SUR LES SOLUTIONS APPROCHÉES

DE CERTAINES ÉQUATIONS INTÉGRALES NON LINÉAIRES

PAR M. A. COLLET.

Ce travail a été présenté en octobre 1912 à la Faculté des Sciences de Poitiers pour l'obtention du diplôme d'études supérieures de mathématiques. Le sujet m'en a été indiqué par M. FRECHET, *qui m'a donné en outre des directions pour lesquelles je suis heureux de lui exprimer ici ma reconnaissance.*

Depuis la rédaction de ce Mémoire, M. APPELL, *dans la séance du 24 février 1913 de l'Académie des Sciences, a présenté sous une autre forme l'équation dont je me suis occupé.*

OBJET DE CE MÉMOIRE

M. Appell [1] a attiré l'attention sur une équation intégrale particulière qui se rattache au problème de l'équilibre d'une masse fluide en rotation autour d'un axe.

Soit $\varphi(x, y, z) = 0$ l'équation de la surface libre S de la masse fluide en équilibre lorsque la vitesse de rotation est ω; représentons par le symbole $\int\int\int_\varphi$ une intégration étendue à tout le volume intérieur à la surface S; soit a, b, c un point quelconque intérieur à S. M. Appell a montré que la fonction φ doit satisfaire à l'équation

$$(1) \quad \varphi(x, y, z) = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \mathrm{K} + \int\int\int_\varphi \frac{da\,db\,dc}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}},$$

[1] *Comptes rendus du Congrès des Sociétés savantes* (1910).

K est une constante déterminée après coup par le volume de la masse fluide lequel est donné.

On peut généraliser l'équation (1), soit $K(x, a)$ une fonction des deux variables indépendantes x et a; soit $f(x)$ une fonction de x seulement; l'équation

$$(2) \qquad \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\varphi \gtrless 0} K(x, a)\,da$$

est du même type que celle de M. Appell; le symbole $\int_{\varphi \gtrless 0}$ indique que l'intégration doit être étendue à tout l'intervalle où la fonction $\varphi(a)$ a un signe donné. Écrivons de même les équations analogues à (2) pour deux et trois variables :

$$(3) \qquad \varphi(x, y) = f(x, y) \quad + \lambda \int\int_{\varphi(a, b) \gtrless 0} K(x, y; a, b)\,da\,db,$$

$$(4) \qquad \varphi(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda \int\int\int_{\varphi(a, b, c) \gtrless 0} K(x, y, z; a, b, c)\,da\,db\,dc.$$

Les équations (1), (2), (3), (4) n'ont, à ma connaissance, jamais été étudiées. Je me propose de montrer qu'elles ne peuvent être résolues, sauf dans quelques cas particuliers, à l'aide des méthodes ordinaires de résolution des équations intégrales. Ceci fera l'objet du chapitre I[er].

Dans le chapitre II, je montrerai que s'il existe des solutions voisines d'une solution connue *a priori*, leur recherche se ramène à la résolution d'une équation de Fredholm.

Dans les chapitres III et IV, j'appliquerai les résultats qui précèdent à l'équation (1) et je montrerai qu'on retrouve simplement les figures ellipsoïdales d'équilibre de Poincaré.

CHAPITRE PREMIER.

Des méthodes de résolution.

I. — Réduction de l'équation (2).

[**1**] Bornons-nous pour le moment à l'équation (2). Pour fixer les idées, supposons que l'intégrale du second membre soit étendue à l'intervalle où la fonction $\varphi(a)$ est positive, notre équation s'écrira donc :

$$(2) \qquad \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\varphi > 0} \mathrm{K}(x, a)\, da.$$

On peut la réduire à un autre type d'équation d'aspect plus simple. Soit, en effet, $\mathrm{H}(s)$ une fonction se réduisant à 1 pour $s > 0$ et s'évanouissant pour $s < 0$. L'équation (2) est équivalente à l'équation

$$(5) \qquad \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{K}(x, a)\, \mathrm{H}[\varphi(a)]\, da.$$

Les équations du type (5) où les fonctions $f(x)$ et $\mathrm{K}(x, a)$ sont continues ont été étudiées par quelques auteurs; je vais rappeler brièvement les résultats qu'ils ont obtenus et montrer quelles difficultés nouvelles se présentent lorsque la fonction $\mathrm{K}(x, a)$ est discontinue, comme c'est le cas pour l'équation (5).

[**2**] M. Block [1] cherche à résoudre par approximations successives l'équation

$$(6) \qquad \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \mathrm{K}(x, t)\, \mathrm{H}[\varphi(t)]\, dt.$$

---

(1) *Archiv för Matematik*, 1907, n° 22.

Il suppose que les fonctions $f(x)$ et $K(x, t)$ sont bornées dans l'intervalle (a, b), soient N et M leurs bornes supérieures respectivement. Il suppose de plus que $H[\varphi]$ satisfait à la condition de Lipschitz

$$|H[\varphi_2] - H[\varphi_1]| < k\,|\varphi_2 - \varphi_1|$$

et que K soit égal à o pour $\varphi = 0$, supposition qui, dit-il, ne comporte aucune restriction; et en effet, amener la fonction $H(0)$ à être nulle équivaut à ajouter à $f(x)$ une fonction bornée.

On forme successivement :

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= f(x)\\
\varphi_1(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\,H[\varphi_0(t)]\,dt,\\
\varphi_2(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\,H[\varphi_1(t)]\,dt,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\varphi_\nu(t) &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\,H[\varphi_{\nu-1}(t)]\,dt,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Si $\varphi_\nu(x)$ converge uniformément vers une limite $\varphi(x)$ pour ν indéfiniment croissant, cette fonction $\varphi(x)$ est solution de l'équation donnée :

Si la condition de Liptchitz est réalisée par la fonction $H[\varphi]$, on déduit des formules précédentes :

$$\begin{aligned}
|\varphi_0(x)| &\leqq N,\\
|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| &\leqq |\lambda|\,(b-a)\,MNk,\\
|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| &\leqq [\,|\lambda|\,(b-a)\,Mk]^2 N,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
|\varphi_{\nu+1}(x) - \varphi_\nu(x)| &\leqq [\,|\lambda|\,(b-a)\,Mk]^\nu N,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

La série

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} [\varphi_{\nu+1}(x) - \varphi_\nu(x)]$$

converge si l'on a

$$|\lambda| < \frac{1}{(b-a)Mk}.$$

Cette inégalité exprime une condition suffisante pour que la solution de l'équation donnée puisse être formée par des approximations successives.

[**3**] Dans des cas spéciaux, on peut obtenir un domaine de convergence plus large que celui de M. Block; je vais signaler un cas dont on verra l'intérêt par la suite.

Supposons que $H[\varphi]$ soit une fonction bornée dans l'intervalle (a, b), croissante avec φ et jamais négative; supposons de plus que $K(x, a)$ soit une fonction positive et bornée supérieurement dans l'intervalle (a, b); enfin, soit $\lambda > 0$.

En conservant les notations précédentes, nous pouvons écrire

$$\varphi_1(x) - \varphi_0(x) = \lambda \int_a^b K(x, a) H[f(t)]\, dt.$$

Écartons le cas où l'intégrale du second membre serait nulle (parce qu'alors $f(x)$ serait solution de l'équation de M. Block) pour toutes les valeurs de x comprises dans l'intervalle (a, b).

D'après nos conventions, l'intégrale

$$\int_a^b K(x, t) H[f(t)]\, dt$$

est positive, sauf peut-être pour certaines valeurs de x où elle peut être nulle, et l'on a, quel que soit x,

$$\varphi_1(x) - \varphi_0(x) \geqq 0.$$

Écrivons encore

$$\varphi_2(x) - \varphi_1(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)\big[H[\varphi_1] - H[f]\big]\, dt;$$

si nous écartons le cas où l'intégrale du second membre est identiquement nulle, parce qu'alors $\varphi_1(x)$ serait une solution, nous avons encore

$$\varphi_2(x) - \varphi_1(x) \geqq 0,$$

quel que soit x.

En général, nous voyons que

$$\varphi_{\nu+1}(x) - \varphi_\nu(x) \geqq 0.$$

En définitive, ou bien l'une des fonctions $\varphi_i(x)$ est solution de l'équation (6), ou bien l'on obtient une suite de fonctions

$$\varphi_0(x), \quad \varphi_1(x), \quad \ldots, \quad \varphi_\nu(x), \quad \ldots$$

qui ne vont jamais en décroissant quel que soit x.

D'ailleurs, ces fonctions sont bornées, car si L est la borne supérieure de $H[\varphi]$, il vient

$$|\varphi_i(x)| < N + \lambda(b-a) ML.$$

Il s'ensuit que la fonction $\varphi_\nu(x)$ tend vers une limite $\varphi(x)$ lorsque ν augmente indéfiniment.

Dans les circonstances où nous nous sommes placés, nous voyons que l'équation (6) a une solution pour toute valeur finie et positive de λ.

[**4**] Je signale encore un résultat obtenu par M. Bratu (1) dans le cas où la fonction $H[\varphi)$ peut être développée en série convergente :

$$H[\varphi(t)] = k_0 + k_1\varphi(t) + k_2[\varphi(t)]^2 + \ldots + k_n[\varphi(t)]^n \ldots (k_i = \text{constante}).$$

On suppose, de plus, que les fonctions $f(x)$ et $K(x, t)$ sont bornées dans l'intervalle (a, b).

M. Bratu cherche à satisfaire à l'équation (6) par une fonction de la forme

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + \ldots + \lambda^n\varphi_n(x) \ldots \tag{7}$$

Substituant dans (6) et égalant les coefficients de λ^i dans les deux membres, on obtient les formules de récurrence

$$\tag{8} \left\{ \begin{array}{l} \varphi_0(x) = f(x), \\ \varphi_1(x) = \displaystyle\int_a^b K(x, t)\,[k_0 + k_1\varphi_0(t) + k_2[\varphi_0(t)]^2 \ldots]\,dt, \\ \varphi_2(x) = \displaystyle\int_a^b K(x, t)\,[k_1\varphi_1(t) + 2k_2\varphi_0(t)\varphi_1(t) + 3k_3\varphi_0^2(t)\varphi_1(t) \ldots]\,dt, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Par ces formules, les coefficients de la suite (7) se calculeront de proche en proche. Leur détermination est unique. On en conclut que l'équation (6) ne peut admettre qu'une seule solution régulière dans le voisinage de $\lambda = 0$, et cette solution est donnée par la série (7) à condition qu'elle soit convergente.

Pour étudier cette convergence, soit $K_1(x, t)$ une fonction positive telle que

$$K(x, t) < K_1(x, t),$$

et soit $H'[\varphi]$ une fonction majorante de $H[\varphi]$:

$$H'[\varphi(t)] = k'_0 + k'_1\varphi(t) + k'_2[\varphi(t)]^2 + \ldots + k'_n[\varphi(t)]^n \ldots.$$

Si l'équation

$$\Phi(x) = m + \lambda \int_a^b K_1(x, t)\, H'[\Phi(t)]\, dt,$$

(1) *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. CLII.

où m est la borne supérieure de $f(x)$, admet une solution de la forme

$$\Phi(x) = \Phi_0(x) + \lambda\Phi_1(x) + \lambda^2\Phi_2(x) + \ldots + \lambda^n\Phi_n(x)\ldots,$$

on obtient en substituant :

$$\begin{aligned}
&\Phi_0(x) = m,\\
&\Phi_1(x) = \int_a^b K_1(x, t)\,[k'_0 + k'_1\Phi_0(t) + k'_2[\Phi_0(t)]^2\ldots]\,dt,\\
&\Phi_2(x) = \int_a^b K_1(x, t)\,[k'_1\Phi_1(t) + 2k'_2\Phi_0(t)\,\Phi_1(t)\ldots]\,dt,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

La comparaison de ces formules avec les formules (8) montre que

$$|\varphi_0(x)| \leqq \Phi_0(x),$$
$$|\varphi_1(x)| \leqq \Phi_1(x),$$

c'est-à-dire

$$\varphi(x) << \Phi(x),$$

Si $H(\varphi)$ est holomorphe pour $|\varphi| < \rho$ et si P est le maximum de la valeur absolue des termes de cette série, on peut prendre pour majorante de $H(\varphi)$ l'expression

$$\frac{P\rho}{\rho - \varphi}.$$

Soit M la borne supérieure de la fonction $K(x, t)$.

Pour prouver la convergence du développement (7), il suffit de prouver que l'équation

$$\Phi(x) = m + \lambda\int_a^b \frac{MP\rho}{\rho - \Phi(t)}\,dt$$

admet une solution holomorphe dans le voisinage de $\lambda = 0$.

La solution, si elle existe, étant indépendante de x, en posant $\Phi(t) = C$ nous trouvons :

$$C = m + \frac{\lambda(b-a)MP\rho}{\rho - C}.$$

Cette équation admet la solution

$$C(\lambda) = \frac{1}{2}\left[m + \rho + \sqrt{(\rho - m)^2 - 4\lambda(b-a)MP\rho)}\right]$$

qui se réduit à m pour $\lambda = 0$, et cette solution est holomorphe pour

$$|\lambda| < \frac{(\rho - m)^2}{4(b-a)\mathrm{M}\rho}.$$

Il en résulte que pour de telles valeurs de λ et pour $a \leqq x \leqq b$ la série (7) est uniformément convergente.

[**5**] Supposons maintenant que la fonction $\mathrm{H}(\varphi)$ se réduise à 1 lorsque $\varphi(t) > 0$ et à 0 lorsque $\varphi(t) < 0$, et considérons l'équation

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{-a}^{+a} \mathrm{K}(x, t)\mathrm{H}[\varphi(t)]\,dt \qquad a > 0 \tag{6}$$

équivalente à l'équation

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{-a\ \varphi(t)>0}^{+a} \mathrm{K}(x, t)\,dt, \tag{2 bis}$$

la dernière intégrale étant étendue à tout l'intervalle où la fonction $\varphi(t)$ est positive pour $-a \leqq t \leqq a$.

