SUR

LES SUITES RÉCURRENTES NON LINÉAIRES

ET SUR

LES FONCTIONS GÉNÉRATRICES DE CES SUITES,

PAR S. LATTÈS,

Professeur à l'Université de Toulouse.

INTRODUCTION.

Les seules relations de récurrence dont l'étude ait été faite jusqu'ici d'une façon générale paraissent être les relations de récurrence linéaires. Étant donnée la suite

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots,$$

on suppose que u_n soit lié aux p termes qui le précèdent par une relation de la forme

$$u_{n+1} = a_1(n)u_1 + a_2(n)u_2 + \ldots + a_p(n)u_p.$$

L'étude de pareilles relations remonte à Lagrange (1) et à Laplace (2). Elle a été reprise de nos jours, avec toutes les ressources et toute la rigueur de l'analyse moderne, par divers auteurs; il nous suffira de rappeler à ce sujet le célèbre Mémoire de M. Poincaré (3) et les travaux fondamentaux de M. Pincherle (4).

---

(1) LAGRANGE, *Sur l'intégration d'une équation différentielle à différences finies, qui contient la théorie des suites récurrentes* (Œuvres, t. I). — *Recherches sur les suites récurrentes* (Œuvres, t. IV). — *Mémoire sur l'expression du terme général des séries récurrentes* (Œuvres, t. V).

(2) LAPLACE, *Théorie analytique des probabilités*, livre I; *Calcul des fonctions génératrices* (Œuvres, t. VII). — *Mémoire sur les suites* (Œuvres, t. X.). — *Recherches sur l'intégration des équations différentielles aux différences finies* (Œuvres, t. VIII.)

(3) POINCARÉ, *Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies* (American Journal of Mathem., t. VII, 1885).

(4) PINCHERLE, *Sur la génération des systèmes récurrents au moyen d'une équation diffé-*

Laplace a introduit dans l'étude de ces suites récurrentes une fonction qu'il appelle la *fonction génératrice* de la suite. Étant donnée la suite récurrente

$$u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots,$$

la fonction génératrice de cette suite est la série entière

$$F(z) = u_0 + u_1 z + \ldots + u_n z^n + \ldots.$$

Le but de ce travail est l'étude, sous certaines hypothèses, des relations de récurrence *non linéaires*, mais *à coefficients constants*, de la forme

$$u_{n+p} = f(u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+p-1}),$$

où f est une fonction holomorphe, définie dans le domaine d'un point double de la relation, c'est-à-dire d'un point u vérifiant l'équation

$$u = f(u, u, \ldots, u).$$

Dans la première partie, j'établis diverses propositions relativement à de pareilles relations de récurrence; je montre comment u_n s'exprime en fonction de n et d'un certain nombre de fonctions holomorphes des premiers termes $u_0, u_1, \ldots u_{p-1}$ de la suite; j'étudie ensuite les relations d'ordre inférieur à n contenues dans une relation donnée d'ordre n; enfin, je montre que le théorème démontré par M. Poincaré, relativement à la limite du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ dans une suite récurrente linéaire, subsiste pour les suites que j'étudie.

Dans la deuxième partie, j'étudie la nature de la fonction analytique

$$F(z) = u_0 + u_1 z + \ldots + u_n z^n + \ldots$$

que j'appelle encore la *fonction génératrice* de la suite récurrente. M. Fatou (¹) a étudié cette fonction dans le cas où u_{n+1} est lié à u_n par une relation de récurrence du premier ordre. Il a démontré, sous certaines hypothèses, que $F(z)$ *est une fonction méromorphe de* z dont les pôles sont connus, lorsque la relation est donnée, et sont indépendants de la valeur de u_0, assujetti seulement à être pris dans le domaine du point double. J'étends le théorème de M. Fatou aux relations de récurrence d'ordre

---

rentielle linéaire (Acta Mathematica, t. XVI, 1893). — *Delle funzioni ipergeometriche e di varie questioni ad esse attinenti.* (Giornale di Battaglini, t. XXXII, 1894.) — *Le operazioni distributive e le loro applicazioni all' Analisi* (en collaboration avec M. Amaldi, Bologne, 1901, Zanichelli, édit.).

Signalons aussi l'ouvrage récent de MM. Guldberg et Wallenberg, *Theorie der linearen Differenzengleichungen* (Teubner, édit. 1911), qui contient une bibliographie très complète de tous les travaux relatifs aux équations de récurrence linéaires.

(¹) P. Fatou, *Sur une classe remarquable de séries de Taylor* (Annales de l'École Normale, 3e série, t. XXVII, 1910).

quelconque. Sous certaines hypothèses, *la fonction génératrice* $F(z)$ *est encore une fonction méromorphe de* z, dont les pôles peuvent être déterminés indépendamment des valeurs initiales u_0, u_1, ... u_{p-1} de la suite, assujetties seulement à être prises dans le domaine du point double. La méthode que j'emploie, basée sur l'emploi de l'expression générale de u_n donnée dans la première partie, me permet d'obtenir sous forme explicite le développement de la fonction méromorphe $F(z)$ qui résulte du théorème de M. Mittag-Leffler.

Sur quelques exemples simples, j'ai pu étudier la fonction génératrice même dans le cas où les valeurs initiales ne sont plus voisines du point double : c'est ainsi que j'ai pu étudier complètement la série $F(z)$ dans le cas où u_{n+1} est lié à u_n par la relation homographique

$$u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}.$$

La fonction $F(z)$ est alors méromorphe quel que soit u_0, mais la forme de la série canonique de Mittag-Leffler change suivant la place de u_0 dans le plan des u_0.

J'indique, en terminant, les difficultés qui se présentent lorsqu'on ne fait plus les hypothèses que j'ai admises dans ce travail relativement au point double de la relation de récurrence et aux *multiplicateurs* correspondant à ce point double [1].

PREMIÈRE PARTIE.

[**1**] Les relations de récurrence que nous étudions ici sont de la forme

$$u_{n+p} = f(u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+p-1}), \tag{1}$$

où f désigne une fonction donnée de p variables indépendantes assujettie à des restrictions que nous spécifierons plus loin.

Une pareille relation peut être envisagée à deux points de vue. En premier lieu, elle permet de définir une suite indéfinie de nombres :

$$u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}, \ldots, u_n, \ldots; \tag{2}$$

lorsqu'on se donne les p premiers termes de la suite u_0, u_1, ..., u_{p-1} : nous dirons que c'est une *relation de récurrence d'ordre p*. Mais on peut aussi l'envisager comme une *équation aux différences finies d'ordre p*. Intégrer cette équation, c'est définir u_n

---

[1] J'ai publié quelques-uns des résultats de ce travail dans les deux notes suivantes : *Sur la convergence des relations de récurrence* (Comptes rendus, 2 mai 1910). — *Sur les séries de Taylor à coefficients récurrents* (Comptes rendus, 30 mai 1910).

comme fonction de n et des p valeurs initiales u_0, u_1, ..., u_{p-1}. Si on se place à ce dernier point de vue, n ne représente plus nécessairement un entier, mais une variable continue; u_n est alors une fonction $\varphi(n)$ de cette variable; u_{n+1}, u_{n+2}, ... désignent $\varphi(n+1)$, $\varphi(n+2)$, ...

Nous supposons *essentiellement que f ne dépend de n que par l'intermédiaire de* u_n, u_{n+1}, ..., u_{n+p-1}; par exemple, si f est un polynôme, les coefficients seront supposés constants, *indépendants de n*; si ce polynôme est linéaire, l'équation (1) est une équation linéaire à coefficients constants.

On sait que les équations aux différences finies ont été surtout étudiées dans le cas des équations linéaires, à coefficients constants ou non : dans l'étude actuelle, nous supposons les coefficients constants, mais l'équation n'est plus supposée linéaire.

Dans le cas des équations linéaires, il existe une profonde analogie entre la théorie des équations différentielles et la théorie des équations aux différences finies. Cette analogie, mise en évidence par les travaux déjà anciens sur les équations à coefficients constants, se retrouve dans les résultats obtenus par les géomètres modernes relativement aux équations linéaires à coefficients variables [1]. Il est à présumer qu'une analogie semblable avec la théorie des équations différentielles va se poursuivre pour les équations de récurrence non linéaires, et cette remarque nous servira de guide dans l'étude des équations (1).

[2] De même que l'intégration d'une équation différentielle d'ordre p peut se ramener à celle d'un système de p équations différentielles du premier ordre à p fonctions inconnues, on pourra ramener l'étude d'une relation de récurrence d'ordre p à l'étude d'un système de p relations récurrentes du premier ordre à p fonctions inconnues de la variable n. A cet effet, étant donnée l'équation (1), considérons la substitution auxiliaire

$$(3)\qquad \begin{cases} X_1 = x_2, \\ X_2 = x_3, \\ \vdots \\ X_{p-1} = x_p, \\ X_p = f(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x_p), \end{cases}$$

liant les variables x_1, x_2, ..., x_p aux variables X_1, X_2, ..., X_p. Si l'on donne à x_1, x_2, ..., x_p les valeurs respectives

$$x_1 = u_n,\ x_2 = u_{n+1},\ \ldots,\ x_{p-1} = u_{n+p-2},\ x_p = u_{n+p-1},$$

la substitution (2) fournit pour X_1, X_2, ..., X_p les valeurs

$$X_1 = u_{n+1},\ X_2 = u_{n+2},\ \ldots,\ X_{p-1} = u_{n+p-1},\ X_p = f(u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+p-1}) = u_{n+p}.$$

---

(1) Voir les travaux cités plus haut.

On pourra donc définir la suite récurrente

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_{p-1},\ \ldots,\ u_n,\ \ldots,$$

par l'*itération* indéfinie de la substitution (3) à partir des valeurs initiales

$$x_1 = u_0,\ x_2 = u_1,\ \ldots,\ x_p = u_{p-1}.$$

A ces valeurs, la substitution fera correspondre les valeurs

$$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_p;$$

à ces dernières, les valeurs

$$u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_{p+1},$$

et ainsi de suite.

On voit donc que l'étude des équations récurrentes de la forme (1) est, en définitive, un cas particulier de l'étude de l'itération des transformations ponctuelles à p variables. Ayant développé cette dernière étude dans divers travaux (1), je me bornerai ici à utiliser les résultats démontrés ailleurs en les appliquant aux substitutions de la forme (3).

[3] Nous nous limiterons, comme dans l'étude générale de l'itération, à étudier la relation de récurrence (1) dans le domaine d'un point double. Nous appelons *point double* de la relation (1) un nombre α vérifiant l'équation

$$\alpha = f(\alpha,\ \alpha,\ \ldots,\ \alpha).$$

Si l'on prend comme valeur commune des p premiers termes $u_0,\ u_1,\ \ldots,\ u_{p-1}$ de la suite (2) la valeur α, tous les termes de cette suite coïncident avec α.

Nous supposerons la fonction f de p variables qui figure dans (1) *définie dans le domaine du point analytique $u_n = \alpha,\ u_{n+1} = \alpha,\ \ldots,\ u_{n+p-1} = \alpha$; nous la supposerons, en outre, analytique et régulière dans le domaine de ce point* (2).

Si la suite (2) des nombres u_n a une limite, cette limite est nécessairement égale à α. On peut toujours supposer $\alpha = 0$, en remplaçant la suite des nombres u_n par la suite des nombres $u_n - \alpha$. Nous prendrons donc la relation de récurrence (1) sous la forme

$$u_{n+p} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \ldots + a_{p-1} u_{n+p-1} + \mathrm{F}(u_n,\ u_{n+1},\ \ldots,\ u_{n+p-1}). \tag{4}$$

(1) *Sur les équations fonctionnelles qui définissent une courbe ou une surface invariante par une transformation* (Annali di Mathematica, 1906). — *Sur les formes réduites des transformations ponctuelles dans le domaine d'un point double* (Bulletin de la Société mathématique de France, t. XXXIX, 1911).

(2) On pourrait se borner à supposer l'existence d'un certain nombre de dérivées; mais ce nombre de dérivées varie avec les grandeurs relatives des nombres $|S_1|$, $|S_2|$, ... définis plus loin; il m'a donc paru préférable de me placer dans le domaine complexe et de supposer que la fonction f est analytique, afin d'éviter des longueurs.

F étant une fonction, holomorphe dans le domaine de l'origine, dont le développement en série entière ne contiendra pas de termes du premier degré.

La substitution auxiliaire (3) devient alors

$$(5)\qquad \begin{cases} X_1 = x_2, \\ X_2 = x_3, \\ \vdots \\ X_{p-1} = x_p, \\ X_p = a_0 x_1 + a_1 x_2 + \ldots + a_{p-1} x_p + F(x_1, x_2, \ldots, x_p). \end{cases}$$

L'équation en S, qui joue un rôle fondamental dans la théorie de l'itération à plusieurs variables, est ici :

$$\begin{vmatrix} -S & 1 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ 0 & -S & 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -S & 1 & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots\ldots & -S & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & \ldots\ldots & a_{p-2} & a_{p-1} - S \end{vmatrix} = 0.$$

Multiplions les éléments de la deuxième colonne par S, ceux de la troisième par S^2, ceux de la quatrième par S^3, et ainsi de suite, et ajoutons-les aux éléments de la première colonne. Le déterminant se réduit au terme écrit alors à la dernière ligne et à la première colonne, et l'équation en S est ici :

$$(6)\qquad a_0 + a_1 S + a_2 S^2 + \ldots + a_{p-1} S^{p-1} - S^p = 0.$$

Nous appellerons les racines $S_1, S_2, \ldots, S_p$ de cette équation les *multiplicateurs* relatifs au point double considéré (relatifs, par conséquent, à l'origine).

Nous supposerons les *multiplicateurs distincts, différents de zéro et de modules inférieurs à* 1. *En outre, nous supposerons qu'aucun des multiplicateurs n'est le produit de puissances à exposants entiers positifs ou nuls des autres multiplicateurs.*

[**4**] Parmi les résultats que fournit la théorie de l'itération à plusieurs variables appliquée au système (5), j'appelle l'attention du lecteur sur le suivant (¹), que nous utiliserons dans la deuxième partie de ce travail.

Sous les hypothèses faites plus haut relativement aux multiplicateurs, on peut toujours ramener la transformation ponctuelle (5) *à être linéaire à l'aide d'un changement de variables.* D'une façon plus précise, on peut déterminer p fonctions holomorphes.

(¹) *Sur les formes réduites, etc...* (travail cité plus haut).

