u\partial v} = \dfrac{1}{\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial\mu}\dfrac{\partial\mu}{\partial u}\dfrac{\partial\mu}{\partial v}. \end{cases}$$

Pour intégrer le système (9), posons

$$\mathrm{H} = \frac{\dfrac{\partial\lambda}{\partial u}}{\dfrac{\partial\mu}{\partial v}}, \qquad \mathrm{K} = \frac{\dfrac{\partial\mu}{\partial u}}{\dfrac{\partial\lambda}{\partial v}};$$

on a :

$$\mathrm{HK} = 1,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}\log \mathrm{H} = \frac{\partial^2}{\partial u\partial v}\log\frac{\partial\lambda}{\partial u} - \frac{\partial^2}{\partial u\partial v}\log\frac{\partial\mu}{\partial v}.$$

Or.

$$\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}\log\frac{\partial\lambda}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial u\partial v}}{\dfrac{\partial\lambda}{\partial u}}\right),$$

c'est-à-dire, d'après les équations (10) :

$$\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}\log\frac{\partial\lambda}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\frac{b\mu}{\theta}\frac{\partial\lambda}{\partial v} = \left(\frac{b}{\theta} - \frac{b\lambda\mu}{\theta^2}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial v}\frac{\partial\mu}{\partial u} = -\frac{ab}{\theta^2}\frac{\partial\lambda}{\partial v}\frac{\partial\mu}{\partial u}.$$

Par symétrie,

$$\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}\log\frac{\partial\mu}{\partial v} = -\frac{ab}{\theta^2}\frac{\partial\lambda}{\partial v}\frac{\partial\mu}{\partial u},$$

et, par suite :

$$\frac{\partial^2\log \mathrm{H}}{\partial u\partial v} = 0.$$

Donc

$$\mathrm{H} = \mathrm{U}(u)\,.\,\mathrm{V}(v).$$

On a alors :

$$(11)\qquad \frac{\partial\lambda}{\partial u} = \mathrm{UV}\frac{\partial\mu}{\partial v}.$$

D'autre part,

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v} = \frac{b\mu}{\theta}\frac{\partial\lambda}{\partial u}\frac{\partial\lambda}{\partial v} = \frac{b\mu}{\theta}\mathrm{UV}\frac{\partial\lambda}{\partial v}\frac{\partial\mu}{\partial v},$$

ou enfin, d'après les équations (9),

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v} = b\,.\,\mathrm{UV}\mu. \tag{12}$$

Dans la seconde des équations (9), remplaçons $\frac{\partial\mu}{\partial v}$ et μ par leurs valeurs tirées de (11) et (12), il vient

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v} - \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial\lambda}{\partial u}\frac{\partial\lambda}{\partial v} = \frac{a\mathrm{UV}}{\lambda^2}$$

o

$$\frac{\partial^2\log\lambda}{\partial u\,\partial v} = a\frac{\mathrm{UV}}{\lambda^2}.$$

L'intégrale générale de cette équation est

$$\lambda = (\mathrm{X}+\mathrm{Y})\sqrt{\frac{-a\mathrm{UV}}{\mathrm{X'Y'}}},$$

X désignant une fonction de u, et Y une fonction de v.

On voit par là que si on laisse aux variables u et v toute leur généralité, λ sera de la forme

$$\lambda = \mathrm{UV}(\mathrm{X}+\mathrm{Y}),$$

U et V désignant de nouvelles fonctions.

Les équations (10) subsistent intégralement; de la première, on tire :

$$b\mu = \frac{a}{\lambda^2}\,\frac{\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v}}{\dfrac{\partial^2\log\lambda}{\partial u\,\partial v}}.$$

Tous calculs faits,

$$b\mu = -\frac{a\mathrm{U'V'}}{\mathrm{U^2V^2X'Y'}}\left[\mathrm{X} + \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{U'}}\mathrm{X'} + \mathrm{Y} + \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{V'}}\mathrm{Y'}\right],$$

μ a la forme

$$\mu = \mathrm{U_1V_1}(\mathrm{X_1}+\mathrm{Y_1})$$

en posant :

$$\mathrm{U_1} = \sqrt{\frac{-a}{b}\frac{\mathrm{U'}}{\mathrm{U^2X'}}}, \qquad \mathrm{V_1} = \sqrt{\frac{-a}{b}\frac{\mathrm{V'}}{\mathrm{V^2Y'}}}.$$

Il faut maintenant calculer z_1. Le système (9) s'écrit ici :

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial u}\dfrac{\partial\mu}{\partial u} = (b\lambda\mu - a)\left(\dfrac{\partial z_1}{\partial u}\right)^2, \\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial v}\dfrac{\partial\mu}{\partial v} = (b\lambda\mu - a)\left(\dfrac{\partial z_1}{\partial v}\right)^2. \end{cases}$$

Dans la première de ces deux équations, remplaçons $\dfrac{\partial\lambda}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial\mu}{\partial u}$ par leurs valeurs

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u} = VU'(X_1 + Y),$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial u} = V_1U_1'(X + Y_1);$$

le premier membre s'écrit

$$\frac{UU_1'V^2V_1X'Y'}{V'} + U'U_1'VV_1(X + Y)(X_1 + Y_1),$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{b}\frac{U'U_1'}{UU_1}(b\lambda\mu - a).$$

Donc

$$\left(\frac{\partial z_1}{\partial u}\right)^2 = \frac{1}{b}\frac{U'U_1'}{UU_1}$$

et de même

$$\left(\frac{\partial z_1}{\partial v}\right)^2 = \frac{1}{b}\frac{V'V_1'}{VV_1};$$

z_1 se détermine donc par une quadrature.