Supposons que nous ayons obtenu une solution de l'équation (6) sous forme d'une série convergente lorsque λ est suffisamment petit; nous devons faire croître a et voir si la série précédente reste convergente lorsque a augmente indéfiniment. Par suite, pour passer de l'équation (6) à l'équation

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\varphi(t)>0} \mathrm{K}(x, t)\,dt,$$

il nous faut faire un premier passage à la limite. Ce n'est pas là, semble-t-il, la principale difficulté du problème. La résolution de l'équation (6) lorsque la fonction H est continue étant faite, il nous faut encore un autre passage à la limite pour résoudre l'équation lorsque H est discontinue : soit $\mathrm{H}'(\varphi)$ une fonction approchée de $\mathrm{H}(\varphi)$ et qui soit continue; nous pouvons prendre, par exemple,

$$\mathrm{H}'[\varphi] = \frac{e^{m\varphi}}{e^{m\varphi} + 1}$$

lorsque m croît indéfiniment, cette fonction tend vers 1 pour $\varphi > 0$ et vers 0 pour $\varphi < 0$; de plus, elle est continue pour toute valeur finie de m. On peut se rendre compte qu'elle satisfait à la condition de Lipschitz

$$|\mathrm{H}'[\varphi_1] - \mathrm{H}'[\varphi_0]| < k|\varphi_1 - \varphi_0|.$$

Par suite, si on remplace $\mathrm{H}[\varphi]$ par $\mathrm{H}'[\varphi]$ dans l'équation (6), elle admet une solution lorsque

$$|\lambda| < \frac{1}{(b-a)\mathrm{M}k} \qquad \text{(paragraphe 2).}$$

Lorsque m croît indéfiniment, on peut voir qu'il en est de même de k et que, par suite, $\frac{1}{(b-a)\mathrm{M}k}$ tend vers o.

Nous arriverions au même résultat en prenant pour limite supérieure de (λ) la valeur de M. Bratu (paragraphe 4).

Je crois que les quelques considérations qui précèdent suffisent à montrer la difficulté de la résolution des équations de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\varphi(t)>0} \mathrm{K}(x, t)\,dt. \tag{2}$$

En particulier, on peut affirmer que les méthodes de MM. Bloch et Bratu ne sont pas susceptibles de leur être étendues. Pour terminer, remarquons que l'équation (2) peut se mettre sous la forme

$$\varphi = \mathrm{U}(\varphi),$$

où U est une *fonctionnelle* de φ; à ce titre, on peut la considérer comme une généralisation de l'équation

$$u = f(u)$$

et toutes les difficultés de résolution de cette dernière équation doivent se retrouver dans la première, avec d'autres tenant à ce que $\mathrm{U}(\varphi)$ est une fonctionnelle et non une fonction de fonction.

II. — La méthode des coefficients indéterminés.

Il est un cas où la résolution de l'équation

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\varphi(t) \geqq 0} \mathrm{K}(x, t)\,dt \tag{2}$$

est théoriquement facile, c'est lorsque le noyau K est indépendant de x ou bien est de la forme

$$\mathrm{K}(x, t) = g_0(x)h_0(t) + g_1(x)h_1(t), \ldots + g_n(x)h_n(t),$$

n étant un nombre entier fini.

[**6**] Etudions d'abord le cas où la fonction $\mathrm{K}(x, t)$ est une fonction de t seulement.

Une solution de l'équation (2) doit être de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + c,$$

avec

$$c = \lambda \int_{f(t)+c \geqq 0} \mathrm{K}(t)\,dt.$$

L'intégrale précédente est une fonction connue de c, soit $G(c)$; l'équation (2) aura autant de solutions que l'équation

$$c = \lambda G(c).$$

On sait qu'il existe au moins une solution de cette dernière équation lorsque

$$|G'(c)| < \frac{1}{|\lambda|}.$$

Il semble impossible de déterminer *a priori* les valeurs pour lesquelles l'inégalité précédente est vérifiée. Cette détermination n'est possible que dans certains cas particuliers.

Par exemple, soit $K(t) = 1$. On a :

$$\varphi(x) = f(x) + c,$$

$$c = \lambda \int_{f(t)+c \geqq 0} dt,$$

soit $y = f(x)$ et sa fonction inverse $x = g(y)$; si, par exemple, la courbe $y = f(x)$ n'est coupée qu'en deux points par une parallèle à ox, on a :

$$x = g_1(y), \qquad x = g_2(y), \qquad |g_1(y)| < |g_2(y)|.$$

La fonction

$$\varphi = y + c$$

s'annule pour les deux valeurs de x :

$$x = g_1(-c), \qquad x = g_2(-c),$$

et il vient

$$c = \lambda \int_{g_1(-c)}^{g_2(-c)} dt, \qquad c = \lambda[g_2(-c) - g_1(-c)].$$

Il suffit que

$$|g_2' - g_1'| < \frac{1}{|\lambda|},$$

quel que soit c, pour qu'il y ait une solution unique; si, par exemple, la courbe $y = f(x)$ est symétrique par rapport à l'axe oy et si $f'(x) > 2|\lambda|$, on aura

$$x = g_1(y) = g_2(y)$$

et

$$|\lambda| \cdot |g_2' - g_1'| = 2|g_1'|\,|\lambda| = \frac{2|\lambda|}{|f'(x)|} < 1.$$

L'exemple qui précède montre bien combien la méthode est compliquée, même dans le cas le plus simple où on puisse se placer.

[7] Supposons maintenant que le noyau soit de la forme

$$K(x, t) = g_0(x)h_0(t) + g_1(x)h_1(t), \dots + g_n(x)h_n(t).$$

Posons :

$$(\alpha) \quad \begin{cases} k_0 = \int h_0(t)\,dt, \\ k_1 = \int h_1(t)\,dt, \\ \dots\dots\dots \\ k_n = \int h_n(t)\,dt, \end{cases}$$

toutes les intégrales étant étendues à l'intervalle où l'on a :

$$\varphi(t) = f(t) + k_0 g_0(t) + k_1 g_1(t), \dots + k_n g_n(t) \geqq 0.$$

La solution de l'équation (2) est de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + k_0 g_0(x) + k_1 g_1(x), \dots + k_n g_n(x).$$

Pour calculer les k_i, on se sert des formules (α). On obtient n équations de la forme

$$(\beta) \quad \begin{cases} k_1 = F_1(k_1 k_2 \dots k_n), \\ k_2 = F_2(k_1 k_2 \dots k_n), \\ \dots\dots\dots \\ k_n = F_n(k_1 k_2 \dots k_n). \end{cases}$$

Si le système des équations (β) admet des solutions telles que la fonction $\varphi(t)$ ne soit pas constamment négative, la fonction $\varphi(x)$ précédemment déterminée est une solution de l'équation (2). Il y aura autant de solutions que de valeurs des k_i répondant à cette condition.

Il est visible que la méthode qui vient d'être exposée est applicable au cas d'une équation à deux ou trois variables.

[8] Exemples :

1° Soit

$$\varphi(x, y) = -(x^2 + y^2) + \int_{\varphi(a,b)>0} [(x-a)^2 + (y-b)^2]\,da\,db;$$

$\varphi(x, y)$ est de la forme

$$\varphi(x, y) = (k_1 - 1)(x^2 + y^2) - 2k_2 x - 2k_3 y + k_4,$$

avec

$$k_1 = \int da\,db, \quad k_2 = \int a\,da\,db, \quad k_3 = \int b\,da\,db, \quad k_4 = \int (a^2 + b^2)\,da\,db;$$

si R est le rayon du cercle $\varphi = 0$, on trouve :

$$k_1 = \pi R^2, \qquad k_4 = \pi R^2 \frac{k_2^2 + k_3^2}{(k_1 - 1)^2} + \frac{\pi R^4}{2}.$$

$$k_2 = k_2 \cdot \frac{\pi R^2}{k_1 - 1}, \qquad R^2 = \frac{k_2^4 + k_3^2 - k_4(k_1 - 1)}{(k_1 - 1)^2},$$

$$k_3 = k_3 \cdot \frac{\pi R^2}{k_1 - 1},$$

On voit que

$$k_2 = k_3 = 0,$$

puis que

$$k_1 = k_4 = R = 0,$$

ou

$$k_1 = \frac{2}{3}, \qquad k_4 = \frac{2}{9\pi}.$$

La première solution donne le cercle de rayon nul

$$\varphi(x, y) = -(x^2 + y^2) = 0;$$

la deuxième donne

$$\varphi(x, y) = -\frac{1}{3}(x^2 + y^2) + \frac{2}{9\pi}.$$

2° Soit

$$\varphi(x, y) = \int\int (x^2 + y^2 - 2ax - 2by)\,da\,db;$$

$\varphi(x, y)$ est le cercle $k_1(x^2 + y^2) - 2k_2x - 2k_3y = 0$, avec

$$k_1 = \int da\,db, \qquad k_2 = \int a\,da\,db, \qquad k_3 = \int b\,da\,db.$$

On trouve :

$$R^2 = \frac{k_2^2 + k_3^2}{k_1^2}, \qquad k_1 = \pi R^2, \qquad k_2 = k_2 \cdot \frac{\pi R^2}{k_1}, \qquad k_3 = k_3 \cdot \frac{\pi R^2}{k_1}.$$

Les deux dernières équations se réduisent à des identités. Par suite, k_2 et k_3 sont indéterminés. Tous les cercles passant par l'origine sont des solutions de l'équation donnée.

3° Soit

$$\varphi(x, y) = K\pi + \int\int [(x - a)^2 + (y - b)^2 - c^2]\,da\,db.$$

La solution est de la forme

$$\varphi(x, y) = k_1(x^2 + y^2) + 2k_2 x + 2k_3 y + k_4,$$

avec

$$k_1 = \int\int da\,db, \qquad k_3 = \int\int b\,da\,db,$$

$$k_2 = -\int\int a\,da\,db, \qquad k_4 = \mathrm{K}\pi + \int\int (a^2 + b^2 + c^2)\,da\,db.$$

On trouve, en faisant les calculs, que les coefficients k_2 et k_3 sont indéterminés et que le rayon du cercle φ est donné par la formule

$$\mathrm{R}^2 = \frac{c^2 \pm \sqrt{c^2 - 6\mathrm{K}}}{3}.$$

Lorsque

$$c^2 - 6\mathrm{K} > 0,$$

il y a donc deux séries de cercles qui sont solutions de l'équation donnée. Les cercles de chaque série ont même rayon et leur centre est arbitraire.

Ce résultat pouvait être prévu; en effet, le second membre de l'équation

$$\varphi(x, y) = \mathrm{K}\pi + \int\int [(x-a)^2 + (y-b)^2 - c^2]\,da\,db$$

ne change pas quand on déplace l'origine des coordonnées, en gardant aux axes leur direction primitive. Il s'ensuit que toute courbe obtenue par translation de $\varphi(x, y) = 0$ est solution de l'équation donnée.

Cette remarque est générale et nous sera utile par la suite.

III. — La méthode d'itération.

[9] La méthode qui vient d'être exposée a été généralisée par M. Fredholm dans le cas des équations linéaires. Ici, ce n'est pas possible; on ne peut l'appliquer au cas où $\mathrm{K}(x, t)$ est de la forme

$$\mathrm{K}(x, t) = \sum_{i=0}^{i=\infty} g_i(x) h_i(a).$$

En effet, tout le succès de la méthode de M. Fredholm tient à ce que la résolution d'un système d'équations algébriques linéaires est bien connue et facile. Mais si on concevait l'équation (2) comme la limite pour n infini d'un système de n équations à n inconnues, on n'aurait aucun moyen de résoudre ce système ni même de connaître la forme des équations. Les exemples, pourtant bien simples, qui ont été donnés précédemment, montrent bien la complication de la nature des équations auxquelles on est conduit.

Je me propose de montrer maintenant qu'en général on ne peut pas résoudre l'équation (2) par approximations successives. C'est l'exception lorsque cette méthode donne une solution.

[**10**] Il importe d'abord de remarquer que les singularités dépendant de a que peut présenter le noyau $K(x, a)$ ne constituent pas une difficulté sérieuse pour la résolution de l'équation (2). Il suffit d'entourer chaque point singulier d'un petit intervalle (un cercle par exemple pour le cas de deux variables); le noyau est alors continu dans tout l'espace E ne renfermant aucun intervalle. On résout l'équation

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{E\varphi(a)>0} K(x, a)\,da \tag{2 bis}$$

et on recherche ce qui se produit lorsqu'on fait tendre vers O chaque intervalle. Nous allons donc considérer dans ce qui va suivre des équations de la forme (2 *bis*) où le noyau est continu dans tout l'espace E.

[**11**] Un exemple simple va montrer que les méthodes ordinaires d'itération ne doivent pas nécessairement réussir. Soit l'équation

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{a\ \varphi(y)>0}^{b} g(x)\,h(y)\,dy.$$

La solution, si elle existe, est de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + ug(x),$$

avec

$$u = \lambda \int_{a\ [f(y)+ug(y)]>0}^{b} h(y)\,dy.$$

Le deuxième membre de cette dernière équation est une fonction bien déterminée de u, soit $\lambda H(u)$. Si on se donne λ, on a à résoudre l'équation

$$u = \lambda H(u).$$

On ne peut résoudre une telle équation par approximations successives que si $h(u)$ est une fonction continue de u. Or, il arrive que la fonction $H(u)$ est discontinue, même lorsque les fonctions $g(x)$ et $h(y)$ sont holomorphes dans l'espace (a, b).