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ des p variables $y_1, y_2, \ldots, y_p$ s'annulant avec ces variables et telles qu'en posant

$$\begin{cases} x_1 = \lambda_1(y_1, y_2, \ldots, y_p), \\ x_2 = \lambda_2(y_1, y_2, \ldots, y_p), \\ \vdots \\ x_p = \lambda_p(y_1, y_2, \ldots, y_p), \end{cases} \qquad \begin{cases} X_1 = \lambda_1(Y_1, Y_2, \ldots, Y_p), \\ X_2 = \lambda_2(Y_1, Y_2, \ldots, Y_p), \\ \vdots \\ X_p = \lambda_p(Y_1, Y_2, \ldots, Y_p), \end{cases}$$

la transformation ponctuelle (5), après qu'on a effectué ce changement de variables, se transforme en la substitution linéaire

$$Y_1 = S_1 y_1, \quad Y_2 = S_2 y_2, \quad \ldots\ldots, \quad Y_p = S_p y_p.$$

[**5**] Relativement à l'équation de récurrence (4), équivalente au système (5), ce résultat peut s'énoncer de la façon suivante :

Soit donnée la relation de récurrence (4) admettant pour point double l'origine, et soient $u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}$ les p premiers termes donnés de la suite récurrente. On peut déterminer p fonctions holomorphes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, nulles à l'origine, des p variables $u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}$, telles qu'en posant

$$(7) \quad \begin{cases} \lambda_1(u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}) = y_1, \\ \lambda_2(u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}) = y_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \lambda_p(u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}) = y_p, \end{cases}$$

il en résulte

$$\begin{cases} \lambda_1(u_1, u_2, \ldots, u_p) = S_1 y_1, \\ \lambda_2(u_1, u_2, \ldots, u_p) = S_2 y_2, \\ \vdots \\ \lambda_p(u_1, u_2, \ldots, u_p) = S_p y_p. \end{cases}$$

Et plus généralement, par l'application répétée de la même proposition, on aura, quel que soit n, les égalités

$$(9) \quad \begin{cases} \lambda_1(u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+p-1}) = S_1^n y_1, \\ \lambda_2(u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+p-1}) = S_2^n y_2, \\ \vdots \\ \lambda_p(u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n=p-1}) = S_p^n y_p. \end{cases}$$

[**6**] On peut déduire de là l'expression du terme général u_n de la suite récurrente

$$u_0, u_1, u_2, u_{p-1}, \ldots, u_n, \ldots$$

en fonction de n et des p premiers termes $u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}$. Des équations (7), on tire, en effet, u_0, u_1, ..., u_{p-1} en fonction de y_1, y_2, ..., y_p, et on obtient ainsi des fonctions holomorphes de y_1, y_2, ..., y_p s'annulant lorsque y_1, y_2, ..., y_p deviennent tous nuls : cela résulte de la théorie générale, qui montre que le déterminant fonctionnel $\dfrac{D(y_1, y_2, \ldots, y_p)}{D(u_0, u_1, \ldots, u_{p-1})}$ n'est pas nul à l'origine. En effectuant ainsi l'inversion du système (7), on obtient

$$(10) \qquad \begin{cases} u_0 \ \ = \lambda_{-1}(y_1, y_2, \ldots, y_p), \\ u_1 \ \ = \lambda_{-2}(y_1, y_2, \ldots, y_p), \\ \vdots \\ u_{p-1} = \lambda_{-p}(y_1, y_2, \ldots, y_p), \end{cases}$$

λ_{-1}, λ_{-2}, ..., λ_{-p} étant des fonctions holomorphes de y_1, y_2, ..., y_p. Le système (9) ne différant du système (7) que par les nouvelles valeurs données aux variables, on voit que l'on tire du système (9) l'expression suivante de u_n en fonction de n :

$$u_n = \lambda_{-1}(S_1^n y_1, S_2^n y_2, \ldots, S_p^n y_p),$$

c'est-à-dire

$$(11) \quad u_n = \lambda_{-1}[S_1^n \lambda_1(u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}),\ S_2^n \lambda_2(u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}),\ \ldots,\ S_p^n \lambda_p(u_0, u_1, \ldots, u_{p-1})].$$

Ainsi, sous les hypothèses faites à la fin du n° 3 relativement aux multiplicateurs, le terme général u_n de la suite récurrente définie par l'équation (4) *s'exprime par une fonction holomorphe de* S_1^n, S_2^n, ..., S_p^n. On pourrait tout aussi bien exprimer u_n à l'aide de l'une quelconque des fonctions λ_{-2}, λ_{-3}, ..., λ_{-p}. On a, par exemple :

$$u_n = \lambda_{-2}[S_1^{n-1} \lambda_1(u_0, \ldots, u_{p-1}),\ S_2^{n-1} \lambda_2(u_0, \ldots), \ldots].$$

[**7**] *Calcul des fonctions* λ. — Les fonctions λ_1, λ_2, ..., λ_p sont déterminées par des équations fonctionnelles faciles à former, lorsque la relation de récurrence (4) est donnée.

On a, d'après les équations (7) :

$$y_1 = \lambda_1(u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}),$$
$$S_1 y_1 = \lambda_1(u_1, u_2, \ldots, u_p);$$

d'où l'équation fonctionnelle

$$(12) \qquad \lambda_1(u_1, u_2, \ldots, u_p) = S_1 \lambda_1(u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}),$$

dans laquelle u_p est supposé représenter la fonction de u_1, u_2, ..., u_{p-1} définie par la relation de récurrence donnée

$$u_n = a_0 u_0 + a_1 u_1 \ldots + a_{p-1} u_{p-1} + F(u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}).$$

L'équation (12) permet de calculer de proche en proche les coefficients du développement en série entière de la fonction $\lambda_1(u_0, u_1, \ldots, u_{p-1})$; d'après la théorie générale de l'itération, la série obtenue est convergente et définit une fonction holomorphe dans le domaine ($u_0 = u_1, \ldots, = u_{p-1} = 0$). La fonction λ_1 n'est définie qu'à une constante près qu'on peut prendre égale à 1. La fonction λ_1 peut aussi être définie comme limite, pour n infini, d'une certaine quantité fonction de u_n, u_{n+1}, …, u_{n+p-1} et de n; pour la formation de cette quantité, je renvoie le lecteur à mon Mémoire *Sur les formes réduites des transformations ponctuelles dans le domaine d'un point double*, dans lequel je ne m'occupe, il est vrai, que des transformations ponctuelles à deux variables, mais dont les résultats s'étendent immédiatement au cas de p variables.

Les fonctions $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_p$ vérifient de même des équations fonctionnelles qui ne diffèrent de l'équation (12) que par le changement de S_1 en $S_2, S_3, \ldots, S_p$.

Les équations de récurrence les plus simples, telles que

$$u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n + u_n^2$$

conduisent, en général, à des fonctions λ qui sont transcendantes et qu'on ne peut pas définir à l'aide des transcendantes élémentaires de l'analyse.

Pour avoir des exemples simples qu'on puisse traiter complètement sans introduire d'autres symboles que les symboles élémentaires de l'analyse, on peut se donner, *a priori*, les fonctions $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ des variables $u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}$, autrement dit le système (7), ainsi que les multiplicateurs $S_1, S_2, \ldots, S_p$, et en déduire la relation de récurrence qui conduirait précisément à ces fonctions $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$. Mais il est facile de voir que les fonctions λ ne sauraient être prises arbitrairement. On a, en effet (n° 6) :

$$u_1 = \lambda_{-2}(y_1, y_2, \ldots, y_p) = \lambda_{-1}(S_1 y_1, S_2 y_2, \ldots, S_p y_p).$$

On pourra se donner arbitrairement la fonction $\lambda_{-1}(y_1, y_2, \ldots, y_p)$; les fonctions $\lambda_{-2}, \lambda_{-3}, \ldots, \lambda_{-p}$ seront alors déterminées

$$\begin{aligned}
\lambda_{-2}(y_1, y_2, \ldots, y_p) &= \lambda_{-1}(S_1 y_1, S_2 y_2, \ldots, S_p y_p),\\
\lambda_{-3}(y_1, y_2, \ldots, y_p) &= \lambda_{-1}(S_1^2 y_1, S_2^2 y_2, \ldots, S_p^2 y_p).\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Les fonctions $\lambda_{-1}, \lambda_{-2}, \ldots, \lambda_{-p}$ étant ainsi choisies, on écrira le système (10); par inversion, on en déduira le système (7), c'est-à-dire les fonctions $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$. Quant à la relation de récurrence qui conduirait précisément à ce système de fonctions, c'est évidemment la suivante :

$$u_p = \lambda_{-1}[S_1^p y_1, S_2^p y_2, \ldots, S_p^p y_p],$$

dans laquelle $y_1, y_2, \ldots, y_p$ doivent être remplacés par leurs valeurs (7), ou plus exactement la relation déduite de la précédente en y remplaçant les indices 0, 1, …, p des lettres u par les indices n, $n+1$, …, $n+p$.

[**10**] *Exemple.* — Formons un exemple d'après la méthode que nous venons d'indiquer.

Prenons comme fonction λ_{-1} la fonction

$$\lambda_{-1} = \frac{y_1 + y_2}{1 - y_1}.$$

Le système (10) est ici le suivant :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{y_1 + y_2}{1 - y_1} = u_0, \\ &\frac{S_1 y_1 + S_2 y_2}{1 - S_1 y_1} = u_1; \end{aligned}\right.$$

d'où l'on déduit :

$$\left\{\begin{aligned} &\lambda_1(u_0, u_1) = y_1 = \frac{S_2 u_0 - u_1}{S_2 - S_1 + S_2 u_0 - S_1 u_1}, \\ &\lambda_2(u_0, u_1) = y_2 = \frac{u_1 - S_1 u_0 + u_0 u_1 (1 - S_1)}{S_2 - S_1 + S_2 u_0 - S_1 u_1}. \end{aligned}\right.$$

On aura ensuite

$$u_2 = \frac{S_1^2 y_1 + S_2^2 y_2}{1 - S_1^2 y_1} = \frac{S_1^2 \lambda_1(u_0, u_1) + S_2^2 \lambda_2(u_0, u_1)}{1 - S_1^2 \lambda_1(u_0, u_1)},$$

et, en général, u_{n+2} s'exprime à l'aide de u_n et de u_{n+1}, comme u_2 à l'aide de u_0 et de u_1, de sorte que la relation de récurrence proposée, qui est du second ordre, est la suivante :

$$u_{n+2} = \frac{S_1^2 \lambda_1(u_n, u_{n+1}) + S_2^2 \lambda_2(u_n, u_{n+1})}{1 - S_1^2 \lambda_1(u_n, u_{n+1})}.$$

En remplaçant les fonctions λ_1, λ_2 par les valeurs calculées plus haut, cette relation de récurrence s'écrit :

$$u_{n+2} = \frac{(S_1 + S_2) u_{n+1} - S_1 S_2 u_n + u_n u_{n+1} \dfrac{S_2^2(1 - S_1)}{S_2 - S_1}}{1 + \dfrac{S_2(1 - S_1^2)}{S_2 - S_1} u_0 + \dfrac{S_1(S_1 - 1)}{(S_2 - S_1)} u_1}.$$

Cette relation étant donnée, le terme général u_n s'exprimera en fonction de u_0, u_1 et de n par la formule (11), qui est ici :

$$u_n = \frac{S_1^n \lambda_1(u_0, u_1) + S_2^n \lambda_2(u_0, u_1)}{1 - S_1^n \lambda_1(u_0, u_1)},$$

λ_1 et λ_2 ayant les valeurs calculées plus haut.

Soient, par exemple, $S_1 = \frac{1}{3}$, $S_2 = \frac{1}{2}$. La relation de récurrence est alors

$$u_{n+2} = \frac{5u_{n+1} - u_n + 6u_n u_{n+1}}{6 + 16u_n - 8u_{n+1}}.$$

Si l'on propose d'intégrer cette équation, c'est-à-dire de trouver l'expression générale de u_n en fonction de n et de u_0, u_1, on formera d'abord l'équation en S relative à l'origine, point double de la relation de récurrence (équation (6) du n° 3). Cette équation est ici

$$S^2 - \frac{5}{6}S + \frac{1}{6} = 0.$$

Elle admet les racines $S_1 = \frac{1}{3}$, $S_2 = \frac{1}{2}$. On calculera ensuite les fonctions $\lambda_1(u_0, u_1)$, $\lambda_2(u_0, u_1)$ vérifiant les équations fonctionnelles

$$\lambda_1\left(u_1, \frac{5u_1 - u_0 + 6u_0 u_1}{6 + 16u_0 - 8u_1}\right) = \frac{1}{3}\lambda_1(u_0, u_1),$$
$$\lambda_2\left(u_1, \frac{5u_1 - u_0 + 6u_0 u_1}{6 + 16u - 8u_1}\right) = \frac{1}{2}\lambda_2(u_0, u_1).$$

On peut définir ces fonctions par leurs développements en série entière

$$\lambda_1(u_0, u_1) = \alpha u_0 + \beta u_1 + \gamma u_0^2 + \delta u_0 u_1 + \varepsilon u_1^2 + \dots.$$

En substituant cette série à coefficients indéterminés dans l'équation en λ_1, on détermine de proche en proche les coefficients successifs et l'on fait de même pour λ_2. Mais ce calcul ne mettra pas en évidence le fait que dans le cas actuel ces fonctions λ_1, λ_2 sont des fonctions rationnelles de u_0 et de u_1. *Le problème de l'intégration par des transcendantes de nature déterminée se pose ici, comme dans la théorie des équations différentielles*, où les séries qui définissent les intégrales n'indiquent en général rien sur la nature des transcendantes définies par l'équation.

Les fonctions λ_1, λ_2 sont ici

$$\lambda_1 = \frac{3u_0 - 6u_1}{1 + 3u_0 - 2u_1},$$
$$\lambda_2 = \frac{6u_1 - 2u_0 + 4u_0 u_1}{1 + 3u_0 - 2u_1},$$

et l'intégrale générale de l'équation de récurrence proposée est

$$u_n = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n (3u_0 - 6u_1) + \left(\frac{1}{2}\right)^n (6u_1 - 2u_0 + 4u_0 u_1)}{1 + 3u_0 - 2u_1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n (3u_0 - 6u_1)}.$$

Dans la théorie générale, une pareille solution n'est valable que pour un certain domaine (u_0, u_1) entourant le point double $u_0 = u_1 = 0$. Dans l'exemple actuel, le résultat s'applique évidemment quels que soient u_0, u_1 : le domaine d'existence de la solution comprend toutes les valeurs de u_0 et de u_1.

[**11**] *Cas où les conditions du n° 3 relatives aux multiplicateurs ne sont pas toutes vérifiées.* — Parmi les hypothèses du n° 3, les unes ont été faites dans la théorie générale pour établir la convergence des séries qui définissent les fonctions holomorphes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$: ce sont les hypothèses $|S_1| < 1$, $|S_2| < 1$, …, $|S_p| < 1$. Quant aux autres hypothèses (multiplicateurs distincts, multiplicateurs S_i différents de $S_j^\alpha S_k^\beta \ldots$, où α, β sont des entiers positifs ou nuls), elles sont indispensables pour assurer l'existence des fonctions holomorphes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$: lorsqu'elles ne sont plus toutes vérifiées, certaines des équations fonctionnelles telles que l'équation (12), qui définissent $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, n'admettent plus en général de solution holomorphe [1].

Supposons maintenant que les hypothèses faites au n° 3 ne soient plus toutes vérifiées. Il peut se faire que l'on puisse trouver quand même des fonctions $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ vérifiant les équations (12) et permettant de ramener la transformation (5) à la forme linéaire, ainsi qu'il a été expliqué au paragraphe 4 : ces fonctions $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ ne seront plus définies par des séries entières convergentes, elles pourront ne plus être holomorphes; mais si elles existent, elles rempliront, néanmoins, quel que soit leur mode de définition, le but fondamental que l'on avait atteint précédemment avec les fonctions λ : elles amèneront les mêmes simplifications dans l'intégration de la relation de récurrence, *qui est intégrée dès qu'on a déterminé un système de p fonctions* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ *distinctes et vérifiant les p équations fonctionnelles analogues à l'équation* (12).

C'est ainsi que dans l'exemple du n° 10, où les fonctions λ_1, λ_2 sont des fonctions rationnelles de u_0 et de u_1, l'existence de ces fonctions est assurée quels que soient S_1, S_2, que S_1 et S_2 soient ou non inférieurs en valeur absolue à 1. Si S_1 et S_2 sont égaux, la solution subsiste également, seulement les fonctions λ_1 et λ_2 ne sont plus holomorphes à l'origine, conformément au résultat général énoncé plus haut. On a, en effet :

$$\lambda_2 = \frac{Su_0 - u_1}{Su_0 - Su_1}, \qquad \lambda_2 = \frac{u_1 - Su_0 + u_0 u_1(1 - S)}{Su_0 - Su_1}.$$

[**12**] *Relation de récurrence inverse.* — Supposons que les valeurs absolues des multiplicateurs, $|S_1|, |S_2|, \ldots, |S_p|$, soient toutes supérieures à 1. On peut ramener

[1] Voir mon travail cité plus haut, *Sur les équations fonctionnelles, etc...* (Première partie, n° 18).

ce cas à celui, étudié seul jusqu'ici, où ces valeurs absolues étaient inférieures à 1, en considérant la relation de récurrence inverse de la proposée.

Considérons l'équation de récurrence proposée

$$(4) \qquad u_{n+p} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \dots + a_{p-1} u_{n+p-1} + F(u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+p-1}).$$

Elle a été considérée jusqu'ici comme définissant le terme u_{n+p} en fonction des p termes précédents $u_{n+p-1}, u_{n+p-2}, \dots, u_{n+1}, u_n$. Mais elle permet aussi bien de définir u_n en fonction des p termes suivants $u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+p}$ (à condition toutefois que a_0 ne soit pas nul, c'est-à-dire, d'après l'équation (6), qu'aucun des multiplicateurs S ne soit nul). On exprime à l'aide de l'équation précédente u_n en fonction des p termes suivants sous la forme

$$(13) \qquad u_n = \frac{u_{n+p}}{a_0} - \frac{a_{p-1}}{a_0} u_{n+p-1} \dots - \frac{a_1}{a_0} u_{n+1} + \Phi(u_{n+p}, u_{n+p-1}, \dots, u_{n+1}),$$

Φ étant une fonction holomorphe de $u_{n+p}, u_{n+p-1}, \dots, u_{n+1}$ nulle en même temps que ces variables. C'est une nouvelle relation de récurrence qui peut être appelée la *relation de récurrence inverse* de la relation proposée.

Étant donnée la suite indéfinie dans les deux sens

$$\dots\dots\dots\dots u_{-n}, \dots, u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\dots\dots\dots,$$

la relation de récurrence *directe* (4) permet de calculer un terme de la suite connaissant les p termes qui le précèdent et la relation de récurrence inverse (13) permet de calculer un terme connaissant les p termes qui le suivent. La suite est entièrement définie par l'une quelconque des deux relations et par la connaissance d'un groupe de p termes consécutifs, $u_0, u_1, \dots, u_{p-1}$ par exemple.