7° Q est circonscrite à Q'. L'équation de Q peut s'écrire

$$xy + zt + k(z + t)^2 = 0,$$

et celle du complexe Γ

$$\alpha\xi - k(\gamma + \zeta)^2 = 0,$$

équation obtenue dans la déformation des surfaces de révolution.

8° Les quadriques se coupent suivant deux coniques tangentes. On peut prendre pour équation de Q :

$$xy + zt + x^2 + a(z + t)^2 = 0;$$

celle du complexe est alors :

$$\alpha\xi - a(\gamma + \zeta)^2 - \beta^2 = 0;$$

c'est, aux notations près, l'équation à laquelle conduit la recherche des surfaces dont les centres de courbure sont conjugués par rapport à une quadrique de révolution.

9° Si les surfaces sont bitangentes, il résulte de la remarque de M. Guichard que le problème se rattache à la déformation des quadriques de révolution.

[**10**] Le complexe défini par l'équation

$$f(\beta, \eta, \zeta, \gamma) = 0$$

n'est pas le plus général du second degré.

Nous allons montrer que la recherche des surfaces conjuguées par rapport au complexe le plus général se rattache à celle des réseaux nuls sur une quadrique de l'espace à six dimensions, ou des réseaux I sur une quadrique de l'espace à cinq.

Reportons-nous aux formules de la première Partie (§ 1).

Si on pose

$$\varphi = \alpha i, \qquad \theta = -(\beta + \gamma i), \qquad \psi = \beta - \gamma i,$$

on a l'identité

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 + d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2 = 0.$$

Le point M, dont les coordonnées sont $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$, décrit dans l'espace à six dimensions un réseau nul. On a d'autre part :

$$\frac{\partial x}{\partial u} = X_2 \frac{\partial \theta}{\partial u},$$
$$\frac{\partial y}{\partial u} = Y_2 \frac{\partial \theta}{\partial u},$$
$$\frac{\partial z}{\partial u} = Z_2 \frac{\partial \theta}{\partial u};$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = R_2 \frac{\partial \theta}{\partial u},$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = 2(q + pR_2)\frac{\partial \theta}{\partial u} = (X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2 - R_2^2)\frac{\partial \theta}{\partial u}.$$

D'où

$$\frac{\partial \beta}{\partial u} = \frac{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2 - R_2^2 - 1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial u},$$
$$\frac{\partial \gamma}{\partial u} = i\frac{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2 - R_2^2 + 1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial u};$$

on aurait des formules analogues pour l'autre courbe du réseau.

Si on applique à la surface S la transformation de Lie (3^e Partie, § 1) en adoptant pour la droite les coordonnées de Klein, les coordonnées des tangentes asymptotiques de la surface transformée Σ sont :

$$X_1,\ Y_1,\ Z_1,\ iR_1,\ \frac{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2-R_1^2-1}{2},\ i\,\frac{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2-R_1^2+1}{2},$$
$$X_2,\ Y_2,\ Z_2,\ iR_2,\ \frac{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2-R_2^2-1}{2},\ i\,\frac{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2-R_2^2+1}{2},$$

qu'on peut remplacer par les quantités proportionnelles

$$r_1=\frac{\partial x}{\partial v},\quad r_2=\frac{\partial y}{\partial v},\quad r_3=\frac{\partial z}{\partial v},\quad r_4=\frac{\partial \alpha}{\partial v},\quad r_5=\frac{\partial \beta}{\partial v},\quad r_6=\frac{\partial \gamma}{\partial v},$$
$$r'_1=\frac{\partial x}{\partial u},\quad \dots\dots\dots\dots\quad r'_6=\frac{\partial \gamma}{\partial u}.$$

Exprimons que ces tangentes sont conjuguées par rapport au cône du complexe défini par l'équation générale du second degré

$$f(r_1, r_2, \dots, r_6)=0;$$

l'équation obtenue

$$\Sigma\, r'_1\,\frac{\partial f}{\partial r_1}=0$$

exprime précisément que l'équation de Laplace du réseau M admet la solution

$$f(x, y, z,\ \alpha, \beta, \gamma);$$

autrement dit, il existe un réseau parallèle sur la quadrique

$$f(x, y, z,\ \alpha, \beta, \gamma)=\mathrm{ct^e};$$

ce réseau est également nul.

Considérons, pour fixer les idées, le complexe le plus général dont l'équation peut se ramener à la forme

$$(1+a_1)\,r_1^2+\dots+(1+a_5)\,r_5^2+r_6^2=0;$$

en tenant compte de la relation identique

$$r_1^2+r_2^2+\dots+r_6^2=0,$$

on voit que l'équation du complexe s'écrit :

$$a_1 r_1^2+\dots+a_5 r_5^2=0.$$

En écrivant que les tangentes asymptotiques de Σ sont conjuguées par rapport au cône du complexe, on a l'équation

$$a_1 \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \ldots + a_5 \frac{\partial \beta}{\partial u} \frac{\partial \beta}{\partial v} = 0. \tag{14}$$

Le point M' ayant pour coordonnées x, y, z, α, β décrit dans l'espace à cinq dimensions un réseau I; l'équation (14) exprime qu'il existe un réseau parallèle, c'est-à-dire également I sur la quadrique

$$a_1 x^2 + a_2 y^2 + \ldots + a_5 \beta^2 = \text{const}.$$

Il est d'ailleurs facile de voir que ces deux problèmes dans les espaces à cinq et à six dimensions sont équivalents [1].

---

[1] La question envisagée au paragraphe 6 de la première Partie a été résolue d'une façon plus générale par M. Clairin dans un article dont je n'ai connaissance qu'au cours de l'impression du présent travail (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1905). M. Clairin a déterminé tous les cas dans lesquels l'équation $s = f(x, y, z)$ est intégrable par la méthode de M. Darboux.