Montrons-le en prenant

$$f(x) \equiv x^2, \qquad g(x) \equiv -x^2, \qquad h(y) \equiv 1.$$

Il vient

$$H(u) = \int_{a\,(1-u)>0}^{b} dy = \begin{cases} b-a & \text{si} \quad u \leqq 1 \\ 0 & \text{si} \quad u > 1 \end{cases}.$$

On a donc $H(u)$ discontinue pour $u = 1$.

Or, pour $\lambda = \dfrac{1}{b-a}$, l'équation $u = \lambda H(u)$ a une seule solution qui est précisément la valeur de discontinuité $u = 1$. On voit ainsi que cette valeur de discontinuité peut intervenir.

On peut former des discontinuités plus nombreuses de $H(u)$. Par exemple, soit $c(x)$ la fonction de Cantor, qui est continue et croissante de 0 à 1 pour $0 \leqq x \leqq 1$, mais qui est constante dans une infinité d'intervalles(1).

Prenons

$$f(x) \equiv x^2, \qquad g \equiv \frac{-x^2}{c(x)+1}, \qquad h(y) \equiv 1, \qquad a = 0, \qquad b = 1.$$

On a :

$$H(u) \equiv \int_{0\left[1-\frac{u}{c(x)+1}\right]>0}^{1} dy = \int_{0\,[c(x)+1-u]>0}^{1} dy.$$

La dernière intégrale se réduit à 0 si $u \geqq 2$ et à $b-a$ si $u \leqq 1$. Elle est égale à $b - x_0$ si x_0 est la plus petite valeur de x telle que l'on ait $c(x_0) + 1 - u = 0$. Il est alors facile de voir que $H(u)$ est discontinue pour une infinité de valeurs comprises entre $u = 1$ et $u = 2$, à savoir toutes les valeurs de u telles que $u - 1$ soit une valeur prise par $c(x)$ dans tout un intervalle.

On voit alors que l'équation $u = \lambda H(u)$ a une seule solution si $\lambda \leqq \dfrac{1}{b-a}$, à savoir $u = \lambda(b-a)$.

Si $\lambda > \dfrac{1}{b-a}$, il n'y a pas, en général, de solution. En effet, la fonction $\dfrac{c(x)+1}{b-x}$ est croissante et continue lorsque x croît de a à b, c'est-à-dire de 0 à 1 ; elle croît de $\dfrac{1}{b-a}$ à $+\infty$.

A toute valeur de λ supérieure à $\dfrac{1}{b-a}$ correspond donc une seule valeur de x comprise entre a et b, telle que

$$\lambda = \frac{c(x)+1}{b-x};$$

---

(1) Voir la thèse de M. Frechet, note 4.

l'équation

$$u = \lambda H(u)$$

peut s'écrire

$$u = \frac{c(x) + 1}{b - x} \cdot (b - x_0),$$

avec

$$c(x_0) + 1 - u = 0.$$

Elle a une solution si l'on a :

$$\frac{c(x_0) + 1}{c(x) + 1} = \frac{b - x_0}{b - x}.$$

La solution de cette dernière équation ne peut être que x, car si $x < x_0$, le premier terme est supérieur à 1 et le deuxième inférieur à 1, tandis que si $x > x_0$, c'est l'inverse qui se produit. Mais x_0 ne peut être intérieur à un des intervalles d'invariabilité de $c(x)$; il en résulte que si x est une valeur de x intérieure à un de ces intervalles, il n'y a pas de solution lorsque

$$\lambda = \frac{c(x_0) + 1}{b - x_0}.$$

[**11**] Nous avons vu (paragraphe 3), à propos de l'équation

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_\alpha^\beta K(x, a) H[\varphi(a)]\, da,$$

qu'un cas particulièrement avantageux était celui où le noyau $K(x, a)$ est une fonction gardant un signe constant dans l'intervalle (α, β). Il est assez intéressant de remarquer qu'il en est de même pour l'équation (2 *bis*) :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha\ \varphi(a)>0}^{\beta} K(x, a)\, da.$$

Nous pouvons supposer que la fonction $K(x, a)$ est positive lorsque les variables x et a sont contenues dans l'intervalle (α, β), car, s'il en était autrement, il suffirait de changer le signe de x. Étudions le cas où $\lambda > 0$.

Posons

$$\varphi_0(x) = f(x) + \lambda \int_\alpha^\beta K(x, a)\, da.$$

Si la fonction $\varphi_0(x)$ est constamment négative lorsque x est dans l'intervalle (α, β), l'équation (2 *bis*) n'admet pas de solution si on en excepte la solution banale $f(x)$.

Si la fonction $\varphi_0(x)$ est constamment positive dans l'intervalle (α, β), l'équation (2 *bis*) admet évidemment la solution $\varphi_0(x)$, mais peut en admettre d'autres.

Supposons maintenant que la fonction $(\varphi_0(x)$ s'annule dans l'intervalle (α, β). Soit (α_0, β_0) la partie de l'intervalle (α, β) où cette fonction est positive.

Le deuxième intervalle est intérieur au premier, ce qu'on peut exprimer ainsi :

$$(\alpha_0, \beta_0) < (\alpha, \beta).$$

Dans ces conditions, nous pouvons voir que

$$\int_\alpha^\beta K(x, a)\,da \geqq \int_{\alpha\ \varphi_0(a)>0}^\beta K(x, a)\,da,$$

ce que l'on peut écrire

$$\varphi_1(x) \leqq \varphi_0(x),$$

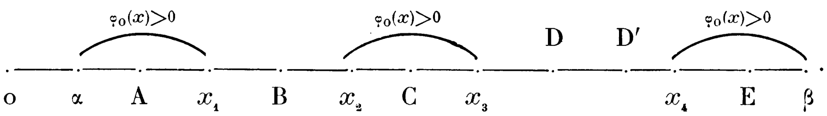
en posant

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha\ \varphi_0(a)>0}^\beta K(x, a)\,da.$$

Il ne peut d'ailleurs y avoir égalité que pour les valeurs de x qui pourraient annuler $K(x, a)$, quelle que soit la valeur de a.

En tout point où l'on a $\varphi_0(x) = 0$, on a aussi $\varphi_1(x) < 0$, et ce point n'appartient pas à l'intervalle (α_1, β_1), où la fonction $\varphi_1(x)$ est positive. Il faut alors que l'intervalle (α_1, β_1) soit intérieur à (α_0, β_0).

Précisons ce point à l'aide d'un exemple. Je suppose que la fonction $\varphi(x)$ s'annule entre α et β en quatre points, x_1, x_2, x_3, x_4; portons sur une droite à partir d'une origine o les abcisses des points α, x_1, x_2, x_3, x_4, β. Il est bien sûr que les points x_1, x_2, x_3, x_4 sont extérieurs à l'intervalle (α_1, β_1); soient A, B, C, D, E, des points pris respectivement dans les intervalles (α, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, β) :



L'intervalle (α_1, β_1), où la fonction $\varphi_1(x)$ est positive, ne peut contenir un intervalle partiel tel que (A, B), parce qu'en x_1 la fonction $\varphi_1(x)$ est négative; de même D' étant un point quelconque de l'intervalle (x_3, x_4), l'intervalle (γ_1, β_1) ne peut comprendre l'intervalle (D, D'), parce que entre D et D' la fonction $\varphi_0(x)$ est négative et qu'il en est de même de $\varphi_1(x)$; il s'ensuit que l'intervalle (α_1, β_1) ne peut contenir que des intervalles partiels intérieurs aux intervalles (α, x_1), (x_2, x_3), (x_4, β), où l'on a $\varphi_0(x) > 0$. C'est bien le résultat annoncé. On arriverait aux mêmes conclusions si l'on supposait que l'un des nombres x_1, x_2, x_3, x_4 est racine multiple de $\varphi_0(x) = 0$.

Soit maintenant

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha\ \varphi_1(a)>0}^{\beta} K(x, a)\, da,$$

$$\varphi_3(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha\ \varphi_2(a)>0}^{\beta} K(x, a)\, da,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha\ \varphi_{n-1}(a)>0}^{\beta} K(x, a)\, da,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

On voit d'après ce qui précède que

$$\varphi_1(x) \geqq \varphi_2(x) \geqq \varphi_3(x) \ldots \geqq \varphi_n(x).$$

Répétons qu'il ne peut y avoir égalité que pour les valeurs de x qui annulent identiquement $K(x, a)$.

Les fonctions $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ ... jamais croissantes et qui ne peuvent devenir inférieures à $f(x)$ convergent vers une limite $\varphi(x)$ qui est solution de l'équation

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha\ \varphi(a)>0}^{\beta} K(x, a)\, da.$$

[**12**] *Exemples :*

1° Soit l'équation

$$\varphi(x) = 1 - x^2 + \lambda \int_{-2\ \varphi(t)>0}^{+2} x^2\, dt.$$

Posons

$$\varphi_0(x) = 1 - x^2 + \lambda \int_{-2}^{+2} x^2\, dt = 1 - x^2(1 - 4\lambda);$$

si $\dfrac{1}{1-4\lambda} < 4$, c'est-à-dire si $\lambda < \dfrac{3}{16}$, la fonction $\varphi_0(x)$ s'annule dans l'intervalle $(-2, +2)$. Soit $\lambda = \dfrac{1}{8}$, il vient $\varphi_0(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

Posons

$$\varphi_1(x) = 1 - x^2 + \frac{1}{8}\int_{-\sqrt{2}}^{+\sqrt{2}} x^2 dt = 1 - x^2 \frac{4-\sqrt{2}}{4},$$

$$\varphi_2(x) = 1 - x^2 + \frac{1}{8}\int_{-\frac{2}{\sqrt{4-\sqrt{2}}}}^{\frac{2}{\sqrt{4-\sqrt{2}}}} x^2 dt = 1 - x^2 \frac{\sqrt{4-\sqrt{2}}-1}{\sqrt{4-\sqrt{2}}},$$

. . . .

Les coefficients successifs de x^2 sont croissants et toujours inférieurs à 1 ; ils ont donc une limite.

On peut faire à propos de cet exemple la remarque suivante : tous les intervalles successifs $(\alpha_0, \beta_0)(\alpha_1, \beta_1)\ldots$ ne comprennent pas les limites α et β. Si cette circonstance se produit pour l'équation

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha\ \varphi_0(a)>0}^{\beta} \mathrm{K}(x, a)\,da,$$

la fonction $\varphi(x)$ est indépendante de α et β. En effet, soit $\beta' > \beta$ et $\alpha' < \alpha$.

Il vient

$$\int_{\alpha\ \varphi_0(a)>0}^{\beta} \mathrm{K}(x, a)\,da = \int_{\alpha'\ \varphi(a)>0}^{\beta'} \mathrm{K}(x, a)\,da,$$

et, par suite, $\varphi(x)$ est solution de l'équation

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha'\ \varphi(a)>0}^{\beta'} \mathrm{K}(x, a)\,da,$$

quels que soient les nombres α' et β' répondant aux conditions indiquées. Ceci ne peut avoir lieu que si la fonction $\varphi(x)$ est indépendante de α et de β. En particulier, $\varphi(x)$ est alors solution de l'équation

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{-\infty\ \varphi(a)>0}^{+\infty} \mathrm{K}(x, a)\,da.$$

Quoique nous nous soyons placés dans un cas particulièrement avantageux, où on peut obtenir une solution par approximations successives, il est facile de montrer qu'on ne peut obtenir toutes les solutions par ce procédé. Dans l'exemple que nous venons de traiter, la solution $\varphi(x)$ doit être de la forme

$$\varphi(x) = 1 - x^2\left(1 - \frac{c}{8}\right)$$

avec

$$c = \int_{1 > x^2\left(1-\frac{c}{8}\right)} dt,$$

c est donné par l'équation

$$c^3 - 8c^2 + 32 = 0.$$

Cette équation a une racine négative et deux positives comprises respectivement entre 2 et 3, 7 et 8. Ces deux dernières donnent chacune une solution de l'équation donnée. Celle qui correspond à la racine positive comprise entre 2 et 3 est celle qui a été calculée par itération. L'autre solution ne peut être obtenue à l'aide de cette dernière méthode parce qu'elle n'est pas régulière dans le voisinage de $\lambda = 0$. Si, en effet, on remplace $\frac{1}{8}$ par λ dans les calculs, l'équation

$$c^3 - 8c^2 + 32 = 0$$

devient

$$\lambda c^3 - c^2 + 4 = 0$$

et elle a une racine qui croît indéfiniment lorsque λ tend vers zéro.

CHAPITRE II.

Les solutions approchées.

[**13**] Nous avons vu, par tout ce qui précède, que les équations du type de l'équation de M. Appell possèdent en général plusieurs solutions. Reprenons le cas de l'exemple 3^e du paragraphe 8; l'équation

$$\varphi(x, y) = K\pi + \int\int_{\varphi} [(x-a)^2 + (y-b)^2 - c^2]\, da\, db$$

admet une infinité de solutions formant deux séries linéaires, ce sont les cercles

$$\begin{aligned} &(C_1) \quad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - R_1^2 = 0, \qquad R_1^2 = \frac{c^2 + \sqrt{c^2 - 6K}}{3}, \\ &(C_2) \quad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - R_2^2 = 0, \qquad R_2^2 = \frac{c^2 - \sqrt{c^2 - 6K}}{3}, \end{aligned} \qquad c^2 - 6K > 0,$$

dépendant des deux paramètres α et β.

Nous avons déjà fait remarquer que ce résultat pouvait être prévu, parce que si l'on fait le changement de coordonnées défini par les égalités

$$\begin{aligned} x &= x' - \xi, \qquad & y &= y' - \eta, \\ a &= a' - \xi, \qquad & b &= b' - \eta, \end{aligned}$$

et si l'on pose

$$\varphi'(x', y') = \varphi[(x' - \xi), (y' - \eta)],$$

il vient

$$\varphi'(x', y') = K\pi + \int\int_{\varphi'(a', b')} [(x' - a')^2 + (y' - b')^2 - c^2]\, da'\, db'$$

et $\varphi'(x', y')$ est une solution de l'équation donnée, quels que soient ξ et η.