L'équation en S relative à (13) est

$$\frac{1}{a_0} - \frac{a_{p-1}}{a_0} S - \frac{a_{p-2}}{a_0} S^2 \dots - \frac{a_1}{a_0} S^{p-1} - S^p = 0,$$

c'est-à-dire

$$(14) \qquad 1 - a_{p-1} S - a_{p-2} S^2 \dots - a_1 S^{p-1} - a_0 S^p = 0.$$

C'est, comme on voit, l'équation aux inverses des racines de l'équation en S (6) relative à la relation de récurrence directe. Si cette dernière a ses racines supérieures à 1 en valeur absolue, l'équation (14) a ses racines inférieures à 1 en valeur absolue.

Les fonctions $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont les mêmes pour la relation de récurrence directe et pour la relation de récurrence inverse. En effet, l'équation fonctionnelle que vérifie la fonction λ_1, par exemple, relative à la relation de récurrence directe, est

$$\lambda_1(u_{n+1}, u_{n+2}, \dots, u_{n+p}) = S_1 \lambda_1(u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+p-1}).$$

On peut l'écrire tout aussi bien

$$\lambda_1(u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+p-1}) = \frac{1}{S_1}\lambda_1(u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots, u_{n+p}),$$

ce qui établit la proposition.

Il résulte de là que l'intégrale générale de l'équation de récurrence inverse s'exprime par la même formule (11) que l'intégrale générale de l'équation de récurrence directe : il suffit d'y remplacer n par $-n$. On aura donc :

$$u_{-n} = \lambda_{-1}[S_1^{-n}\lambda_1(u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}), S_2^{-n}\lambda_2(u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}), \ldots, S_p^{-n}\lambda_p(u_0, u_1, \ldots, u_{p-1})].$$

Le cas où $|S_1|$, $|S_2|$, $|S_p|$ sont les uns inférieurs à 1, les autres supérieurs, échappe aux méthodes précédentes.

[**13**] *La relation de récurrence* (4) *envisagée comme une équation aux différences finies.* — Nous avons dit (n° 1) qu'une relation de récurrence pouvait être envisagée comme une équation aux différences finies, à condition d'y remplacer l'entier n par une variable continue x et de poser $u_n = \varphi(x)$. Si l'on se place à ce point de vue, un point double de la relation de récurrence devient une valeur $\varphi(x)$ de la fonction inconnue telle que

$$\varphi(x) = \varphi(x+1) = \varphi(x+2) \ldots = \varphi(x+p).$$

Ces égalités sont supposées avoir lieu quel que soit x, de sorte qu'à la notion de point double correspond la notion de *solution périodique de période 1* de l'équation : une pareille solution est une constante, puisque x ne figure dans l'équation que par l'intermédiaire de $\varphi(x)$, $\varphi(x+1)$, ..., et sous la forme (4) donnée à l'équation, cette constante est nulle. Les solutions dont nous nous occupons sont celles qui sont voisines de cette solution nulle : c'est la notion qui correspond ici à la notion de domaine du point double. *Sous les hypothèses faites précédemment au sujet des multiplicateurs* S_1, S_2, ..., S_p, *la formule* (11) *subsiste et donne l'expression générale des solutions voisines de la solution nulle :*

$$u_x = \lambda_{-1}[S_1^x\lambda_1(u_0, \ldots, u_{p-1}), S_2^x\lambda_2(u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}), \ldots, S_p^x\lambda_p(u_0, u_1, \ldots, u_{p-1})].$$

Les quantités arbitraires u_0, u_1, ..., u_p doivent être remplacées dans cette expression par des fonctions de x périodiques et de période égale à 1, arbitraires d'ailleurs. Ceci résulte de la définition des fonctions λ_1, λ_2, ..., λ_p interprétée au point de vue actuel. La fonction λ_1 vérifie en effet l'équation

$$\lambda_1(u_{x+1}, u_{x+2}, \ldots, u_{x+p}) = S_1\lambda_1(u_x, u_{x+1}, \ldots, u_{x+p-1}).$$

Si l'on pose

$$\lambda_1(u_x, u_{x+1}, \ldots, u_{x+p-1}) = y_x,$$

on a

$$y_{x+1} = Sy_x.$$

C'est une équation linéaire dont la solution générale est, comme on sait :

$$y_x = y_1 S^x,$$

y_1 étant une fonction périodique arbitraire, de période 1 (1).

Dans les calculs du n° 6, il faut donc remplacer $y_1, y_2, \ldots, y_p$, et, par suite, $u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}$ par des fonctions périodiques arbitraires, de période 1.

[**14**] *Équation du second ordre dans le cas où* $S_1 = S_2$ *et dans le cas où* $S_1 = S_2^\alpha$. — Il est intéressant de rechercher comment la solution générale (11) doit être modifiée, lorsque certaines des quantités S_1, S_2 deviennent égales ou lorsque l'un des multiplicateurs est le produit de puissances entières des autres multiplicateurs. Nous nous bornerons à le faire dans le cas d'une équation de récurrence du second ordre.

La méthode est toujours la même : elle consiste à remplacer l'équation par la substitution auxiliaire (3) et à donner à cette substitution, à l'aide d'un changement de variables, une forme réduite. J'ai étudié en détail les formes réduites des transformations ponctuelles à deux variables dans le Mémoire signalé au n° 4 : c'est pourquoi je me bornerai à ces transformations à deux variables; la méthode subsiste d'ailleurs quel que soit le nombre des variables.

Soit donc l'équation du second ordre

$$u_{n+2} = a u_n + b u_{n+1} + F(u_n, u_{n+1})$$

et le système auxiliaire (défini au n° 2)

$$(15) \qquad \left\{ \begin{aligned} X_1 &= x_2, \\ X_2 &= a x_1 + b x_2 + F(x_1, x_2). \end{aligned} \right.$$

L'équation en S est

$$a + bS - S^2 = 0.$$

Nous avons déjà étudié le cas où S_1 et S_2 sont différents et où l'on n'a pas $S_1 = S_2^\alpha$, ni $S_2 = S_1^\alpha$ (α entier positif ou nul).

Soit maintenant $S_1 = S_2$. On peut trouver deux fonctions holomorphes $\lambda_1(y_1, y_2)$, $\lambda_2(y_1, y_2)$ telles que, en posant

$$x_1 = \lambda_1(y_1, y_2), \qquad X_1 = \lambda_1(Y_1, Y_2),$$
$$x_2 = \lambda_2(y_1, y_2), \qquad X_2 = \lambda_2(Y_1, Y_2),$$

la transformation ponctuelle (15) prenne la forme réduite

$$\left\{ \begin{aligned} Y_1 &= S y_1 - y_2, \\ Y_2 &= S y_2. \end{aligned} \right.$$

(1) Voir, par exemple, GULDBERG und WALLENBERG, *Theorie der linearen Differenzengleichungen*, chap. I.

Par n itérations, y_1, y_2 deviennent $S^n y_1 - nS^{n-1} y_2$, $S^n y_2$. Les raisonnements des n^{os} 5 et 6 donnent alors pour u_n l'expression générale suivante :

$$u_n = \lambda_{-1}[S^n \lambda_1(u_0, u_1) - nS^{n-1}\lambda_2(u_0, u_1), S^n\lambda_2(u_0, u_1)], \tag{16}$$

où λ_1, λ_2 désignent les deux fonctions holomorphes

$$y_1 = \lambda_1(u_0, u_1),$$
$$y_2 = \lambda_2(u_0, u_1),$$

système d'où l'on tire la fonction holomorphe λ_{-1} :

$$u_0 = \lambda_{-1}(y_1, y_2).$$

Soit enfin $S_1 = S_2^\alpha$. En adoptant les mêmes notations, la forme réduite de la transformation (15) est ici la suivante :

$$Y_1 = S^\alpha y_1 - k y_2^\alpha,$$
$$Y_2 = S y_2,$$

où k est égal à 0 ou à 1.

On en déduira, toujours par la même méthode, l'expression générale suivante de u_n en fonction de n et des valeurs initiales u_0, u_1 :

$$u_n = \lambda_{-1}[S^{n\alpha}\lambda_1(u_0, u_1) - nS^{(n-1)\alpha}k[\lambda_2(u_0, u_1)]^\alpha, S^n\lambda_2(u_0, u_1)], \tag{17}$$

où λ_1, λ_2 sont encore deux fonctions holomorphes de u_0. u_1 et où λ_{-1} est une fonction holomorphe qui a la même signification que précédemment.

Si la relation de récurrence est envisagée comme une équation aux différences finies, on aura l'intégrale générale en remplaçant n par x dans l'expression générale de u_n et u_0, u_1 par des fonctions périodiques arbitraires de période égale à 1.

[**15**] *Relations de récurrence d'ordre inférieur à p contenues dans une relation d'ordre p.*

Considérons une suite récurrente d'ordre p :

$$(U_p) \qquad u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}, \ldots\ldots, u_n, \ldots\ldots,$$

définie par la relation

$$u_{n+p} = f(u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+p-1}),$$

et une suite récurrente d'ordre k inférieur à p :

$$(U_k) \qquad u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}, \ldots\ldots, u_n, \ldots\ldots,$$

définie par la relation

$$u_{n+k} = \varphi(u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+k-1}).$$

On dira que la première relation de récurrence contient la deuxième, si toute suite (U_k) définie par cette deuxième relation vérifie aussi la première relation.

Par exemple, la relation d'ordre 2

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n + 2u_n u_{n+1} - u_n^2 + u_n^2 u_{n+1}$$

contient la relation d'ordre 1

$$u_{n+1} = 2u_n + u_n^2.$$

En effet, de cette dernière relation on déduit

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} + u^2_{n+1} = 2(2u_n + u_n^2) + (2u_n + u_n^2)^2 = 4u_n + 6u_n^2 + 4u_n^3 + u_n^4.$$

Or, on vérifie immédiatement que la première relation est vérifiée, quel que soit u_n, lorsqu'on y remplace u_{n+1} et u_{n+2} par les valeurs précédentes, fonctions de u_n tirées de la deuxième relation.

Indiquons maintenant comment on résoudra le problème en général, en supposant toujours que la relation donnée et les relations cherchées sont définies dans le domaine d'un point double pris pour origine, à la manière de la relation (4). Le problème se ramène à un problème connu relatif aux transformations ponctuelles de la forme (5).

Pour simplifier l'écriture, supposons que la relation proposée soit simplement d'ordre 3. Soit

$$(18) \qquad u_{n+3} = a u_n + b u_{n+1} + c u_{n+2} + F(u_n, u_{n+1}, u_{n+2})$$

cette relation. La substitution auxiliaire (n° 3) est

$$(19) \qquad \begin{cases} X_1 = x_2, \\ X_2 = x_3, \\ X_3 = ax_1 + bx_2 + cx_3 + F(x_1, x_2, x_3). \end{cases}$$

On peut se proposer de chercher une relation de récurrence d'ordre 1 ou une relation de récurrence d'ordre 2 contenue dans la relation donnée.

Soit d'abord une relation d'ordre 2 :

$$u_{n+2} = \varphi(u_n, u_{n+1}),$$

contenue dans la relation (18). Si l'on se reporte à la définition de la substitution auxiliaire vue au n° 2, on voit que si l'on pose

$$x_3 = \varphi(x_1, x_2)$$

dans la substitution (19), il devra en résulter

$$X_3 = \varphi(X_1, X_2);$$

autrement dit, *la surface* $x_3 = \varphi(x_1, x_2)$ *est invariante par la transformation* (19).

Soit de même

$$u_{n+1} = \theta(u_n)$$

une relation d'ordre (1) contenue dans la relation (18). Si l'on pose

$$x_2 = \theta(x_1), \quad x_3 = \theta(x_2) = \theta[\theta(x_1)]$$

dans la substitution (19), il devra en résulter

$$X_2 = \theta(X_1), \quad X_3 = \theta(X_2) = \theta[\theta(X_1)];$$

autrement dit, *la courbe qui a pour équations*

$$x_2 = \theta(x_1), \quad x_3 = \theta(x_2),$$

est invariante par la transformation (19).

Les réciproques sont vraies. Soit, par exemple,

$$x_2 = \theta(x_1), \quad x_3 = \psi(x_1),$$

une courbe invariante par la substitution (19). On devra avoir

$$X_2 = \theta(X_1), \quad X_3 = \psi(X_1);$$

de la première, on déduit

$$x_3 = \theta(x_2) = \theta[\theta(x_1)],$$

ce qui montre que la fonction $\psi(x_1)$ est nécessairement de la forme $\theta[\theta(x_1)]$; il résulte immédiatement de là que la relation

$$u_{n+1} = \theta(u_n)$$

est contenue dans la relation proposée.

Ainsi la recherche des relations de récurrence d'ordre 1 *ou* 2 *contenues dans la relation d'ordre* 3 *donnée se ramène à la recherche des courbes ou surfaces qui demeurent invariantes par la substitution auxiliaire définie au n°* 2.

Ce résultat est évidemment général.

La recherche des relations de récurrence d'ordre k, inférieur à p, contenues dans une relation de récurrence donnée d'ordre p, se ramène à la recherche des multiplicités à k paramètres invariantes par la substitution auxiliaire définie au n° 2.

Nous sommes ainsi ramenés à un problème que j'ai étudié dans les travaux antérieurs cités plus haut et que je ne reprendrai pas ici.

Insistons seulement sur le rôle fondamental que jouent encore dans le problème actuel les fonctions

$$\lambda_1(u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}), \quad \lambda_2(u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}), \quad \ldots, \quad \lambda_p(u_0, u_1, \ldots, u_{p-1})$$

définies au n° 5.

Si on égale à zéro l'une de ces fonctions, après y avoir remplacé $u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}$ par $u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+p-1}$, on obtient une relation de récurrence d'ordre $p-1$ contenue dans la relation de récurrence donnée.

En effet, la fonction λ, par exemple, vérifie, ainsi qu'on l'a vu au n° 6, l'équation fonctionnelle

$$\lambda_1(u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots, u_{n+p}) = S_1\lambda_1(u_n, u_{n+1}), \ldots, u_{n+p-1}),$$

où u_{n+p} désigne la fonction de u_n, u_{n+1}, ..., u_{n+p-1} définie par la relation de récurrence donnée. La relation

$$\lambda_1(u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+p-1}) = 0$$

entraîne donc

$$\lambda_1(u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots, u_{n+p}) = 0,$$

et la proposition est démontrée.

On définit de la sorte, en se plaçant dans le cas où les hypothèses du n° 6 sont vérifiées, p relations de récurrence d'ordre $p-1$ contenues dans la relation proposée. Ce sont les relations

$$\begin{aligned}
&\lambda_1(u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+p-1}) = 0,\\
&\lambda_2(u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+p-1}) = 0,\\
&\vdots\\
&\lambda_p(u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+p-1}) = 0,
\end{aligned}$$

et l'on voit aisément, d'après les équations fonctionnelles qui définissent ces fonctions, que chacune d'elles permet d'exprimer u_{n+p-1} en fonction holomorphe de u_n, u_{n+1}, ..., u_{n+p-2} dans le domaine de $u_n = u_{n+1} = \ldots = u_{n+p-2} = 0$. *Ce sont les seules relations de récurrence holomorphes d'ordre $p-1$ contenues dans la relation d'ordre p donnée et admettant un point double à l'origine.* Toutes les relations d'ordre $p-1$, holomorphes ou non, contenues dans la relation donnée s'expriment à l'aide des fonctions $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, comme le montre la théorie complète des courbes et surfaces invariantes par une transformation ponctuelle que j'ai développée ailleurs.

Plus généralement, parmi les relations d'ordre $p-k$ contenues dans la relation proposée, figureront celles qu'on obtient de la façon suivante : on résoudra par rapport à u_{n+p-1}, u_{n+p-2}, ..., u_{n+p-k} le système d'équations

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \ldots, \quad \lambda_k = 0,$$

ou tout autre système obtenu en égalant à zéro k quelconques des fonctions λ; l'expression de u_{n+p-k} en fonction de u_n, u_{n+1}, ..., $u_{n+p-k-1}$ qu'on obtiendra ainsi constituera une relation d'ordre $p-k$ contenue dans la relation proposée. Les relations d'ordre $p-k$ ainsi obtenues sont les seules relations holomorphes d'ordre $p-k$ contenues dans la relation proposée.

Exemple. — Reprenons l'exemple du n° 10. Soit la relation d'ordre 2 :

$$u_{n+2} = \frac{5u_{n+1} - u_n + 6u_n u_{n+1}}{6 + 16u_n - 8u_{n+1}}.$$

On a trouvé

$$\lambda_1(u_n, u_{n+1}) = \frac{3u_n - 6u_{n+1}}{1 + 3u_n - 2u_{n+1}},$$

$$\lambda_2(u_n, u_{n+1}) = \frac{6u_{n+1} - 2u_n + 4u_n u_{n+1}}{1 + 3u_n - 2u_{n+1}}.$$

Cherchons les relations de récurrence d'ordre 1 contenues dans la relation proposée. On obtiendra celles de ces relations qui fournissent pour u_{n+1} une fonction holomorphe de u_n et qui admettent l'origine pour point double en résolvant par rapport à u_{n+1} les équations

$$\lambda_1(u_n, u_{n+1}) = 0, \qquad \lambda_2(u_n, u_{n+1}) = 0.$$

On obtient ainsi les deux relations suivantes :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2},$$

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{3 + 2u_n}.$$

La vérification est facile.

On remarquera que les relations du premier ordre qu'on vient d'obtenir admettent pour multiplicateurs, la première $\frac{1}{2}$, la deuxième $\frac{1}{3}$, c'est-à-dire l'un des deux multiplicateurs de la relation proposée. Ceci est général : si une relation de récurrence d'ordre p holomorphe à l'origine (point double de la relation) contient une relation d'ordre k remplissant les mêmes conditions, les multiplicateurs de la deuxième relation font partie de l'ensemble des multiplicateurs de la première relation [1].

Nous n'obtenons ainsi, parmi les relations holomorphes d'ordre 1 contenues dans la relation proposée, que celles qui contiennent le point double $u_n = u_{n+1} = 0$. Mais la relation proposée admet un autre point double dans le domaine duquel il y a lieu de faire la même étude que pour le point double $u_n = u_{n+1} = 0$. Les points doubles de la relation vérifient l'équation

$$u(6 + 16u - 8u) = 5u - u + 6u^2$$

ou bien

$$2u^2 + 2u = 0;$$

d'où deux points doubles :

$$u_n = u_{n+1} = 0 \quad \text{et} \quad u_n = u_{n+1} = -1.$$

---

[1] *Sur les multiplicités invariantes par une transformation de contact*, 2e partie, no 5 (Bulletin de la Société mathématique de France, t. XXXVII, 1909).

En posant $u_n + 1 = v_n$, le point double $u_n = u_{n+1} = -1$ se trouve transporté à l'origine. La relation proposée devient

$$v_{n+2} = \frac{6v_n v_{n+1} - 9v_{n+1} + 9v_n}{16v_n - 8v_{n+1} - 2};$$

ses multiplicateurs vérifient l'équation

$$S^2 = \frac{9}{2}S - \frac{9}{2},$$

d'où

$$S = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad S = 3,$$

auxquels correspondent les relations d'ordre 1 suivantes, contenues dans la proposée, admettant la nouvelle origine comme point double et holomorphes dans le domaine de ce point :

$$v_{n+1} = \frac{3v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{3v_n}{1 + 2v_n};$$

en revenant aux variables u_n et u_{n+1}, on obtient les relations

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{3 + 2u_n} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1 + 3u_n}{2};$$

la première a déjà été obtenue, car elle admet à la fois les deux points doubles; la deuxième, qui s'obtiendrait aussi en égalant à zéro le dénominateur de λ_1 et de λ_2, est seule nouvelle.

En résumé, on a obtenu trois relations d'ordre 1 contenues dans la proposée :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2}, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{3 + 2u_n}, \qquad u_{n+1} = \frac{1 + 3u_n}{2}.$$

[**16**] *Limite de* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *pour n infini.* — Soit une suite récurrente d'ordre p

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_{p-1},\ \ldots,\ u_n,\ \ldots$$

définie par la relation de récurrence (4). Il est important de reconnaître si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a une limite et quelle est cette limite.

Pour le cas où l'équation de récurrence est une équation *linéaire* (à coefficients variables ou non, mais ayant des limites finies pour n infini), M. Poincaré a établi un théorème fondamental [1] dont nous rappellerons l'énoncé. Soit l'équation

$$u_{n+p} + f_1(n)u_{n+p-1} + f_2(n)u_{n+p-2} + \ldots + f_p(n)u_n = 0$$

---

[1] POINCARÉ, *loc. cit.*

et a_1, a_2, ..., a_p les limites de $f_1(n)$, $f_2(n)$, ..., $f_p(n)$ pour n infini. Si les racines de « l'équation caractéristique »

$$S^p + a_1 S^{p-1} + a_2 S^{p-2} + \ldots + a_p = 0$$

vérifient les inégalités

$$|S_1| > |S_2| \ldots > |S_p|,$$

le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a en général pour limite S_1, mais il peut avoir exceptionnellement pour limite l'un des nombres S_2, S_3, ..., S_p.

Ce théorème, facile à vérifier pour les équations linéaires à coefficients constants, les seules équations linéaires qui rentrent dans le cadre de notre étude, peut être étendu aux équations non linéaires de la forme générale que nous envisageons, c'est-à-dire aux équations (4).

Démontrons-le en faisant, relativement à S_1, S_2, ..., S_p, les hypothèses du n° 3 et en supposant en outre les modules de S_1, S_2, ..., S_p différents. Il suffit de se servir de la formule (11) qui donne l'expression générale de u_n en fonction de n :

$$u_n = \lambda_{-1}[S_1^n y_1, S_2^n y_2, \ldots, S_p^n y_p],$$

avec

$$y_1 = \lambda_1(u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}); \quad y_2 = \lambda_2(u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}); \ldots.$$

La fonction λ_{-1} est une fonction holomorphe dont le développement est de la forme

$$\lambda_{-1}(z_1, z_2, \ldots, z_p) = c_1 z_1 + c_2 z_2 + \ldots + c_p z_p + (a z_1^2 + b z_1 z_2 + \ldots).$$

On a donc :

$$u_n = c_1 S_1^n y_1 + c_2 S_2^n y_2 + \ldots + c_p S_p^n y_p + (a S_1^{2n} y_1^2 + b S_1^n S_2^n y_1 y_2 + \ldots)$$

et le calcul de c_1, c_2, ..., c_p montre que ces coefficients sont différents de zéro. On a donc :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{S_1^{n+1}\left[c_1 y_1 + c_2\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^{n+1} y_2 + \ldots + c_p\left(\frac{S_p}{S_1}\right)^{n+1} y_p + a S_1^{n+1} y_1^2 + b S_2^{n+1} y_1 y_2 + \ldots\right]}{S_1^n\left[c_1 y_1 + c_2\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^{n} y_2 + \ldots + c_p\left(\frac{S_p}{S_1}\right)^{n} y_p + a S_1^{n} y_1^2 + b S_2^{n} y_1 y_2 + \ldots\right]}.$$

Nous supposons

$$|S_p| < |S_{p-1}| < \ldots < |S_2| < |S_1| < 1.$$

Si l'on suppose $y_1 \neq 0$, on voit alors que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ prend la forme

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{S_1^{n+1}}{S_1^n}(1 + \varepsilon),$$

ε tendant vers o pour n infini, de sorte que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a une limite égale à S_1. Ceci suppose que y_1 n'est pas nul, c'est-à-dire que les p premiers termes de la suite, termes donnés, ne vérifient pas la relation

$$\lambda_1(u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}) = 0;$$

c'est le cas général.

Supposons maintenant que cette dernière relation soit satisfaite. On a $y_1 = 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ prend la forme

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{S_2^{n+1}}{S_2^n} \frac{[c_2 y_2 + \ldots]}{[c_2 y_2 + \ldots]};$$

d'où, *en supposant* $y_2 \neq 0$:

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = S_2.$$

Si l'on suppose que l'on a en même temps

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lambda_1(u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}) = 0, \quad \lambda_2(u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}) = 0,$$

on est dans un cas encore plus particulier et l'on voit de même qu'en supposant alors $\lambda_3(u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}) \neq 0$, on a :

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = S_3.$$

Et ainsi de suite. On voit que le théorème de M. Poincaré subsiste pour les équations qui nous occupent :

$\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a en général pour limite le multiplicateur S_1 de plus grand module, et dans des cas particuliers, dont chacun est exceptionnel par rapport aux cas précédents, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a pour limite l'un des nombres $S_2, S_3, \ldots, S_p$.

Pour que la limite soit S_p, racine de plus petit module, il faut prendre pour u_0, $u_1, \ldots, u_{p-1}$ des nombres vérifiant à la fois les $p-1$ équations

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \ (u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}) &= 0, \\
\lambda_2 \ (u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}) &= 0, \\
&\vdots \\
\lambda_{p-1}(u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}) &= 0.
\end{aligned}$$

La suite

$$u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}, \ldots, u_n, \ldots$$

constitue alors une suite récurrente contenue dans la suite proposée et définie par une relation de récurrence holomorphe d'ordre 1, ainsi qu'on l'a vu au numéro précédent. Cette suite est, dans la théorie actuelle, l'analogue de l'*intégrale distinguée* introduite par M. Pincherle dans la théorie des équations linéaires aux différences finies [1].

DEUXIÈME PARTIE.

[**1**] *Séries de Taylor dans lesquelles chaque coefficient est lié au précédent par une relation de récurrence du premier ordre; fonction génératrice d'une relation de récurrence du premier ordre.* — Considérons la série

$$u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots + u_n z^n + \ldots \tag{1}$$

dans laquelle nous supposons qu'il existe entre deux coefficients consécutifs quelconques une relation de la forme

$$u_{n+1} = f(u_n). \tag{2}$$

C'est la somme de cette série que nous avons appelée, dans l'introduction, la fonction génératrice de la suite des u_n. Nous supposons que la fonction $f(u)$ est holomorphe dans le domaine d'un point double α vérifiant l'équation

$$\alpha = f(\alpha),$$

de sorte que l'on a

$$u_{n+1} = \alpha + S(u_n - \alpha) + F(u_n - \alpha),$$

F ne contenant que des termes en $u_n - \alpha$ du second degré au moins.

Nous supposons, en outre,

$$|S| < 1.$$

S est ce que nous avons appelé, dans la première partie, le multiplicateur de la relation (2) relatif au point double. Enfin u_0 est choisi dans un certain domaine suffisamment restreint entourant le point double α.

M. Fatou a démontré [2] que, dans ces conditions, *la série* (1) *représente une fonction méromorphe de z, qui est le quotient de deux fonctions entières de genre zéro, la fonction dénominateur étant le produit infini*

$$(1 - z)(1 - Sz)(1 - S^2 z) \ldots (1 - S^n z) \ldots.$$

---

(1) Pincherle, *Sur la génération des systèmes récurrents* (Acta Mathematica, t. XVI, 1893).

(2) Fatou, *loc. cit.*

M. Fatou a donné ainsi un exemple général de série de Taylor dont on peut obtenir le prolongement analytique, cas qui présente d'autant plus d'intérêt que les exemples de prolongement analytique d'une série de Taylor donnée par la loi de ses coefficients sont rares.

Nous démontrerons le théorème de M. Fatou par une méthode différente de la sienne, basée sur l'étude de la forme réduite de la relation de récurrence. Cette méthode sera étendue ensuite au cas des relations de récurrence d'ordre p liant p coefficients consécutifs de la série de Taylor; elle présentera, en outre, l'avantage de donner la fonction méromorphe, somme de la série, par sa décomposition en série de fractions simples.

Nous avons vu dans la première partie (n° 7) qu'on peut déterminer une fonction $\lambda(u_n)$ holomorphe dans le domaine du point double $u_n = \alpha$ et vérifiant l'équation fonctionnelle

$$\lambda(u_{n+1}) = S\lambda(u_n). \tag{3}$$

C'est là un théorème fondamental qui a été établi par M. Kœnigs (1) et dont les propositions que nous avons rappelées aux n^{os} 4 et 5 de la première partie constituent la généralisation pour le cas de plusieurs variables.

Posons

$$\lambda(u_n) = y_n,$$

équation d'où l'on peut tirer u_n en fonction holomorphe de y_n, ainsi qu'on l'a observé au n° 6 de la première partie :

$$u_n = \lambda_{-1}(y_n).$$

En vertu de l'équation fonctionnelle que vérifie la fonction $\lambda(u_n)$, on aura

$$y_{n+1} = Sy_n.$$

C'est la *forme réduite* de la relation (2), forme valable dans le domaine du point double α.

On aura :

$$\begin{aligned}
u_0 &= \lambda_{-1}(y_0),\\
u_1 &= \lambda_{-1}(Sy_0),\\
&\vdots\\
u_n &= \lambda_{-1}(S^n y_0),\\
&\vdots
\end{aligned}$$

---

(1) Kœnigs, *Sur les substitutions uniformes* (Bulletin des sciences mathématiques, 1884). *Sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles* (Annales de l'Ecole normale, 1883).

La série (1), dont nous désignerons la somme par $F(y_0, z)$, prend la forme

$$F(y_0, z) = \lambda_{-1}(y_0) + \lambda_{-1}(Sy_0)z + \lambda_{-1}(S^2y_0)z^2 + \ldots + \lambda_{-1}(S^n y_0)z^n + \ldots.$$

La somme de cette série vérifie une équation fonctionnelle facile à former. On a :

$$F(Sy_0, z) = \lambda_{-1}(Sy_0) + \lambda_{-1}(S^2y_0)z + \lambda_{-1}(S^3y_0)z^2 + \ldots + \lambda_{-1}(S^{n+1}y_0)z^n + \ldots,$$

d'où l'équation fonctionnelle

$$F(y_0, z) = \lambda_{-1}(y_0) + zF(Sy_0, z). \tag{4}$$

Les deux membres sont des fonctions holomorphes de y_0 dans le domaine de $y_0 = 0$. En effet, la fonction $\lambda(u_0)$ est holomorphe pour $u_0 = \alpha$ et l'équation (3) donne

$$\lambda(\alpha) = S\lambda(\alpha),$$

d'où

$$\lambda(\alpha) = 0.$$

Ainsi la relation

$$\lambda(u_n) = y_n$$

fait correspondre à $u_n = \alpha$ la valeur $y_n = 0$. L'équation

$$u_n = \lambda_{-1}(y_n)$$

montre alors que l'on a

$$\lambda_{-1}(0) = \alpha$$

et la fonction $\lambda_{-1}(y_0)$ est holomorphe pour y_0 voisin de zéro.

Supposons la fonction $\lambda_{-1}(y_0)$ holomorphe dans le domaine

$$|y_0| < \beta$$

auquel correspond pour u_0 un certain domaine défini par

$$|\lambda(u_0)| < \beta,$$

domaine qui entoure le point double.

La fonction $\lambda_{-1}(S^n y_0)$ est holomorphe dans le même domaine, puisque $|S|$ est inférieur à 1. Les coefficients de la série en z sont donc des fonctions holomorphes de y_0 ; de plus, ces fonctions sont bornées dans leur ensemble dans le domaine $|y_0| < \beta$. La série $F(y_0, z)$, si on suppose $|z| < 1$, est alors uniformément convergente dans le domaine $|y_0| < \beta$. Ceci prouve que la serie $F(y_0, z)$, considérée comme série en z, a un rayon de convergence au moins égal à 1 et que sa somme est une fonction holomorphe de y_0 dans le domaine $|y_0| < \beta$.

Soit

$$\lambda_{-1}(y_0) = \alpha + \alpha_1 y_0 + \alpha_2 y_0^2 + \ldots + \alpha_n y_0^n + \ldots$$

le développement en série entière de la fonction holomorphe $\lambda_{-1}(y_0)$.

Soit, de même,

$$F(y_0, z) = A_0 + A_1 y_0 + A_2 y_0^2 + \ldots + A_n y_0^n + \ldots$$

le développement de la fonction inconnue, écrit avec des coefficients indéterminés $A_0, A_1, A_2, \ldots$. En portant ces développements dans l'équation (4), nous obtenons

$$\begin{aligned} A_0 + A_1 y_0 + A_2 y_0^2 + \ldots + A_n y_0^n + \ldots &= \alpha_0 + \alpha_1 y_0 + \alpha_2 y_0^2 + \ldots + \alpha_n y_0^n + \ldots \\ &+ A_0 z + A_1 S z y_0 + A_2 S^2 z y_0^2 + \ldots + A_n S^n z y_0^n + \ldots, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} A_0 &= \alpha_0 + A_0 z, \\ A_1 &= \alpha_1 + A_1 S z, \\ &\vdots \\ A_n &= \alpha_n + A_n S^n z, \end{aligned}$$

et par suite

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{1 - z}, \quad A_1 = \frac{\alpha_1}{1 - Sz}, \quad A_2 = \frac{\alpha_2}{1 - S^2 z}, \quad \ldots, \quad A_n = \frac{\alpha_n}{1 - S^n z}.$$

En définitive, la série (1) peut s'écrire

$$u_0 + u_1 z + \ldots + u_n z^n + \ldots = \frac{\alpha_0}{1 - z} + \frac{\alpha_1 y_0}{1 - Sz} + \frac{\alpha_2 y_0^2}{1 - S^2 z} + \ldots + \frac{\alpha_n y_0^n}{1 - S^n z} + \ldots$$

avec

$$y_0 = \lambda(u_0).$$

La série (1) *représente une fonction méromorphe de z ayant pour pôles simples les points*

$$1, \quad \frac{1}{S}, \quad \frac{1}{S^2}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{S^n}$$

ou certains de ces points.