Ce résultat peut être généralisé. Pour fixer les idées, soit l'équation à trois variables

$$(1) \qquad \varphi(x, y, z) = f(x, y, z) + \iiint_{\varphi} K(x, y, z; a, b, c)\, da\, db\, dc$$

où l'intégration est étendue à tout l'intérieur de la surface $\varphi(a, b, c) = 0$.

Faisons un changement d'axes; soit $\varphi'(x', y', z')$, $f'(x', y', z')$ et $K'(x', y', z'; a', b', c')$ ce que deviennent les fonctions $\varphi(x, y, z)$, $f(x, y, z)$ et $K(x, y, z; a, b, c)$ respectivement. On a évidemment

$$(1\ bis) \qquad \varphi'(x', y', z') = f'(x', y', z') + \iiint_{\varphi'} K'(x', y', z'; a', b', c')\, da'\, db'\, dc';$$

si les fonctions f et f' sont de même forme ainsi que K et K', les équations (1) et (1 *bis*) sont identiques, et la fonction $\varphi'(x', y', z')$ est solution de l'équation (1).

Prenons l'équation de M. Appell :

$$f(x, y, z) = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2), \qquad K(x, y, z; a, b, c) = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}.$$

Ces fonctions ne changent pas de forme si on fait les deux changements d'axes définis par les égalités

$$(\mathrm{I}) \left\{ \begin{array}{l} x = x', \\ y = y', \\ z = z' - \zeta; \end{array} \right. \qquad (\mathrm{II}) \left\{ \begin{array}{l} x = x' \cos\theta - y' \sin\theta, \\ y = x' \sin\theta + y' \cos\theta, \\ z = z'. \end{array} \right.$$

Il en résulte que l'équation de M. Appell admet comme solutions toutes les surfaces obtenues par translation suivant Oz d'une solution quelconque, ou par rotation autour du même axe.

Une équation de la forme (1) peut donc admettre des solutions voisines d'une solution $\varphi(x, y, z)$ connue *a priori;* il est à remarquer que la connaissance de la fonction φ n'entraîne pas nécessairement celle des solutions voisines de φ; nous allons montrer que ces dernières sont toutes déterminées par une équation de Fredholm.

[**14**] Supposons que la fonction $\varphi(x, y, z)$ connue *a priori* soit continue sur la surface $\varphi(x, y, z) = 0$, ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre.

Soit $\varphi + \Delta\varphi$ une solution voisine de φ.

Posons

$$I = \iiint_{\varphi} K(x, y, z; a, b, c)\, da\, db\, dc; \quad I' = \iiint_{\varphi + \Delta\varphi} K(x, y, z; a, b, c)\, da\, db\, dc;$$

il vient

$$\Delta\varphi = I' - I.$$

Nous allons calculer la partie principale de $I' - I$.

Remarquons que, dans les conditions où nous sommes placés, les deux surfaces S et S' d'équations $\varphi = 0$ et $\varphi + \Delta\varphi = 0$ ont un voisinage d'ordre 1; leur distance normale δn en un point (a, b, c) de S tend vers o avec $\Delta\varphi$.

Nous pouvons écrire

$$\delta\varphi(a, b, c) = -\frac{\partial\varphi(a, b, c)}{\partial n}\delta n, \tag{2}$$

$\delta\varphi$ désignant maintenant une différentielle, car la fonction φ, qui est nulle sur S, est égale sur S' à $-\Delta\varphi$. Quant à $\frac{\partial\varphi(a, b, c)}{\partial n}$, c'est la dérivée prise suivant la normale extérieure à S au point (a, b, c).

Ceci posé, remarquons que la différence $I' - I$ est une intégrale étendue à tout le volume intérieur à l'une des surfaces S ou S' et extérieur à l'autre. Soit $d\sigma$ un élément de la surface S; un élément de volume sera $d\sigma\delta n$, et la partie principale de $I' - I$ est égale à

$$\int\int_S K(x, y, z; a, b, c)\, d\sigma\delta n,$$

l'intégrale étant étendue à toute la surface S d'équation $\varphi(a, b, c) = 0$.

On peut donc écrire :

$$\delta\varphi(x, y, z) = \int\int_S K(x, y, z; a, b, c)\, d\sigma\delta n,$$

ou, en vertu de la relation (2),

$$\delta\varphi(x, y, z) = -\int\int_S \frac{\delta\varphi(a, b, c)\, K(x, y, z; a, b, c)}{\frac{\partial\varphi(a, b, c)}{\partial n}} d\sigma.$$

Cette équation nous permet de calculer $\delta\varphi(x, y, z)$ en un point quelconque intérieur à la surface $\varphi(a, b, c) = 0$, connaissant les valeurs de (a, b, c) sur la surface; elle a la forme d'une équation de Fredholm mais n'en est pas une, parce que les deux points $M(x, y, z)$ et $P(a, b, c)$ ne sont pas contenus dans le même domaine.

Mais si nous prenons un point fixe M de coordonnées x, y, z sur la surface et un point variable P de cette même surface ayant pour coordonnées a, b, c, la valeur de $\delta\varphi$ au point M se déduit des valeurs de $\delta\varphi$ aux points P à l'aide d'une équation de Fredholm de la forme

$$\psi_M = -\int\int_S \frac{\psi_P K(M, P)}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_P} d\sigma_P. \tag{3}$$

[**15**] Si l'on est assuré que l'équation (1) admet des solutions voisines de (x, y, z), on voit par là que l'équation (3) admet au moins une solution; il est alors inutile

de rechercher par la méthode usuelle de Fredholm si le nombre -1 est une constante caractéristique du noyau

$$\frac{K(x, y, z; a, b, c)}{\frac{\partial\varphi(a, b, c)}{\partial n}}.$$

C'est ce qui arrive pour les équations envisagées au paragraphe (13) et en particulier pour l'équation de M. Appell, dont nous ferons l'étude aux chapitres III et IV.

Remarquons d'ailleurs que si K est une fonction symétrique des deux points M et P dont les coordonnées sont x, y, z et a, b, c respectivement, l'équation (3) est équivalente à une équation à noyau symétrique. En effet, la dérivée normale

$$\frac{\partial\varphi(a, b, c)}{\partial n}$$

garde un signe constant sur la surface S; supposons que l'on ait

$$\frac{\partial\varphi(a, b, c)}{\partial n} > 0$$

en tous les points de S.

L'équation (3) peut s'écrire :

$$\frac{\varphi(x, y, z)}{\sqrt{\frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial n}}} = \int\int_S \frac{K(x, y, z; a, b, c)}{\sqrt{\frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial n} \times \frac{\partial\varphi(a, b, c)}{\partial n}}} \times \frac{\varphi(a, b, c)}{\sqrt{\frac{\partial\varphi(a, b, c)}{\partial n}}} d\sigma,$$

et sous cette forme on voit qu'elle est à noyau symétrique. On sait, dans ce cas, qu'il se produit des simplifications importantes dans la théorie de l'équation de Fredholm.

[**16**] Supposons maintenant que dans l'équation (1) la fonction $f(x, y, z)$ dépend d'un certain paramètre ω; soit $f + \Delta f$ ce que devient cette fonction quand ω devient $\omega + \Delta\omega$.

Si l'équation

$$\varphi(x, y, z) + \Delta\varphi(x, y, z) = f(x, y, z) + \Delta f(x, y, z) + \int\int\int_{\varphi+\Delta\varphi} K(x, y, z; a, b, c)\, da\, db\, dc$$

admet une solution, il vient, en retranchant l'équation (1) de la précédente membre à membre

$$\Delta\varphi(x, y, z) = \Delta f(x, y, z) + I' - I,$$

en posant

$$I' = \int\int\int_{\varphi+\Delta\varphi} K(x, y, z; a, b, c)\, da\, db\, dc, \qquad I = \int\int\int_{\varphi} K(x, y, z; a, b, c)\, da\, db\, dc.$$

Évaluant la différence $I' - I$ comme au paragraphe (14), on arrive à l'équation

$$\delta\varphi(x, y, z) = \delta f(x, y, z) - \int\int_S \frac{\delta\varphi(a, b, c)\, K(x, y, z; a, b, c)}{\frac{\partial\varphi(a, b, c)}{\partial n}} d\sigma.$$

En un point $M(x, y, z)$ de la surface S la fonction $\delta\varphi(x, y, z)$ satisfait à une équation de Fredholm non homogène de la forme

$$\theta_M = \eta_{1M} - \int\int_S \frac{K(M, P)\theta_P}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_P} d\sigma_P. \tag{4}$$

[**17**] L'équation (4) admet une solution et une seule si le nombre -1 n'est pas une constante caractéristique du noyau

$$\frac{K(M, P)}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_P}.$$

S'il en est autrement, c'est-à-dire si l'équation (3) admet des solutions, à chacune d'elles correspond une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (4) admette des solutions. Nous allons former ces conditions.

A cet effet, considérons l'équation homogène associée de (3) :

$$\psi'_M = -\frac{1}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_M} \int\int_S \psi'_P K(P, M) d\sigma_P. \tag{5}$$

A chaque solution de l'équation (3) correspond une solution de l'équation (5) et réciproquement, parce que ces deux équations ont le même déterminant de Fredholm; soit ψ_i' une solution de l'équation (5).

Si l'équation (4) admet des solutions, on sait que l'on doit avoir

$$\int\int_S \psi'_{iM}\eta_{1M} d\sigma = 0. \tag{6}$$

S'il existe n solutions de l'équation (5), il existe n conditions analogues à la précédente, et ces conditions sont suffisantes pour qu'il y ait des solutions de l'équation (5).

[**18**] L'équation

$$\delta\varphi(x, y, z) = \delta f(x, y, z) - \int\int_S \frac{K(x, y, z; a, b, c)}{\frac{\partial\varphi(a, b, c)}{\partial n}} da\,db\,dc$$

peut être considérée comme étant de la forme

$$U(\varphi, \delta\varphi, x, y, z) = 0,$$

U étant une fonctionnelle de φ et de $\delta\varphi$ et une fonction de x, y, z. A ce titre, elle peut être considérée comme une généralisation des équations différentielles dans le calcul fonctionnel.

CHAPITRE III.

L'équation de M. Appell.

[**19**] Je vais me proposer d'appliquer les résultats du chapitre II à l'équation

$$(1) \qquad \varphi(x, y, z) = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \mathrm{K} + \int\int\int \frac{da\,db\,dc}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$

déjà signalée.

Voici comment on établit cette équation :

Soit une masse liquide homogène, dont on suppose la densité égale à 1 ; tous ses éléments sont supposés s'attirer suivant la loi de Newton et les unités sont choisies de telle façon que la constante de la gravitation universelle soit égale à l'unité. La masse liquide tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour d'un axe fixe OZ.

Rapportons le liquide à des axes rectangulaires ox, oy, oz entraînés dans le mouvement de rotation ; soient a, b, c les coordonnées d'un point quelconque P de la masse et

$$\rho = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c^2)}$$

la distance de ce point à un point M de coordonnées x, y, z.

Le potentiel newtonien en M a pour valeur

$$\mathrm{W} = \int\int\int_{\mathrm{V}} \frac{da\,db\,dc}{\rho} = \int \frac{dv}{\rho},$$

l'intégration étant étendue au volume V de la masse liquide.

Soit p la pression en M ; cette quantité est une fonction $p(x, y, z)$ des coordonnées de ce point, qui sur la surface libre prend une valeur constante C égale à la pression extérieure. Dans ces conditions, si l'on imagine le prolongement analytique de la fonction p à l'extérieur, supposons que la fonction

$$\varphi(x, y, z) = p(x, y, z) - \mathrm{C}$$

soit positive à l'intérieur de la masse, négative à l'extérieur et nulle sur la surface.

L'équation d'équilibre relatif est

$$dp = dW + \omega^2(xdx + ydy),$$

d'où

$$p - C = W + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + K,$$

K désignant une constante d'intégration.

On a ainsi pour tout point intérieur l'équation

$$\varphi(x, y, z) = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + K + \int_V \frac{dv}{\rho},$$

l'intégration étant étendue au volume V du liquide limité par la surface

$$\varphi(x, y, z) = 0.$$

La constante K sera déterminée par la condition que le volume de la masse liquide $\int_V dv$ est égal à une quantité donnée.

M. Appell fait observer que le prolongement analytique de p n'est point celui qui résulte de la relation

$$p - C = W + K + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

C'est le prolongement de la fonction p avec continuité des dérivées secondes; c'est celui qu'on obtiendrait par exemple pour le cas de la forme ellipsoïdale en prenant le même polynôme du deuxième degré à l'intérieur et à l'extérieur de la masse.

[**20**] On a supposé, pour établir l'équation (1), que la fonction

$$\varphi(x, y, z) = p(x, y, z) - C$$

était positive à l'intérieur de la masse. Cette supposition n'est pas nécessaire; si la fonction est négative à l'intérieur, l'équation (1) donne encore des positions d'équilibre, mais elles sont sûrement instables. En effet, dans ce cas la dérivée normale $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ est positive, ce qui signifie que la résultante de la force centrifuge et de l'attraction newtonienne est dirigée vers l'extérieur de la masse; on sait que dans ces conditions l'équilibre est sûrement instable. M. Poincaré a utilisé cette remarque pour démontrer qu'il ne peut exister des positions d'équilibre stable si l'on a

$$\omega^2 > 2\pi.$$

[**21**] On pourrait aisément montrer que les figures d'équilibre connues satisfont à l'équation (1). Nous nous contenterons de déterminer les ellipsoïdes d'équilibre parce que cela pourra nous être utile dans la suite.

Soit l'ellipsoïde

$$\text{(E)} \qquad \varphi(x, y\, z) = 1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) = 0,$$

où a peut être ou non différent de b.

Le potentiel en un point intérieur $M(x, y, z)$ est

$$W = \pi abc \int_0^\infty \left[\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} - 1\right] \frac{d\lambda}{g(\lambda)}$$

avec

$$g(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}.$$

Posons :

$$A = -\pi abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)g(\lambda)}, \qquad C = -\pi abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(c^2+\lambda)g(\lambda)},$$

$$B = -\pi abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(b^2+\lambda)d\lambda}, \qquad D = -\pi abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{g(\lambda)}.$$

Il vient :

$$W = D - Ax^2 - By^2 - Cz^2.$$

L'ellipsoïde (E) sera solution de l'équation (1) si a, b, c satisfont aux équations suivantes obtenues en identifiant les deux membres de (1) :

$$a^2\left(A - \frac{\omega^2}{2}\right) = b^2\left(B - \frac{\omega^2}{2}\right) = Cc^2,$$

$$K = -(D+1);$$

On doit avoir, de plus,

$$\frac{4}{3}\pi abc = V,$$

V étant le volume de la masse fluide.

La discussion des équations précédentes est connue[1].

On trouve des ellipsoïdes de révolution autour de oz (ellipsoïdes de Mac Laurin) et des ellipsoïdes à trois axes inégaux (Jacobi), suivant la valeur de ω; dans tous les cas, le petit axe coïncide avec l'axe de rotation.

[**22**] Tous ces faits connus étant rappelés pour la compréhension de ce qui va suivre, supposons que $\varphi(x, y, z)$ soit une solution quelconque de l'équation (1)

---

[1] Voir, par exemple, TISSERAND, *Traité de mécanique céleste*, tome II.

correspondant à la vitesse de rotation ω. D'après ce que nous avons vu au chapitre II, toute solution de l'équation (1) voisine de φ et correspondant à la vitesse $\omega + \delta\omega$ est déterminée par l'équation

$$\delta\varphi(x, y, z) = \omega\,\delta\omega(x^2 + y^2) + \delta K - \int\int_S \frac{\delta\varphi(a, b, c)}{\frac{\partial\varphi(a, b, c)}{\partial n}\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}\, d\sigma$$

qui est de la forme

$$\theta_M = A(x^2 + y^2)_M + B - \int\int_S \frac{\theta_P}{MP \times \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_P}\, d\sigma_P. \tag{2}$$

La constante A est bien connue.

Quant à B, c'est une constante que l'on doit déterminer après coup, de façon à ce que le volume de la masse fluide soit égal à V.

Nous nous plaçons dans le cas où la masse fluide reste invariable lorsque la vitesse angulaire varie. On doit donc avoir $\int dv = 0$, c'est-à-dire, si on se reporte au paragraphe (14) :

$$\int\int_S d\sigma\,\delta n = \int\int_S \frac{\delta\varphi(a, b, c)}{\frac{\partial\varphi(a, b, c)}{\partial n}}\, d\sigma = 0.$$

Toute solution de l'équation (2), pour être acceptable, devra donc satisfaire à la condition

$$\int\int_S \frac{\theta(a, b, c)}{\frac{\partial\varphi(a, b, c)}{\partial n}}\, d\sigma = 0. \tag{3}$$

[23] Nous avons déjà vu au paragraphe (13) que toute surface obtenue par une translation de φ suivant l'axe oz ou par rotation autour de cet axe est une solution de l'équation (1), d'où l'on conclut que l'équation homogène

$$\psi_M = -\int\int_S \frac{\psi_P}{MP \times \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_P}\, d\sigma \tag{4}$$

admet au moins les deux solutions

$$\varphi_z' \quad \text{et} \quad x\varphi_y' - y\varphi_x'.$$

Il n'est peut-être pas sans intérêt de démontrer directement ces propriétés.

Observons d'abord que

$$\frac{\partial\varphi(a, b, c)}{\partial n} = \varphi_a' \cos\alpha + \varphi_b' \cos\beta + \varphi_c' \cos\gamma,$$

α, β, γ étant les angles que fait la normale extérieure à S au point $P(a, b, c)$ avec les axes de coordonnées.

D'ailleurs

$$\cos\alpha = -\frac{\varphi_a'}{\sqrt{\varphi_a'^2 + \varphi_b'^2 + \varphi_c'^2}}, \qquad \cos\beta = -\frac{\varphi_b'}{\sqrt{\varphi_a'^2 + \varphi_b'^2 + \varphi_c'^2}},$$

$$\cos\gamma = -\frac{\varphi_c'}{\sqrt{\varphi_a'^2 + \varphi_b'^2 + \varphi_c'^2}},$$

on doit prendre le signe — si l'on suppose la normale positive du côté où φ décroît, par exemple si $\varphi < 0$ à l'extérieur de la masse et si l'on prend la normale extérieure.

On tire de là :

$$\frac{\partial\varphi(a, b, c)}{\partial n} = -\sqrt{\varphi_a'^2 + \varphi_b'^2 + \varphi_c'^2}.$$

Montrons maintenant que

$$(5) \quad \varphi_z'(x, y, z) = -\int\!\!\int_S \frac{1}{\rho}\cos\gamma\, d\sigma, \qquad \rho = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}.$$

S'il en est ainsi, la fonction $\varphi_z'(x, y, z)$ sera solution de l'équation (4).

Appliquons la formule de Green à l'intégrale du second membre, il vient :

$$\int\!\!\int_S \frac{1}{\rho}\cos\gamma\, d\sigma = \int\!\!\int\!\!\int_V \frac{\partial\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial c}\, dv,$$

la dernière intégrale étant étendue au volume V intérieur à S. En réalité, il faudrait introduire une petite sphère, parce que la fonction $\dfrac{\partial\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial c}$ n'est pas continue dans tout le volume; mais les deux intégrales auxiliaires ainsi introduites sont nulles.

D'autre part, par hypothèse, $\varphi(x, y, z)$ étant une solution de l'équation (1), il vient en dérivant par rapport à Z :

$$\varphi_z'(x, y, z) = \int\!\!\int\!\!\int_V \frac{\partial\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial z}\, dv = -\int\!\!\int\!\!\int_V \frac{\partial\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial c}\, dv,$$

ce qui établit la relation (5).

De même, nous pouvons écrire

$$\int\int_S \frac{1}{\rho}\frac{b\varphi_a' - a\varphi_b'}{\sqrt{\varphi_a'^2 + \varphi_b'^2 + \varphi_c'^2}}\, d\sigma$$

$$= \int\int_S \frac{1}{\rho}(a\cos\beta - b\cos\alpha)\, d\sigma = \int\int\int_V \left(a\frac{\partial\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial b} - b\frac{\partial\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial a}\right) dv$$

$$= \int\int\int_V \frac{ay - bx}{\rho^3}\, dv = x\int\int\int_V \frac{\partial\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial b}\, dv - y\int\int\int_V \frac{\partial\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial a}\, dv,$$

en appliquant la formule Green.

En dérivant l'équation (1) par rapport à x puis à y, il vient :

$$\varphi_x'(x, y, z) = \omega^2 x + \int\int\int_V \frac{\partial\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial x}\, dv = \omega^2 x - \int\int\int_V \frac{\partial\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial a}\, dv,$$

$$\varphi_y'(x, y, z) = \omega^2 y + \int\int\int_V \frac{\partial\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial y}\, dv = \omega^2 y - \int\int\int_V \frac{\partial\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial b}\, dv.$$

D'où

$$y\varphi_x'(x, y, z) - x\varphi_y'(x, y, z)$$

$$= x\int\int\int_V \frac{\partial\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial b}\, dv - y\int\int\int_V \frac{\partial\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial a}\, dv = \int\int_S \frac{1}{\rho}\frac{b\varphi_a' - a\varphi_b'}{\sqrt{\varphi_a'^2 + \varphi_b'^2 + \varphi_c'^2}}\, d\sigma.$$

Cette équation prouve que la fonction $y\varphi_x' - x\varphi_y'$ satisfait à l'équation (4), ainsi que nous l'avions annoncé.

[**24**] Puisque l'équation (4) admet des solutions, le nombre -1 est une constante caractéristique du noyau.

Soit alors $\psi'(x, y, z)$ une solution de l'équation associée à l'équation (4)

$$\psi'(x, y, z) = -\int\int_S \frac{\psi'(a, b, c)}{\rho\,\frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial n}}\, d\sigma.$$

On peut écrire cette équation :

$$\psi'(x, y, z)\frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial n} = -\int\int_S \psi'(a, b, c)\frac{\partial\varphi(a, b, c)}{\partial n}\cdot\frac{1}{\rho\,\frac{\partial\varphi(a, b, c)}{\partial n}}\, d\sigma,$$

ce qui prouve que la fonction $\psi'(x, y, z)\dfrac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial n}$ est solution de l'équation (4). On en conclut que $\psi'(x, y, z)$ est de la forme $\dfrac{\psi(x, y, z)}{\dfrac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial n}}$.

D'après la théorie de l'équation de Fredholm, pour que l'équation (2) admette des solutions, il faut et il suffit que chaque solution de l'équation associée satisfasse à la condition

$$\int\int_S [A(x^2+y^2)+B]\frac{\psi(x, y, z)}{\dfrac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial n}}\,d\sigma = 0.$$

Nous reviendrons plus tard sur cette condition. Nous montrerons seulement maintenant qu'elle se réduit à

$$(6) \qquad \int\int_S \frac{(x^2+y^2)\,.\,\psi(x, y, z)}{\dfrac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial n}}\,d\sigma = 0.$$

Il suffit de faire voir que

$$\int\int_S \frac{\psi(x, y, z)}{\dfrac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial n}}\,d\sigma = 0,$$

c'est-à-dire que toute solution de l'équation (4) satisfait à la condition de volume (3).

A cet effet, nous montrerons que la nouvelle équation intégrale

$$(7) \qquad \varpi(x, y, z) = B - \int\int_S \frac{\varpi(a, b, c)}{\rho\dfrac{\partial\varphi(a, b, c)}{\partial n}}\,d\sigma$$

admet une solution lorsqu'on donne à B une valeur convenable.

[**25**] Si on fait $B = -2K$ dans l'équation (7) (K étant la constante de l'équation (1) correspondant à la solution $\varphi(x, y, z)$), elle admet comme solution la fonction

$$x\varphi_x' + y\varphi_y' + z\varphi_z' - 2\varphi.$$

Pour le montrer, calculons l'intégrale

$$I = \int\int_S \frac{a\varphi_a' + b\varphi_b' + c\varphi_c'}{\rho\sqrt{\varphi_a'^2 + \varphi_b'^2 + \varphi_c'^2}}\,d\sigma;$$

On peut écrire :

$$\mathrm{I} = -\int\!\!\int_{\mathrm{S}} \frac{a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma}{\rho}\, d\sigma;$$

$$\mathrm{I} = -\int\!\!\int_{\mathrm{S}} \frac{(a-x)\cos\alpha + (b-y)\cos\beta + (c-z)\cos\gamma}{\rho}\, d\sigma$$

$$-x\int\!\!\int_{\mathrm{S}} \frac{\cos\alpha}{\rho}\, d\sigma - y\int\!\!\int_{\mathrm{S}} \frac{\cos\beta}{\rho}\, d\sigma - z\int\!\!\int_{\mathrm{S}} \frac{\cos\gamma}{\rho}\, d\sigma.$$

Appliquons la formule de Green comme au paragraphe 23 (en tenant compte de ce que les fonctions sous le signe $\int\!\!\int$ ne sont pas partout continues sur S).

La première intégrale du deuxième membre devient :

$$2\int\!\!\int\!\!\int_{\mathrm{V}} \frac{dv}{\rho}.$$

D'autre part, on voit que

$$\int\!\!\int_{\mathrm{S}} \frac{\cos\alpha}{\rho}\, d\sigma = \int\!\!\int\!\!\int_{\mathrm{V}} \frac{\partial\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial a}\, dv = -\int\!\!\int\!\!\int_{\mathrm{V}} \frac{\partial\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial x}\, dv = \omega^2 x - \varphi_x',$$

$$\int\!\!\int_{\mathrm{S}} \frac{\cos\beta}{\rho}\, d\sigma = \int\!\!\int\!\!\int_{\mathrm{V}} \frac{\partial\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial b}\, dv = -\int\!\!\int\!\!\int_{\mathrm{V}} \frac{\partial\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial y}\, dv = \omega^2 y - \varphi_y',$$

$$\int\!\!\int_{\mathrm{S}} \frac{\cos\gamma}{\rho}\, d\sigma = \int\!\!\int\!\!\int_{\mathrm{V}} \frac{\partial\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial c}\, dv = -\int\!\!\int\!\!\int_{\mathrm{V}} \frac{\partial\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial z}\, dv = -\varphi_z';$$

Il s'ensuit que

$$\mathrm{I} = -\omega^2(x^2+y^2) - 2\int\!\!\int\!\!\int_{\mathrm{V}} \frac{dv}{\rho} + x\varphi_x' + y\varphi_y' + z\varphi_z'.$$

D'après l'équation (1), l'intégrale triple qui figure au second membre est égale à

$$\varphi(x, y, z) - \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2) - \mathrm{K},$$

ce qui donne finalement pour I la valeur

$$\mathrm{I} = x\varphi_x' + y\varphi_y' + z\varphi_z' - 2\varphi + 2\mathrm{K}.$$

En définitive, on peut écrire, puisque la fonction φ est nulle sur la surface S,

$$x\varphi_x' + y\varphi_y' + z\varphi_z' - 2\varphi = -2\mathrm{K} + \int\!\!\int_{\mathrm{S}} \frac{a\varphi_a' + b\varphi_b' + c\varphi_c' - 2\varphi(a, b, c)}{\rho\sqrt{\varphi_a'^2 + \varphi_b'^2 + \varphi_c'^2}}\, d\sigma.$$

Si le point x, y, z appartient à la surface S, cette équation se réduit à l'équation suivante de Fredholm :

$$x\varphi_x' + y\varphi_y' + z\varphi_z' = -2K + \int\int_S \frac{a\varphi_a' + b\varphi_b' + c\varphi_c'}{\rho\sqrt{\varphi_a'^2 + \varphi_b'^2 + \varphi_c'^2}} d\sigma, \tag{8}$$

qui n'est autre que l'équation (7), où l'on a fait $B = -2K$.