Le pôle $\frac{1}{S^n}$ disparaît si α_n est nul.

Les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ sont les coefficients du développement de la fonction $\lambda_{-1}(y_0)$. Quand la relation de récurrence est donnée, la fonction λ_{-1} est déterminée par les deux équations

$$\begin{cases} \lambda_{-1}(y_0) = u_0, \\ \lambda_{-1}(S y_0) = f(u_0), \end{cases}$$

d'où l'on déduit pour $\lambda_{-1}(y_0)$ l'équation fonctionnelle

$$\lambda_{-1}(S y_0) = f[\lambda_{-1}(y_0)]$$

qui détermine la fonction $\lambda_{-1}(y_0)$.

On a transformé ainsi la série proposée $F(y_0, z)$ en une série de fractions rationnelles en z qui est convergente en tout point z différent des pôles et qui constitue ainsi le prolongement de la fonction génératrice $F(y_0, z)$ dans tout le plan des z.

[**2**] *Réciproque.* — Soit donnée, *a priori*, une série de fractions rationnelles de la forme

$$(5) \qquad \frac{\alpha}{1-z} + \frac{\alpha_1 y_0}{1-Sz} + \frac{\alpha^2 y_0^2}{1-S^2 z} + \ldots + \frac{\alpha_n y_0^n}{1-S^n z} + \ldots,$$

où $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont les coefficients d'une série entière

$$\alpha + \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 + \ldots + \alpha_n y^n$$

convergente pour $y = y_0$ et où S est une constante de module inférieur à 1.

La série (5) représente évidemment une fonction méromorphe de z dont les pôles sont $1, \frac{1}{S}, \frac{1}{S^2}, \ldots, \frac{1}{S^n}$. Le point $z = 0$ est donc un point régulier de cette fonction et la fonction (5) est développable en série entière ordonnée suivant les puissances croissantes de z. (Le rayon de convergence de cette série est égal à 1 si α n'est pas nul, ou plus généralement à $\frac{1}{S^k}$ si α_k est le premier des coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$, qui ne soit pas nul.)

Ceci posé, *cette série entière*

$$(6) \qquad u_0 + u_1 z + u_2 z^n + \ldots + u_n z^n + \ldots,$$

qui représente la fonction (5) *dans le domaine du point* $z = 0$, *est une série récurrente d'ordre* 1.

D'une façon plus précise, on peut trouver une fonction $f(u)$ holomorphe pour $u = \alpha$, définie dans un certain domaine entourant ce point et telle que deux coefficients consécutifs quelconques de la série (6) soient liés par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

D'après la démonstration de la proposition directe vue au numéro précédent, cette fonction $f(u)$ sera déterminée par la condition que la fonction $\lambda_{-1}(y)$ relative à cette fonction $f(u)$ soit égale à

$$\alpha + \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 + \ldots + \alpha_n y^n + \ldots.$$

Il suffira donc de poser

$$\begin{aligned} u_n &= \lambda_{-1}(y) = \alpha + \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 + \ldots + \alpha_n y^n + \ldots \\ u_{n+1} = f(u_n) &= \lambda_{-1}(Sy) = \alpha + \alpha_1 Sy + \alpha_2 S^2 y^2 + \ldots + \alpha_n S^n y^n + \ldots. \end{aligned}$$

Ces deux équations définissent en général u_{n+1} comme fonction holomorphe de u_n par l'intermédiaire du paramètre y (1). A la valeur 0 donnée à y correspondent

(1) Il en est certainement ainsi si α_1 n'est pas nul, car on peut alors tirer y de la première équation en fonction holomorphe de u_n et, en portant cette valeur dans la deuxième équation, on a pour u_{n+1} une fonction holomorphe de u_n.

$u_n = \alpha$, $f(u_n) = \alpha$. La fonction $f(u_n)$ est donc une fonction holomorphe de u_n définie dans le domaine du point $u_n = \alpha$. L'élimination de y entre les deux relations précédentes donne l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n. On obtient ainsi une relation de récurrence admettant le point α pour point double.

[3] *Exemples.* — 1° Soit d'abord la série

$$u_0 + u_0^{\rm S} z + u_0^{{\rm S}^2} z^2 + \ldots + u_0^{{\rm S}^n} z^n + \ldots,$$

où S est un nombre inférieur à 1 en valeur absolue. Les coefficients vérifient la relation de récurrence

$$u_{n+1} = u_n^{\rm S}$$

qui admet le point double $\alpha = 1$. Le multiplicateur relatif à ce point double est S, car la relation peut s'écrire

$$u_{n+1} - 1 = {\rm S}(u_n - 1) + \frac{{\rm S}({\rm S}-1)}{1.2}(u_n - 1)^2 + \ldots.$$

La fonction $\lambda(u)$ est ici $\log u$, car on a

$$\log u^{\rm S} = {\rm S} \log u.$$

On doit donc poser

$$\log u_0 = y_0,$$

d'où

$$u_0 = e^{y_0}.$$

La fonction $\lambda_{-1}(y_0)$ est

$$\lambda_{-1}(y_0) = e^{y_0} = 1 + \frac{y_0}{1} + \frac{y_0^2}{1.2} + \ldots + \frac{y_0^n}{1.2\ldots n}.$$

Donc, la série proposée peut s'écrire

$$\frac{1}{1-z} + \frac{y_0}{1-{\rm S}z} + \frac{\frac{y_0^2}{1.2}}{1-{\rm S}^2 z} + \ldots + \frac{\frac{y_0^n}{1.2\ldots n}}{1-{\rm S}^n z} + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{1-z} + \frac{\log u_0}{1-{\rm S}z} + \frac{(\log u_0)^2}{1.2(1-{\rm S}^2 z)} + \ldots + \frac{(\log u_0)^n}{n!(1-{\rm S}^n z)} + \ldots.$$

La formule précédente est valable dans le domaine défini par la relation

$$|u_0 - 1| < 1.$$

Pour $u_0 = 1$, il faut prendre, parmi les déterminations de $\log u_0$, celle qui est égale à 0; la détermination à adopter pour $\log u_0$ est alors parfaitement définie, par continuité, dans tout le domaine précédent: c'est cette même détermination qu'il faut employer aussi dans le calcul des coefficients de la série proposée, calculés par la formule $u_0^{{\rm S}^n} = e^{{\rm S}^n \log u_0}$.

2° Donnons un exemple relatif à la réciproque étudiée au numéro précédent : Soit la série de fractions rationnelles

$$\frac{1}{1-z}+\frac{\frac{1}{2}y_0}{1-Sz}-\frac{\frac{1}{2.4}y_0^2}{1-S^2z}+\frac{\frac{1.3.5}{2.4.6}y_0^3}{1-S^3z}-\dots.$$

On a

$$\lambda_{-1}(y_0)=1+\frac{1}{2}y_0-\frac{1}{2.4}y_0^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}y_0^3-\dots=(1+y_0)^{\frac{1}{2}}.$$

La relation de récurrence sera donc définie par les équations

$$u_n=(1+y)^{\frac{1}{2}},$$

$$u_{n+1}=(1+Sy)^{\frac{1}{2}},$$

d'où, en éliminant y,

$$u_{n+1}=\sqrt{1+S(u_n^2-1)}.$$

La série de fractions rationnelles proposée est donc égale, dans le domaine de l'origine, à la somme de la série

$$u_0+u_1z+u_2z^2+\dots+u_nz^n+\dots$$

avec

$$u_0=\sqrt{1+y_0}$$

et

$$u_{n+1}=\sqrt{1+S(u_n^2-1)},$$

à condition toutefois que l'on ait $|y_0|<1$ [afin que la série $\lambda_{-1}(y_0)$ soit convergente].

3° Soit la série

$$u_0+u_1z+\dots+u_nz^n+\dots$$

avec

$$u_{n+1}=\frac{au_n+b}{cu_n+d}.$$

Rappelons d'abord quelques résultats classiques de la théorie des substitutions linéaires.

La substitution précédente a deux points doubles, α_1, α_2, racines de l'équation

$$u=\frac{au+b}{cu+d}.$$

Cette équation peut être remplacée par le système

$$au + b = \rho u,$$
$$cu + d = \rho,$$

et l'inconnue auxiliaire ρ vérifie l'équation

$$\begin{vmatrix} a-\rho & b \\ c & d-\rho \end{vmatrix} = 0.$$

Soient ρ_1, ρ_2 les racines de cette équation. A chacune de ces racines correspond l'un des deux points doubles α_1, α_2 et l'on a :

$$\begin{cases} a\alpha_1 + b = \rho_1\alpha_1, \\ c\alpha_1 + d = \rho_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} a\alpha_2 + b = \rho_2\alpha_2, \\ c\alpha_2 + d = \rho_2. \end{cases}$$

Ces quatre relations permettent d'exprimer a, b, c, d en fonction de ρ_1, ρ_2, α_1, α_2 et, en portant ces expressions dans la substitution linéaire, on vérifie aisément que celle-ci peut être mise sous la forme

$$\frac{u_{n+1} - \alpha_1}{u_{n+1} - \alpha_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{u_n - \alpha_1}{u_n - \alpha_2}.$$

On voit facilement que le multiplicateur relatif au point double α_1 est $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ et que le multiplicateur relatif au point double α_2 est $\frac{\rho_1}{\rho_2}$.

Supposons

$$|\rho_2| < |\rho_1|$$

et posons

$$S = \frac{\rho_2}{\rho_1}.$$

On aura

$$|S| < 1$$

et nous pouvons appliquer la théorie au point double α_1, celui des deux points doubles qui correspond à la racine ρ_1 de plus grand module de l'équation en ρ.

Si l'on pose

$$\frac{u_n - \alpha_1}{u_n - \alpha_2} = y_n,$$

la substitution linéaire prend la forme réduite

$$y_{n+1} = Sy_n.$$

Les fonctions appelées λ, λ_{-1} dans la théorie générale sont donc ici les suivantes :

$$y_0 = \lambda(u_0) \quad = \frac{u_0 - \alpha_1}{u_0 - \alpha_2},$$
$$u_0 = \lambda_{-1}(y_0) = \frac{\alpha_1 - \alpha_2 y_0}{1 - y_0}.$$

Il faut développer cette dernière fonction en série entière ; on obtient ainsi :

$$\lambda_{-1}(y_0) = \alpha_1 + (\alpha_1 - \alpha_2)y_0 + (\alpha_1 - \alpha_2)y_0^2 + \ldots + (\alpha_1 - \alpha_2)y_0^n + \ldots.$$

série convergente dans le cercle

$$|y_0| < 1,$$

auquel correspond pour u_0 le champ

$$(7) \qquad |u_0 - \alpha_1| < |u_0 - \alpha_2|.$$

Si u_0 est choisi dans ce champ, la fonction

$$f(z) = u_0 + u_1 z + \ldots + u_n z^n + \ldots$$

est une fonction méromorphe de z, dont la décomposition en éléments simples est

$$(8) \quad f(z) = \frac{\alpha_1}{1 - z} + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)\dfrac{u_0 - \alpha_1}{u_0 - \alpha_2}}{1 - \mathrm{S}z} + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)\left(\dfrac{u_0 - \alpha_1}{u_0 - \alpha_2}\right)^2}{1 - \mathrm{S}^2 z} + \ldots + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)\left(\dfrac{u_0 - \alpha_1}{u_0 - \alpha_2}\right)^n}{1 - \mathrm{S}^n z} + \ldots$$

Si u_0 n'est plus choisi dans le champ défini par l'inégalité (7), la fonction $f(z)$ est encore une fonction méromorphe, mais son développement en fractions simples n'est plus donné par l'équation (8).

Il résulte, en effet, de la convergence de u_n vers α_1 pour n infini qu'en supposant $u_0 \neq \alpha_1 \neq \alpha_2$, il existe un entier k tel que l'on ait

$$|u_k - \alpha_1| < |u_k - \alpha_2|.$$

On aura alors, d'après les relations (7) et (8), le développement suivant :

$$u_k + u_{k+1} z + u_{k+2} z^2 + \ldots = \frac{\alpha_1}{1 - z} + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)\dfrac{u_k - \alpha_1}{u_k - \alpha_2}}{1 - \mathrm{S}z} + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)\left(\dfrac{u_k - \alpha_1}{u_k - \alpha_2}\right)^2}{1 - \mathrm{S}^2 z} + \ldots,$$

la série du second membre étant convergente. Multiplions les deux membres par z^k et ajoutons aux deux membres le polynome $u_0 + u_1 z + \ldots + u_{k-1} z^{k-1}$. Nous obtenons :

$$f(z) = u_0 + u_1 z + \ldots + u_{k-1} z^{k-1} + \frac{\alpha_1 z^k}{1 - z} + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)\dfrac{u_k - \alpha_1}{u_k - \alpha_2} z^k}{1 - \mathrm{S}z} + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)\left(\dfrac{u_k - \alpha_1}{u_k - \alpha_2}\right)^2 z^k}{1 - \mathrm{S}^2 z} + \ldots,$$

développement convergent qui montre que $f(z)$ est encore une fonction méromorphe et qui donne cette fonction décomposée en éléments simples sous la forme canonique résultant du théorème de M. Mittag-Leffler [1].

Dans l'exemple actuel, nous avons pu étudier la série proposée pour toutes les valeurs de u_0 et nous pouvons énoncer le résultat suivant :

Soit donnée la substitution linéaire

$$u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d},$$

dans laquelle on suppose que les racines ρ_1, ρ_2 de l'équation

$$\begin{vmatrix} a - \rho & b \\ c & d - \rho \end{vmatrix} = 0$$

ont des modules différents et $|\rho_2| < |\rho_1|$. La série

$$u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots + u_n z^n + \ldots,$$

dans laquelle u_{n+1} est lié à u_n par la substitution linéaire proposée, a pour somme une fonction méromorphe admettant pour pôles simples

$$1,\quad \frac{\rho_1}{\rho_2},\quad \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2,\quad \ldots\quad \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^n,\quad \ldots,$$

et cela quel que soit u_0. Il n'y a exception que si u_0 est pris égal à l'affixe de l'un des points doubles de la substitution, cas où la série se réduit évidemment à la fraction rationnelle $\frac{u_0}{1 - z}$.

Remarque. — Il y a un autre cas d'exception évident : c'est celui où il y aurait impossibilité dans le calcul de l'un des termes de la suite u_0, u_1, ..., u_n, ... On a

$$u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d};$$

la suite n'est donc pas définie si l'on a

$$cu_n + d = 0.$$

Un calcul facile montre que cela a lieu lorsque u_0 vérifie la relation

$$\frac{u_0 - \alpha_1}{u_0 - \alpha_2} = \frac{\rho_1^n}{\rho_2^n}$$

pour une certaine valeur de l'entier n. Pour ces valeurs de u_0, la fonction génératrice n'a pas de sens.

---

(1) Voir Borel, *Leçons sur les fonctions méromorphes*, ch. IV, p. 71.

[**4**] Cas général. — *Série de Taylor dans laquelle les coefficients vérifient une relation de récurrence d'ordre p ; fonction génératrice d'une pareille relation.*

Les résultats obtenus dans le cas d'une relation de récurrence du premier ordre peuvent être étendus au cas où p coefficients consécutifs de la série (1) seraient liés par une relation de récurrence. Il suffira de se servir de la forme réduite établie dans la première partie (n° 4).

Prenons, pour simplifier, une relation de récurrence à trois termes :

$$u_{n+3} = f(u_n,\ u_{n+1},\ u_{n+2}),$$

f étant une fonction holomorphe dans le domaine de $u_n = u_{n+1} = u_{n+2} = \alpha$ et vérifiant l'équation

$$\alpha = f(\alpha,\ \alpha,\ \alpha).$$

Supposons que les multiplicateurs S_1, S_2, S_3 relatifs au point double (α, α, α) vérifient les hypothèses faites dans la première partie (n° 3). Enfin, prenons les trois premiers coefficients u_0, u_1, u_2 de la série dans un domaine suffisamment restreint entourant le point double (α, α, α).