La proposition est démontrée et les conclusions du paragraphe (24) sont établies.

[**26**] On peut interpréter géométriquement l'équation qui précède ; on voit de suite que si ε est une quantité infiniment petite, la surface S' d'équation

$$\varphi(x, y, z) + \varepsilon(x\varphi_x' + y\varphi_y' + z\varphi_z') = 0$$

est homothétique de la surface S, le centre d'homothétie étant l'origine des coordonnées.

De là une conclusion importante : les volumes intérieurs aux deux surfaces S et S' sont évidemment différents; par suite, la solution $x\varphi_x' + y\varphi_y' + z\varphi_z'$ ne satisfait pas à la condition de volume (3) du paragraphe (22); on peut écrire, au contraire,

$$\int\int_S \frac{x\varphi_x' + y\varphi_y' + z\varphi_z'}{\frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial n}} d\sigma \neq 0.$$

On déduit aisément qu'une solution quelconque de l'équation (7) où B est une constante quelconque ne satisfait pas à la condition de volume (3) dont il vient d'être question.

CHAPITRE IV.

Les figures ellipsoïdales d'équilibre.

Dans ce dernier chapitre, nous appliquerons les résultats déjà acquis au cas où la solution de l'équation de M. Appell, connue *a priori*, est un ellipsoïde; nous montrerons qu'on peut aisément retrouver ainsi les figures ellipsoïdales d'équilibre de Poincaré. L'étude qui va suivre comprendra deux subdivisions. Il nous faudra d'abord résoudre l'équation homogène

$$\psi(x, y, z) = -\int\int_S \frac{\psi(a, b, c)}{\rho \dfrac{\partial\varphi(a, b, c)}{\partial n}} d\sigma \tag{1}$$

dans le cas où la surface

$$\varphi(a, b, c) = 0$$

est un ellipsoïde.

Puis, nous démontrerons que l'équation

$$\theta(x, y, x) = A(x^2 + y^2) + B - \int\int_S \frac{\theta(a, b, c)}{\rho \dfrac{\partial\varphi(a, b, c)}{\partial n}} d\sigma \tag{2}$$

admet des solutions que nous calculerons.

I. — Résolution de l'équation (1).

[**27**] Soit S un ellipsoïde d'équilibre dont l'équation est :

$$\varphi(x, y, z) = 1 - \left[\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2}\right] = 0.$$

L'équation est prise sous cette forme pour que la dérivée $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$, prise selon la normale extérieure, soit négative. Il peut se faire que $b^2 = 0$ si la surface S appartient à la série des ellipsoïdes de révolution de Mac-Laurin.

Remarquons que l'on doit avoir

$$c^2 > b^2,$$

car tout ellipsoïde d'équilibre a son petit axe dirigé suivant OZ.

Il semble tout indiqué de définir la position d'un point G de l'ellipsoïde à l'aide de ses deux coordonnées elliptiques μ et ν. Rappelons les formules bien connues pour le cas d'un ellipsoïde à trois axes inégaux :

$$x^2 = \frac{\rho^2}{b^2 c^2}\mu^2\nu^2, \quad y^2 = \frac{\rho^2 - b^2}{b^2(b^2 - c^2)}(\mu^2 - b^2)(\nu^2 - b^2), \quad z^2 = \frac{\rho^2 - c^2}{c^2(c^2 - b^2)}(\mu^2 - c^2)(\nu^2 - c^2).$$

Dans le but de transformer l'équation (1), remarquons que $\dfrac{\partial\varphi(a, b, c)}{\partial n}$ a une signification géométrique très simple.

En effet, le plan tangent à S au point G' de coordonnées a, b, c a pour équation :

$$(X - a)\varphi_a', + (Y - b)\varphi_b' + (Z - c)\varphi_c' = 0.$$

Sa distance D' au centre de l'ellipsoïde est donnée par la formule

$$\text{(3)} \qquad D' = -\frac{a\varphi_a' + b\varphi_b' + c\varphi_c'}{\sqrt{\varphi_a'^2 + \varphi_b'^2 + \varphi_c'^2}} = -\frac{2}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}} \qquad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n} < 0\right).$$

Nous pouvons alors écrire l'équation (1) comme suit :

$$\text{(4)} \qquad \eta(\mu, \nu) = \frac{1}{2}\int\int_S \frac{D'}{r}\eta(\mu', \nu')d\sigma,$$

r désignant la distance de deux points G et G' dont les coordonnées elliptiques sont respectivement μ, ν, et μ', ν'.

Au lieu de cette équation, nous allons considérer l'équation plus générale :

$$\text{(5)} \qquad \eta(\mu, \nu) = \lambda\int\int_S \frac{D'}{r}\eta(\mu', \nu')d\sigma,$$

λ étant une constante arbitraire.

A) *Les fonctions fondamentales.*

L'équation (5) étant du type étudié par Fredholm admet un certain nombre de solutions (fonctions fondamentales) pour des valeurs convenables de λ (constantes caractéristiques). Nous pouvons nous dispenser ici d'appliquer la méthode de résolution de Fredholm. Les travaux de Lamé et de Liouville vont nous donner immédiatement les solutions ainsi que les constantes caractéristiques.

[28] On trouve dans l'important mémoire de Poincaré sur les formes d'équilibre d'une masse fluide (¹) un résumé des principales formules concernant les fonctions de Lamé. Pour la compréhension de ce qui va suivre, rappelons les faits suivants empruntés au mémoire précédemment cité.

Une fonction de Lamé d'ordre n est une fonction R de ρ, qui affecte l'une des quatre formes suivantes :

$$R = P_n, \quad R = \sqrt{\rho^2 - b^2}\,P_{n-1}, \quad R = \sqrt{\rho^2 - c^2}\,P_{n-1}, \quad R = \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}\,P_{n-2},$$

P_n, P_{n-1}, P_{n-2} étant des polynômes en ρ de degrés n, $n-1$ et $n-2$ respectivement, et qui satisfont à l'équation différentielle

$$(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)\frac{d^2R}{d\rho^2} + (2\rho^2 - b^2 - c^2)\frac{dR}{d\rho} - [k(k+1)\rho^2 - B_k]\,R = 0$$
$$(k = n,\ n-1,\ n-2)..$$

B_k est une constante convenablement choisie, variable avec le degré du polynôme P correspondant.

A chaque fonction R correspondent deux fonctions, M et N, que l'on obtient en remplaçant dans R : ρ, $\sqrt{\rho^2 - b^2}$, $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ par μ, $\sqrt{\mu^2 - b^2}$, $\sqrt{\mu^2 - c^2}$ en ce qui concerne M, et par ν, $\sqrt{\nu^2 - b^2}$, $\sqrt{\nu^2 - c^2}$ en ce qui concerne N.

Posons avec Liouville :

$$S = (2n+1)R\int_\rho^\infty \frac{d\rho}{R^2\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}, \qquad l' = \frac{D'}{\rho\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}},$$

D′ ayant la même signification qu'au paragraphe (27).

Soient M, N, deux fonctions de Lamé relatives au point G; M′, N′ les deux fonctions correspondantes de μ' et ν' relatives au point G′; r la distance GG′; D, l les fonctions correspondantes à D′, l' relatives au point G.

Liouville a démontré l'égalité suivante :

$$\iint_S \frac{l'M'N'}{r}\,d\sigma = \frac{4\pi RS}{2n+1}\,MN,$$

ce qui prouve que MN est solution d'une équation de Fredholm, dont le noyau est $\frac{D'}{r}$ et la constante caractéristique

$$\lambda_n = \frac{2n+1}{4\pi RS\rho\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}.$$

(¹) *Acta mathematica*, 1885.

[**29**] La théorie de Fredholm nous permet d'affirmer que toute solution de l'équation (5) correspondant à une constante caractéristique λ_n est une combinaison linéaire d'un nombre fini de fonctions $M_i N_i$. Nous allons rechercher maintenant les fonctions fondamentales correspondantes à $\lambda = \frac{1}{2}$.

Tout d'abord on est assuré que le nombre $\frac{1}{2}$ est constante caractéristique; en effet, l'équation (1) admet, comme on le sait, les solutions φ_z' et $x\varphi_y' - y\varphi_x'$; d'autre part, il vient

$$\varphi_z' = -\frac{2z}{\rho^2 - c^2} = -\frac{2}{\rho\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}} M_1 N_1$$

en posant

$$M_1 = \sqrt{\mu^2 - c^2}, \qquad N_1 = \sqrt{\nu^2 - c^2};$$

M_1 et N_1 sont des fonctions de Lamé du 1^er^ ordre et le produit $M_1 N_1$ doit être solution de l'équation (4) déduite de l'équation (1).

Soit R_1 et S_1 les fonctions correspondantes à M_1 et N_1; on peut écrire

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{4\pi R_1 S_1 \rho\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}$$

ou

$$\frac{4\pi R_1 S_1}{3} = \frac{2}{\rho\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}.$$

De même, si l'ellipsoïde fondamental S a ses trois axes inégaux, la fonction $x\varphi_y' - y\varphi_x'$ est solution de l'équation (1). Mais cette fonction est de la forme Kxy, K étant une constante facile à déterminer; et on peut écrire

$$xy = \frac{\rho\sqrt{\rho^2 - b^2}}{b^2 c^2 \sqrt{b^2 - c^2}} \cdot \mu\nu\sqrt{(\mu^2 - b^2)(\nu^2 - b^2)} = \frac{\rho\sqrt{\rho^2 - b^2}}{b^2 c^2\sqrt{b^2 - c^2}} M_2 N_2$$

en posant

$$M_2 = \mu\sqrt{\mu^2 - b^2} \qquad N_2 = \nu\sqrt{\nu^2 - b_2}.$$

Le produit $M_2 N_2$, qui est un produit de Lamé, correspond donc aussi à la constante caractéristique $\lambda = \frac{1}{2}$ lorsque l'ellipsoïde S n'est pas de révolution (dans le cas contraire, on a $M_2 N_2 \equiv 0$), et l'on peut écrire :

$$\frac{4\pi R_2 S_2}{5} = \frac{2}{\rho\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}.$$

Il est visible d'ailleurs qu'un produit de Lamé $M_i N_i$ correspondra à $\lambda = \frac{1}{2}$, si l'on a

$$\frac{R_1 S_1}{3} = \frac{R_i S_i}{2i+1}. \tag{6}$$

On est ainsi conduit à discuter l'équation (6) et rechercher si elle est vérifiée par une valeur de ρ correspondant à un ellipsoïde d'équilibre. Cette discussion a été faite par Poincaré [1]. Nous allons en donner un résumé succinct.

B) *Discussion de l'équation* $\frac{R_1 S_1}{3} = \frac{R_i S_i}{2i+1}$.

[**30**] Soit l'équation plus générale

$$F = \frac{R_h S_h}{2h+1} = \frac{R_i S_i}{2i+1}. \tag{7}$$

Pour toute valeur de ρ qui satisfait à l'équation $F = 0$, les produits $M_i N_i$ et $M_h N_h$ correspondent à la même constante caractéristique; on voit alors de suite l'intérêt qu'il y a à étudier l'équation (7), intérêt qui n'est pas très apparent dans le travail de Poincaré.

Liouville a démontré que toute fonction $R_i S_i$ est de degré -1 en ρ. Si R_i renferme $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ en facteur, cette fonction s'annule pour $\rho^2 = c^2$, mais ne peut s'annuler pour $\rho^2 > c^2$, car toute fonction R est croissante avec ρ^2.

Il s'ensuit que les racines de l'équation

$$\frac{F}{R_h^2} = \frac{S_h}{R_h} \cdot \frac{1}{2h+1} - \left(\frac{R_i}{R_h}\right)^2 \frac{S_i}{R_i} \frac{1}{2i+1} = 0, \tag{8}$$

qui sont supérieures à C^2, sont les mêmes que celles de l'équation (7).

Séparons les racines de l'équation (8) à l'aide du théorème de Rolle. Écrivons que la dérivée du premier membre est nulle :

$$\frac{d}{d\rho} \frac{S_h}{(2h+1)R_h} - \left(\frac{R_1}{R_h}\right)^2 \frac{d}{d\rho} \frac{S_i}{(2i+1)R_i} - \frac{S_i}{(2i+1)R_i} \frac{d}{d\rho}\left(\frac{R_i}{R_h}\right)^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{S_i}{(2i+1)R_i} \frac{d}{d\rho}\left(\frac{R_i}{R_h}\right)^2 = 0,$$

---

[1] *Acta Mathematica*, 1885, p. 321.

car, d'après la définition des fonctions S, il vient

$$\frac{d}{d\rho}\frac{S_h}{(2h+1)R_h}=\frac{-1}{R_h^2\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}};$$

l'équation ainsi obtenue se réduit à

$$\frac{d}{d\rho}\frac{R_i^2}{R_h^2}=0,$$

puisque S_i ne peut s'annuler.