Introduisons les fonctions λ_1, λ_2, λ_3 définies dans la première partie. Posons, comme dans la première partie,

$$(9)\qquad \begin{cases} \lambda_1(u_0,\ u_1,\ u_2) = y_1, \\ \lambda_2(u_0,\ u_1,\ u_2) = y_2, \\ \lambda_3(u_0,\ u_1,\ u_2) = y_3, \end{cases}$$

d'où nous tirons

$$(10)\qquad \begin{cases} u_0 = \lambda_{-1}(y_1,\ y_2,\ y_3), \\ u_1 = \lambda_{-2}(y_1,\ y_2,\ y_3), \\ u_2 = \lambda_{-3}(y_1,\ y_2,\ y_3). \end{cases}$$

En introduisant ces diverses fonctions holomorphes, u_n prend une forme simple en fonction de n. On a, ainsi qu'on l'a vu au n° 6 de la première partie,

$$u_n = \lambda_{-1}[S_1^n y_1,\ S_2^n y_2,\ S_3^n y_3].$$

La somme de la série (1) est une fonction holomorphe de u_0, u_1, u_2 et de z. Mais au lieu de se donner u_0, u_1, u_2, on peut se donner y_1, y_2, y_3, et la somme de la série (1) est une fonction holomorphe de y_1, y_2, y_3. Soit $F(y_1, y_2, y_3)$ cette fonction. On aura

$$\begin{aligned} F(y_1,\ y_2,\ y_3,\ z) = \lambda_{-1}(y_1,\ y_2,\ y_3) + \lambda_{-1}(S_1 y_1,\ S_2 y_2,\ S_3 y_3) z + \lambda_{-1}(S_1^2 y_1,\ S_2^2 y_2,\ S_3^2 y_3) z^2 \\ + \ldots\ldots + \lambda_{-1}(S_1^n y_1,\ S_2^n y_2,\ S_3^n y_3) z^n + \ldots\ldots \end{aligned}$$

La fonction F vérifie l'équation fonctionnelle suivante :

$$(11)\qquad F(y_1, y_2, y_3, z) = \lambda_{-1}(y_1, y_2, y_3) + zF(S_1 y_1, S_2 y_2, S_3 y_3, z).$$

Les deux membres de cette équation sont des fonctions holomorphes de y_1, y_2, y_3 dans le domaine du point $y_1 = y_2 = y_3 = 0$. En effet, les fonctions $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont définies dans le domaine du point $u_0 = u_1 = u_2 = \alpha$ et prennent les valeurs $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ en ce point : l'inversion du système (9) montre que la fonction $\lambda_{-1}(y_1, y_2, y_3)$ fournie par le système (10) est définie dans le domaine du point $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ et prend la valeur α en ce point. Donnons-nous cette fonction par son développement en série entière :

$$(12)\qquad \lambda_{-1}(y_1, y_2, y_3) = \alpha + \alpha_{1,0,0} y_1 + \alpha_{0,1,0} y_2 + \alpha_{0,0,1} y_3 + \ldots + \alpha_{q,r,s} y_1^q y_2^r y_3^s + \ldots.$$

Supposons cette série convergente dans le domaine

$$|y_1| < \beta \quad |y_2| < \gamma \quad |y_3| < \delta.$$

On verra, comme au n° 1, que la série $F(y_1, y_2, y_3, z)$, si l'on suppose $(z) < 1$, est uniformément convergente dans le même domaine : ceci prouve que la série considérée comme série en z a un rayon de convergence au moins égal à 1 et que sa somme est une fonction holomorphe de y_1, y_2, y_3 dans le domaine qui vient d'être défini.

L'équation fonctionnelle (11) permettra de calculer les coefficients de la fonction inconnue F développée en série entière ordonnée suivant les puissances de y_1, y_2, y_3. Soit

$$F(y_1, y_2, y_3, z) = A_{0,0,0} + A_{1,0,0} y_1 + \ldots + A_{q,r,s} y_1^q y_2^r y_3^s + \ldots$$

ce développement écrit avec des coefficients indéterminés $A_{q,r,s}$. En portant ces développements dans l'équation (11) et en égalant les coefficients des termes semblables en y_1, y_2, y_3 dans les deux membres, nous obtenons :

$$\begin{aligned} A_{0,0,0} &= \alpha \quad + A_{0,0,0} z, \\ A_{1,0,0} &= \alpha_{1,0,0} + A_{1,0,0} S_1 z, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{q,r,s} &= \alpha_{q,r,s} + A_{q,r,s} S_1^q S_2^r S_3^s z, \end{aligned}$$

d'où

$$A_{0,0,0} = \frac{\alpha}{1 - z}; \quad A_{1,0,0} = \frac{\alpha_{1,0,0}}{1 - S_1 z}; \quad \ldots; \quad A_{q,r,s} = \frac{\alpha_{q,r,s}}{1 - S_1^q S_2^r S_3^s z}.$$

On obtient donc la proposition suivante, qui généralise le théorème établi au n° 1 pour le cas d'une relation de récurrence du premier ordre.

Soit donnée une relation de récurrence holomorphe d'ordre 3

$$u_{n+3} = f(u_n, u_{n+1}, u_{n+2}).$$

La fonction génératrice correspondante

$$F(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots + u_n z^n + \ldots,$$

où l'on suppose u_0, u_1, u_2 choisis dans le domaine d'un point double α dont les multiplicateurs S_1, S_2, S_3 vérifient les hypothèses faites dans la première partie (n° 3), est une fonction méromorphe admettant pour pôles simples les points $\frac{1}{S_1^q S_2^r S_3^s}$, où q, r, s reçoivent toutes les valeurs entières positives ou nulles, ou certains de ces points.

Le développement de cette fonction méromorphe en série de fractions simples est le suivant :

$$F(z) = \sum_{q,r,s} \frac{\alpha_{q,r,s}\, y_1^q\, y_2^r\, y_3^s}{1 - S_1^q S_2^r S_3^s z}, \tag{13}$$

où y_1, y_2, y_3 sont définis en fonction de u_0, u_1, u_2 par les relations (9) [1].

Les coefficients $\alpha_{q,r,s}$ sont les coefficients du développement de la fonction $\lambda_{-1}(y_1, y_2, y_3)$ en série entière. On pose, en outre, $\alpha_{0,0,0} = \alpha$ (affixe du point double). Nous avons vu dans la première partie (n° 7) comment on obtient cette fonction. Rappelons sa définition.

La relation de récurrence

$$u_{n+3} = f(u_n, u_{n+1}, u_{n+2})$$

étant donnée, on pose

$$\left\{\begin{aligned} &\lambda_{-1}(y_1, y_2, y_3) = u_0, \\ &\lambda_{-1}(S_1 y_1, S_2 y_2, S_3 y_3) = u_1, \\ &\lambda_{-1}(S_1^2 y_1, S_2^2 y_2, S_3^2 y_3) = u_2, \\ &\lambda_{-1}(S_1^3 y_1, S_2^3 y_2, S_3^3 y_3) = f(u_0, u_1, u_2), \end{aligned}\right. \tag{14}$$

où S_1, S_2, S_3 sont les multiplicateurs relatifs au point double α de la relation. En remplaçant dans la dernière de ces quatre équations u_0, u_1, u_2 par leurs valeurs tirées des trois premières, on a une équation fonctionnelle pour définir la fonction λ_{-1} [2]. L'inversion du système formé par les trois premières équations fournit ensuite y_1, y_2, y_3 en fonction de u_0, u_1, u_2 :

$$\begin{aligned} y_1 &= \lambda_1(u_0, u_1, u_2), \\ y_2 &= \lambda_2(u_0, u_1, u_2), \\ y_3 &= \lambda_3(u_0, u_1, u_2). \end{aligned}$$

Le développement (13) est maintenant complètement défini.

---

[1] L'énoncé précédent s'étend immédiatement au cas d'une relation d'ordre p quelconque.

[2] On voit aisément que l'on peut choisir arbitrairement les coefficients des termes du premier degré dans le développement de la fonction λ_{-1} et que ce choix n'influe pas sur le développement (13) de la fonction $F(z)$.

Si l'on se donne, *a priori*, la fonction $\lambda_{-1}(y_1, y_2, y_3)$ par son développement en série entière, les équations (14) définissent la fonction $f(u_0, u_1, u_2)$, c'est-à-dire la relation de récurrence. On voit donc qu'on peut énoncer une réciproque du théorème général analogue à celle que nous avons énoncée au n° 2 pour le cas des relations de récurrence du premier ordre. *A une fonction entière* $\lambda_{-1}(y_1, y_1, y_3) = \Sigma \alpha_{q,r,s} y_1^q y_2^r y_3^s$ *correspond une série de fractions rationnelles en z de la forme du second membre de* (13), *et cette série de fractions rationnelles développée en série entière donne naissance à une série récurrente d'ordre* 3 *admettant pour point double le point* $\alpha_{0,0,0}$ *et pour multiplicateurs relatifs à ce point double les nombres* S_1, S_2, S_3 (*assujettis à vérifier les hypothèses du n°* 3 [*première partie*]).

[5] *Valeurs initiales de la suite des u pour lesquelles une infinité de pôles disparaissent dans la fonction méromorphe* F(*z*). — La relation de récurrence

$$u_{n+3} = f(u_n, u_{n+1}, u_{n+2})$$

étant donnée, nous venons de voir que la série

$$F(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots + u_n z^n + \ldots$$

a pour somme une fonction méromorphe admettant la triple infinité de pôles $\dfrac{1}{S_1^q S_2^r S_3^s}$ où q, r, s reçoivent toutes les valeurs entières positives ou nulles. D'autre part, on a vu dans la première partie (n° 15) que la relation de récurrence d'ordre 3 contient des relations d'ordre 2 ou d'ordre 1 holomorphes dans le domaine du point double et admettant elles-mêmes ce point double, et que les multiplicateurs de ces dernières relations font partie de l'ensemble des multiplicateurs S_1, S_2, S_3 (remarque de la fin du n° 15). Ces relations de récurrence d'ordre 2 contenues dans la relation proposée sont évidemment les suivantes :

$$\begin{array}{llll}
\lambda_1(u_n, u_{n+1}, u_{n+2}) = 0, & \text{qui admet les multiplicateurs} & & S_2 S_3, \\
\lambda_2(u_n, u_{n+1}, u_{n+2}) = 0, & — & — & S_3 S_1, \\
\lambda_3(u_n, u_{n+1}, u_{n+2}) = 0, & — & — & S_1 S_2.
\end{array}$$

Si l'on choisit u_0, u_1, u_2 de façon à vérifier la première relation, par exemple, on obtiendra pour F(z) une fonction méromorphe admettant les pôles $\dfrac{1}{S_2^r S_3^s}$ où r et s reçoivent toutes les valeurs entières positives ou nulles. Une infinité de pôles disparaissent ainsi parmi ceux que présente en général la fonction F(z) : ce sont parmi les pôles $\dfrac{1}{S_1^q S_2^r S_3^s}$ ceux où q n'est pas nul.

Cette proposition résulte d'ailleurs immédiatement du développement (13) de la fonction F(z) en fractions simples. On a posé, en effet,

$$y_1 = \lambda_1(u_0, u_1, u_2),$$

et l'on voit que, si y_1 est nul, toutes les fractions simples $\frac{\alpha_{q,r,s}\, y_1^q y_2^r y_3^s}{1 - S_1^q S_2^r S_3^s z}$ pour lesquelles q n'est pas nul disparaissent et l'on obtient

$$F(z) = \sum_{r,s} \frac{\alpha_{0,r,s}\, y_2^r\, y_3^s}{1 - S_2^r\, S_3^s\, z},$$

où r, s reçoivent toutes les valeurs entières positives ou nulles.

De même, si les valeurs u_0, u_1 des deux premiers coefficients de la série récurrente sont choisies de façon à vérifier une relation de récurrence holomorphe d'ordre 1 contenue dans la relation proposée et admettant, par exemple, le multiplicateur S_1, la fonction méromorphe $F(z)$ n'admettra plus que les pôles de la forme $\frac{1}{S_1^q}$ où q reçoit toutes les valeurs entières positives et la valeur zéro. Ceci résulte encore immédiatement du développement (13) de $F(z)$ en fractions simples. La relation d'ordre 1 envisagée sera définie, en effet, par les équations

$$\lambda_2(u_0, u_1, u_2) = 0,$$
$$\lambda_3(u_0, u_1, u_2) = 0,$$

d'où l'on tire u_1 en fonction de u_0 en éliminant u_2. On a posé, d'autre part,

$$y_1 = \lambda_2(u_0, u_1, u_2),$$
$$y_3 = \lambda_3(u_0, u_1, u_2);$$

y_2 et y_3 étant nuls tous les deux, toutes les fractions simples du développement (13) disparaissent, sauf celles dont le numérateur ne contient ni y_2, ni y_3. On a donc actuellement :

$$F(z) = \sum_q \frac{\alpha_{q,0,0}\, y_1^q}{1 - S_1^q z}.$$

On retrouve le développement obtenu au n° 1 pour les séries de Taylor dont chacun des coefficients est lié au précédent par une relation de récurrence d'ordre 1.

Ainsi, *quelle que soit la relation de récurrence d'ordre 3 proposée, on peut choisir les valeurs initiales de la suite récurrente, de façon que, parmi la triple infinité de pôles* $\frac{1}{S_1^q\, S_2^r\, S_3^s}$ *qu'admet la fonction* $F(z)$, *une infinité simple ou double de pôles disparaisse, un ou deux des exposants* q, r, s *ne pouvant plus recevoir d'autre valeur que la valeur zéro.*

[**6**] *Autres cas exceptionnels dans lesquels certains pôles disparaissent.* — Nous venons de voir qu'une infinité de pôles peuvent disparaître à condition de choisir convenablement les valeurs des premiers coefficients de la suite u_0, u_1, u_2, ... En dehors de ce cas normal, qui se présente avec la relation de récurrence la plus géné-

rale, d'autres cas se présentent où certains pôles, en nombre fini ou infini, disparaissent dans le développement (13) : ces cas sont exceptionnels, en ce sens qu'ils ne peuvent se présenter qu'avec des relations de récurrence de forme particulière.

On voit immédiatement, d'après la forme du développement (13) de $F(z)$ en fractions simples, que le pôle $\frac{1}{S_1^q S_2^r S_3^s}$ disparaît si l'on a

$$\alpha_{q,r,s} = 0.$$

Cette condition relative à la fonction $\lambda_{-1}(y_1, y_2, y_3)$ entraine pour la relation de récurrence proposée une relation entre les coefficients et, par suite, le cas correspondant doit être considéré comme exceptionnel.

[**7**] *Cas particulier où les coefficients de la série sont liés par une relation de récurrence linéaire et homogène. Fraction génératrice.* — On sait que si les coefficients de la série

$$F(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots + u_n z^n + \ldots$$

sont liés par une relation de récurrence linéaire et homogène

$$u_{n+p} = au_n + bu_{n+1} + \ldots + lu_{n+p-1},$$

la série a pour somme une fraction rationnelle dont le dénominateur est le polynôme

$$az^p + bz^{p-1} + cz^{p-2} + \ldots + lz - 1.$$

Cette proposition bien connue résulte très simplement de la théorie de la division des polynomes ordonnés suivant les puissances croissantes de la variable.

La théorie générale qui précède permet de retrouver aisément ce résultat et d'obtenir en même temps la fraction génératrice de la série sous la forme d'une somme de fractions simples.

Soit, pour simplifier, la relation d'ordre 3 :

$$u_{n+3} = au_n + bu_{n+1} + cu_{n+2}.$$

Supposons les multiplicateurs S_1, S_2, S_3 distincts : ce sont les racines de l'équation

$$a + bS + cS^2 - S^3 = 0.$$

La fonction $\lambda_{-1}(y_1, y_2, y_3)$ se réduit actuellement à un polynôme linéaire et homogène en y_1, y_2, y_3. Nous sommes donc dans le cas exceptionnel signalé au numéro précédent, puisque tous les coefficients α sont nuls, sauf $\alpha_{1,0,0}$, $\alpha_{0,1,0}$ et $\alpha_{0,0,1}$. En désignant, pour abréger, ces coefficients par α_1, α_2, α_3, nous obtenons

$$F(z) = \frac{\alpha_1 y_1}{1 - S_1 z} + \frac{\alpha_2 y_2}{1 - S_2 z} + \frac{\alpha_3 y_3}{1 - S_3 z},$$

et ceci démontre la proposition.

Calculons explicitement les numérateurs en fonction des trois premiers coefficients u_0, u_1, u_2 de la série.

Il suffit d'écrire, conformément à la théorie générale, les équations (14) du numéro précédent :

$$\begin{aligned}
\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 &= u_0, \\
\alpha_1 S_1 y_1 + \alpha_2 S_2 y_2 + \alpha_3 S_3 y_3 &= u_1, \\
\alpha_1 S_1^2 y_1 + \alpha_2 S_2^2 y_2 + \alpha_3 S_3^2 y_3 &= u_2, \\
\alpha_1 S_1^3 y_1 + \alpha_2 S_2^3 y_2 + \alpha_3 S_3^3 y_3 &= a u_0 + b u_1 + c u_2.
\end{aligned}$$

On voit immédiatement que, quels que soient α_1, α_2, α_3, la quatrième équation est une conséquence des trois premières, de sorte que la fonction λ_{-1} est bien une fonction linéaire, ainsi qu'il a été indiqué plus haut. On tire des trois premières équations :

$$\alpha_1 y_1 = \frac{u_0 S_2 S_3 - u_1(S_2 + S_3) + u_2}{(S_1 - S_2)(S_1 - S_3)},$$

$$\alpha_2 y_2 = \frac{u_0 S_3 S_1 - u_1(S_3 + S_1) + u_2}{(S_2 - S_3)(S_2 - S_1)},$$

$$\alpha_3 y_3 = \frac{u_0 S_1 S_2 - u_1(S_1 + S_2) + u_2}{(S_3 - S_1)(S_3 - S_2)}.$$

Le développement de $F(z)$ est ainsi obtenu explicitement. En général, la fraction génératrice $F(z)$ est une fraction irréductible dont le dénominateur est $(1 - S_1 z)(1 - S_2 z)(1 - S_3 z)$. Cette fraction se simplifie si l'un au moins des trois pôles disparaît, ce qui arrive si l'un au moins des trois numérateurs s'annule : c'est là un cas particulier de la proposition énoncée au n° 5. Par exemple, si l'on a la relation

$$u_0 S_2 S_3 - u_1(S_2 + S_3) + u_2 = 0$$

entre les trois premiers coefficients de la série, le pôle $\frac{1}{S_1}$ disparaît et on obtient, tous calculs faits,

$$F(z) = \frac{\dfrac{u_1 - u_0 S_3}{S_2 - S_3}}{1 - S_2 z} + \frac{\dfrac{u_1 - u_0 S_2}{S_3 - S_2}}{1 - S_3 z},$$

relation qu'on aurait pu obtenir directement en remarquant que, dans le cas actuel, u_n, u_{n+1}, u_{n+2} sont liés par la relation d'ordre 2

$$u_{n+2} = u_{n+1}(S_2 + S_3) - u_n S_2 S_3$$

contenue dans la relation d'ordre 3 proposée.

Enfin, supposons que l'on ait simultanément :

$$u_0 S_1 S_3 - u_1(S_1 + S_3) + u_2 = 0,$$
$$u_0 S_2 S_3 - u_1(S_2 + S_3) + u_2 = 0,$$

ce qui revient à

$$u_1 = S_3 u_0, \qquad u_2 = S_3^2 u_0.$$

Les deux pôles $\frac{1}{S_1}$, $\frac{1}{S_2}$ disparaissent tous les deux et l'on a simplement

$$F(z) = \frac{u_0}{1 - S_3 z},$$

fraction génératrice que l'on obtiendrait en partant de la relation de récurrence d'ordre 1

$$u_{n+1} = S_3 u_n$$

contenue dans la relation de récurrence proposée,

[**8**] *Exemple.* — Reprenons à titre d'exercice, et pour appliquer toute la théorie qui précède, l'exemple déjà envisagé aux nos 10 et 15 de la première partie.

Soit donnée la relation de récurrence du second ordre :

$$u_{n+2} = \frac{5u_{n+1} - u_n + 6u_n u_{n+1}}{6 + 16u_n - 8u_{n+1}}. \tag{15}$$

Proposons-nous d'étudier la fonction génératrice

$$F(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \dots + u_n z^n + \dots$$

de cette relation de récurrence.

En se reportant au n° 10 de la première partie, on voit que l'on doit poser

$$\lambda_{-1}(y_1, y_2) = \frac{y_1 + y_2}{1 - y_1},$$
$$y_1 = \lambda_1(u_0, u_1) = \frac{3u_0 - 6u_1}{1 + 3u_0 - 2u_1},$$
$$y_2 = \lambda_2(u_0, u_1) = \frac{6u_1 - 2u_0 + 4u_0 u_1}{1 + 3u_0 - 2u_1}.$$

Conformément à la théorie générale, on doit développer $\lambda_{-1}(y_1, y_2)$ en série entière ordonnée suivant les puissances croissantes de y_1, y_2. On a le développement

$$\lambda_{-1}(y_1, y_2) = y_1 + y_2 + y_1^2 + y_1 y_2 + y_1^3 + y_1^2 y_2 + \dots$$

valable dans le domaine

$$|y_1| < 1,$$

c'est-à-dire dans le domaine

$$\left| \frac{3u_0 - 6u_1}{1 + 3u_0 - 2u_1} \right| < 1.$$

La fonction génératrice est alors la suivante :

$$(16)\qquad F(z) = \frac{y_1}{1-\frac{1}{3}z} + \frac{y_1^2}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2 z} + \dots + \frac{y_1^n}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n z} + \dots$$

$$+ \frac{y_2}{1-\frac{1}{2}z} + \frac{y_1 y_2}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}z} + \frac{y_1^2 y_2}{1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2 z} + \dots + \frac{y_1^p y_2}{1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^p z} + \dots.$$

Elle admet, en général, les pôles

$$3,\ 3^2,\ \dots\dots,\ 3^n,\ \dots\dots\dots\dots\dots$$
$$2,\ 2.3,\ 2.3^2,\ \dots\dots,\ 2.3^p,\ \dots\dots$$

Mais une infinité de pôles disparaissent si l'on choisit u_0, u_1, de façon que y_1 ou y_2 soit nul, c'est-à-dire si l'on prend pour u_0, u_1 des valeurs liées par l'une ou l'autre des relations de récurrence du premier ordre admettant l'origine pour point double, holomorphes en ce point et contenues dans la relation du second ordre proposée.

1° Si l'on a

$$3u_0 - 6u_1 = 0,$$

c'est-à-dire

$$u_1 = \frac{u_0}{2},$$

la fonction génératrice se réduit à

$$F(z) = \frac{y_2}{1-\frac{1}{2}z}.$$

Or, y_2 se réduit dans le cas actuel à $\dfrac{3u_0 - 2u_0 + 2u_0^2}{1 + 3u_0 - u_0}$, c'est-à-dire à $\dfrac{u_0(1+2u_0)}{1+2u_0}$.

Donc, si l'on suppose $u_0 \neq -\frac{1}{2}$, si, en outre, tous les termes de la suite récurrente sont bien définis, sans qu'aucune impossibilité se présente dans leur calcul, on a :

$$F(z) = \frac{u_0}{1-\frac{1}{2}z},$$

résultat évident *a priori*, puisque la série se réduit ici à une progression géométrique de raison $\frac{1}{2}z$.

Si l'on a $u_0 = -\frac{1}{2}$, $u_1 = \frac{u_0}{2} = -\frac{1}{4}$, on vérifie immédiatement que le numérateur et le dénominateur de u_2 s'annulent simultanément. On a en effet :

$$u_2 = \frac{5u_1 - u_0 + 6u_0u_1}{6 + 16u_0 - 8u_1} = \frac{-\frac{5}{4} + \frac{1}{2} + \frac{6}{2} \cdot \frac{1}{4}}{6 - 8 + 2}.$$

Donc la relation de récurrence devient indéterminée et la suite $u_0, u_1, u_2, \ldots$ n'étant plus définie à partir de u_2, il n'y a plus lieu de calculer $F(z)$.

Le calcul de la suite récurrente présente d'ailleurs d'autres cas d'impossibilité : en général, $u_0, u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}$ étant supposés calculés, le calcul de u_{n+2} à l'aide de la relation de récurrence (15) sera impossible si l'on a

$$6 + 16u_n - 8u_{n+1} = 0,$$

c'est-à-dire

$$3 + 8\frac{u_0}{2^n} - 4\frac{u_0}{2^{n+1}} = 0,$$

d'où

$$u_0 = -2^{n-1}.$$

Pour $n = 0$, on retrouve le cas d'exception $u_0 = -\frac{1}{2}$.

2° Si l'on a

$$6u_1 - 2u_0 + 4u_0u_1 = 0,$$

c'est-à-dire

$$u_1 = \frac{u_0}{3 + 2u_0},$$

la fonction génératrice se réduit à

$$F(z) = \frac{y_1}{1 - \frac{1}{3}z} + \frac{y_1^2}{1 - \frac{1}{3^2}z} + \ldots + \frac{y_1^n}{1 - \frac{1}{3^n}z} + \ldots.$$

Ce développement est valable pourvu que l'on ait

$$|y_1| < 1,$$

ce qui, tous calculs faits, donne la condition

$$\left|\frac{u_0}{1 + u_0}\right| < 1.$$

Revenons maintenant au cas général. Il sera facile, dans l'exemple actuel, d'étudier la fonction génératrice pour toutes les valeurs de u_0 et de u_1, au lieu de nous borner, comme dans la théorie générale, à un domaine voisin du point double origine : cette étude mettra en évidence la nature des difficultés qui se présentent lorsque l'on donne à u_0 et à u_1 des valeurs quelconques.

Le développement (16) de la fonction génératrice n'était valable que si u_0, u_1 étaient pris dans le domaine défini par l'inégalité

$$\left|\frac{3u_0 - 6u_1}{1 + 3u_0 - 2u_1}\right| < 1. \tag{17}$$

Supposons maintenant que cette inégalité ne soit plus vérifiée.

Tout d'abord, il faut écarter les valeurs de u_0, u_1 pour lesquelles la suite

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots$$

n'est pas définie. On a trouvé au n° 10 de la première partie l'expression générale de u_n :

$$u_n = \frac{S_1^n \lambda_1(u_0, u_1) + S_2^n \lambda_2(u_0, u_1)}{1 - S_1^n \lambda_1(u_0, u_1)} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n \frac{3u_0 - 6u_1}{1 + 3u_0 - 2u_1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{6u_1 - 2u_0 + 4u_0 u_1}{1 + 3u_0 - 2u_1}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \frac{3u_0 - 6u_1}{1 + 3u_0 - 2u_1}};$$

u_n n'est donc pas défini lorsque l'on a

$$\frac{3u_0 - 6u_1}{1 + 3u_0 - 2u_1} = 3^n.$$

Ce cas ne pouvait se présenter pour aucune valeur de n tant que u_0 et u_1 étaient liés par l'inégalité (17). Mais nous devons spécifier que nous l'écartons, maintenant que nous ne supposons plus vérifiée l'inégalité (17). Nous ne considérons donc que les cas où la suite $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ est bien définie.

Supposons que l'inégalité (17) ne soit pas vérifiée, mais que, pour une certaine valeur de l'indice k, l'inégalité

$$\left|\frac{3u_k - 6u_{k+1}}{1 + 3u_k - 2u_{k+1}}\right| < 1$$

soit vérifiée. Nous écrirons alors la série $F(z)$ sous la forme

$$F(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots + u_{k-1} z^{k-1} + z^k [u_k + u_{k+1} z + \ldots + u_{k+n} z^n + \ldots].$$

La série entre crochets est une série dont les coefficients sont liés par la relation de récurrence (15) comme les coefficients de la série $F(x)$, mais dans laquelle l'inégalité (17) entre les deux premiers coefficients, représentés ici par u_k, u_{k+1}, est vérifiée. Nous pouvons donc appliquer à cette série le développement (16). Les numérateurs des fractions simples seront

$$y_1, \; y_1^2, \; y_1^3, \; \ldots; \qquad y_2, \; y_1 y_2, \; y_1^2 y_2, \; \ldots,$$

mais il faudra poser ici :

$$y_1 = \lambda_1(u_k, u_{k+1}) = \frac{3u_k - 6u_{k+1}}{1 + 3u_k - 2u_{k+1}}, \qquad y_2 = \lambda_2(u_k, u_{k+1}) = \frac{6u_{k+1} - 2u_k + 4u_k u_{k+1}}{1 + 3u_k - 2u_{k+1}}.$$

Exprimons ces quantités en fonction de u_0, u_1. On a, d'après les propriétés fonctionnelles des fonctions λ_1 et λ_2 :

$$y_1 = \lambda_1(u_k, u_{k+1}) = S_1^k \lambda_1(u_0, u_1) = \left(\frac{1}{3}\right)^k \lambda_1(u_0, u_1) = \left(\frac{1}{3}\right)^k \frac{3u_0 - 6u_1}{1 + 3u_0 - 2u_1},$$

$$y_2 = \lambda_2(u_k, u_{k+1}) = S_2^k \lambda_2(u_0, u_1) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \lambda_2(u_0, u_1) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{6u_1 - 2u_0 + 4u_0 u_1}{1 + 3u_0 - 2u_1}.$$

Changeons de notation et posons comme dans le premier cas

$$y_1 = \frac{3u_0 - 6u_1}{1 + 3u_0 - 2u_1}, \qquad y_2 = \frac{6u_1 + 2u_0 + 4u_0 u_1}{1 + 3u_0 - 2u_1}.$$

Nous obtenons pour $F(z)$ le développement suivant :

$$(18) \qquad F(z) = u_0 + u_1 z + \ldots + u_{k-1} z^{k-1} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^k y_1 z^k}{1 - \frac{1}{3} z} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2k} y_1^2 z^k}{1 - \frac{1}{3^2} z} + \ldots$$

$$+ \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{nk} y_1^n z^k}{1 - \frac{1}{3^n} z} + \ldots + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k y_2 z^k}{1 - \frac{1}{2} z} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^k y_1 y_2 z^k}{1 - \frac{1}{2}\frac{1}{3} z} + \ldots + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{pk} y_1^p y_2 z^k}{1 - \frac{1}{2}\frac{1}{3^p} z} + \ldots.$$

$F(z)$ est encore une fonction méromorphe admettant les pôles simples $\frac{1}{3^n}$ et $\frac{1}{2 \cdot 3^p}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$; $p = 0, 1, 2, \ldots$); mais le développement de cette fonction, qui résulte du théorème de M. Mittag-Leffler, n'est plus le même que dans le premier cas : ce développement (18) montre qu'il a fallu retrancher de chaque fraction simple les $k - 1$ premiers termes de son développement pour obtenir la série convergente (17) [1]. *En d'autres termes, la fonction méromorphe* $F(z)$ *se comporte comme la dérivée logarithmique d'une fonction entière de genre* k.

Il reste à voir pour quelles valeurs de u_0, u_1 le développement (18) est valable. Il faut et il suffit que l'on ait

$$\left| \frac{3u_k - 6u_{k+1}}{1 + 3u_k - 2u_{k+1}} \right| < 1,$$

d'où l'on déduit

$$\left| \frac{3u_0 - 6u_1}{1 + 3u_0 - 2u_1} \right| < 3^k.$$

---

(1) Voir Borel, *Leçons sur les fonctions méromorphes*, chap. IV.

On a déjà supposé que $\dfrac{3u_0 - 6u_1}{1 + 3u_0 - 2u_1}$ n'était pas de la forme 3^k, où k est un nombre entier. Son module est donc compris entre deux nombres de cette forme :

$$3^{k-1} < \left| \frac{3u_0 - 6u_1}{1 + 3u_0 - 2u_1} \right| < 3^k.$$

En prenant pour k l'entier ainsi déterminé, la fonction génératrice $F(z)$ sera la fonction méromorphe définie par l'égalité (18) [1].

Il y a encore un cas exceptionnel qui échappe à l'analyse précédente : c'est le cas où l'on a

$$1 + 3u_0 - 2u_1 = 0$$

ou bien

$$u_1 = \frac{1 + 3u_0}{2}.$$

Dans ce cas, on ne peut pas, en effet, déterminer le nombre k. D'autre part, on a vu (n° 15 de la première partie) que la relation

$$1 + 3u_n - 2u_{n+1} = 0$$

était une relation d'ordre 1 contenue dans la relation (15) et admettant le point double $u_n = u_{n+1} = -1$ (et non plus le point double origine). Il n'y a donc qu'à appliquer la théorie générale à cette relation et au point double -1. Le multiplicateur est ici $S = \dfrac{3}{2}$. On a

$$u_1 + 1 = \frac{3}{2}(u_0 + 1),$$

d'où

$$u_n + 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^n (u_0 + 1).$$

La série

$$u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots + u_n z^n + \ldots$$

peut s'écrire

$$-1 - z - z^2 - \ldots - z^n - \ldots + (u_0 + 1)\left[1 + \frac{3}{2} z + \left(\frac{3}{2}\right)^2 z^2 + \ldots \left(\frac{3}{2}\right)^p z^p + \ldots\right].$$

---

(1) Dans le cas déjà étudié où l'on a

$$6u_1 - 2u_0 + 4u_0 u_1 = 0,$$

cas où une infinité de pôles disparaissent, parce que y_2 est nul, le développement (18) s'applique sous la condition

$$3^{k-1} < \left| \frac{u_0}{1 + u_0} \right| < 3^k.$$

Elle a donc pour somme

$$F(z) = \frac{-1}{1 - z} + \frac{u_0 + 1}{1 - \frac{3}{2} z}.$$

C'est une fraction rationnelle admettant pour pôles 1 et $\frac{2}{3}$. Enfin, si l'on a $u_0 = u_1 = -1$, la fonction génératrice devient

$$F(z) = \frac{-1}{1 - z}.$$

L'étude de la fonction génératrice correspondant à la relation de récurrence (15) est ainsi complètement achevée.