Les racines de l'équation (8) sont donc séparées par celles de l'équation précédente qui peut s'écrire

(9) $$R_i'R_h-R_h'R_i=0$$

en posant

$$R_i'=\frac{dR_i}{d\alpha}\qquad \alpha=\int_\rho^\infty\frac{d\rho}{\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}}.$$

Cherchons à séparer les racines de l'équation (9) elle-même. Il vient, en annulant la dérivée du premier membre par rapport à α,

(10) $$R_i''R_h-R_h''R_i=0,$$

où

$$R_i''=\frac{d^2R_i}{d\alpha^2}.$$

Rappelons que toute fonction R doit satisfaire à l'équation différentielle

$$(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)\frac{d^2R_i}{d\rho^2}+(2\rho^2-b^2-c^2)\frac{dR_i}{d\rho}=[i(i+1)\rho^2-B_i]R_i,$$

qui peut s'écrire à l'aide des notations que nous avons adoptées,

$$R_i''=[i(i+1)\rho^2-B_i]R_i,$$

et l'équation (10) devient, en supprimant le facteur R_iR_h, lequel ne peut s'annuler pour $\rho^2>c^2$,

$$[i(i+1)-h(h+1)]\rho^2-B_i+B_h=0.$$

Il est clair qu'une pareille équation ne peut avoir qu'une seule racine supérieure à c^2; l'équation (9) aura au plus deux racines non inférieures à c^2, et l'équation (7) aura au plus trois racines supérieures à c^2 en y comprenant la racine ∞.

Si l'équation (9) n'a pas de racine supérieure à c^2, le rapport $\frac{R_i}{R_h}$ est toujours croissant ou décroissant quand ρ^2 croît de c^2 à ∞. Supposons qu'il soit croissant alors

$$\frac{d}{d\rho}\left(\frac{R_i}{R_h}\right)^2>0,\qquad \frac{d}{d\rho}\frac{F}{R_h^2}<0.$$

Il s'ensuit que l'expression $\frac{F}{R_h^2}$ est toujours positive, car elle tend vers zéro quand ρ^2 augmente indéfiniment (R_h croît indéfiniment avec ρ).

Si le rapport $\frac{R_i}{R_h}$ était décroissant, on trouverait $\frac{F}{R_h^2} < 0$.

[**31**] Revenons maintenant à l'équation (6).

Supposons d'abord que R_i contienne $R_1 = \sqrt{\rho^2 - c^2}$ en facteur. Alors

$$\frac{R_i}{R_1} = \varphi P_i \qquad (\varphi \text{ est égal à } \rho \text{ ou } \sqrt{\rho^2 - b^2} \text{ ou } \sqrt{\rho^2 - c^2}).$$

D'après Liouville, l'équation $P_i = 0$ a toutes ses racines comprises entre zéro et c^2; il en est de même de l'équation $\frac{dP_i}{d(\rho^2)} = 0$.

Lorsque ρ^2 croît de c^2 à ∞, la fonction P_i est croissante et positive, car elle s'annule pour $\rho^2 = c^2$; le rapport $\frac{R_i}{R_1}$ est croissant et, d'après ce que l'on a vu plus haut, l'équation (6) n'a pas de racine supérieure à c^2.

Le résultat est différent si l'on prend pour R_i une fonction de Lamé non divisible par $\sqrt{\rho^2 - c^2}$. En effet, pour ρ très grand, on peut regarder $\frac{1}{\rho}$ comme un infiniment petit du premier ordre. En négligeant les infiniment petits du deuxième ordre, on a

$$R_1 S_1 = R_i S_i = \frac{1}{\rho},$$

car on sait que

$$\lim S_i \rho^{i+1} = 1 \quad \text{pour} \quad \rho = \infty.$$

On tire de là :

$$\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_i S_i}{2i+1} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2i+1}\right) > 0 \quad \text{si} \quad i \neq 1.$$

Pour $\rho^2 = c^2$, $R_1 S_1$ s'annule par hypothèse, $R_i S_i$ ne s'annule pas; le premier membre de l'équation (6) est donc négatif. Il en résulte que le nombre de racines de cette équation comprises entre c^2 et ∞ est impair; comme le nombre maximum de ces racines est 2 (il y en a trois au maximum en y comprenant ∞), il faut qu'il soit égal à 1. En résumé, à chaque fonction R_i de la forme

$$R_i = \sqrt{\rho^2 - b^2}\, P_{n-1} \quad \text{ou} \quad R_i = P_n$$

correspond une racine de l'équation (6).

Il nous faut rechercher maintenant si l'ellipsoïde correspondant est une forme d'équilibre, c'est-à-dire s'il appartient à la série des ellipsoïdes de révolution; or, à celle des ellipsoïdes de Jacobi.

C) *Les ellipsoïdes de bifurcation.*

[**32**] Soit ρ_i^2 la racine de l'équation (6), qui est supérieure à c^2. Il est facile de prouver que l'ellipsoïde

$$\frac{x^2+y^2}{\rho_i^2}+\frac{z^2}{\rho_i^2-c^2}-1=0$$

est un ellipsoïde de Mac Laurin pour une certaine valeur ω_i de la vitesse de rotation. Nous pouvons, pour simplifier, prendre c comme unité de longueur; alors $c^2=1$.

Rappelons les résultats suivants (¹) :

Pour chaque valeur de ω inférieure à une certaine limite ω_0, il existe deux ellipsoïdes de révolution qui sont en équilibre. Pour $\omega=\omega_0$, les deux ellipsoïdes se confondant en un seul. Soit ρ_0^2 la valeur de ρ^2 qui lui correspond ($\rho^2>1$). Lorsque ω croît de 0 à ∞, une valeur de ρ^2 croît de 1 à ρ_0^2 et l'autre décroît de ∞ à ρ_0^2.

Il s'ensuit qu'à chaque racine ρ_i^2 de l'équation (6) correspond une valeur de ω telle que l'ellipsoïde

$$\frac{x^2+y^2}{\rho_i^2}+\frac{z^2}{\rho_i^2-c^2}-1=0$$

soit en équilibre lorsqu'il tourne avec la vitesse ω_i autour de oz.

[**33**] Nous allons montrer maintenant qu'il existe des ellipsoïdes de Jacobi, tels que la valeur de ρ^2 correspondante soit solution de l'équation (6) pour une valeur convenable de i.

Rappelons d'abord que si l'on pose $R_2=\rho\sqrt{\rho^2-b^2}$, on a

$$\frac{R_1S_1}{3}=\frac{R_2S_2}{5}$$

pour tout ellipsoïde de Jacobi. La réciproque est vraie : si la relation précédente est vérifiée pour un certain ellipsoïde, cela signifie que c'est une figure d'équilibre indifférent et, par suite, l'ellipsoïde en question est un ellipsoïde de Jacobi.

Poincaré a démontré que l'on peut choisir b et c de façon que les deux équations

$$\frac{R_1S_1}{3}=\frac{R_2S_2}{5},$$

$$\frac{R_1S_1}{3}=\frac{R_iS_i}{2i+1}$$

(¹) Voir, par exemple, TISSERAND, *Traité de mécanique céleste*, tome II.

admettent une racine commune ρ_i^2, à condition que la fonction R_i ne soit pas divisible par $\sqrt{\rho^2 - b^2}$ ni par $\sqrt{\rho^2 - c^2}$. Les seules fonctions R_i qui répondent à ces conditions sont de la forme

$$R_i = P_i.$$

Cela prouve que l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{\rho_i^2} + \frac{y^2}{\rho_i^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho_i^2 - c^2} - 1 = 0$$

est un ellipsoïde de Jacobi, tel que l'équation de Fredholm (1), relative à cet ellipsoïde, admet la solution $M_i N_i$ distincte des solutions élémentaires φ_z' et $x\varphi_y' - y\varphi_x'$.

[**34**] Les ellipsoïdes d'équilibre qui ont été définis dans les paragraphes (32) et (33) et qui satisfont à l'équation

$$\frac{R_1 S_1}{3} = \frac{R_i S_i}{2i+1}$$

pour une valeur convenable de i ont été nommés ellipsoïdes de *bifurcation* par Poincaré. Pour lui, ce sont les ellipsoïdes d'équilibre pour lesquels s'annule un *coefficient de stabilité*. Nous pouvons ajouter que l'équation de Fredholm

$$\psi(x, y, z) = \frac{1}{2} \int\int_S \frac{D'}{r} \psi(a, b, c) d\sigma,$$

qui leur est relative, admet au moins une solution en dehors des solutions connues *a priori;* mais il peut se faire que pour certains ellipsoïdes de bifurcation il y ait plus d'une telle solution. Nous n'aborderons pas cette question; il faudrait étudier un système de plusieurs équations de la forme

$$\frac{R_1 S_1}{3} = \frac{R_i S_i}{2i+1} = \frac{R_h S_h}{2h+1} = \frac{R_n S_n}{2n+1} \cdots.$$

Dans ce qui va suivre, nous mettrons en évidence le fait suivant : Soit ω la vitesse de rotation correspondant à un ellipsoïde de bifurcation; pour la vitesse $\omega + \delta\omega$, il existera deux séries de formes d'équilibre : une série d'ellipsoïdes et une série de formes voisines des ellipsoïdes signalées pour la première fois par Poincaré.

II. — Résolution de l'équation

$$(2)\quad \theta(x, y, z) = \mathrm{A}(x^2 + y^2) + \mathrm{B} - \int\!\!\int_{\mathrm{S}} \frac{\theta(a, b, c)}{r\,\dfrac{\partial\varphi(a, b, c)}{\partial n}}\, d\sigma.$$

[**35**] Nous allons montrer pour commencer que l'équation (2) admet une solution que nous représentons par $\theta(x, y, z)$; on sait que si H_1, H_2, H_n sont les solutions de l'équation homogène (1) du paragraphe (27), une solution quelconque de l'équation (2) est de la forme

$$\Theta(x, y, z) = \theta(x, y, z) + \alpha_1, \mathrm{H}_1 + \alpha_2, \mathrm{H}_2 + \ldots + \alpha_n, \mathrm{H}_n$$

(les α_i sont des constantes arbitraires.)

Si l'on se reporte aux paragraphes (16) et (22), on voit que l'équation (2) a été obtenue à partir de l'équation de M. Appell :

$$\varphi(x, y, z) = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \mathrm{K} + \int\!\!\int\!\!\int_{\mathrm{V}} \frac{dv}{r}.$$

Si cette dernière équation admet une solution lorsque ω devient $\omega + \delta\omega$, et K devient $\mathrm{K} + \delta\mathrm{K}$, il en est de même de l'équation (2).

D'autre part, on a vu au paragraphe (21) que l'équation de M. Appell est satisfaite par l'ellipsoïde

$$\varphi(x, y, z) = 1 - \left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right] = 0,$$

a, b, c étant donnés en fonction de la vitesse ω et du volume V par les trois équations

$$a^2\left(\mathrm{A} - \frac{\omega^2}{2}\right) = b^2\left(\mathrm{B} - \frac{\omega^2}{2}\right) = c^2\mathrm{C} \qquad (\mathrm{A, B, C}, \text{ fonctions connues de } a, b, c)$$

$$\frac{4}{3}\pi abc = \mathrm{V}.$$

Laissons V invariable et différentions par rapport à a, b, c, ω; on voit que $\delta\varphi$ est de la forme

$$\delta\varphi = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \mathrm{c}^{\mathrm{te}},$$

α, β, γ étant exprimés en fonction d'un seul paramètre; on conclut de là que l'équation de M. Appell admet comme solution, pour la vitesse $\omega + \delta\omega$, un ellipsoïde voisin de $\varphi(x, y, z) = 0$. Comme on l'a fait remarquer, cela prouve que l'équation (2) admet une solution pour une valeur convenable de B et, par suite, lorsque B est quelconque d'après le paragraphe (24). Nous avons montré que cette solution $\Theta(x, y, z)$ satisfait bien à la condition de volume (3) du paragraphe (22), puisque nous avons supposé le volume invariable lorsque ω varie.

[35] Il n'est pas sans intérêt de démontrer directement l'existence des solutions de l'équation (2); d'ailleurs, le calcul qui va suivre nous permettra d'exprimer ces solutions. Il suffit (voir paragraphe 24) de faire voir que si H_i est une solution quelconque de l'équation homogène (1), on a :

$$\int\int_S (x^2+y^2)\frac{H_i(x, y, z)}{\frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial n}}d\sigma = 0,$$

l'intégration étant étendue à toute la surface de l'ellipsoïde S, dont l'équation est $\varphi(x, y, z)=0$. Cette condition peut d'ailleurs être remplacée par la suivante :

$$(11) \qquad \int\int_S lH_i(x, y, z)(x^2+y^2)d\sigma = 0, \qquad l=\frac{D}{\rho\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}},$$

D ayant la même signification qu'au paragraphe (27), puisque d'après la formule (3) de ce même paragraphe on peut écrire

$$\frac{1}{\frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial n}} = -\frac{D}{2} = -\frac{l}{2}\rho\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)},$$

et que ρ est une constante, ainsi que b et c, sur toute la surface S.

[36] Nous allons montrer tout d'abord que la fonction x^2+y^2 est de la forme

$$x^2+y^2 = u_0 + u\mathrm{MN} + u'\mathrm{M'N'},$$

u_0, u et u' étant des constantes, tandis que MN et M'N' sont deux produits de Lamé d'ordre 2.

A cet effet, posons :

$$(12) \qquad \rho^2(\rho^2-b^2)+(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)+(\rho^2-c^2)\rho^2 = 3(\rho^2-h^2)(\rho^2-h'^2).$$

Alors ρ^2-h^2 et $\rho^2-h'^2$ sont deux fonctions de Lamé R et R'.