[**9**] *Cas d'une relation de récurrence du second ordre à multiplicateurs égaux.*

Le théorème général établi au n° 4 suppose essentiellement que les multiplicateurs S_1, S_2, ... relatifs au point double de la relation de récurrence sont distincts. Qu'arrive-t-il si plusieurs multiplicateurs deviennent égaux? C'est ce que nous nous proposons d'examiner, en nous limitant au cas d'une relation de récurrence du *second ordre :* nous utiliserons les résultats établis pour ces relations au n° 14 de la première partie.

Soit donc la suite récurrente

$$u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots,$$

dans laquelle nous supposons qu'il y a entre u_n, u_{n+1}, u_{n+2} une relation de récurrence

$$u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1})$$

admettant un point double α, holomorphe dans le domaine de ce point, les multiplicateurs S_1, S_2 relatifs à ce point double étant supposés égaux et inférieurs à 1 en valeur absolue

$$S_1 = S_2 = S; \quad |S| < 1.$$

Soit

$$F(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots + u_n z^n + \ldots \tag{19}$$

la fonction génératrice de la relation de récurrence. En supposant que u_0, u_1 appartiennent à un domaine suffisamment restreint entourant le point α, nous nous proposons d'établir la proposition suivante :

La fonction génératrice F(z) *est une fonction méromorphe admettant en général les pôles* $\frac{1}{S}, \frac{1}{S^2}, \ldots, \frac{1}{S^n} \ldots$; *le pôle* $\frac{1}{S^n}$ *est en général un pôle multiple d'ordre* $n + 1$. Pour des relations de récurrence particulières, certains de ces pôles peuvent disparaître ou bien leur ordre peut être réduit.

Le théorème actuel est, on le voit, un cas limite du théorème général du n° 4. Les pôles

$$\frac{1}{S_1^n},\quad \frac{1}{S_1^{n-1}S_2},\quad \frac{1}{S_1^{n-2}S_2^2},\quad \ldots,\quad \frac{1}{S_2^n},$$

qui étaient distincts lorsque S_1 et S_2 étaient supposés différents, deviennent tous égaux à $\frac{1}{S^n}$, et ces pôles, au nombre de $n+1$, donnent à la limite un pôle multiple d'ordre $n+1$.

Pour démontrer cette proposition, il suffira d'utiliser les fonctions λ_1, λ_2 introduites au n° 14 de la première partie et la forme réduite de la relation de récurrence obtenue au même endroit.

On peut définir deux fonctions holomorphes

$$(20)\qquad \begin{cases} y_1 = \lambda_1(u_0,\ u_1), \\ y_2 = \lambda_2(u_0,\ u_1), \end{cases}$$

telles que u_n s'exprime en fonction de n par la formule

$$u_n = \lambda_{-1}[S^n\lambda_1(u_0,\ u_1) - nS^{n-1}\lambda_2(u_0,\ u_1),\ S^n\lambda_2(u_0,\ u_1)],$$

où λ_{-1} désigne la fonction holomorphe de deux variables obtenue en résolvant le système (20) par rapport à u_0 :

$$u_0 = \lambda_{-1}(y_1,\ y_2).$$

Au lieu de se donner u_0, u_1, on peut se donner y_1, y_2 qui sont liés à u_0, u_1 par la relation (20), et la série (19) prendra alors la forme

$$F(y_1,\ y_2,\ z) = \lambda_{-1}(y_1,\ y_2) + \lambda_{-1}(Sy_1 - y_2,\ Sy_2)z + \lambda_{-1}(S^2y_1 - 2Sy_2,\ S^2y_2)z^2 + \ldots.$$

Nous désignons sa somme par $F(y_1,\ y_2,\ z)$ en mettant en évidence les paramètres y_1, y_2 dont dépend la série.

Posons maintenant

$$Y_1 = Sy_1 - y_2,$$
$$Y_2 = Sy_2.$$

Chacun des coefficients de la série génératrice est alors remplacé par le suivant. On le vérifie immédiatement et, d'ailleurs, cela résulte de la définition des fonctions λ_1, λ_2 introduites dans la première partie.

On a donc

$$F(Sy_1 - y_2,\ y_2,\ z) = \lambda_{-1}(Sy_1 - y_2,\ Sy_2) + \lambda_{-1}(S^2y_1 - 2Sy_2,\ S^2y_2)z + \ldots.$$

On peut encore exprimer ce résultat de la façon suivante :

Soit

$$u_0 + u_1z + u_2z^2 + \ldots + u_nz^n + \ldots = F(y_1,\ y_2,\ z).$$

On aura

$$u_1 + u_2z + u_3z^2 + \ldots + u_{n+1}z^n + \ldots = F(Sy_1 - y_2,\ Sy_2,\ z),$$

d'où l'on déduit pour la fonction $F(y_1,\ y_2,\ z)$ *l'équation fonctionnelle suivante :*

$$(21)\qquad F(Sy_1 - y_2,\ Sy_2,\ z)z + \lambda_{-1}(y_1,\ y_2) = F(y_1,\ y_2,\ z).$$

Les deux membres de cette équation sont des fonctions holomorphes de y_1, y_2 dans le domaine du point $y_1 = y_2 = 0$ (aux valeurs $u_0 = u_1 = \alpha$ correspondent en effet, pour les variables y_1, y_2 liées à u_0, u_1 par les relations (20), les valeurs $y_1 = y_2 = 0$). Procédons alors comme dans le cas général (n° 4).

Soit

$$\lambda_{-1}(y_1, y_2) = \alpha + \alpha_{10} y_1 + \alpha_{01} y_2 + \alpha_{20} y_1^2 + \alpha_{11} y_1 y_2 + \alpha_{02} y_2^2 + \dots$$

le développement en série entière de la fonction $\lambda_{-1}(y_1, y_2)$. Ecrivons la fonction inconnue avec des coefficients indéterminés :

$$F(y_1, y_2, z) = A_{00} + A_{10} y_1 + A_{01} y_2 + \dots + A_{pq} y_1^p y_2^q + \dots$$

et portons ces divers développements dans l'équation fonctionnelle (21). En égalant les coefficients des termes semblables en y_1, y_2 dans les deux membres, nous obtiendrons des équations permettant de calculer de proche en proche les coefficients A_{pq}. L'équation fonctionnelle (21) devient :

$$\begin{aligned}
&[A_{00} + A_{10}(Sy_1 - y_2) + A_{01} Sy_2 + A_{20}(Sy_1 - y_2)^2 + A_{11}(Sy_1 - y_2)Sy_2 + A_{02}S^2 y_2^2 + \dots] z \\
&\quad + \alpha + \alpha_{10} y_1 + \alpha_{01} y_2 + \alpha_{20} y_1^2 + \alpha_{11} y_1 y_2 + \alpha_{02} y_2^2 + \dots\dots\dots \\
&\quad = A_{00} + A_{10} y_1 + A_{01} y_2 + A_{20} y_1^2 + A_{11} y_1 y_2 + A_{02} y_2^2 + \dots\dots\dots
\end{aligned}$$

d'où les égalités

$$\begin{aligned}
A_{00} z + \alpha &= A_{00} \quad \text{ou bien} \quad A_{00} = \frac{\alpha}{1 - z}, \\
A_{10} S z + \alpha_{10} &= A_{10} \quad \text{»} \quad A_{10} = \frac{\alpha_{10}}{1 - Sz}, \\
A_{01} S z - A_{10} z + \alpha_{01} &= A_{01} \quad \text{»} \quad A_{01} = \frac{\alpha_{01}}{1 - Sz} - \frac{\alpha_{10} z}{(1 - Sz)^2}.
\end{aligned}$$

Les termes de degré 0 ou 1 en y_1, y_2 dans le développement de $F(y_1, y_2, z)$ sont donc

$$\frac{\alpha}{1 - z} + \frac{(\alpha_{10} y_1 + \alpha_{01} y_2)(1 - Sz) - \alpha_{10} y_2 z}{(1 - Sz)^2}.$$

Passons aux termes du second degré en y_1, y_2. On a, pour déterminer A_{20}, A_{11}, A_{02}, les trois équations

$$\begin{aligned}
A_{20} S^2 z + \alpha_{20} &= A_{20}, \\
-2A_{20} S z + A_{11} S^2 z + \alpha_{11} &= A_{11}, \\
A_{20} z - A_{11} S z + A_{02} S^2 z + \alpha_{02} &= A_{02}.
\end{aligned}$$

On en déduit pour l'ensemble des termes du second degré en y_1, y_2 l'expression suivante :

$$\frac{(1 - S^2 z)^2 [\alpha_{20} y_1^2 + \alpha_{11} y_1 y_2 + \alpha_{02} y_2^2] + z(1 - S^2 z)[\alpha_{20} y_2^2 - 2\alpha_{20} S y_1 y_2 - S\alpha_{11} y_2^2] + 2S^2 z^2 \alpha_{20} y_2^2}{(1 - S^2 z)^3}.$$

On voit que les premiers termes du développement de $F(y_1, y_2, z)$ sont de la forme

$$\frac{\alpha}{1-z} + \frac{F_1(y_1, y_2, z)}{(1-Sz)^2} + \frac{F_2(y_1, y_2, z)}{(1-S^2z)^3} + \ldots,$$

où

$F_1(y_1, y_2, z)$ est un polynôme en y_1, y_2, z — homogène et du premier degré en y_1, y_2 — du premier degré en z;

$F_2(y_1, y_2, z)$ est un polynôme en y_1, y_2, z — homogène et du second degré en y_1, y_2 — du second degré en z.

On voit immédiatement que le calcul de proche en proche des divers coefficients conduit pour $F(y_1, y_2, z)$ au développement suivant :

$$F(y_1, y_2, z) = \frac{\alpha}{1-z} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{F_n(y_1, y_2, z)}{(1-S^n z)^{n+1}},$$

où

$F_n(y_1, y_2, z)$ est un polynôme en y_1, y_2, z — homogène et de degré n en y_1, y_2 — de degré n en z.

Cette forme du développement, qui est valable pourvu que y_1, y_2 soient suffisamment voisins de zéro, pourvu par conséquent que u_0, u_1 soient suffisamment voisins du point double α, montre que $F(y_1, y_2, z)$ est une fonction méromorphe de z admettant $\frac{1}{S^n}$ comme pôle multiple d'ordre $n+1$.

Il pourra arriver, comme dans le cas général que, pour un choix particulier de la relation de récurrence, un certain nombre de coefficients de la fonction $\lambda_{-1}(y_1, y_2)$ soient nuls, et cela peut entraîner, soit la disparition d'un pôle, soit une réduction dans l'ordre de ce pôle.

De plus, quelle que soit la relation de récurrence, si l'on choisit u_0, u_1 de façon que l'on ait

$$y_2 = 0,$$

on obtient une suite récurrente d'ordre 1 contenue dans la suite d'ordre 2 et, d'après l'étude faite au n° 1, la fonction génératrice n'admettra plus les pôles $\frac{1}{S}, \frac{1}{S^2}, \frac{1}{S^3}, \ldots$ que comme pôles simples. C'est ce qu'il est, d'ailleurs, aisé de vérifier en étudiant de plus près le calcul des polynômes $F_n(y_1, y_2, z)$.

Pour une relation de récurrence d'ordre quelconque dont deux multiplicateurs sont égaux, le théorème établi dans ce numéro pour une relation de second ordre subsiste : la fonction est une fonction méromorphe ayant des pôles multiples aux points $\frac{1}{S}, \frac{1}{S^2}, \frac{1}{S^3}, \ldots$. Plus généralement $F(z)$, toujours méromorphe, a des pôles multiples, dont il resterait à évaluer l'ordre, dans le cas où plusieurs multiplicateurs deviennent égaux (1). Il suffirait pour cela d'utiliser les formes réduites des transformations ponctuelles dans le domaine d'un point double, comme nous l'avons fait pour les autres cas traités dans ce travail.

[**10**] *Cas d'une relation de récurrence du second ordre dans l'hypothèse* $S_1 = S_2^\alpha$ (α *entier*). — Ce cas, étudié à la fin du n° 14 de la première partie, conduit à des conclusions analogues à celles du cas précédent. La méthode de démonstration étant la même, nous nous bornerons à énoncer le résultat. Celui-ci peut s'obtenir en cherchant ce que deviennent les pôles distincts $\frac{1}{S_1^p S_2^q}$ du cas général lorsque S_1 devient une puissance S_1^α à exposant entier de S_2. Il serait facile de remplacer ce raisonnement peu rigoureux par un raisonnement entièrement satisfaisant : il suffirait de procéder comme on l'a fait au numéro précédent pour le cas où $S_1 = S_2$ et d'utiliser à cet effet les fonctions $\lambda_1(u_0, u_1)$, $\lambda_2(u_0, u_1)$ et l'expression générale de u_n établie pour le cas qui nous occupe au n° 14 de la première partie.

On a

$$\frac{1}{S_1^p\, S_2^q} = \frac{1}{S_2^{p\alpha+q}}.$$

Si l'on donne à p, q toutes les valeurs entières positives ou nulles, on voit que $p\alpha + q$ prend :

une seule fois les valeurs $0, 1, 2, \ldots, \alpha - 1$,
deux fois les valeurs $\alpha, \alpha + 1, \ldots, 2\alpha - 1$,
trois fois les valeurs $2\alpha, 2\alpha + 1, \ldots, 3\alpha - 1$,

et ainsi de suite. Il suffit de considérer le quadrillage formé par les points à coordonnées entières positives ou nulles d'un plan et de chercher combien de sommets du quadrillage se trouvent sur la droite qui a pour équation

$$\alpha x + y = n,$$

n étant un nombre donné.

On pourra donc énoncer le résultat suivant :

Soit donnée une relation de récurrence du second ordre

$$u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1})$$

holomorphe dans le domaine d'un point double. Supposons que l'un des multiplicateurs relatifs au point double soit une puissance entière et positive de l'autre multiplicateur

$$S_1 = S_2^\alpha, \qquad |S_2| < 1.$$

La fonction génératrice

$$F(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots + u_n z^n + \ldots,$$

(1) On suppose, bien entendu, que les multiplicateurs continuent à vérifier toutes les autres hypothèses posées dans tout ce travail, en particulier qu'ils sont inférieurs à 1 en valeur absolue.

où l'on suppose u_0, u_1 pris suffisamment voisins du point double, est une fonction méromorphe admettant les pôles $0, 1, 2, \ldots, \alpha - 1$ *comme pôles du premier ordre, les pôles* $\alpha, \alpha+1, \alpha+2, \ldots, 2\alpha-1$ *commes pôles du second ordre,* . . . . *les pôles* $k\alpha$, $k\alpha+1$, $(k+1)\alpha - 1$ *comme pôles d'ordre* $k+1$.

[**11**] L'étude de la fonction génératrice

$$u_0 + u_1 z + \ldots + u_n z^n + \ldots$$

d'une relation de récurrence est ainsi achevée dans le cas où les multiplicateurs sont inférieurs à 1 en valeur absolue et ne sont pas nuls. On suppose, bien entendu, u_0, u_1 pris dans le domaine du point double considéré : la fonction génératrice est alors une fonction méromorphe (1).

Il resterait à étudier le cas où certains multiplicateurs sont égaux à 1. On suppose encore que u_0, u_1 soient choisis de façon que la suite des u tende vers le point double. L'étude de la série génératrice $F(z)$ paraît beaucoup plus difficile que pour les cas étudiés dans ce travail. Cela tient à ce que les u_n n'ont plus le même mode de croissance. Le point double étant désigné par α, $\left|\dfrac{u_{n+1}-\alpha}{u_n - \alpha}\right|$ avait, pour les cas étudiés dans ce travail, une limite $|S|$ inférieure à 1 (première partie, n° 16). Au contraire, dans le cas où certains multiplicateurs sont égaux à 1, u_n s'approche de α plus lentement et ceci influe sur la nature des singularités de la série $F(z)$.

Par exemple, soit la relation du premier ordre

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$$

qui admet le point double $u=0$ avec le multiplicateur 1. Si l'on prend $u_0 = 1$, la série génératrice est

$$F(z) = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} + \ldots + \frac{z^n}{n+1} + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$F(z) = \frac{1}{z}\log\frac{1}{1-z}.$$

On voit s'introduire une singularité logarithmique, tandis que nous n'avons rencontré dans ce travail que des fonctions génératrices $F(z)$ méromorphes, par conséquent uniformes.

---

(1) Les cas singuliers des nos 9 et 10 n'ont été étudiés que pour une relation de récurrence du second ordre; mais le résultat essentiel, le fait que la fonction génératrice est méromorphe, subsiste pour des relations d'ordre quelconque dans les cas analogues à ceux des nos 9 et 10.