On peut voir que

$$(13) \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{h^2}+\dfrac{y^2}{h^2-b^2}+\dfrac{z^2}{h^2-c^2}-1 = (\rho^2-h^2)(\mu^2-h^2)(\nu^2-h^2) = \mathrm{RMN}; \\ \dfrac{x^2}{h'^2}+\dfrac{y^2}{h'^2-b^2}+\dfrac{z^2}{h'^2-c^2}-1 = (\rho^2-h'^2)(\mu^2-h'^2)(\nu^2-h'^2) = \mathrm{R'M'N'}. \end{cases}$$

Démontrons, par exemple, la première équation (13); il suffit de montrer que le premier membre est nul pour $\rho^2 = h^2$ ou $\mu^2 = h^2$, ou $\nu^2 = h^2$.

Rappelons que dans le cas où $b \neq 0$ (ellipsoïde de Jacobi) on a :

$$x^2 = \frac{\rho^2 \mu^2 \nu^2}{b^2 c^2}, \qquad y^2 = \frac{(\rho^2 - b^2)(\mu^2 - b^2)(\nu^2 - c^2)}{b^2(b^2 - c^2)}, \qquad z^2 = \frac{(\rho^2 - c^2)(\mu^2 - c^2)(\nu^2 - c^2)}{c^2(c^2 - b^2)},$$

si on fait $\rho^2 = h^2$, par exemple, dans le premier membre de la première équation (13); il devient

$$\frac{b^2 c^2}{\mu^2 \nu^2} + \frac{b^2(b^2 - c^2)}{(\mu^2 - b^2)(^2 - b^2)} + \frac{c^2(c^2 - b^2)}{(\mu^2 - c^2)(\nu^2 - c^2)} - 1,$$

et l'on vérifie sans peine que cette quantité est identiquement nulle.

Aux deux équations (13) on peut joindre l'équation

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} - 1 = 0, \tag{14}$$

qui exprime que le point x, y, z appartient à l'ellipsoïde S.

Les coordonnées d'un point quelconque de la surface de cet ellipsoïde peuvent donc s'exprimer en fonction des produits RMN et R'M'N' à l'aide des trois équations linéaires (13) et (14), à moins toutefois que leur déterminant soit nul. Ce déterminant peut s'écrire :

$$\begin{vmatrix} (\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2) & \rho^2(\rho^2 - c^2) & \rho^2(\rho^2 - b^2) \\ (h^2 - b^2)(h^2 - c^2) & h^2(h^2 - c^2) & h^2(h^2 - b^2) \\ (h'^2 - b^2)(h'^2 - c^2) & h'^2(h'^2 - c^2) & h'^2(h'^2 - b^2) \end{vmatrix}.$$

Il est équivalent au suivant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} (\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2) & \rho^2(\rho^2 - c^2) & [(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2) + \rho^2(2\rho^2 - b^2 - c^2)] \\ (h^2 - b^2)(h^2 - c^2) & h^2(h^2 - c^2) & 0 \\ (h'^2 - b^2)(h'^2 - c^2) & h'^2(h'^2 - c^2) & 0 \end{vmatrix},$$

obtenu en ajoutant les trois colonnes du premier et en tenant compte de la relation (12) qui définit les fonctions h^2 et h'^2.

Le déterminant peut s'écrire

$$\Delta = [(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2) + \rho^2(2\rho^2 - b^2 - c^2)]\, b^2(h^2 - c^2)(h'^2 - c^2)(h^2 - h'^2).$$

Le facteur entre crochets n'est visiblement pas nul. D'ailleurs, on tire de la relation (12)

$$h^2 + h'^2 = \frac{2}{3}(b^2 + c^2), \qquad h^2 h'^2 = \frac{b^2 c^2}{3},$$

h^2 et h'^2 sont les racines de l'équation

$$3X^2 - 2(b^2 + c^2)X + b^2c^2 = 0,$$

lesquelles sont distinctes et différentes de c^2 si $b^2 \neq c^2$, c'est-à-dire si l'ellipsoïde S n'est pas de révolution autour de l'axe ox; on sait qu'il n'existe aucune figure d'équilibre affectant cette forme.

On en conclut que le déterminant Δ n'est pas nul et que la fonction $x^2 + y^2$ est bien de la forme

$$x^2 + y^2 = u_0 + u\mathrm{MN} + u'\mathrm{M'N'}.$$

Il est à remarquer que le calcul précédent n'est pas valable si l'ellipsoïde fondamental considéré S est de révolution, car alors $b = 0$. Mais dans ce cas, les formules se simplifient. La relation (12) montre que l'on a

$$h^2 = 0, \qquad h'^2 = \frac{2c^2}{3}.$$

L'équation de l'ellipsoïde S, laquelle s'écrit

$$\frac{x^2 + y^2}{\rho^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} - 1 = 0$$

nous donne

$$x^2 + y^2 = \rho^2\left(1 - \frac{z^2}{\rho^2 - c^2}\right) = \frac{\rho^2}{c^4}\left[c^2(\mu^2 + \nu^2) - \mu^2\nu^2\right],$$

$$x^2 + y^2 = \frac{\rho^2}{c^4}\left[\frac{1}{2}\mu^2\nu^2 - \frac{3}{2}\left(\mu^2 - \frac{2c^2}{3}\right)\left(\nu^2 - \frac{2c^2}{3}\right) + \frac{2}{3}c^4\right]$$

ou

$$x^2 + y^2 = \frac{\rho^2}{c^4}\left[\frac{1}{2}\mathrm{MN} - \frac{3}{2}\mathrm{M'N'} + \frac{2}{3}c^4\right];$$

cette dernière relation montre que $x^2 + y^2$ est encore de la forme indiquée.

[**37**] Montrons maintenant que l'équation (2) admet une solution de la forme

$$\theta(x, y, z) = v_0 + v\mathrm{MN} + v'\mathrm{M'N'},$$

v_0, v et v' étant des constantes convenables.

Il faut tout d'abord, comme on l'a vu au paragraphe (35), démontrer l'égalité (11). Elle peut s'écrire

$$u_0 \int\!\!\int_S l\mathrm{H}_i d\sigma + u\int\!\!\int_S l\mathrm{H}_i\mathrm{MN}\,d\sigma + u'\int\!\!\int_S l\mathrm{H}_i\mathrm{M'N'}\,d\sigma = 0.$$

La première intégrale est nulle, car la condition $\int\int_S l\mathrm{H}_i d\sigma = 0$ exprime que l'équation (7) du paragraphe (24) a une solution.

Les deux dernières intégrales sont nulles aussi en vertu d'une formule de Liouville

$$\int\int_S l\mathrm{MNM}_i\mathrm{N}_i d\sigma = 0$$

où MN et $\mathrm{M}_i\mathrm{N}_i$ sont deux produits de Lamé différents et relatifs aux mêmes valeurs de μ et ν. (Voir Poincaré, *Acta mathematica*, 1885.)

Substituons à $\theta(x, y, z)$ dans l'équation (2) la fonction $v_0 + v\mathrm{MN} + v'\mathrm{M'N'}$; nous montrerons qu'on peut déterminer v_0, v et v' par la méthode des coefficients indéterminés. Il vient

$$\text{(12)} \qquad v_0 + v\mathrm{MN} + v'\mathrm{M'N'} = \mathrm{A}u_0 + \mathrm{B} + \mathrm{A}u\mathrm{MN} + \mathrm{A}u'\mathrm{M'N'}$$
$$- v_0\int\int \frac{d\sigma}{r\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{\mathrm{G'}}} - v\int\int_S \frac{\mathrm{MN_{G'}}d\sigma}{r\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{\mathrm{G'}}} - v'\int\int \frac{\mathrm{M'N'_{G'}}d\sigma}{r\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{\mathrm{G'}}}.$$

Soient λ et λ' les deux constantes caractéristiques de l'équation (1), qui correspondent respectivement aux deux produits de Lamé MN et M'N'. Alors, on a

$$\mathrm{MN_G} = \lambda\int\int_S \frac{\mathrm{MN_{G'}}d\sigma}{r\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{\mathrm{G'}}}, \qquad \mathrm{M'N'_G} = \lambda'\int\int_S \frac{\mathrm{M'N'_{G'}}d\sigma}{r\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{\mathrm{G'}}},$$

et les deux dernières intégrales de la relation précédente se réduisent à

$$\frac{\mathrm{MN}}{\lambda} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{M'N'}}{\lambda'}$$

respectivement.

D'autre part, l'intégrale

$$\int\int_S \frac{d\sigma}{r\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{\mathrm{G'}}}$$

se réduit à une constante; en effet, dans l'équation (8) du paragraphe (25), on voit que

$$x\varphi_x' + y\varphi_y' + z\varphi_z' = 2$$

et que, par suite,

$$\int\int_S \frac{d\sigma}{r\frac{\partial\varphi(a, b, c)}{\partial n}} = -\int\int_S \frac{d\sigma}{r\sqrt{\varphi_a'^2 + \varphi_b'^2 + \varphi_c'^2}} = -(\mathrm{K}+1).$$

Alors, la relation (12) devient :

$$\left(v + \frac{v}{\lambda} - Au\right)MN + \left(v' + \frac{v'}{\lambda'} - Au'\right)M'N' + v_0 - v_0(K + 1) - Au_0 - B = 0.$$

Elle se réduit à une identité si l'on prend

$$v_0 = -\frac{Au_0 + B}{K},$$

$$v = \frac{Au\lambda}{\lambda + 1},$$

$$v' = \frac{Au'\lambda'}{\lambda' + 1}.$$

[**38**] Une solution quelconque de l'équation (2) est donc de la forme suivante (on conserve les notations déjà adoptées).

$$\Theta(x, y, z) = v_0 + vMN + v'M'N' + \alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2 + \ldots + \alpha_n H_n.$$

Nous devons rappeler que la constante B qui figure dans l'équation (2) doit être choisie après coup de façon que la fonction $\Theta(x, y, z)$ satisfasse à la condition(1).

$$\iint_S \frac{\Theta(x, y, z)}{\frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial n}} d\sigma = 0.$$

On sait qu'un produit de Lamé quelconque satisfait à cette condition; il faut donc choisir B de façon que l'on ait

$$v_0 \iint_S \frac{d\sigma}{\frac{d\varphi(x, y, z)}{\partial n}} = 0.$$

L'intégrale

$$\iint_S \frac{d\sigma}{\frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial n}}$$

n'étant pas nulle $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right.$ garde un signe constant sur $\left.S\right)$, il faut que

$$v_0 = 0,$$

c'est-à-dire que

$$B = -Au_0.$$

(1) Voir paragraphe 22.

Il s'ensuit que toute solution acceptable au point de vue physique est de la forme

$$\Theta(x, y, z) = v\mathrm{MN} + v'\mathrm{M'N'} + \alpha_1 \mathrm{H}_1 \ldots \alpha_n \mathrm{H}_n,$$

où v et v' sont des constantes bien déterminées et les α_i des constantes arbitraires.

III. — Les figures d'équilibre.

Les calculs précédents nous fournissent toutes les surfaces d'équilibre voisines d'un ellipsoïde d'équilibre connu qui soit de bifurcation. Si ε est un infiniment petit arbitraire, ces surfaces ont pour équation approchée

$$\varphi + \varepsilon\Theta(x, y, z) = 0.$$

On peut en distinguer de deux sortes; autrement dit, ces surfaces forment deux séries linéaires, comme l'a dit Poincaré, l'ellipsoïde de bifurcation $\varphi = 0$ appartenant à la fois aux deux séries :

1° Les surfaces

$$\varphi + \varepsilon(v\mathrm{MN} + v'\mathrm{M'N'}) = 0,$$

qui sont des ellipsoïdes, puisque MN et M'N' sont des fonctions du deuxième degré de x, y et z, et les surfaces

$$\varphi + \varepsilon(v\mathrm{MN} + v'\mathrm{M'N'}) + \varepsilon_1 \mathrm{M}_1\mathrm{N}_1 + \varepsilon_2 \mathrm{M}_2\mathrm{N}_2 = 0,$$

$\mathrm{M}_1\mathrm{N}_1$ et $\mathrm{M}_2\mathrm{N}_2$ étant les produits de Lamé correspondant à φ' et $x\varphi' y - y\varphi' x$; elles appartiennent à la même série que les précédentes, puisqu'elles s'en déduisent par translation et rotation.

2° Les surfaces

$$\varphi + \varepsilon(v\mathrm{MN} + v'\mathrm{M'N'}) + [\varepsilon_i \mathrm{M}_i\mathrm{N}_i \ldots],$$

de formes ellipsoïdales, mais différentes des ellipsoïdes; ces figures ont été étudiées par Poincaré dans son mémoire des *Acta Mathematica*, déjà signalé.

CONCLUSION.

On a pu voir, à la lecture de ce Mémoire, qu'il ne contient pas de résultat essentiellement nouveau; j'ai seulement essayé de montrer comment la connaissance des propriétés de l'équation de Fredholm pouvait servir à l'étude des équations intégrales non linéaires. En particulier dans le dernier chapitre, les développements sont parallèles à ceux de Poincaré, mais ils me paraissent plus simples que ces derniers. On évite d'abord les longues considérations nécessaires à l'établissement du théorème fondamental de Poincaré, à savoir qu'un ellipsoïde est de bifurcation lorsqu'un des coefficients de stabilité s'annule. D'autre part, le calcul de ces coefficients est assez compliqué. La discussion de l'équation générale

$$\frac{R_i S_i}{2i+1} = \frac{R_h S_h}{2h+1},$$

dont on ne voit pas immédiatement l'utilité dans le mémoire des *Acta Mathematica*, nous apparaît maintenant comme nécessaire; il s'agit tout simplement de rechercher si deux produits de Lamé d'ordre différent peuvent correspondre à une même constante caractéristique. A remarquer que nous trouvons ici un exemple intéressant d'équation de Fredholm relativement simple, et cependant nous sommes dans un cas singulier, puisque l'équation avec second membre admet des solutions, quelle que soit la constante caractéristique considérée. Enfin, il me semble que le rôle joué par cette équation de Fredholm montre un peu le degré de difficulté de la résolution d'une équation intégrale non linéaire.